COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Especialização em Educação Matemática

Raphael Martins Gomes

UMA PROPOSTA PARA ABORDAR SISTEMAS DE NUMERAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL:
A experimentação antes da formalização do algoritmo

Rio de Janeiro

2022

Raphael Martins Gomes

UMA PROPOSTA PARA ABORDAR SISTEMAS DE NUMERAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL:
A experimentação antes da formalização do algoritmo

Monografia de Especialização apresentada ao Programa de Especialização em Educação Matemática, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins

Rio de Janeiro
2022

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

G633 Gomes, Raphael Martins

Uma proposta para abordar sistemas de numeração no ensino fundamental: a experimentação antes da formalização do algoritmo / Raphael Martins Gomes. - Rio de Janeiro, 2022.

65 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Numeração. 3. Semiótica. I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Colégio Pedro II. III Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB-7: 5692.

Raphael Martins Gomes

UMA PROPOSTA PARA ABORDAR SISTEMAS DE NUMERAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL: A experimentação antes da formalização do algoritmo

Monografia de Especialização apresentada ao Programa de Especialização em Educação Matemática, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Aprovado em: 07/05/2022.

Banca Examinadora:

____
Prof. Dr. Sc. Daniel Felipe Neves Martins (Orientador)
PPGEDMAT - CP II

____
Prof. Dr. Sc. Ivail Muniz Junior
PROFMAT - CP II (Membro interno)

____
Prof. Dr. Sc. Diego de Souza Nicodemos
PROFMAT - CP II (Membro externo)

Rio de Janeiro
2022

Ao meu pai Denis e à minha mãe Valéria.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais por acreditarem que a educação seria o elemento transformador da minha vida e por acreditarem no meu potencial tentando tornar o ambiente familiar propício para meus estudos.

À minha esposa Jéssycka, pela compreensão e apoio durante o período de estudos. Trocar os poucos dias disponíveis para lazer de um casal recém-casado para uma maratona de estudos não foi uma decisão simples, porém sempre tive seu incentivo e acolhimento.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática do Colégio Pedro II, em especial ao Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins, por esta orientação, pelas aulas da disciplina Tendências em Educação Matemática e por toda parceria na produção de textos, nas discussões a respeito da prática do professor e no incentivo à formação continuada. Obrigado pelo tempo e generosidade dedicados a mim e aos meus colegas.

Aos professores que completam a banca, Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos e Prof. Dr. Ivail Muniz Júnior, por aceitarem contribuir com este trabalho com preciosa avaliação que caracteriza suas práticas. Agradeço também pela contribuição de ambos na minha formação, seja no programa de pós-graduação ou na educação básica.

Se não amo o mundo, se não amo a vida, se não amo os homens, não me é possível o diálogo.

Paulo Freire

RESUMO

GOMES, Raphael Martins. **Uma proposta para abordar sistemas de numeração no ensino fundamental:** a experimentação antes da formalização do algoritmo. 2022. 64f.. Monografia (Especialização) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Especialização em Educação Matemática, Rio de Janeiro, 2020.

Este trabalho consiste em buscar uma alternativa para que crianças dos anos finais do Ensino Fundamental I e séries iniciais do Ensino Fundamental II desenvolvam o conceito de sistemas de numeração na base 10 e em bases diferentes de 10, sem necessariamente decorar o algoritmo das divisões sucessivas. De caráter qualitativo e bibliográfico, a pesquisa analisa brevemente os diversos sistemas de numeração entre alguns povos da antiguidade para mostrar como se desenvolve, nos diferentes grupos sociais, a ideia de contagem. A seguir, é apresentado a sistematização do sistema de numeração decimal a partir da ideia de formação de grupos com 10 unidades. Esta ideia é aplicada para outros sistemas de numeração com técnicas de desenvolvimento do tema baseado nas representações semióticas de Raymond Duval. A pesquisa aponta sugestões para o desenvolvendo do assunto em aulas de matemática do ensino fundamental, encorajando professores a utilizarem somente o algoritmo depois de explorar experimentos que envolvam agrupamentos. O autor apresenta como culminância, um jogo de tabuleiro, aliado de estratégias advindas da metodologia storytelling, onde as crianças podem jogar, apresentar suas estratégias de contagem e mostrar os conhecimentos construídos durante as aulas em grupo.

Palavras-chave: Sistemas de numeração. Pensamento matemático. Representação semiótica.

ABSTRACT

CAROLINO, Bruno Melgaço. **Communication in Mathematics classes in the Early Years**: A proposal for humanistic practice of curriculum development. 2020. 87p..Monography (Specialization) –Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Programa de Especialização em Educação Matemática, Rio de Janeiro, 2018.

This work consists of looking for an alternative for children in the final years of Elementary School and early grades of Middle School to developed the concept of numbering systems in base 10 and in bases other than 10 without memorizing the algorithm of the successive divisions. With a qualitative and bibliographic character, the research analyzes the different numbering systems among some ancient peoples to show how the idea of counting was developed in different social groups. Next, the systematization of the decimal numbering system is presented based on the idea of forming groups with 10 units. This idea is applied to other numbering systems with theme development techniques based on the Semiotic Reeesentation of Raymond Duval. The research points out suggestions for the development of the subject in Elementary and Middle School mathematics classes, encouraging teachers to only use the algorithm after exploring experiments involving clusters. The author presents, as a culmination, a board game allied with strategies from the storytelling methodology, where children can play, present their counting strategies and show the knowledge built during group classes.

Keywords: Numbering sistem. Mathmatical thoughts. Semiotic representation.

LISTA DE SIGLAS

BNCC Base Nacional Comum Curricular

TRRS Teoria do Registro de Representação Semiótica

IREM Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (Institut de Récherches en Éducation Mathématiques)

QVL Quadro valor de lugar

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A proposta deste trabalho surgiu a partir de um seminário ministrado em uma das primeiras aulas do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática do Colégio Pedro II, na qual realizou-se uma abordagem de sistemas de numeração em bases não decimais. A aula tocava em um assunto caro ao orientador e ao orientando desta proposta: o distanciamento de um ensino de matemática focado somente no algoritmo e em processos que favorecem a memorização, sem uma explicação prévia e sem colocar o aluno no centro do processo.

A partir desse primeiro contato com o assunto, surgiu uma proposta de atividade em forma de jogo de tabuleiro que visa conduzir o aluno ao desenvolvimento do pensamento matemático necessário para a resolução de problemas de conversão entre diferentes bases de numeração. A proposta inicial e toda discussão gerada a partir dela foi documentada e apresentada em um artigo intitulado "Sistema-numeração: uma proposta de jogo de tabuleiro para consolidação da escrita de números naturais em diferentes bases"[1], apresentado no XIV Encontro Paulista de Educação Matemática.

Neste trabalho, foi adotada uma abordagem mais completa do assunto sobre um novo referencial teórico. O texto está dividido em 6 capítulos, entre eles a presente introdução e as considerações finais.

No capítulo 2 encontra-se uma explanação a respeito da Teoria de Representação Semiótica do filósofo e psicólogo francês Raymond Duval. Este referencial teórico conduzirá todo trabalho e suas propostas de abordagem para o ensino de sistemas de numeração não decimais. Por ser um trabalho de conclusão de um curso de especialização, optou-se por centrar esforços sobre uma única referência bibliográfica a fim de melhor explorar todos os conceitos que esta teoria traz para o tema desta pesquisa.

O capítulo 3 contém uma abordagem teórica do conteúdo que influenciou significativamente a proposta da intervenção elaborada neste trabalho. Tal proposta é efetuar a condução do ensino de números naturais em bases não decimais, sem fazer o uso tradicional do algoritmo de divisões sucessivas. Opta-se pelo uso fortemente marcado da língua materna e pictografias, que vão ao encontro direto do referencial teórico que sustenta o trabalho.

[1] Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1EeTFJIySPBODpZoYDH1pOC07iyYuGu9X/view.

No capítulo 4 é apresentado o produto educacional gerado durante o curso: uma proposta de jogo de tabuleiro que associa o ensino dos sistemas de numeração não decimais a uma história criativa que busca motivar o aluno a construir suas próprias estratégias na condução do assunto.

O capítulo 5 relata as dificuldades de aplicação da proposta no cenário pandêmico, bem como apresenta pequenos resultados de uma abordagem inicial do “Sistema-numeração”[2]. Como a abordagem não foi realizada na totalidade de sua proposta, o texto do capítulo objetiva um diálogo com o professor que ensina matemática apresentando alguns resultados esperados bem como novas reflexões propostas pelos estudantes.

Nas considerações finais são realizadas reflexões sobre a formação do professor oriundo dos cursos de Pedagogia que em geral possuem uma formação delicada no tocante ao desenvolvimento curricular da matemática e a respeito das dificuldades que o licenciado em matemática encontra ao ter que trabalhar com os alunos os sistemas de numeração diferentes da base 10 sem lançar mão abusiva do processo algorítmico e sem refletir sobre ele. Algumas sugestões para futuras pesquisa sobre o assunto em momentos futuros são deixadas pelo autor em forma de reflexões ou mesmo de provocações ao professor-leitor deste trabalho.

1.1 Objetivo

1.1.1 Objetivo geral

- Propor uma atividade que supere elementos de mecanização no ensino da Matemática, sobretudo no ensino de bases de numeração, convidando professores que atuam no Ensino Fundamental a desenvolver uma prática que contextualize na própria matemática as ideias e os conceitos matemáticos.

1.1.2 Objetivos específicos

- Desconstruir práticas hegemônicas tradicionais em sala de aula de matemática.
- Compreender o conceito de sistema de numeração como uma forma de contagem por agrupamento.
- Associar a língua materna à escrita matemática correlacionando operações e expressões aritméticas às ações de formar grupos.
- Associar elementos pictográficos a quantidades.

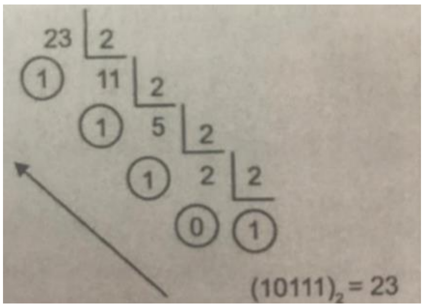
[2] Nome dado pelo autor ao jogo de tabuleiro.

- Escrever quantidades usando algarismos indo-arábicos em sistemas de numeração que agrupam as quantidades em grupos diferentes de 10.
- Associar o lúdico às linguagens maternas e matemática.

1.2 Justificativa

A principal demanda que culmina neste trabalho de conclusão de curso é constatar através da análise de materiais didáticos de cursos livres preparatórios para escolas militares, livros didáticos das duas séries finais do Ensino Fundamental e livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental II que os assuntos sistemas de numeração e mudança de base de sistemas de numeração são sempre apresentados de uma maneira tradicional fazendo com que a criança memorize e mecanize o processo algorítmico sem saber o que cada etapa do processo representa.

Figura 1: Algoritmo das divisões sucessivas para mudança de base



Fonte: Adaptado de https://brainly.com.br/tarefa/20783193. Acesso em 20/04/2022

O texto propõe ao professor uma contextualização do assunto lançando mão da ludicidade antes da sua formalização abstrata.

2 SOBRE O REFERENCIAL TEÓRICO QUE SUSTENTA A PESQUISA

Este capítulo trata do referencial teórico que o produto final deste trabalho de conclusão de curso encontra sustentação. Com base na Teoria dos Registros das Representações semióticas e de uma metodologia ativa, a principal ideia contida nos estudos de Raymond Duval será aqui discutida e servirá de ferramenta para o desenvolvimento didático das questões matemáticas que envolvem o ensino e a aprendizagem dos sistemas de numeração.

2.1 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval

Raymond Duval é um filósofo e psicólogo francês que se notabilizou pela criação da Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS). Entre 1970 e 1995 foi pesquisador do Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM), da cidade de Estrasburgo, França. No IREM acompanhou a reforma da Matemática Moderna, baseada no referencial teórico de Piaget e realizou uma grande quantidade de estudos na área de psicologia cognitiva.

Figura 2: Raymond Duval – autor da TRRS

Fonte: https://cintiarosa.paginas.ufsc.br/files/2015/03/Representação-semiótica-2015_03_09.pdf

Em sua obra, Duval chama atenção para um caráter cognitivo e epistemológico específico da matemática. Os conhecimentos advindos da matemática não são descobertos ou explicados como outros conhecimentos científicos, tais como a física, a química, a astronomia, a geologia, etc. Segundo o autor, dois aspectos importantes precisam ser considerados nessa diferenciação entre o conhecimento matemático e outros conhecimentos científicos.

Primeiro, a matemática não é percebida de forma direta – por meio da observação empírica, por exemplo – ou de forma instrumental – utilizando telescópios, microscópios, etc. Não é possível perceber o número, o ponto, a reta, as relações geométricas, as funções, ou seja, os objetos matemáticos sem fazer o uso de uma representação semiótica. Estas representações podem ser simples como a designação dos polígonos ou complexa como o uso dos símbolos na construção de sistemas de numeração e suas operações aritméticas.

É importante ressaltar que não se pode confundir a representação semiótica de um objeto matemático com o objeto em si. Um quadrado não é a figura de um quadrado impressa em um livro e sim uma figura geométrica poligonal carregada de propriedades como: ser um quadrilátero, possuir ângulos congruentes e lados congruentes.

A discussão à cerca da separação das representações semióticas de objetos que não se tem acesso se configura, segundo (DUVAL, 1993), o **paradoxo cognitivo da matemática**. Para ele, a possibilidade de se contornar esse paradoxo está justamente na oportunidade de se explorar várias representações semióticas para um mesmo objeto.

Em segundo lugar, o ensino da matemática se diferencia das demais disciplinas ao se distanciar das observações empíricas e, consequentemente, das imprecisões causadas por aproximações excessivas e dos conflitos gerados por contraexemplos. Sendo assim, os problemas matemáticos devem ser construídos, resolvidos ou provados sem fazer uso de empiria. A geometria, por exemplo, carrega junto de seus objetos possibilidades de análises equivocadas e conclusões imprecisas quando apenas a representação semiótica gráfica desse objeto é levada em conta. A construção gráfica de um retângulo cuja diferença entre as medidas do comprimento e largura seja de 0,1 mm ou menos, pode induzir o estudante a concluir que aquele retângulo é um quadrado. Da mesma forma, diferenciar um ângulo reto de um ângulo de 89° sem os devidos instrumentos pode ser uma tarefa frustrante.

