

COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática

Wallace Alves Salgueiro Júnior

O JOGO *LIGHTS OUT* EM GRAFOS DE POLIEDROS

Rio de Janeiro
2025



Wallace Alves Salgueiro Júnior

O JOGO *LIGHTS OUT* EM GRAFOS DE POLIEDROS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos

Rio de Janeiro
2025

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

S164 Salgueiro Júnior, Wallace Alves
O jogo Lights Out em grafos de poliedros / Wallace Alves Salgueiro
Júnior. – Rio de Janeiro, 2025.

80 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa,
Extensão e Cultura.

Orientador: Diego de Souza Nicodemos.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Teoria dos grafos. 3. Poliedros. 4.
Jogos no ensino de matemática. 5. Jogos combinatórios. I. Nicodemos,
Diego de Souza. II. Colégio Pedro II. III.
Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7: 5026.

Wallace Alves Salgueiro Júnior

O JOGO *LIGHT OUT* EM GRAFOS DE POLIEDROS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ____/____/____.

Banca Examinadora:

Dr. Diego de Souza Nicodemos (Orientador)
Colégio Pedro II

Dra. Patrícia Erthal de Moraes
Colégio Pedro II

Dra. Diana Sasaki Nóbrega
UERJ

Dr. José Wilson Coura Pinto
FAETERJ

Rio de Janeiro
2025

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à Minha Mãe, Ilma S. Salgueiro, uma mulher guerreira, forte, determinada, alegre e bondosa.

Eu não teria chegado onde cheguei, sem sua dedicação, sem os seus ensinamentos, sem seu apoio, sem seus incentivos e sem seu Amor. O que sou, devo muito a você, Minha Mãe!

Você me ensinou, não apenas através de palavras, mas pelo seu exemplo de vida, a nunca desistir, a enfrentar os desafios, e a sempre buscar a Felicidade no decurso das jornadas.

Você sempre foi e sempre será um modelo para mim.

Sou seu fã!

Você estará sempre viva no meu coração!

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus!

Agradeço aos meus Amigos e às minhas Amigas: Ana, Amorim, Clarissa, Danielle, Fábio, Luiza, Marcela, Monclar, Orlando, Paulinha e Thiago pelo apoio, incentivo e torcida; e sobretudo ao meu Amigo Bruno Vianna por toda a sua ajuda!

Agradeço a minha ex-esposa, Alexandra, por sempre acreditar em mim (tanto quando éramos casados, quanto depois da nossa separação), mesmo quando eu mesmo já não acreditava.

Por fim, porém não menos importante, agradeço ao meu orientador (e agora, Amigo), Diego, por ser bem mais que um orientador, por ter muito mais do que me ensinado, por me dado assistência, amparo, e encorajamento nas várias vezes que pensei em desistir.

Vocês foram fundamentais nessa minha empreitada.

Muito obrigado a vocês!

Ah, meu Deus!

Eu sei, eu sei

Que a vida devia ser bem melhor

E será!

Mas isso não impede

Que eu repita

É bonita, é bonita

E é bonita!

(Gonzaguinha, 1982)

RESUMO

SALGUEIRO JÚNIOR, Wallace Alves. **O Jogo *Light Out* em Grafos de Poliedros.** 2025. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, 2025.

O presente trabalho aborda um jogo combinatório conhecido por *Lights Out* que, originalmente, corresponde a um jogo eletrônico jogado por um único jogador em um tabuleiro representado por uma malha quadrangular 5x5 em que cada célula da malha contém um botão e uma luz indicadora. Ao pressionarmos o botão de uma célula deste tabuleiro a luz dessa respectiva célula assim como as luzes de suas células vizinhas trocam de estado, isto é, células acesas apagam-se, enquanto células apagadas se acendem. A configuração inicial admitida em todos os tabuleiros, neste trabalho, é aquela em que todas as células se encontram apagadas. O objetivo do jogo *Lights Out* é acionar uma sequência de células que resultem num estado final em que todas as células fiquem acesas. De forma ideal, objetivamos determinar um conjunto mínimo de células que ao serem pressionadas trocam os estados de todas as células do tabuleiro, acendendo-o completamente. Investigamos o jogo *Lights Out* em poliedros através da teoria de grafos, relacionando assuntos a priori desconectados. Optamos por uma abordagem não focada em atividades prontas, mas sim na investigação dos grafos de cada poliedro no jogo em si, apresentando formalmente as demonstrações das propriedades que emergem dessas investigações, deixando a cargo do(a) leitor(a) utilizar esse ferramental na produção de suas próprias atividades.