Duval defende uma separação entre duas faces da matemática: a **face exposta** e a **face oculta**. Na **face exposta** estão os objetos matemáticos, como números, operações, figuras geométricas, polinômios, função exponencial, etc; suas propriedades, algoritmos e demonstrações. Caracterizada dessa maneira, a face exposta contém elementos cujas representações são encontradas nos livros, cadernos e trabalhos em geral dos estudantes. Por outro lado, na **face oculta** estão as questões cognitivas e epistemológicas associadas ao entendimento ou não da matemática. A face oculta, e por isto ela é assim denominada, se caracteriza por uma manifestação indireta que gera bloqueios nos estudantes ou ainda que motiva os erros recorrentes apresentado por eles, seja na resolução de problemas simples ou mais elaborados. Buscar entender a face oculta é, portanto, procurar respostas para movimentos errôneos que se repetem em sala de aula ao solicitar a um estudante a aplicação de um teorema, uma demonstração geométrica, a construção de um gráfico de função ou a modelagem de um problema por meio de uma equação.

A incapacidade de relacionar duas maneiras distintas de representar um objeto matemático, ou nos termos da teoria, entre dois registros de representação semióticas distintas é um fator que passa, muitas vezes, desapercebido, considerando inclusive que o aluno não compreendeu determinado conceito. Em sua teoria, Duval enfatiza que é insuficiente a simples apresentação de representações semióticas distintas para determinado objeto, é necessário que os alunos saibam identificá-las e aprofundar novas abordagens para cada uma delas individualmente bem como as transições entre os diferentes registros.

> A teoria dos registros de representação semiótica diz respeito à face oculta da atividade matemática. Ela visa à modelagem do funcionamento semio-cognitivo que está subjacente ao pensamento matemático. Sem o desenvolvimento deste não podemos nem compreender e nem conduzir uma atividade matemática. (FREITAS e REZENDE, 2013, p.18)

Ao citar representações de objetos, Duval refere-se ao uso de signos combinados com regras bem definidas que caracterizam determinado objeto. **Signos** são "unidades elementares de sentido, que são apenas caracteres para codificar: letras, siglas, algarismos, às vezes palavras-chave, ou os gestos de mão" (DUVAL, 2011, p. 38). Ao associar as letras formando palavras, ou organizar os algarismos montando números e realizar operações com eles, ou ainda ao escrever equações utilizando simbologia matemática tradicional, entramos no campo das representações.

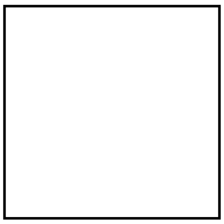
As representações estão associadas a epistemologia do objeto. Duval destaca a oposição epistemológica entre determinado objeto e suas representações. Ele afirma que o conhecimento nasce a partir da não utilização de uma representação no lugar do objeto em si. Uma das etapas importantes para esta distinção entre objeto e representação está na percepção de que todo objeto possui várias representações. É nessa pluralidade de representações que Duval apresenta sua teoria. Contudo, Duval ainda trazia dois grandes questionamentos:

> Duas questões interligadas se impuseram como primordiais. Primeiramente, será que os alunos reconhecem o que é matematicamente preservado quando se passa de um tipo de representação para outra? Será que os alunos reconhecem, no conteúdo de uma representação, o que é matematicamente pertinente e o que não é? Estas duas perguntas se tornaram necessárias para todas as utilizações da língua natural nos enunciados de problemas, para a utilização de figuras em geometria, para os gráficos cartesianos, para os diagramas e tabelas utilizadas para organizar dados, etc. (FREITAS e REZENDE, 2013, p.6)

Dito isso, podemos exemplificar utilizando uma definição simples como o que é um quadrado.

I. **Quadrado** é uma figura geométrica plana poligonal formada por quatro lados congruentes e por quatro ângulos retos.

II. Considere o quadrilátero ABCD na imagem a seguir:



Se $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$ e $A\hat{B}C \equiv B\hat{C}D \equiv C\hat{D}A \equiv D\hat{A}B \Rightarrow ABCD$ é **quadrado.**

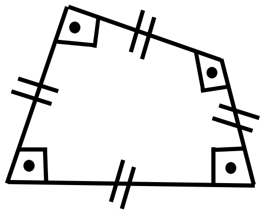
As duas representações são distintas, a definição I faz uso exclusivo da língua materna, enquanto a definição 2 lança mão de uma imagem, de simbologia matemática tradicional e de sinais vindos da lógica de primeira ordem (se... então). É importante questionar ao leitor se, isoladamente, cada uma das definições são suficientes para que o aluno que está conhecendo o assunto pela primeira vez reconheça o quadrado – considerando os conceitos anteriores suficientemente pré-estabelecidos (figura geométrica plana, poligonal, quadrilátero). Também é importante refletir se quando apresentadas juntas, porém sem relacioná-las, as duas definições atingirão a totalidade dos alunos ou se gerarão novos questionamentos.

Duval acredita que a força da TRRS está justamente no aluno conseguir entender representações distintas, perceber as semelhanças e diferenças nas suas abordagens, identificar a característica de cada uma delas, além de conseguir realizar procedimentos e conclusões dentro de cada uma delas e principalmente transitar entre diferentes representações, não apenas as duas apresentadas por meio de terceiros, mas como aquelas geradas no processo de autocognição, ou seja, nas suas próprias mentes. Duval (1993, p. 39) afirma que o "funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros de representação semiótica".

Se as representações sofrem transformações simultaneamente de acordo como sistema trabalhado, o mesmo não acontece com o objeto. Duval (2011, p. 18) afirma que " o objeto aparece como invariante do conjunto de variações possíveis de suas representações". Ou seja, de toda representação apresentada para o objeto quadrado, ele continua sendo um quadrado independente do ponto de vista ou da forma que é representado. **O objeto quadrado é**

carregado de propriedades que o caracterizam e suas representações não interferem em qualquer uma dessas propriedades.

Figura 3: Quadrado



Fonte: O autor.

Uma das contribuições fundamentais do trabalho com diferentes registros de representações semióticas está no desenvolvimento das representações mentais. Entender o que acontece na cabeça de um aluno ao lidar com determinado conteúdo é uma questão importante na construção do aluno enquanto agente da aprendizagem.

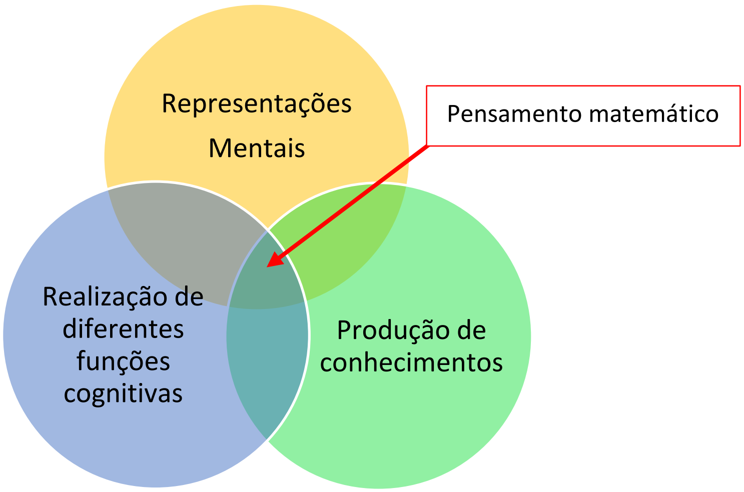
Professores em diferentes contextos são capazes de relatar erros semelhantes em seus alunos, seja numa mesma sala de aula, na mesma escola, na mesma cidade ou de forma global. Ao longo dos anos de prática, professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental costumam encontrar uma quantidade numerosa de alunos que equivocadamente afirmam que a multiplicação $x \cdot x$ tem como resultado $2x$, ou que o quadrado de 3 é 6. Para Duval é importante não só corrigir os equívocos, como também buscar refletir a respeito dos roteiros mentais realizados por esses alunos. Ao pedir para o aluno explicar, utilizando a língua materna, um esquema ou operação matemática como chegou aquele resultado, o professor está buscando atingir um ponto importante de relação entre a representação mental e uma das representações semióticas do problema.

Se as representações mentais se referem a face oculta da matemática acima explicada, as representações semióticas têm importante função na realização de diferentes funções cognitivas. Pensar em como resolver muitas vezes não será suficiente para a finalização do problema, sendo assim, as representações semióticas cumprem o papel de tentar de alguma forma organizar o pensamento interiorizado e realizar as transformações necessárias para a resolução da questão proposta. Exemplificando, a resolução de uma expressão com números racionais, repleta de sinais de associatividade, com números inteiros, decimais e fracionários surge como um desafio para o estudante que deseja fazê-la utilizando somente de representações mentais. As representações semióticas se fazem necessárias.

O resultado esperado com uma abordagem de sucesso das múltiplas possibilidades de representação semiótica infere na produção de conhecimentos. A TRRS pode ser aplicada a diversos campos de estudo, porém as matemáticas compõem uma ciência que funciona como exemplo pela pluralidade de óticas que se pode conduzir a abordagem de determinado objeto.

Um conceito axiomático como a reta pode ser estudado sobre as óticas da geometria plana, da geometria espacial e da geometria analítica. Um aluno capaz de absorver os diferentes tipos de representações semióticas e transitar entre essas elas chega ao que os pesquisadores da área chamam de pensamento matemático. Sendo assim, ao desenvolver o pensamento, o aluno é capaz de produzir conhecimento matemático, obtendo sucesso na aprendizagem matemática.

Figura 4: Contribuições das representações semióticas



Fonte: O autor.

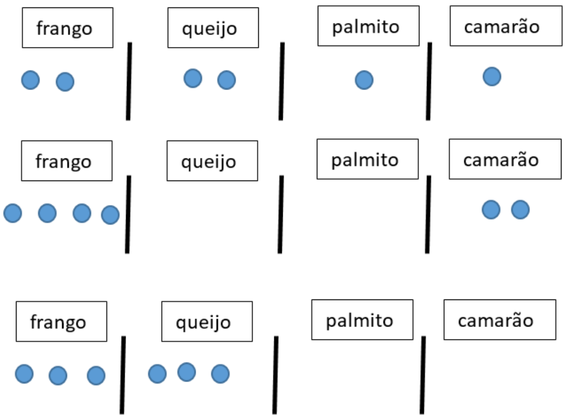
A partir deste ponto do texto, trabalharemos a TRRS trazendo exemplificações dentro da matemática em diferentes níveis para a clarificação das informações acima apresentadas. Antes, é preciso destacar três ações fundamentais para a abordagem utilizando de representações semióticas: formação, tratamento e conversão.

A **formação** refere-se ao conjunto de características e regras que regem determinado assunto dentro da matemática. Por sua vez, o **tratamento** é o conjunto de transformações realizadas dentro de um mesmo registro de representação semiótica. Por exemplo, realiza-se uma transformação ao resolver uma expressão numérica costuma-se dividir o processo em etapas, eliminar os sinais de associatividade e reduzir a expressão a cada linha para melhor organização dos cálculos. Por fim, a **conversão** se dá ao realizar uma mudança entre dois registros distintos. A seguir, alguns exemplos de como a TRRS pode ser aplicada.

Problema I. Pedro deseja comprar 6 empadas em uma padaria que possui 4 sabores diferentes: frango, queijo, palmito e requeijão. De quantas maneiras distintas Pedro pode escolher as 6 empadas?

O problema acima é um exercício de Análise Combinatória, mais especificamente sobre combinação completa. O seu enunciado caracteriza por um registro de representação semiótica, visto que estamos utilizando a linguagem materna. Tradicionalmente, os exercícios do tipo são resolvidos por professores e em livros didáticos utilizando elementos gráficos como traços e pontos. Acompanhe a resolução a seguir.

Figura 5: Possibilidades de escolhas das 6 empadas.



Fonte: O autor.

As diferentes possibilidades de organização são dadas nas distintas formas de posicionar as 6 bolinhas e os 3 traços. Vamos representar as bolinhas pela letra B e os traços pela letra T. As possibilidades listadas na figura 5 são:

BBPBBPBPB BBBBPPPBB BBBPBBBPP

Sendo assim, as distintas propostas de compra das 6 empadas quando representadas utilizando letras nos mostra anagramas de 9 letras, sendo 3 letras T e 6 letras B. Portanto, a totalidade de possibilidades de compra das 6 empadas por Pedro pode ser calculada pelo número de permutações de 9 objetos, com repetição de 6 deles e repetição de outros três.

$$P_9^{(6,3)} = \frac{9!}{6! \cdot 3!}$$

$$P_9^{(6,3)} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

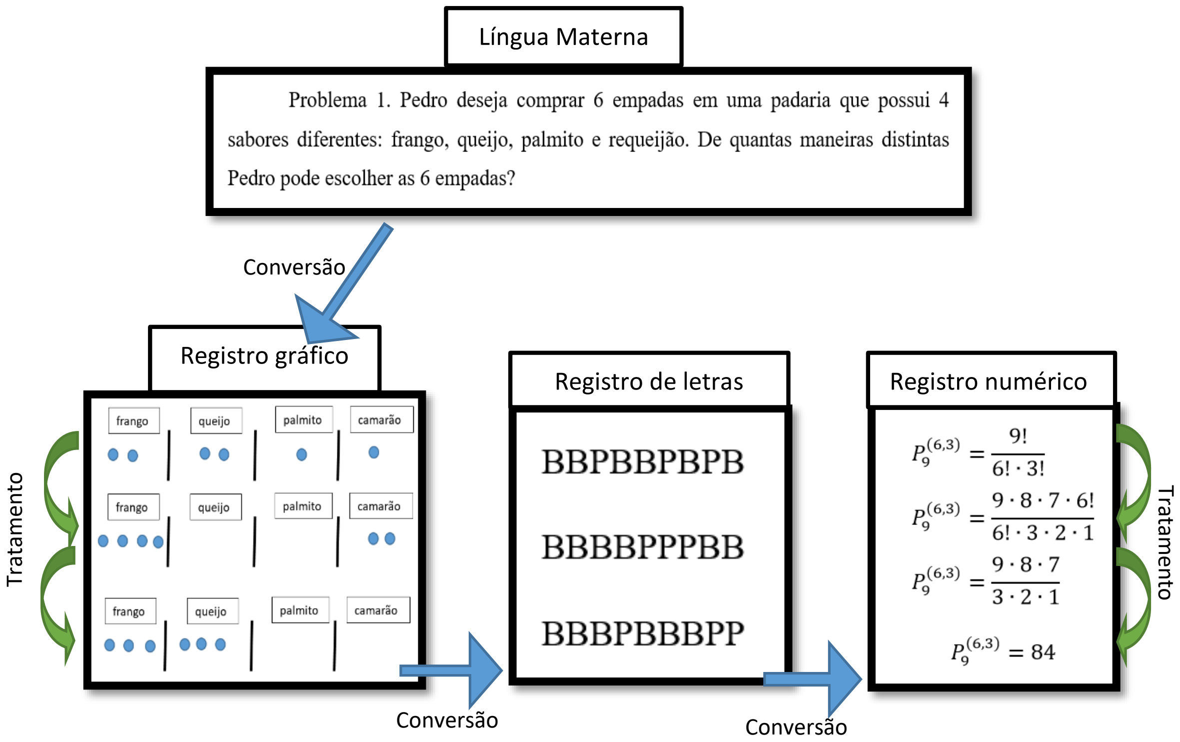
$$P_9^{(6,3)} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$P_9^{(6,3)} = 84$$

Pedro pode escolher as 6 empadas de 84 formas distintas.

Considerando as três etapas apresentadas acima, o esquema a seguir mostra os tratamentos e conversões realizadas durante a resolução do problema.

Figura 6: As etapas da TRRS aplicadas a um problema de análise combinatória



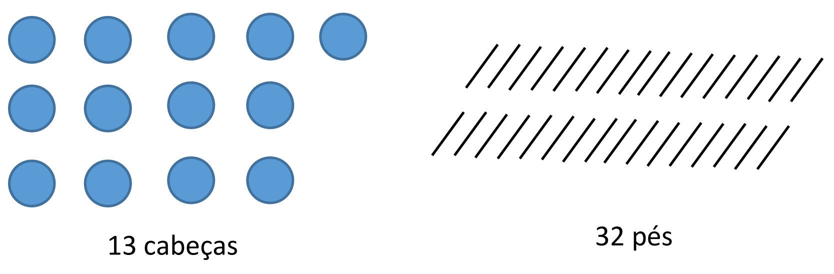
Fonte: O autor.

Os problemas que envolvem as combinações completas, como o problema I, permitem também uma representação dentro do registro algébrico. Descobrir de quantas formas Pedro pode escolher 6 empadas com 4 sabores distintos é descobrir o número de soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z + t = 6$.

A teoria pode ser aplicada em diferentes níveis de ensino de matemática, desde a Educação Infantil até o Ensino Superior. A transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico costuma ser um ponto de dificuldade no desenvolvimento da aprendizagem matemática. O problema a seguir gerou uma discussão que teve como consequência a elaboração do trabalho de conclusão de curso da graduação do autor. Estudantes do 5º ano, utilizando desenhos e operações aritméticas básicas resolveram o tradicional problema com índice de acerto maior do que alunos do 8º ano que já estudavam os primeiros passos da álgebra abstrata.

Problema II. Uma fazenda possui vacas e galinhas, totalizando 13 cabeças e 32 pés. Quantas são as vacas e quantas são as galinhas dessa fazenda?

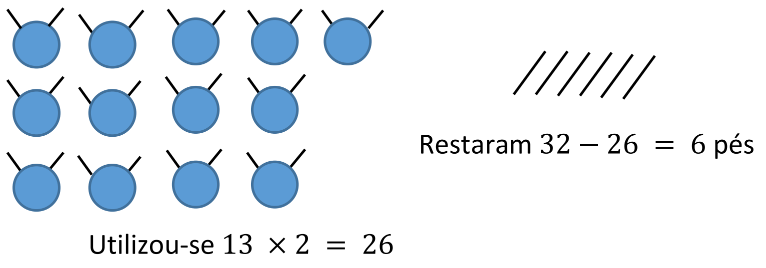
Figura 7: Registro de representação gráfica para o Problema II



Fonte: O autor.

Considerando que todos os animais possuem pelo menos dois pés temos:

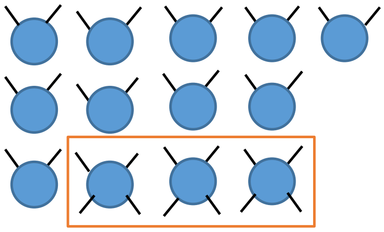
Figura 8: Tratamento no registro gráfico para o Problema II



Fonte: O autor.

Distribuindo os 6 pés restantes, obtemos:

Figura 9: Resposta no problema II utilizando registro gráfico



São 10 galinhas e 3 vacas

Fonte: O autor.

A solução apresentada acima mostra o tratamento realizado a partir de uma interpretação utilizando um registro gráfico para o problema. Porém, se faz necessário refletir novas estratégias para resolver o problema, principalmente quando há uma quantidade maior de animais envolvida, impossibilitando o desenho. Espera-se que o estudante, ao conseguir absorver completamente a dinâmica da representação gráfica, seja capaz de construir o raciocínio lógico adequado para fazer uma conversão para o registro numérico.

Registro numérico:

$$13 \times 2 = 26$$
$$32 - 26 = 6$$
$$6 \div 2 = 3$$
$$13 - 3 = 10$$

Resposta: 10 galinhas e 3 vacas.

Repare que, isoladamente, as operações realizadas só fazem sentido para quem conhece o problema proposto. Porém, junto do registro numérico, o aluno realiza desenhos mentais que conduzem essas operações ao resultado do problema. Imaginar como seria o desenho pode ajudá-lo a resolver todo o problema utilizando apenas recursos aritméticos. Além disso, em toda forma de registro, a língua materna contribui com a organização do pensamento, de forma mental ou semiótica. A língua materna é instrumento importante nas funções de tratamento, inclusive na comunicação professor-aluno (DUVAL, 2011).

Após ser explorado em turmas de 5º ano, o problema volta a aparecer para turmas de 8º ano na consolidação da aprendizagem de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, agora destacando a importância da modelagem matemática.

Traduzir o problema utilizando linguagem algébrica pode ser desafiador para parte dos estudantes.

Propõe-se uma reflexão ao leitor: “Ao professor retomar a abordagem anterior utilizando desenhos e aritmética simples, pode esta estratégia contribuir para que o aluno modele este problema ou outros mais complexos de maneira mais significativa?”

A álgebra na categoria de generalizadora da aritmética pode ser conduzida de forma separada da aritmética ou as duas podem ser conduzidas concomitantemente durante todo o currículo de matemática?

Registro algébrico:

Seja x o número de galinhas e y o número de vacas temos:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 2x + 4y = 32 \end{cases}$$

$$x = 13 - y$$

$$2(13 - y) + 4y = 32$$

$$26 - 2y + 4y = 32$$

$$2y = 32 - 26$$

$$2y = 6$$

$$y = 6 \div 2$$

$$y = 3$$

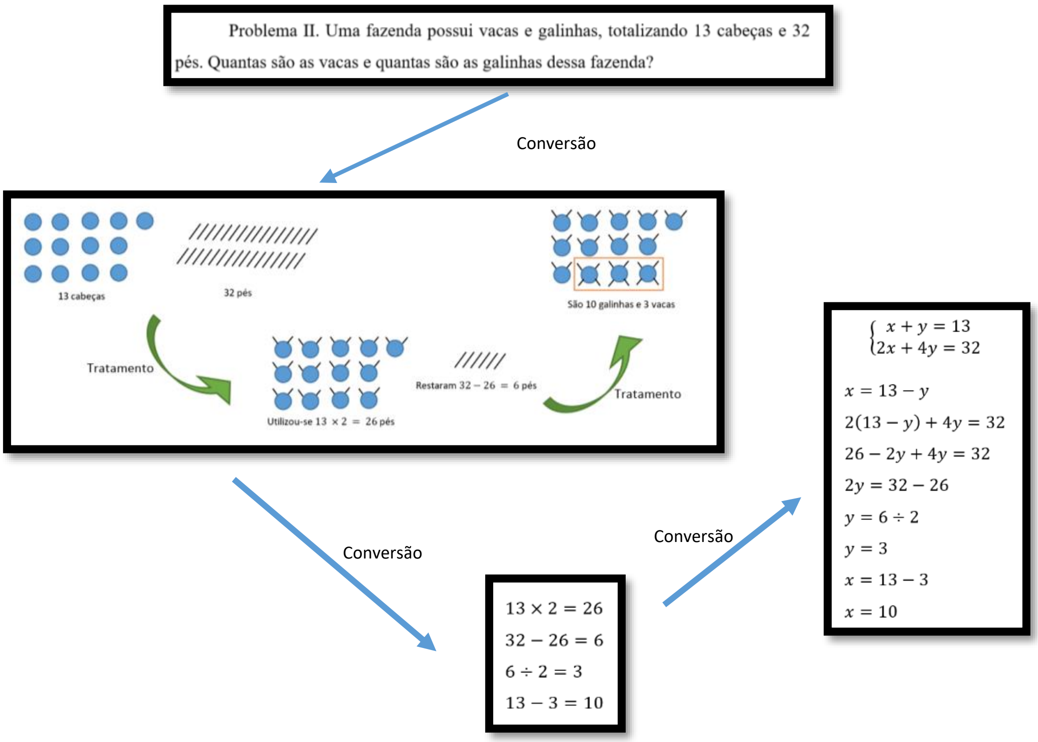
$$x = 13 - 3$$

$$x = 10$$

Repare como as operações realizadas no registro numérico $(2 \times 13;\ 32 - 26;\ 6 \div 2;\ 13 - 3)$ se repetem no registro algébrico distanciando o segundo da abstração esperada na condução da álgebra.

Um aluno que faz uma ponte entre os três registros, desenvolve o pensamento matemático na perspectiva de entender, mesmo usando x, y e números, que cada etapa (linha) da equação se refere a uma conclusão a respeito dos números obtidos. A imagem a seguir visa representar os registros trabalhados de forma esquemática.

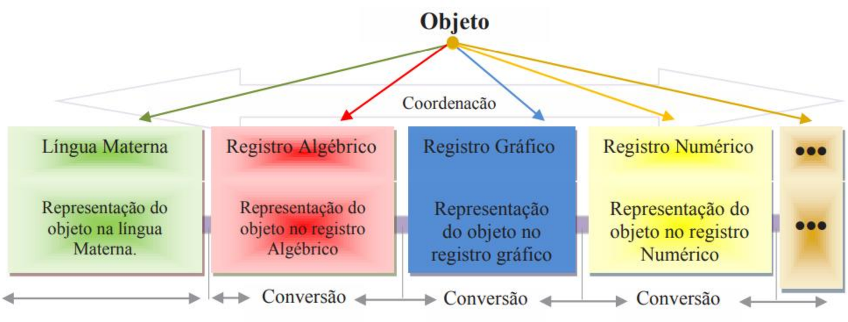
Figura 10: Conversão entre diferentes registros na resolução do problema II.



Fonte: O autor.

De acordo com Henriques e Almouloud (2016), encontramos na TRRS, a definição de coordenação, que é uma condição fundamental para a eficácia de toda aprendizagem. Coordenação é pois, definida como a capacidade de um indivíduo reconhecer a representação de um mesmo objeto em dois ou mais registros distintos.

Figura 11: Esquema de coordenação do registros de representação semiótica



Fonte: Heriques, Almouloud, 2016

Do ponto de vista filosófico, a TRRS é uma teoria complexa que poderia ser assunto sozinha de um trabalho como este. O objetivo nesta breve explicação está em justificar e conduzir a abordagem de sistemas de numeração que será realizada nos próximos capítulos. A relação entre registros que utilizem elementos pictóricos e registros numéricos é uma categoria central na construção desta proposta.

3 SISTEMAS DE NUMERAÇÃO NÃO DECIMAIS – CONSTRUÇÃO DE UMA ABORDAGEM NÃO ALGORITMIZADA

Visando a construção da presente proposta de trabalho, buscou-se lançar o olhar a respeito da maneira com que os sistemas de numeração de bases não decimais eram apresentados. As pesquisas aconteceram a partir de diálogos com professores que ensinam matemática e que atuam na educação básica, a partir de análise dos principais livros didáticos utilizados nas escolas públicas e privadas do Rio de Janeiro e na procura por vídeo-aulas gratuitas e de fácil acesso presentes na internet.

Um ponto em comum na maioria das abordagens encontradas foi o uso, sem explicação prévia satisfatória, do algoritmo das divisões sucessivas para a conversão entre a base 10 e as demais bases. Surge-se então dois questionamentos importantes: **como ensinar as conversões entre as bases de numeração e como o ensino desses sistemas de numeração distintos podem auxiliar no desenvolvimento matemático do aluno?**

Para responder a primeira pergunta, sugere-se um fator primordial: é necessário entender o que é contar e não apenas saber realizar contagem. Além disso, propomos uma abordagem que consiga relacionar a língua materna dos estudantes com a simbologia matemática. Contar, no sistema de numeração decimal, é determinar a quantidade de grupos de 10 elementos e ainda sermos capazes de registrar a quantidade de elementos que não foram agrupados por não formarem os 10 elementos necessários para se formar um novo grupo.