Palavras-chave: *Lights Out*; Grafos; Poliedros; Ensino Básico; Jogos.

ABSTRACT

SALGUEIRO JÚNIOR, Wallace Alves. **Lights Out Game in Polyhedral Graphs.** 2025. Master's dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, 2025.

The present work addresses a combinatorial game known as Lights Out, which originally corresponds to an electronic game played by a single player on a board represented by a 5x5 quadrangular grid in which each cell of the grid contains a button and an indicator light. When we press the button on a cell on this board, the light of that respective cell, as well as the lights of its neighboring cells, change state, that is, lit cells go off, while unlit cells light up. The initial configuration accepted in all trays, in this work, is one in which all cells are turned off. The objective of the Lights Out game is to activate a sequence of cells that result in a final state in which all cells are lit. Ideally, we aim to determine a minimum set of cells that, when pressed, change the states of all cells on the board, lighting it up completely. We investigated the game Lights Out in polyhedra through graph theory, relating a priori disconnected subjects. We opted for an approach not focused on ready-made activities but rather on investigating the graphs of each polyhedron in the game itself, formally presenting demonstrations of the properties that emerge from these investigations, leaving it up to the reader to use this tool in the production of their own activities.

Keywords: Lights Out; Graphs; Polyhedrons; Elementary Education; Games.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	13
2 - SOBRE POLIEDROS	20
2.1 - Poliedros Convexos	20
2.2 - Relação de Euler	20
2.3 - Os Poliedros de Platão	23
2.4 - Poliedros de Platão e Poliedros Regulares	25
2.5 - Prismas	26
2.6 - Pirâmides	27
2.7 - Bpirâmides	28
2.8 - Dualidade Face-Vértice	28
3 - SOBRE GRAFOS	30
3.1 - Apresentação do conceito intuitivo de Grafos	30
3.2 - Definições sobre Grafos	32
3.3 - Tipos de Grafos	32
3.3.1 - Grafos Regulares	32
3.3.2 - Grafos Conexos	33
3.3.3 - Grafos Bipartidos	33
3.3.4 - Grafos Planares	34
3.4 - Algumas Classes de Grafos	34
3.4.1 - Grafos Ciclos (C_n)	34
3.4.2 - Grafos Caminhos (P_n)	34
3.4.3 - Grafos Bipartidos Completos ($K_{p,q}$)	34
3.4.4 - Grafo <i>Grids</i> ($G_{p \times q}$)	34
3.5 - Grafos dos Poliedros de Platão	35
3.5.1 - Grafo do Tetraedro	35
3.5.2 - Grafo do Hexaedro	35