Exemplificando: a quantidade representada pelos algarismos 4 e 5 escritos exatamente nesta ordem 45 indica que nessa contagem fomos capazes de formar 4 grupos de 10 elementos, porém sobraram 5 elementos que não foram agrupados. Da mesma forma, o número 346, representa a formação de 34 grupos de 10 elementos e 6 elementos restantes, ou ainda, 3 grupos de grupos de 10 elementos, 4 grupos de 10 elementos que não se agruparam novamente e 6 elementos restantes. Essa quantidade pode ser representada por meio da expressão:

$$(346)_{10} = 3 \times 10 \times 10 + 4 \times 10 + 6 = 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 6 \times 10^\circ$$

O índice 10 fora dos parênteses indica a quantidade de elementos que forma um grupo. Elementos que não se agruparam ou a não existência de elementos que não se agruparam são representados pelos dígitos 0, 1, 2, 3, 4, ..., 9 no sistema de numeração decimal. Tais dígitos representam os restos da divisão por 10. Assim, $(346)_{10}$ indica 3 grupos de grupos de 10 (3 ×

$10 \times 10 = 3 \times 10^2$), 4 grupos de 10 ($4 \times 10^1$) e uma sobra de 6 elementos que não estão presentes em grupos. A decomposição em ordens deste número no sistema decimal é muito explorada nos anos iniciais. Porém, a falta de conexão entre o significados dos vocábulos centena, dezena ou unidade com a maneira que agrupamos os elementos pode ser interpretado como um dificultador da abstração que é escrever 346 na forma $3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 6 \times 10°$. A ideia pode ser trabalhada com outros exemplos:

$$(1\,241)_{10} = \ 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 1 \times 10°$$

$$(32\,702)_{10} = 3 \times 10^4 + \ 2 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 2 \times 10°$$

Repare a relação existente entre os expoentes das potências de base 10 e o número de grupos que representam. Por exemplo, o fator que acompanha o 10° indica o número de elementos que não formaram grupamentos, o fator que acompanha o 10^1 indica o número de grupos formados, o fator que acompanha o 10^2 indica o número de grupos de grupos formados, o fator que acompanha o 10^3 indica o número de grupos de grupos de grupos formados, e assim sucessivamente.

É importante chamar a atenção ao uso da língua materna como aliada da simbologia matemática. Espera-se que os alunos consigam fazer o link entre as falas do professor como “grupos de grupos”, bem como a decomposição utilizando de potências de 10 e posteriormente aos termos conhecidos para nomear as ordens, como por exemplo, unidade, dezena e centena.

Falar sobre o sistema de numeração decimal que está intrínseco no dia a dia dos estudantes é uma importante oportunidade para diferenciá-lo de outros sistemas de numeração que nortearam o desenvolvimento da matemática na História da Humanidade.

O **sistema de numeração sumério**, por exemplo, é formado por 2 símbolos agrupados de 60 maneiras diferentes sendo, portanto, um sistema de numeração sexagesimal (base 60). O fator que dificulta a compreensão das quantidades no sistema de numeração sumério é a ausência de um símbolo que representa o 0 e símbolos separadores de ordens e classes. Assim, uma cunha (símbolo usado para representar a quantidade 60) pode simbolizar tanto o número 1 ou o número 60 na base 10. Este sinal é repetido para formar os números maiores que 1, até chegar ao 10, representado por um sinal diferente. Em seguida, continuava-se a acrescentar este símbolo ao sinal diferente até chegar a 20. Esse processo aditivo prosseguia apenas até o número 60 quando se voltava a empregar o primeiro sinal, o mesmo usado para o número 1. Dessa maneira, os sumérios representavam qualquer número usando apenas dois sinais. É um sistema posicional, usando uma combinação de base 60 com a base 10, pois os sinais até 59 mudam de 10 em 10. O sistema sumério emprega um sistema aditivo para formar combinações distintas de símbolos que representam os números de 1 a 59.

Por sua vez, no **sistema de numeração egípcio** existem 7 símbolos que representam potências de 10, além disso compartilha com os números romanos a característica de não serem sistemas de numeração posicionais. Os sistemas de numeração egípcio e romano também não possuem uma representação para ausência de quantidade, ou seja, não possuem símbolo para o zero, característica adicionada recentemente ao sistema de numeração chinês (para as operações, os chineses costumam utilizar os algarismos indo-arábicos). O sistema de numeração egípcio já estava desenvolvido por volta do ano 3000 a.C. O número 1 era representado por uma barra vertical e os números consecutivos de 2 a 9 eram obtidos pela soma de um número correspondente de barras. De acordo com Roque (2012), os números desse sistema eram múltiplos de 10 e por essa razão é considerado um sistema decimal. Para os egípcios o número 10 é uma alça, o número 100 uma espiral, o número 1000 a flor de lótus, 10 000 um dedo, 100 000 um sapo e 1 000 000 um deus com as mãos levantadas. Para escrever e ler tais números há de se perceber que os números maiores vêm na frente dos menores. E se há mais de uma linha de números, devemos começar de cima. Escrever um número no sistema egípcio significa dispor todos os símbolos de acordo com esta regra e a soma mostrará a quantidade registrada. 2 140 é representado por duas flores de lótus, uma espiral e quatro alças.

O primeiro povo a utilizar uma representação para o zero foram os maias, que elaboraram um sistema posicional composto de três símbolos que eram agrupados de 20 maneiras diferentes, formando, portanto, um sistema vigesimal de numeração.

O quadro a seguir pretende organizar e sintetizar algumas características que aproximam e diferenciam alguns sistemas de numeração ao longo da História.

Quadro 1: Pequeno resumo de alguns sistemas de numeração utilizados pela humanidade

Sistema de Numeração	Base	É posicional?	Representa o zero	Característica
Sumério	60	Sim	Não	Há um espaço para a representação de números maiores que 60
Egípcio	10	Não	Não	Cada símbolo é repetido no máximo 9 vezes
Maia	20	Sim	Sim	Números maiores que 20 são representados na vertical.
Romano	10	Não	Não	Para símbolos repetidos, realizamos a soma, e quando houver um símbolo menor à esquerda, fazemos a subtração.
Chinês	10	Sim	Sim (recente)	Para escrever os números, esse sistema usa o princípio da multiplicação, um símbolo menor seguido de um símbolo maior significa a multiplicação entre eles.

Fonte: O autor.

Dentre os citados no quadro, os sistemas de numeração romano e chinês ainda são utilizados até hoje. Sobre os chineses, é importante reforçar que a representação do zero foi inserida recentemente em seu conjunto de símbolos. Além disso, ao realizar as operações, eles costumam utilizar os algarismos indo-arábicos. Por sua vez, os números romanos seguem presentes nos livros didáticos de matemática, em modelos de relógio e na representação secular, por exemplo. O fato de os alunos já terem certa experiência com esse modelo de número é interessante convidá-los a refletir a respeito dos ganhos de se ter um sistema posicional, seja para representar quantidades ou para realizar operações. Um possível exercício pode ser representar o mesmo número nos dois sistemas diferentes: 1 587 = MDLXXXVII.

De volta ao sistema de numeração decimal indo-arábico, a utilização do algarismo zero tem papel fundamental na compreensão da formação de grupos sem que haja sobra de elementos que não foram agrupados.

Trabalhando com um sistema de numeração posicional, é necessário que todos os “espaços” sejam preenchidos para que a simbologia matemática seja uma afirmação do que foi exemplificado utilizando a língua corrente, bem como funcione de forma autônoma na compreensão do número escrito. Por exemplo, imagine uma determinada quantidade formada por 7 grupos de grupos de 10. A língua materna nos direciona e é clara na representação dessa quantidade, porém ao passar para a simbologia matemática o dígito 7 não se faz suficiente. Portanto, precisamos considerar o dígito 7 para representar a quantidade de grupos formados e os algarismos 0 que complementam as demais casas a fim de posicionar o algarismo 7 no lugar que representa os grupamentos de grupamentos de 10.

Quadro 2: Numeração decimal em forma de agrupamentos

Grupos de grupos de 10	**Grupos de 10**	**Elementos não agrupados**
7	0	0

7 grupos de grupos de 10 = $(700)_{10}$

Fonte: O autor.

Um recurso didático que contribui para as explicações acima, sobretudo quando utilizado com crianças dos anos iniciais do ensino fundamental é o Quadro Valor de Lugar (QVL). Abaixo, um QVL composto pela classe completa das unidades simples e pela classe incompleta da unidade de milhar.

Quadro 3: Quadro valor de lugar

DM	**UM**	**C**	**D**	**U**
			4	5
		1	0	2
	2	4	0	0

Fonte: O autor.

Um exercício sugerido ao professor está na tradução do QVL utilizando a língua materna, conforme apresentado no quadro abaixo. Encoraja-se o professor a utilizar formas diferentes de apresentar essas traduções.

Quadro 4: Tratamento no registro gráfico para o Problema II

$(45)_{10}$	4 grupos de 10 e 5 unidades 4 dezenas e 5 unidades ou 45 unidades
$(102)_{10}$	1 grupo de grupo de 10, nenhum grupo de 10 e 2 unidades 1 centena e duas unidades ou 10 dezenas e 2 unidades
$(2400)_{10}$	2 grupos de grupos de grupos de 10 e 4 grupos de grupos de 10 24 centenas ou 2 unidades de milhar e 4 centenas

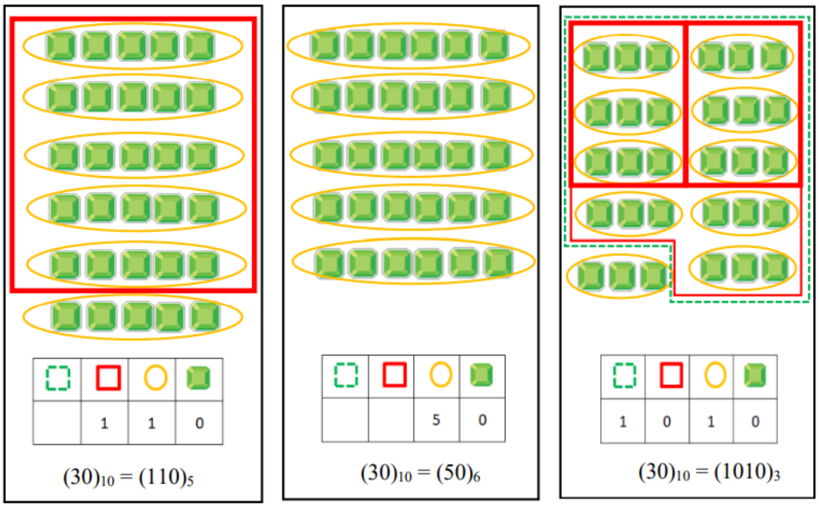
Fonte: O autor.

Apresentadas diferentes possibilidades – as contidas no quadro não são necessariamente únicas – é importante ressaltar o fato de que se para descrever uma quantidade de unidades, dezenas, centenas, etc, foi utilizado um número maior do que 9, isso significa que essa quantidade ainda pode formar grupos maiores. Por exemplo, 26 unidades podem ser representadas como 2 dezenas e 6 unidades.

A partir da consolidação do sistema de numeração decimal, propõe-se a exploração de outros sistemas de numeração. Nos próximos parágrafos, o leitor encontra uma proposta de atividade introdutória para a abordagem de sistemas de numeração não decimais. A atividade leva em consideração o que foi dito anteriormente, ou seja, contar em uma base n é formar grupos de n elementos de mesma natureza.

Considera-se então, que as peças indicadas em verde nas figuras abaixo indicam as unidades de elementos a serem contados. Cada grupo formado, de acordo com a base indicada previamente, será circulado em amarelo. Enquanto cada grupo de grupo formado será destacado com um retângulo vermelho. Por fim, os grupos de grupos de grupos serão indicados pelas linhas pontilhadas em verde.

Figura 12: Exemplo de abordagem para contagem de números naturais em sistemas de numeração não decimais.



Fonte: O autor.

No primeiro quadro, a contagem das 30 unidades se deu na base 5. Sendo assim, contando formando em grupos de 5, em um primeiro momento foi possível formar 6 grupos de 5, sem que houvesse sobra de elementos. A seguir, foi possível formar um grupo de grupo de cinco, sobrando um dos grupos de 5. Por fim, a tabela abaixo ajudou a organizar os elementos formados.

O mesmo acontece para os quadros do meio, onde a contagem foi feita na base 6 e o quadro da direita, onde a contagem foi feita na base 3. Perceba que, além do uso dos desenhos e de um quadro para organizar as informações, também foi feito uso da linguagem matemática clássica, quando relacionamos a quantidade na base decimal e na base ternária, por exemplo.

O uso de cores e formas, bem como o uso da linguagem materna associando as cores à formas, são elementos valiosos na concepção do autor na construção de um ambiente de aprendizagem atrativo, desafiador e calcado na busca pelo interesse e motivação. À simbologia e à teoria da matemática é dada total importância, porém, a proposta está justamente na não exposição antecipada de conceitos e algoritmos que podem mecanizar o processo de aprendizagem do estudante.

Os argumentos acima são evidentemente corroborados pela Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, visto que são utilizados registro em língua materna, registro gráfico bem como registro numérico. O tratamento realizado no registro gráfico bem como a sua conversão para o registro numérico são elementos importantes no desenvolvimento do pensamento matemático necessário a aprendizagem de sistemas de numeração fora da base decimal. Na tentativa de auxiliar na conversão entre os distintos registros, sugerimos ao professor que o uso de cores relacionadas aos seus significados (unidades, grupos, grupos de grupos, etc) seja ampliada também para os registros numéricos.

Espera-se que essa atividade contribua para que o aluno consiga interpretar o processo de contagem, seja na base decimal ou em qualquer outra base, como a formação de grupos de elementos de mesma natureza. Espera-se também que ele desenvolva estratégias para realizar as conversões de maneira eficaz e simples, inclusive com quantidades maiores. Perceber os algarismos utilizados em cada base pode conduzir o estudante a concluir a necessidade de utilizar os algarismos de 0 e 9 no sistema decimal de numeração e consequentemente se questionar se é possível e como é possível escrever em bases maiores do que 10.

Perceba que não foi falado a respeito do usual algoritmo das divisões sucessivas, porém esperamos que os alunos comecem a utilizá-lo assim que concluírem a relação entre:

(I) A interpretação da divisão como a operação que permite formar grupos com quantidades iguais.

(II) A quantidade de grupos formados e aqueles elementos que não formam grupamentos com o quociente e resto da divisão do número de unidades a serem transformadas pelo número pelo qual está se fazendo a contagem, ou seja, a base.

No capítulo 5 são apresentadas algumas estratégias interessantes de alunos que estavam utilizando o algoritmo ou parte dele sem que o professor tenha comentado anteriormente a respeito do mesmo.

Os parágrafos acima apresentaram sugestões de como abordar os sistemas de numeração, porém é necessário debater a respeito dos ganhos que essa proposta pode trazer para o desenvolvimento da criança para com a matemática. Afinal de contas, cada vez mais os currículos focam no sistema decimal de numeração e muitos livros didáticos já optaram por não apresentar numeração em outras bases – exceto por situações de submúltiplos do grau e da hora.

Considerando um recorte local e tomando como referência o subúrbio do Rio de Janeiro, o conteúdo ainda resiste nas escolas que preparam para ingresso em colégios militares. O ingresso em colégios do tipo e a vontade desses estudantes e de seus responsáveis de conseguir uma transformação no rumo social e financeiro de suas vidas, faz com que a busca pelo ingresso na carreira militar seja almejada por uma parcela significativa da população residente nesses locais.

Entretanto, as propostas neste documento apresentadas buscam ir muito além da preparação para concurso. Acredita-se no ensino dos sistemas de numeração não decimais como um agente transformador para o combate a uma matemática mecanizada e baseada em algoritmos. Um aluno capaz de somar em bases não decimais, ao realizar uma operação de adição no sistema decimal não terá dúvidas do tipo: “por que vai um?”. O “pedir emprestado” passa a fazer mais sentido, pois o aluno entende que em alguns casos é necessário desfazer um grupo maior para conseguir realizar a subtração em ordem de grupos menores.

Na geometria, operar com medidas de ângulos, sobretudo os que fazem uso de minutos e segundos, deixa de ser um conjunto de regras para, portanto, ser uma aplicação das ideias de um sistema de numeração não decimal, neste caso na base 60. O mesmo se aplica para operações com as principais unidades de tempo.

4 O JOGO SISTEMA-NUMERAÇÃO

A partir das inquietações geradas por um ensino tradicional, hegemônico e mecanizado da matemática, potencializado no conteúdo dos sistemas de numeração e tomando as reflexões acima apresentadas como motivadoras, surge a necessidade da criação de uma proposta de intervenção pedagógica que conseguisse aproximar o aluno da contagem em bases de numeração não decimais.

A elaboração da proposta buscava uma abordagem do assunto que fosse simples, que não exigisse muito custo – físico e financeiro – para aplicação, que evitasse pensamentos mecanizados, que não tivesse como pré-requisito conceitos matemáticos complexos, que usasse como metodologia principal a TRRS e, por fim, que fizesse uso de elementos da língua materna bem como da pictografia. Surge então a proposta de jogo de tabuleiro intitulado “Sistema-Numeração”.

Nascido inicialmente como uma atividade avaliativa em forma de jogo de tabuleiro, a proposta do “Sistema-Numeração” sofreu adaptações para que fosse possível de ser trabalhado no contexto da pandemia, das aulas remotas emergenciais e do ensino híbrido. Neste capítulo, apresentaremos duas abordagens possíveis para o Sistema-numeração: o próprio jogo de tabuleiro, bem como uma apresentação que se inspira no *storytelling* – metodologia ativa que coloca o aluno no centro de uma narrativa. Muito mais do que uma simples narrativa, esta metodologia mostra a possibilidade de contar histórias usando técnicas inspiradas em roteiristas e escritores com o objeto de transmitir uma mensagem de maneira que os alunos a guardem em suas memórias e construam novos conhecimentos a partir do que foi narrado. O *storytelling* é a arte de contar e desenvolver roteiros adaptados cuja a intenção final é a aprendizagem, quando esta metodologia é aplicada em ambientes educacionais.

O contexto do jogo, bem como da segunda abordagem proposta, se dá no espaço sideral, onde existe um conjunto de planetas fictícios chamado Sistema-Numeração (em clara associação ao nosso Sistema Solar). Nesse sistema, os planetas são nomeados de acordo com números. Temos o Planeta 2, o Planeta 3, o Planeta 4, e assim sucessivamente, até chegarmos ao Planeta 10. Esses planetas são mostrados no tabuleiro do jogo conforme a imagem a seguir.

Figura 13: Tabuleiro do jogo Sistema-numeração

Fonte: O autor.

O planeta 10 é o planeta principal desse contexto. Nele, são forjadas joias que serão trabalhadas como a unidade do sistema decimal. Utilizaremos a cor verde e o formato quadrangular para caracterizar essas joias, conforme a imagem. Essa joia tem uma característica especial ao adentrar em qualquer um dos demais planetas.

Figura 14: As joias e o planeta 10

Fonte: O autor.

No planeta 2, sempre que juntarmos duas joias elas formarão uma joia maior, chamada de **super-joia**. Se juntarmos duas super-joias, formaremos uma joia maior, chamada **hiper-joia**. E assim segue, sempre que juntarmos 2 joias de determinado tipo, é formada uma joia maior, que pode ser identificada por outra cor, tamanho e formato. Encoraja-se o professor a buscar novos nomes para as joias, ou sugerir que os alunos os escolha, pois a experiência mostra que crianças costumam gostar de inventar essas palavras no contexto da gameficação.

No planeta 3, o processo ocorre de forma análoga. Porém, para se obter uma joia maior é necessária a união de 3 joias menores. Vamos considerar então que 3 joias (verde) no planeta 3 formam uma super-joia (azul), 3 super-joias formam uma hiper-joia (amarela), 3 hiper-joias formam uma mega-joia (vermelha) e etc.

Figura 15: Relação de transformação (agrupamento) das joias.

Fonte: O autor.

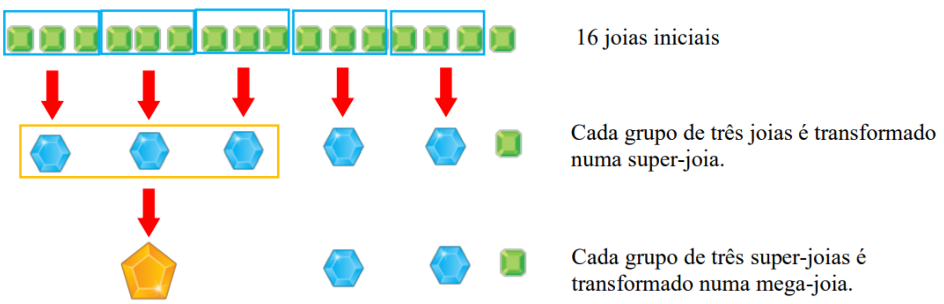
Sendo assim, a imagem a seguir representa o que acontece com 8 joias do planeta 10 ao entrarem no planeta 3.

Figura 16: 8 joias no planeta 3

Fonte: O autor.

Ainda no Planeta 3, ao aumentarmos o número de joias unitárias, surge a necessidade de se utilizar novos grupos de elementos, ou dentro do contexto da proposta, novos tipos de joias. Observe:

Figura 17: 16 joias no planeta 3



Fonte: O autor.

A figura acima representa o que acontece quando 16 joias verdes entram no Planeta 3. Reforça-se o uso da linguagem materna acompanhando os desenhos para que o aluno seja capaz de interpretar o problema sobre diversas óticas. A partir das 16 joias propostas inicialmente, é possível formar 5 grupamentos de 3 joias e ainda sobra uma joia que não é agrupada. A partir daí temos 5 super-joias e 1 joia. Porém, das 5 super-joias formadas é possível formar um novo grupamento de três joias, formando uma mega-joia, restando duas super-joias sem agrupamento, além da joia unitária que sobrara inicialmente. Não sendo mais capaz de formar novos grupos de 3 joias de mesma natureza, espera-se que o estudante conclua que 16 joias no Planeta 3 tenha como resultado:

(**1 mega-joia** + **2 super-joias** + **1 joia**) planeta 3

Trabalhado os exemplos iniciais, é interessante propor uma nova representação para as relações entre as joias do Planeta 10 e do Planeta 3, a fim de simplificar a escrita. Explorados o uso de cores e formas e a língua materna na construção da ideia, o professor deve sugerir aos alunos que não escrevam o nome de todos os tipos de joias e, para que consigam representar números com joias que não receberam nomes, utilizem a simbologia matemática tradicional, mesmo que ainda sem apresentá-la de tal forma.

Na proposta criada, a ideia é dizer que essa representação mais minimalista foi propostas pelos cientistas do "Sistema-Numeração" para simplificar a comunicação entre os planetas. Observe os exemplos:

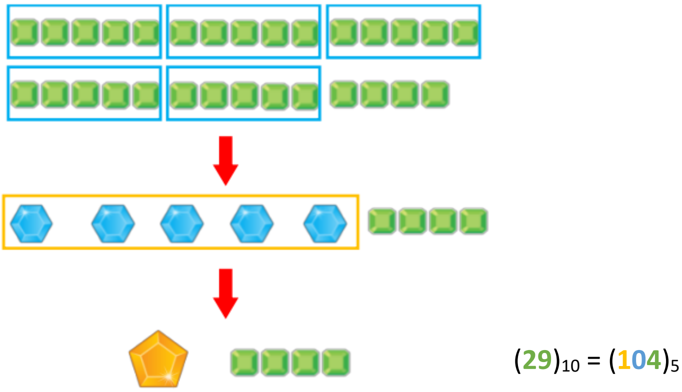
(**8 joias**) planeta 10 = $(\mathbf{8})_{10}$

(**3 super-joias** + **2 joias**) planeta 4 = $(\mathbf{32})_{4}$

(**5 mega-joias** + **0 super-joia** + **2 joias**) planeta 7 = $(\mathbf{502})_{7}$

Em uma segunda etapa da apresentação das ideias, espera-se que os alunos façam as analogias necessárias para conseguir atuar em outros planetas. Se no planeta 3 as joias se agrupavam de 3 em 3, no Planeta 4 se agruparão de 4 em 4 e no Planeta 7 formarão grupamentos a cada 7 elementos. Variando os planetas - leia-se bases de numeração no ponto de vista matemático - amplia-se as potencialidades da proposta e conduz o aluno a identificar elementos interessantes da contagem em bases não decimais, como por exemplo, os algarismos que serão utilizados em cada um dos planetas. No exemplo a seguir, é apresentada uma conversão realizada no Planeta 5.

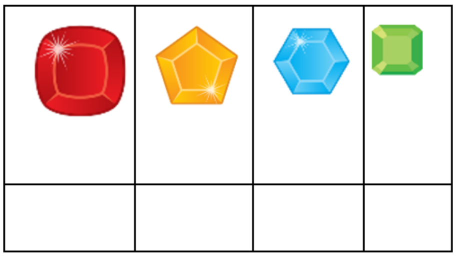
Figura 18: 29 joias no planeta 5



Fonte: O autor.

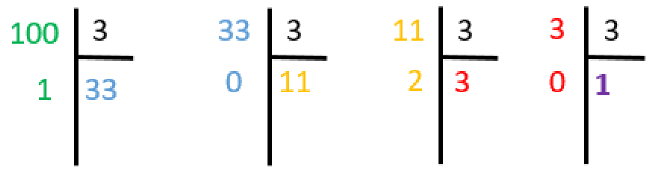
O exemplo acima mostra uma dúvida que pode surgir ao conduzir a proposta a partir de diversas formas de representação. Repare que no desenho é possível perceber que as 29 joias se agruparam no Planeta 5 como 1 mega-joia e 4 joias, ou seja, não sobrou nenhuma super-joia sem formar um novo grupo. É necessário que o professor enfatize a necessidade de se representar a ausência das joias de determinada natureza, para não gerar nenhuma dúvida na hora da representação por meio da simbologia matemática. Os tipos/cores de joias representam as posições e, portanto, se uma posição não possui elemento, ela deve ser preenchida com o algarismo 0. Sugere-se criar um quadro para preenchimento na hora da representação matemática das joias, como o quadro a seguir:

Figura 19: Exemplo de quadro para auxilio nas conversões entre os planetas (bases)



Fonte: O autor.

Repare que as ações de tratamento das informações do problema são realizadas no registro gráfico, porém novas perguntas e números maiores de joias podem gerar a impossibilidade de se trabalhar com este registro. Ao relacionar as cores utilizadas nas joias com as cores no registro numérico, como nas imagens acima, temos por objetivo conduzir o pensamento matemático a interlocução entre esses diferentes tipos de registros de representação semiótica. Podemos exemplificar utilizando a transformação de 100 joias na base 10 para a base 3. Desenhar 100 joias aparentemente é um recurso cansativo e desestimulante, sendo assim, o aluno poderá elaborar outras estratégias para realizar a transformação e o registro numérico pode ser um recurso facilitador.



$(100)_{10} = (10201)_3$

Consolidado o entendimento da lógica que rege o universo criado, sugere-se que o professor proponha novos questionamentos que gerem estratégias de resolução e simplificação. O momento é oportuno para trazer perguntas que vão consolidar a passagem das bases não decimais para a base 10. São exemplos:

- Ao entrar no Planeta 3, um astronauta ficou com 2 super-joias. Quantas joias simples tinha anteriormente?
- Ao adentrar um planeta, um astronauta disse possuir em $(123)_5$. Quantas joias do planeta 10 representam essa quantidade?

As perguntas acima visam, em diferentes níveis, desenvolver uma autonomia no processo de transição entre as bases de numeração. É fundamental que o professor veja as estratégias utilizadas pelos alunos, seja utilizando desenhos, simbologia matemática ou linguagem materna. Pedir para que os alunos compartilhem oralmente como pensaram e/ou que mostrem os desenhos que ajudam a concluir o raciocínio, além de funcionar como uma avaliação da aprendizagem, pode contribuir para aqueles que não desenvolveram uma estratégia clara e posteriormente, pode ser a chave da discussão para se chegar em um potencial algoritmo. No próximo capítulo, são apresentados alguns procedimentos desenvolvidos pelos alunos bem como comentários realizados por eles durante o desenvolvimento do sistema numeração.

Em um estágio avançado da proposta, o aluno deve ser capaz de transitar entre duas bases de numeração não decimais. Uma sugestão de enunciado é:

Um astronauta estava no planeta 7 onde possuía $(345)_7$. De lá, foi para o planeta 3. O que acontece com as joias no Planeta 3?

A resolução deste problema parte de um questionamento importante: para contar as joias entre planetas distintos é necessário saber a quantidade de joias no planeta 10? Em termos matemáticos tradicionais: para realizar a conversão entre bases não decimais é necessário passar antes para a base 10? A forma com toda a proposta é conduzida pretende induzir ao aluno a conclusão de que ao mover-se do planeta 7 ao planeta 3 é necessário sair do primeiro planeta, logo, todas as joias voltaram ao formato original (planeta 10) e após essa etapa as joias serão novamente transformadas, agora obedecendo as regras do planeta 5.