3.5.3 - Grafo do Octaedro	35
3.5.4 - Grafo do Dodecaedro	36
3.5.5 - Grafo do Icosaedro	36
3.6 - Grafos dos Prismas	36
3.7 - Grafos das Pirâmides	37
3.8 - Grafos das Bipirâmides	37
4 - SOBRE LIGHTS OUT	38
4.1 - Lights Out Clássico e suas regras	38
4.2 - Lights Out em Grafos	39
4.3 - Permutação dos acionamentos dos nós	41
4.4 - Estratégias para a obtenção de uma solução de um Lights Out	45
4.4.1 - Procurar acionar nós com o maior grau	45
4.4.2 - Evitar acionar nós com interseção de suas vizinhanças	46
4.4.3 - Possíveis valores de $\alpha(G)$ a partir dos graus dos nós de G	46
4.5 - Lights Out em alguns grafos preliminares	47
4.5.1 - Lights Out em Grafos Caminhos (P_n)	47
4.5.2 - Lights Out em Grafos Ciclos (C_n)	52
4.5.3 - Lights Out em Grafos Completos Simples (K_n)	52
4.5.4 - Lights Out em Grafos Completos Bipartido ($K_{a,b}$)	52
4.6 - Lights Out nos Grafos dos Poliedros de Platão	53
4.6.1 - Lights Out no Grafo do Tetraedro	53
4.6.2 - Lights Out no Grafo do Hexaedro	53
4.6.3 - Lights Out no Grafo do Octaedro	54
4.6.4 - Lights Out no Grafo do Dodecaedro	55
4.6.5 - Lights Out no Grafo do Icosaedro	55
4.7 - Lights Out nos Grafos dos Primas	57
4.7.1 - Lights Out nos Grafos dos Prismas de base n (n ímpar)	57

4.7.2 - <i>Lights Out</i> nos Grafos dos Prismas de base n (n par)	58
4.7.3 - <i>Lights Out</i> nos Grafos dos Prismas de base n (n múltiplo de 3)	60
4.7.4 - Resumo dos <i>Lights Out</i> dos Prismas	64
4.8 - <i>Lights Out</i> nos Grafos das Pirâmides	64
4.9 - <i>Lights Out</i> nos Grafos das Bipirâmides	65
4.9.1 - Solução Geral para <i>Lights Out</i> em Grafos de Bipirâmides	65
4.9.2 - <i>Lights Out</i> em Grafos de Bipirâmides n -gonais (n múltiplo de 4)	67
5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS	69
REFERÊNCIAS	72
APÊNDICE A – LIGHTS OUT EM POLIEDROS	73
APÊNDICE B – LIGHTS OUT ON SPHERICAL FULLERENES	80

1 - INTRODUÇÃO

O jogo **Lights Out** foi introduzido por Sutner [14], em 1989, no contexto da teoria de grafos. O jogo *Lights Out* pode ser visto como um jogo combinatório e é jogado por um único jogador originalmente em um tabuleiro representado por uma malha quadrangular 5x5 em que cada célula da malha contém um botão e uma luz indicadora. Ao pressionarmos o botão de uma célula deste tabuleiro a luz dessa respectiva célula assim como as luzes de suas células vizinhas trocam de estado, isto é, células acesas apagam-se, enquanto células apagadas se acendem.

A configuração inicial admitida em todos os tabuleiros, neste trabalho, é aquela em que todas as células se encontram apagadas. Sutner (1989) [14] mostrou que o *Lights Out* sempre terá solução (isto é: sempre será possível alterar o estado de todos os nós de um grafo, inicialmente desligado, para uma configuração final com todos os nós ligados). Antes e depois do trabalho de Sutner [14], houve versões eletrônicas de jogos análogos. Alguns deles foram: o *Merlin*, lançado pela *Parker Brothers* na década de 70, que consistia de um *grid* 3x3; o *XL-25*, produzido pela *Vulcan Electronics* em 1983; e o homônimo *Lights Out*, da *Tiger Electronics*, comercializado a partir de 1995. Estes dois últimos eram compostos de um *grid* 5x5. Na Figura 1, um exemplar do jogo eletrônico *Lights Out*.

Figura 01 – Lights Out Game of Tiger Electronics



Fonte: Artigo "Algumas Luminescências sobre o Jogo *Lights Out*" (2024).