Como dito anteriormente, o desenvolvimento da atividade acima era a base para um jogo de tabuleiro na qual o jogador receberia ficha indicando uma determinada quantidade de joias para levar de um planeta a outro. Após percorrer o tabuleiro deveria dizer corretamente, seja por simbologia matemática, por um desenho ou utilizando os nomes dados as joias, a quantidade de joias que entrariam naquele planeta.

Por conta da pandemia de Covid-19 o jogo não pôde ser aplicado em sala de aula. Surge então o desafio de adaptar a proposta para um cenário de ensino híbrido, com grupos de alunos assistindo as aulas remotamente, enquanto outros grupos assistiam presencialmente, com rodízios e sem a possibilidade de compartilhamento de objetos.

O caminho escolhido foi aproveitar o caráter narrativo do *storytelling* do "Sistema-Numeração", convidar os alunos a uma viagem pelo espaço sideral e considerar cada um deles como astronautas que passeiam por aquele universo. Desta maneira, os principais elementos do *storytelling* estão presentes na atividade: a mensagem, o ambiente, as personagens, o conflito (o principal fator que deixa os alunos interessados na história) e o desfecho, que na maioria das vezes faz com que a atividade seja pedida pelos alunos para ser refeita.

A aplicação desta metodologia ativa tem como objetivo colocar o aluno no centro da ação, partindo de uma narrativa relevante, e contribuindo para sua autonomia como preconiza a BNCC. Um segundo objetivo a ser alcançado é desafiar o educando a desenvolver estratégias para que – no universo da história – ele se destaque na resolução dos problemas propostos. Espera-se que o fato dele ser um personagem da história o motive a, por exemplo, encontrar a forma mais eficaz ou mesmo que não seja a mais rápida, possa fazer a conversão entre bases justificando todos os passos do processo seja através do registro oral ou escrito.

Alguns comentários da apresentação do "Sistema-Numeração" ao longo do período letivo estão relatados no capítulo a seguir. A proposta foi aplicada para turmas de 5º ano, 6º ano e 8º ano do Ensino Fundamental.

5 INTRODUÇÃO AO "SISTEMA-NUMERAÇÃO" – ATIVIDADES SIMPLIFICADAS POR CONTA DA PANDEMIA: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA

Os últimos dois anos foram marcados por uma crise sanitária mundial gerada pela pandemia de COVID-19, decretada em 11 de março de 2020 pela Organização Mundial da Saúde. Até novembro de 2021, o Brasil contava cerca de 615 000 mortes e mais de 22 milhões de casos diagnosticados seguindo dados do consórcio de veículos de imprensa[3].

A implementação de novos protocolos sanitários gerou mudanças significativas no ambiente escolar e na educação como um todo. Antecipação do recesso escolar, redução do número de alunos, ampliação do distanciamento social, ensino emergencial a distância e posteriormente ensino híbrido, utilização obrigatória de máscara, higienização de ambientes e objetos pessoais e proibição de compartilhamento de objetos foram algumas das medidas tomadas para tentar impedir o avanço do vírus. Consequentemente, os profissionais das escolas precisaram reinventar suas práticas, adequando-as às novas características do cotidiano escolar e urbano.

Os fatores acima listados, aliados ao novo cenário das aulas híbridas e online causaram impactos significativos que impossibilitaram a aplicação do jogo "Sistema-Numeração" em sua totalidade, conforme apresentado no capítulo anterior. Ou seja, no cenário de pandemia, não seria seguro aos alunos e professores se reunirem em volta de um tabuleiro e compartilharem objetos como fichas, dados e joias. Além disso, o planejamento da aula deveria contemplar os alunos presentes em sala, bem como aqueles presentes na sala virtual, sem que houvesse predileção por um dos grupos. Dessa forma, considerou-se mais adequado aplicar o jogo e comunicar os resultados à comunidade científica em um momento posterior.

Por outro lado, abandonar momentaneamente a experimentação do jogo não impediu a condução dos alunos às ideias propostas para o "universo" do "Sistema-Numeração". Ao longo do ano, foram elaborados e apresentados em sala de aula materiais que tinham por objetivo familiarizar o aluno com o sistema numeração e investigar suas estratégias para resolução de pequenas tarefas, como escrever números na base 3 ou retornar números de bases não decimais para o sistema decimal de numeração.

[3] O Consórcio de Veículos de Imprensa é uma parceria estabelecida entre os veículos de imprensa brasileiros O Estado de S. Paulo, G1, O Globo, Extra, Folha de S.Paulo e UOL para informar dados da pandemia de COVID-19 no Brasil recebidos das secretarias estaduais de saúde.

As atividades foram propostas em três turmas: no quinto ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais, no sexto ano do Ensino Fundamental Anos Finais e no oitavo ano do Ensino Fundamental Anos Finais. A opção pelas turmas buscava experimentar as atividades em contextos diferentes – a turma de 6º ano era de uma escola distinta das outras duas – e alcançar níveis diferentes. Todas as atividades propostas tiveram uma explicação introdutória, a partir de uma série de slides na qual eram apresentados o sistema numeração, os planetas nomeados por número e exemplos de como realizar a mudança de base explicando somente o planeta 3. É importante ressaltar que não eram utilizados pelo professor termos como "base", "sistema de numeração", "mudança de base", "unidades, dezenas e centenas" entre outros que poderiam conduzir o aluno a identificar o assunto que estava sendo trabalhado.

Durante a aplicação das atividades, realizou-se anotações de acordo com os comentários dos alunos. Além disso, as folhas com os cálculos realizados pelos alunos foram recolhidas. Neste ponto do trabalho, serão apresentadas algumas observações significativas que foram obtidas durante a aplicação do trabalho, separadas por turma.

5.1 Atividade realizada na turma de 5º ano do Ensino Fundamental

O grupo de alunos presentes para a realização da atividade era formado pela união das duas turmas que compõe a série no colégio, além disso haviam alunos presentes de forma presencial e remota. A turma se caracteriza por ser formada por alunos que estudaram juntos durante os últimos 5 anos, muitos deles passaram por um reforço em matemática e língua portuguesa durante o ano, pensando em aprovação nos colégios federais e militares.

A atividade foi realizada durante um tempo (50 minutos), após a conclusão de todo o conteúdo tradicional da série. A proposta de ensinar matemática de uma maneira não tradicional foi aceita com alegria e de forma festiva pelos alunos, que logo demonstraram animação e curiosidade para conhecer as ideias que seriam apresentadas.

Logo no início da apresentação, ao ver a imagem dos planetas do sistema numeração, ouve-se:

- Por que não existe o planeta 1? – aluno A.

- O planeta 1 é o nosso planeta. – aluno B.

A explanação seguiu, foram apresentados o resultado de 8 joias no planeta 3, a seguir 15 joias no planeta 3 e por fim 32 joias no planeta 3. As animações preseNtes nos slides contribuíram para que os alunos entendessem com facilidade a ideia proposta e já no terceiro exemplo realizassem as contagens junto do professor.

A escolha por esses valores (8, 15 e 32) tem por objetivo trabalhar situações distintas, como por exemplo o que fazer quando sobra joia sem grupo e quando não sobra. É importante reforçar a necessidade de apresentar todas as joias utilizadas na contagem, da direita para a esquerda, respeitando as cores – ou nome. Durante a exemplificação também foi ressaltada que a escolha pela representação mais adequada: desenho, nomes das joias ou simbologia numérica era escolha dos alunos.

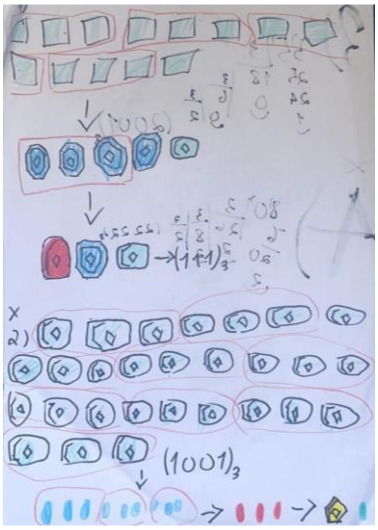
Após a explicação e ciente de que os alunos haviam compreendido a proposta, realiza-se uma nova etapa na qual os alunos irão fazer as conversões sozinhos, usando suas próprias estratégias. Quatro perguntas são apresentadas:

- O que acontece quando 13 joias entram no planeta 3?
- O que acontece quando 28 joias entram no planeta 3?
- O que acontece quando 55 joias entram no planeta 3?
- O que acontece quando 80 joias entram no planeta 3?

Os alunos tiveram 25 minutos para responder aos 4 itens. Foram estimulados a fazerem do jeito que preferiram: usando lápis de cor, usando somente lápis de escrever ou utilizando somente cálculos. Foi interessante perceber que, ainda que a representação numérica do tipo $(111)_3$ fosse a mais simples, muitos alunos optavam por apresentar as respostas utilizando os nomes dados as joias, como por exemplo (1 hiper-joia + 1super-joia + 1 joia)planeta 3.

A intenção de colocar quantidades crescentes de joias verdes para converter para o planeta 3 é justamente incentivar ao aluno que, se necessário, procurem outros caminhos para conseguir fazer cada representação de forma mais dinâmica. Foi interessante perceber que a maioria dos alunos optou por desenhar as 13 e 28 joias, alguns já procuraram novos caminhos para fazer a de 55 e a de 80. Houve ainda quem optasse pelos desenhos mesmo nessas quantidades maiores.

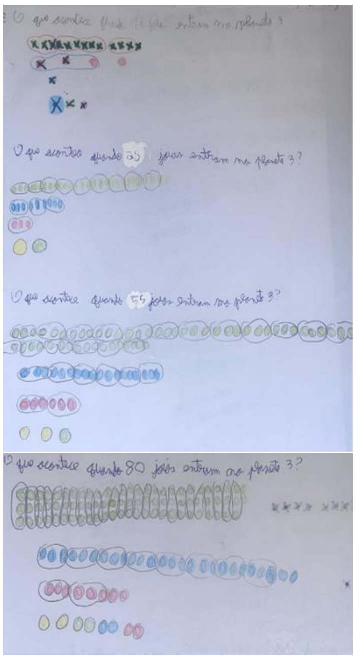
Figura 20: Resolução apresentada por aluno do 5º ano.



Fonte: O autor.

Repare que o aluno da imagem acima optou por desenhar as joias nos dois primeiros casos, tentando obter uma representação muito próxima daquela apresentada nos slides. Repare também que ele apresentou a resposta utilizando as joias e fez a conversão para a representação mais simples, mostrando domínio dos exercícios. Entretanto, não conseguiu realizar as demais atividades antes da correção.

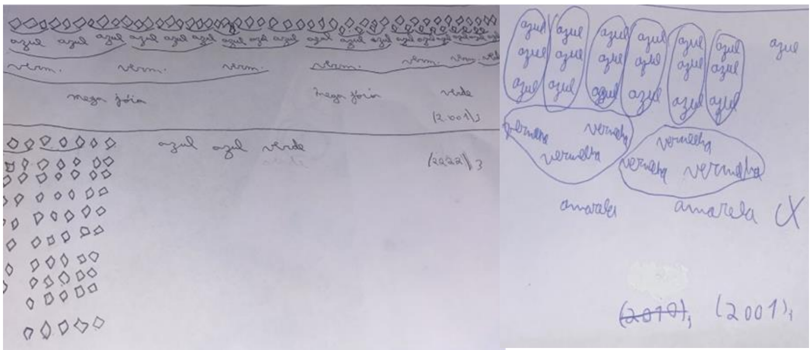
Figura 21: Resolução apresentada por aluno do 5º ano.



Fonte: O autor.

Já esse aluno da figura X se sentiu mais seguro para fazer a representação utilizando somente os desenhos, inclusive para as 55 e 80 joias. Em todos os casos apresentou a solução corretamente.

Figura 22: Resolução apresentada por aluno do 5º ano.



Fonte: O autor.

Os alunos acima não possuíam a totalidade das cores, porém usaram formas ou palavras para representar as joias. Os exemplos mostram que possuir uma simbologia que deixe os alunos confortáveis é importante, mesmo que não haja um padrão de formas e cores utilizadas. Para fazer as conversões, mais importante do que as cores, formas ou nomes das joias, é possuir símbolos distintos que representem a unidade, os grupos, os grupos de grupos e etc.

Durante a realização da atividade, alguns alunos começaram a sugerir espontaneamente o que acontece nos demais planetas. Perguntaram se o nome do planeta indica o número de agrupamentos que são realizados. O professor confirmou a informação e propôs que os alunos – posteriormente – se desafiassem a realizar essas atividades.

A solução das perguntas iniciais se deu a partir da investigação das ideias dos alunos. As duas primeiras perguntas foram respondidas a partir de seus respectivos desenhos, enquanto alguns alunos sugeriram que para realizar a conversão das 55 joias o professor poderia utilizar a divisão euclidiana. Juntos, dividiram 55 por 3 e analisaram o que significava cada quociente obtido e cada resto. As 80 joias foram resolvidas da mesma maneira, porém o professor optou por escrever de forma semelhante ao algoritmo das divisões sucessivas, apenas com o objetivo de observar se algum aluno já havia visto aquela representação.

Por fim, uma atividade final é proposta. Os alunos são desafiados a responderem quantas joias verdes originaram, no planeta 3, a quantidade $(112)_3$. Mais do que a resposta correta, estava a observação das estratégias escolhidas pelos alunos. Foi interessante perceber que poucos partiram do desenho e, a ideia imediata, considerando que o desafio foi proposto após a correção dos itens anteriores, foi de realizar uma divisão. Alguns outros alunos, conforme reflexão, sugeriram a multiplicação por ser um caminho inverso. Surgiram respostas como 336 e 37, que logo eram descartadas por alguns colegas.

Uma solução muito interessante foi apresentada por um dos alunos, em menos de um minuto. “A resposta é 14”. Perguntado como chegou a conclusão, o aluno utilizou a primeira pergunta do momento anterior, ou seja, $(13)_{10} = (111)_3$ e concluiu que $(112)_3$ possui uma joia verde a mais do que aquela anteriormente obtida. Sendo assim, respondeu corretamente sem necessariamente fazer a conversão, lançando mão apenas da ideia de sucessor. Infelizmente, não há registro escrito desta resposta, somente o registro oral deixado pelo aluno, na memória do professor.

Após 10 minutos de reflexão, um aluno sugeriu a resposta que teve maior aceitação da turma. Por estar presente remotamente, ele explicou seu raciocínio da seguinte maneira: “percebi que 1 joia vermelha era o equivalente a 3 joias azuis, portanto temos um total de 4 joias azuis; cada joia azul é o equivalente a 3 joias verdes, sendo assim 4x3=12 joias verdes, porém temos mais duas joias verde 12 + 2 = 4”. O professor apresentou a resposta como correta, elogiou a turma, perguntou se os alunos haviam gostado da atividade e obteve 100% de respostas positivas.

5.2 Atividade realizada na turma de 6º ano do Ensino Fundamental

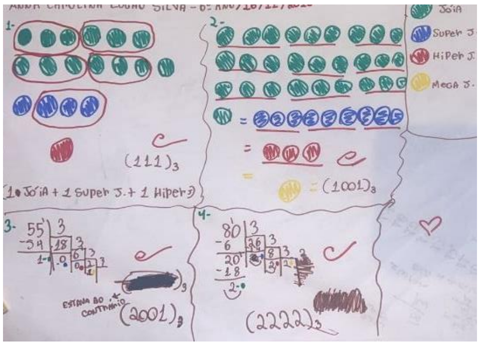
A turma na qual foi realizada a atividade apresenta características significativamente distintas da turma de 5º ano acima relatada. Além de ser outra instituição, o grupo é todo formado por alunos que estão ingressando na escola naquele ano, ou seja, estão em fase de adaptação aos novos professores, novos colegas de classe e nova dinâmica escolar. Além disso, é uma turma que sentiu os impactos da pandemia durante o ano anterior, com alguns alunos relatando não terem aulas ou não assistirem as aulas remotas emergenciais da série que passou. Consequentemente, a turma apresentou uma maioria de alunos com grandes dificuldades nas operações básicas, sobretudo na divisão, e na interpretação dos enunciados dos problemas.

Ciente das dificuldades que poderiam ser encontradas, as atividades foram discutidas durante um tempo maior. No primeiro dia, durante dois tempos de 50 minutos foi realizada a apresentação de slides – o mesmo utilizado anteriormente – porém possibilitou-se treinar mais exemplos, utilizando novos planetas (outras bases de numeração).

A conversão das joias para as bases, sejam a base 3 ou as outras, aconteceram de forma natural. A maioria dos alunos que desenhou obteve sucesso nas conversões. Todavia, quando as quantidades ficaram muito grandes alguns alunos desistiram e outros não conseguiram usar corretamente a divisão.

Ainda nessa aula inicial, em um segundo momento, foram propostas ideias para fazer a conversão pelo caminho contrário, ou seja, passar dos demais planetas para o planeta 10. Poucos alunos conseguiram realizar atividade sem ajuda do professor, que aos poucos foi sugerindo estratégias para fazer a conversão. Aqui, os desenhos foram utilizados, porém o recurso da multiplicação pouco apareceu sem o direcionamento do professor.

Figura 23: Resolução apresentada por aluno do 6º ano.



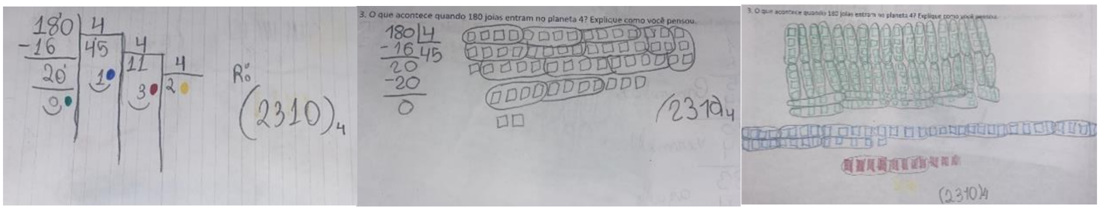
Fonte: O autor.

No dia seguinte, a proposta foi que os alunos realizassem uma lista de exercícios (Anexo A) a partir das estratégias obtidas no item anterior. As primeiras perguntas contidas na lista eram:

- O que acontece quando 28 joias entram no planeta 3?
- Represente 48 joias no planeta 6.
- O que acontece quando 180 joias entram no planeta 4? Explique como você pensou.

As duas primeiras perguntas apresentavam os desenhos das joias verdes na tentativa de induzir os alunos a contar formando grupos e grupos de grupos. Já a terceira pergunta tinha por objetivo estimular o uso de estratégias distintas para cálculo. Nesta, algumas respostas interessantes apareceram, conforme as imagens.

Figura 24: Resolução apresentada por alunos do 6º ano.



Fonte: O autor.

Note que a primeira aluna utilizou as cores para identificar o que cada resto significava, o que lhe auxiliou na construção da resposta. Por outro lado, a segunda foto mostra um aluno que não se sentiu totalmente seguro em fazer todas as divisões, realizou apenas a contagem de grupos de joias azuis e, reduzindo sua quantidade inicial, decidiu desenhar a partir das super-joias. É curioso como esse aluno utiliza do registro numérico para iniciar a resolução dos problemas, porém se sente mais confortável trabalhando no registro gráfico. Por fim, a terceira representação mostra um aluno que optou por desenhar todas as joias indicadas e fazer cada uma das contagens.

A seguir, sugeriu-se a realização de mais três perguntas. O objetivo é encontrar estratégias para converter joias dos planetas 3, 5 e 4 para o planeta 10. Os questionamentos apresentados foram:

- As joias a seguir foram colocadas no planeta 3. Quantas joias verdes havia inicialmente?

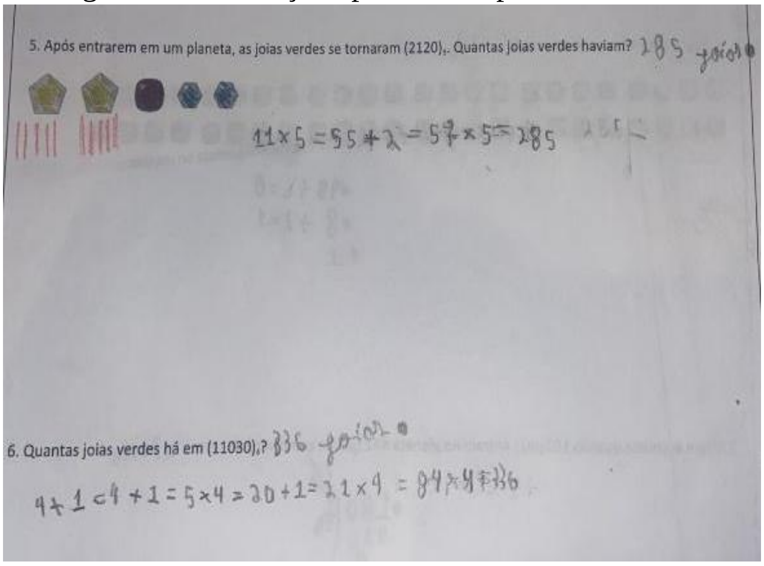
- Após entrarem em um planeta, as joias verdes se tornaram $(2120)_5$. Quantas joias verdes haviam?

- Quantas joias verdes há em $(11030)_4$?

A maioria dos alunos apresentou dificuldade na realização dessas questões. Alguns solicitaram ajuda e, após o estímulo do professor, conseguiram responder as duas primeiras questões. Apenas um dos alunos conseguiu criar uma estratégia sozinho e, ainda que a escrita do raciocínio esteja incorreta do ponto de vista matemático, ele conseguiu obter as respostas. Observe na imagem.

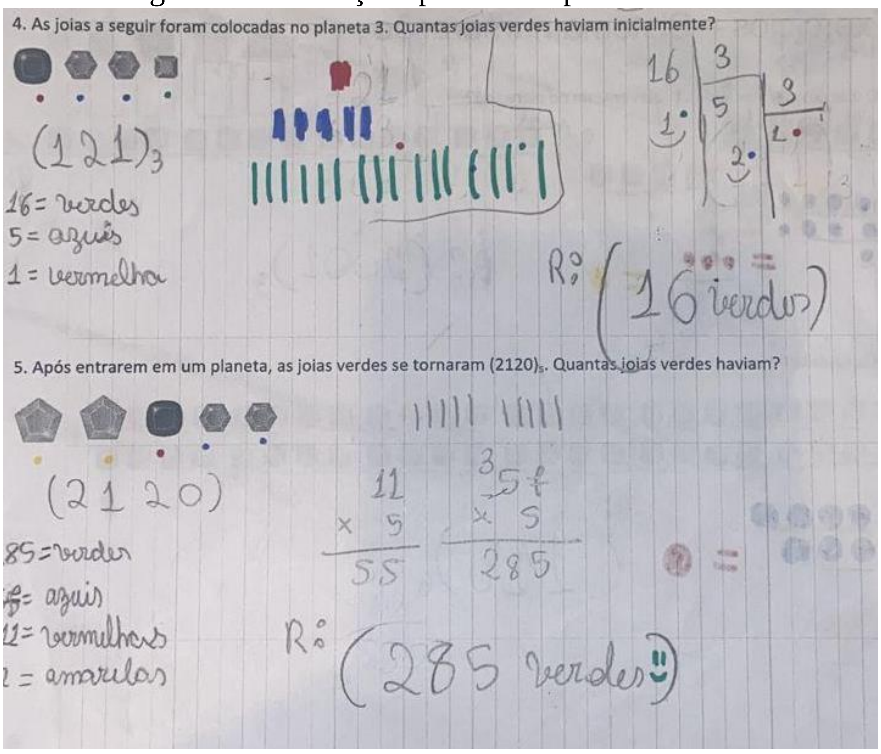
Figura 25: Resolução apresentada por aluno do 6º ano.



Fonte: O autor.

Uma estratégia que funcionou e foi utilizada por alguns alunos estava em desenhar as transformações das joias de traz para frente. Na imagem 21, um exemplo de aluna que usou traços para contar as joias conforme transformava-se em joias menores. Note que, apesar de ter desenhado no primeiro exercício dessa sessão, no segundo ela já conseguiu construir uma ideia para conseguir calcular o número de joias verdes utilizando operações básicas.

Figura 26: Resolução apresentada por aluno do 6º ano.



Fonte: O autor.

Nesta turma, as representações simbólicas e aquelas que utilizavam língua materna foram instrumentos fundamentais na realização dos exercícios. As defasagens de aprendizagem de matemática motivada pela pandemia podem ter contribuído para a dificuldade na realização dos itens mais complexos da atividade. De toda forma, a turma mostrou interesse e saiu satisfeita com a aula diferente da tradicional, segundo relato dos alunos.

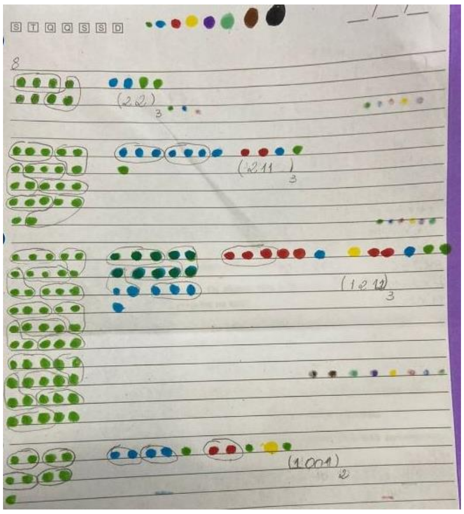
5.3 Atividade realizada na turma de 8º ano do Ensino Fundamental

A escolha por aplicar as ideias do Sistema Numeração nessa turma se deu para fazer uma análise da possível ampliação dos elementos ali trazidos para discussão. O fato de a turma apresentar maior maturidade, aliada a alguns anos de conteúdo matemático a mais, permitiu uma abordagem mais ampla, chegando em aspectos que contemplavam até mesmo as quatro operações básicas em bases numéricas não decimais.

A turma era formada por alunos de ótimo rendimento em matemática, com bons resultados na OBMEP e extremamente dedicados. O trabalho foi realizado durante duas semanas. Não havia grande limitação de tempo devido a planejamento e calendário escolar, possibilitando uma abordagem calma que esperava até que todos os alunos que participavam da aula conseguissem obter os resultados esperados.

Diferentemente das demais turmas, a apresentação do assunto se deu sem o auxílio de slides feitos anteriormente, o conceito foi apresentado utilizando recursos digitais como uma mesa digitalizadora e o *software Inkodoo*. A projeção da tela do computador possibilitou o uso de diferentes cores e tamanhos, deixando clara a ideia proposta na atividade.

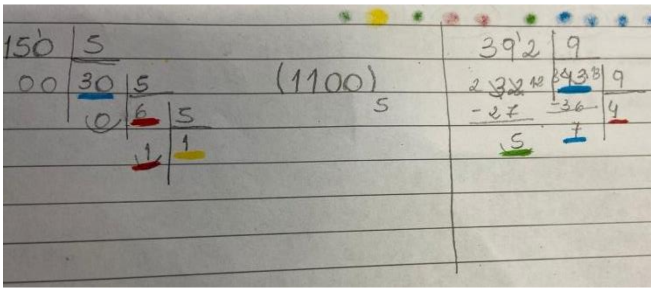
Figura 27: Resolução apresentada por aluno do 8º ano.



Fonte: O autor.

As conversões de números na base 10 para as demais bases se deu de forma natural e bem-sucedida. A maioria dos alunos iniciou o trabalho a partir dos desenhos e aos poucos foi migrando para a divisão. Alguns estudantes durante a explicação já perceberam que a divisão é um instrumento que auxilia na resolução mais veloz do problema. É importante ressaltar que em nenhum momento, em qualquer turma, foi dito que resolver de forma mais veloz significaria maior eficiência na realização da tarefa.

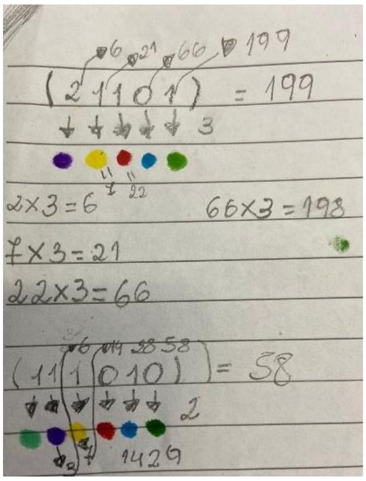
Figura 28: Resolução apresentada por aluno do 8º ano.



Fonte: O autor.

Quando o exercício solicitava o caminho inverso, ou seja, escrever na base 10 números em outras bases os alunos apresentaram algumas soluções distintas, entre elas a da imagem a seguir.

Figura 29: Resolução apresentada por aluno do 8º ano.



Fonte: O autor.

Observe que o aluno criou um processo eficiente para a conversão entre as bases: o primeiro número da esquerda é multiplicado pelo número do planeta (base), o resultado é adicionado ao número imediatamente a direita. Multiplica-se o valor obtido pelo número do planeta e soma-se com o número a direita e assim por diante, encerrando na soma pelo último algarismo. Ou seja, para converter para a base 10 o número $(21101)_3$ os alunos fizeram os seguintes cálculos:

$$2 \times 3 + 1 = 7$$

$$7 \times 3 + 1 = 22$$

$$22 \times 3 + 0 = 66$$

$$66 \times 3 + 1 = 199$$

Trazendo os cálculos para uma única expressão numérica, obtém-se:

$$\{[(2 \times 3 + 1) \times 3 + 1] \times 3 + 0\} \times 3 + 1$$

$$2 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 0 \times 3 + 1$$

Os alunos, portanto, conseguiram achar a resolução correta utilizando um processo elaborado por eles, fazendo uso da simbologia para organizar o pensamento, sem deixar de utilizar conhecimentos em aritmética básica. Quando compartilhada, a ideia foi prontamente aprovada pelos colegas tornando-se estratégia de toda a turma para resolver as questões. Posteriormente, o professor apresentou uma das soluções utilizando potências de mesma base, porém os alunos não aderiram a proposta e disseram preferir trabalhar com o padrão elaborado por eles.

Após o estabelecimento desse método, ocorreu um momento interessante quando um dos alunos presentes remotamente pediu a palavra e teceu o seguinte comentário: “Professor, no planeta 10 o número obtido já é o resultado”. O aluno percebeu que ao multiplicar por 10 e somar com o termo anterior o resultado é o número obtido a partir da junção dos dois algarismos. Ou seja, em $(952)_{10}$ existem 9 joias vermelhas, 5 joias amarelas e 2 joias verdes, ou ainda, 952 joias verdes. A observação do aluno conduziu os colegas à conclusão que o planeta 10 conta da maneira tradicional, agrupando os elementos de 10 em 10. Sendo assim, fez-se a relação entre as joias, super-joias e hiper-joias no planeta 10 com as tradicionais unidade, dezena e centena do sistema de numeração decimal.

Nesta turma, surgiu alguns casos de identificação do assunto. “Eu já estudei isso” e “Parece número binário” foram algumas frases ouvidas durante a atividade. Aos poucos, professor e alunos foram substituindo falas como “planeta 3” por “base 3”.

Nas aulas seguintes, foram exploradas as operações básicas em bases de numeração não decimais. Sem explicação prévia, os alunos receberam uma adição de números na base 3 para resolver. Parte da turma optou por converter para a base 10, resolver a adição e depois retornar a base 3. Os alunos que assim fizeram obtiveram a resposta correta e foram parabenizados por isso. Todavia, alguns colegas sugeriram fazer diretamente na base 3, explicaram suas ideias e compartilharam com a turma. A ideia conhecida como “vai um” (adição com reserva) foi rapidamente entendida e, a partir dali todos os exemplos foram realizados diretamente na base dada. A seguir, a subtração e a multiplicação foram trabalhadas com sucesso, sem a necessidade de grandes intervenções do professor. O “pedir emprestado” (subtração com recurso) ficou claro para os alunos, entendendo que na base n, cada unidade que você pede emprestado representa n unidades do algarismo de valor posicional anterior. Sendo assim, ao realizar contas tradicionais na base 10, ao pedir emprestado, não há um deslocamento daquela unidade para a frente do algarismo anterior, e sim o ganho de 10 unidades na classe imediatamente anterior.

O objetivo desta parte final do trabalho não era apenas apresentar as operações básicas nas diferentes bases, mas dar significado aos processos que os alunos realizam nas operações básicas com números do sistema decimal e que muitas vezes foram decorados a partir de processos mecanizados aprendidos nos anos anteriores. Acredita-se na importância de saber o porquê do “vai um”, do “pedir emprestado” ou dos zeros adicionados ao quociente numa divisão.

Os algoritmos são instrumentos poderosos para o cálculo aritmético, mas sozinhos, acabam valorizando apenas os alunos que possuem destreza na memorização e aplicação dos mesmos. Considera-se importante ampliar oportunidades de se criar as estratégias que fornecerão aos alunos resultados procurados mesmo que usem caminhos distintos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de sistemas de numeração de bases não decimais pode se tornar instrumento catalizador no desenvolvimento do pensamento matemático. Espera-se que ao aluno compreender que contar, em uma base x, é formar grupamentos de x elementos de mesma natureza, ele esteja fazendo uso de uma ferramenta importante para o distanciamento do ensino da matemática mecanizada e focada no algoritmo. Este trabalho não é contrário ao uso de algoritmos ou métodos que simplifiquem processos, aqui se defende o fato do algoritmo ser uma consequência do desenvolvimento da aprendizagem em matemática e não um recurso para tratar problemas de forma rápida. É importante que o aluno acredite que a estratégia de resolução de cada problema seja uma construção particular.

Esta proposta deseja contribuir com a prática e a reflexão professor que ensina matemática não só no âmbito dos sistemas de numeração, mas também em outras áreas da disciplina. Desde as operações aritméticas básicas, passando pela álgebra abstrata, a modelagem de problemas, as construções da geometria euclidiana e a matemática discreta, os assuntos estudados em matemática na Educação Básica representam conjuntos plurais de possibilidades de abordagens e pontos de vista. É sugerido que o professor procure abordagens que aproximem seus alunos dos assuntos, que se distanciem de uma aprendizagem baseada apenas no algoritmo, que normalize e torne foco de estudo o erro e que faça o aluno se sentir dono de seus processos de resolução de problemas. Zeferino (2018) em sua pesquisa sobre o desenvolvimento curricular da matemática nos cursos de Pedagogia aponta deficiências no desenvolvimento curricular da matemática gerando dificuldades por parte do professor em lidar com diversos conteúdo da disciplina, incluindo sistemas de numeração. Completamos dizendo que não basta uma boa didática para a abordagem do tema, há que se conhecer profundamente a organização de um sistema de numeração, sua representação aritmética e, sobretudo, as semióticas, como propõe Duval. Da mesma forma, o licenciado em matemática, detentor do saber de conteúdo que envolve os sistemas de numeração falha sistematicamente em privilegiar a prática tradicional baseada na massificação do algoritmo em detrimento da experimentação e do uso de ferramentas lúdicas ou de metodologias ativas como o *storytelling*.

Nesse sentido, a TRRS de Raymond Duval representa um caminho interessante no processo de ensino-aprendizagem. A obra aborda um desafio para o professor que ensina matemática: entender como um aluno pensa ao lidar com determinado problema. Compreender essa matemática desenvolvida mentalmente pelo aluno, que o autor denominou como face oculta da matemática, pode e deve gerar respostas significativas para a transformação da prática do docente. A resposta para erros comuns repetidos ano após anos por alunos e alunas nas aulas de matemática, pode estar diretamente ligada à como esses conteúdos são construídos por eles mesmos mentalmente. Por que muitos alunos dizem que o produto $a \times a$ resulta em $2a$? Ou por que algumas crianças que já lidaram com potenciação dizem que 3^2 é 6? Nesse caso, qual a operação realizada mentalmente: $3 + 3$ ou 3×2? Esses são alguns pequenos exemplos de erros que acompanham a prática da maioria dos professores de matemática. Duval nos apresenta, portanto, um caminho para a reflexão a partir desses erros.

Dessa forma, é necessário que o professor incentive seus alunos a escreverem e/ou falarem como construíram determinado raciocínio, estando corretos ou não. Acostumando-os a registrarem seus pensamentos e desenvolvimentos por representações semióticas. Utilizando registros em língua materna, numéricos ou gráficos, por exemplo, o aluno consegue expressar melhor as etapas do processo de resolução do problema e o professor, por sua vez, terá mais sucesso na identificação de erros podendo direcionar suas abordagens de maneira a suprimir esses e outros equívocos.

Novamente, voltamos a ressaltar a importância de entender que a teoria de Duval não se resume a apresentar problemas e tópicos das matemáticas em diferentes registros de representação semiótica, mas sim saber operar dentro de um determinado registro (tratamento) e saber transitar entre registros distintos (conversão). Se nesta proposta a teoria se aplica no ensino de sistemas de numeração, a riqueza da TRRS e de toda obra de Duval mostra uma grande possibilidade de aplicação em diversas áreas da própria matemática, bem como em outras disciplinas. A combinação da TRRS com uma metodologia ativa potencializa o processo de ensina e aprender matemática em salas de aula da Educação Básica.

O ensino de sistemas de numeração em bases não decimais é mais um exemplo de conteúdos da matemática onde parte significativa dos professores escolhem uma abordagem tradicional e mecanizada, fortemente baseada no algoritmo. O "Sistema-Numeração" é uma proposta de intervenção que, ao colocar o aluno no centro do processo, busca incentivar a resolução de problemas a partir das particularidades de estratégia daquele aluno. Utilizando a língua materna, cores, desenhos ou a simbologia clássica matemática, deseja-se que o aluno se torne capaz de transitar entre as bases e até mesmo chegar ao algoritmo sem que este movimento pareça imputado pelo professor. Partir do registro da linguagem materna, para um registro gráfico e por fim para um registro numérico é o caminho sugerido e defendido para o início da abordagem e já nas primeiras impressões em sala de aula mostra ser um caminho de sucesso e aceitação por parte dos alunos.

As primeiras reações ao sistema-numeração convergem para uma ampliação do projeto. Ensinar a contagem e as operações básicas em bases não decimais deve funcionar como um instrumento importante no ensino dessas operações na própria base decimal. Por isso, reforçamos a importância desse trabalho tanto para professores que atuam nas séries iniciais e finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

A ausência desse conteúdo nos livros didáticos e nos documentos oficiais acaba contribuindo para a reprodução de equívocos na formação de professores e no processo de ensino-aprendizagem que segue caminhando para uma abordagem extremamente tecnicista e mecanizada.

Por fim, convida-se o professor que lê este texto a refletir como o trabalho poderia impactar seus alunos e suas práticas em sala de aula, que novas abordagens poderiam ser feitas a partir dele e em que novos contextos a TRSS poderia ser aplicada. O cenário pandêmico impediu um caráter experimental mais bem explorado para o trabalho, porém as rápidas experiências conduziram o “Sistema-Numeração” a resultados satisfatórios no ensino de sistemas de numeração de bases não decimais.

Esta atividade não está totalmente concluída. A didática da matemática na formação de licenciados em matemática e os conteúdos de matemática presentes nas disciplinas que formam pedagogos que lecionam matemáticas nos anos iniciais são objetos de estudos futuros cujos dados poderão responder a muitos questionamentos sobre o assunto. Mesmo que o contexto pandêmico tenha sido um dos fatores que levaram o professor a repensar sua prática profissional, o cenário atual tecnológico e a educação global no futuro requerem novas abordagens, ferramentas e práticas em relação a todas as disciplinas que compõe o quadro curricular da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília. MEC/SEF, 2018.

COLOMBO, J., FLORES, C. e MORETTI, M. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **Zetetiké**, v. 16, n. 29, p. 41-72, 2008.

DAMM, R. F. Registros de Representação. *In*: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2010, p.167-188

DENARDI, V.B. Registros de Representação Semiótica: contribuição para a formação de professores de matemática. *In*: EBRAPEM, 21., Pelotas, 2017. **Anais do XXI EBRAPEM**. Pelotas: UFPEL, 2017. p. 1-13.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Paris. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, v. 5, p. 37-65, 1993.

DUVAL, R. **Sémiosis et penseé humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: Proem, 2011

FREITAS, J. L. M. de; REZENDE, V. Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 2, n. 3, p. 10–34, 2020. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/5946. Acesso em: 14 ago. 2022.

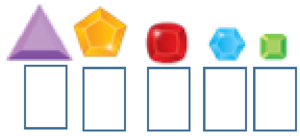
HENRIQUES, A. e ALMOULOUD, S. A. **Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisa na Educação Matemática no Ensino Superior:** uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. Bauru: Ciênc. Educ., 2016.

ROQUE, T. **História da Matematica: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

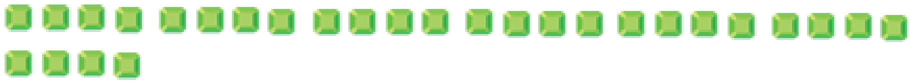
ZEFERINO, J.L.B. **A formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental:** uma análise dos cursos de Pedagogia do Rio de Janeiro. Trabalho de conclusão de curso (Especialização em Educação Matemática) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, 2018.

ANEXO A – LISTA DE EXERCÍCIOS

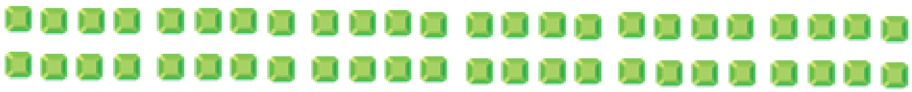
Exercícios – Sistema numeração



1. O que acontece quando 28 joias entram no planeta 3?

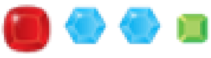


2. Represente 48 joias no planeta 6.

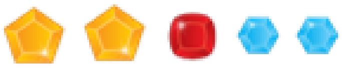


3. O que acontece quando 180 joias entram no planeta 4? Explique como você pensou.

4. As joias a seguir foram colocadas no planeta 3. Quantas joias verdes haviam inicialmente?



5. Após entrarem em um planeta, as joias verdes se tornaram $(2120)_5$. Quantas joias verdes haviam?



6. Quantas joias verdes há em $(11030)_4$?