O objetivo do jogo *Lights Out* é acionar uma sequência de células que resultem num estado final em que todas as células fiquem acesas. De forma ideal, objetivamos determinar um conjunto mínimo de células que ao serem pressionadas

trocam os estados de todas as células do tabuleiro, acendendo-o completamente. De um modo geral, aspiramos inserir o jogo *Lights Out* em um ambiente de Ensino Básico, propondo a sua jogabilidade a partir de poliedros. Apesar do jogo *Lights Out* ser um jogo solitário, a proposta que buscamos viabilizar é a de olhá-lo como um jogo cooperativo, vindo ao encontro de uma das competências específicas descritas na BNCC (Brasil, 2018) [3] que é a de fazer com que os alunos possam Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Neste sentido, Groff [9] defende que o ensino deveria ser mais baseado em habilidades e competências do que em disciplinas tradicionais. Groenwald e Timm [8] afirmam que a utilização de jogos, no ensino, permite que estudantes façam da aprendizagem um processo interessante e até divertido. Destacam ainda que existem essencialmente três aspectos que justificam a incorporação do jogo nas aulas: o caráter lúdico inerente aos jogos, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais.

Propomos investigar o presente trabalho através de uma perspectiva da problematização do Ensino de Matemática. Buscamos identificar, estimular e desenvolver uma prática problematizadora de argumentações combinatórias para alunos do Ensino Básico, tanto nos Ensinos Fundamental quanto no Ensino Médio. É possível pensar em cardápios didáticos distintos para ciclos distintos de acordo com a proposta de nosso jogo, ou seja, à luz do que as Bases Nacionais Comuns Curriculares preveem que seja discutido em cada série propomos a concepção e implementação do Jogo *Lights Out* sobre pontos de vistas adequadamente distintos.

Neste sentido, destacamos alguns aspectos pertinentes ao uso de um jogo combinatório no Ensino Fundamental que podem emergir do presente trabalho:

- a importância de despertar nos alunos a sensibilidade de que a Matemática pode ser vista e pensada de maneira lúdica, divertida e ao mesmo tempo desafiadora;
- desenvolver a tomada de decisão e, em seguida, a investigação/análise de qual acionamento é o mais apropriado (antecipar a tomada de decisão);

- a partir da tomada de decisão quais são as implicações que emergem daí. Neste sentido, a comparação entre tomadas distintas de decisões deve ser estimuladas;
- obtida uma solução, essa solução é ótima?

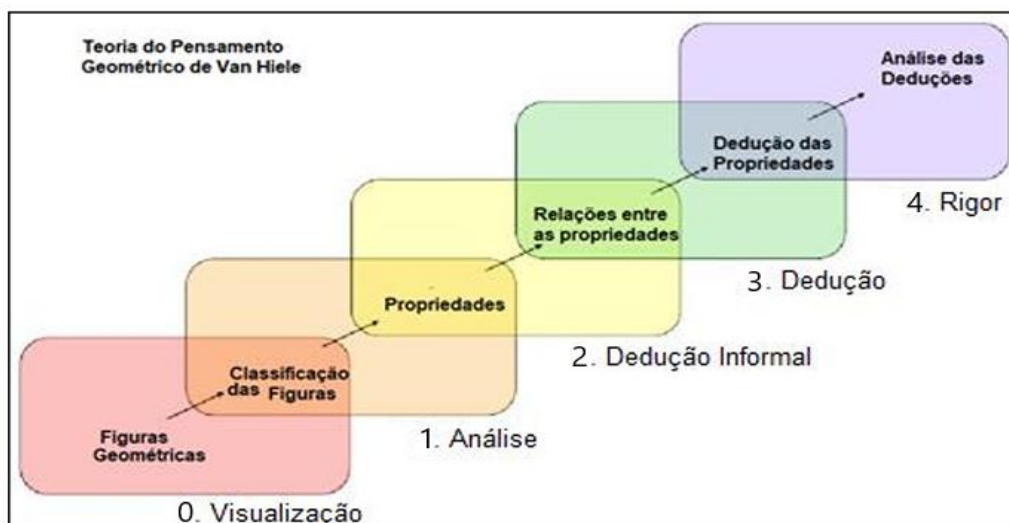
Para o Ensino Médio, prevemos outros aspectos tão complexos quanto os citados acima, por exemplo:

- estimular a visualização geométrica espacial;
- compreender a equivalência entre os poliedros e as respectivas imersões planares destes poliedros;
- encorajar experimentações através de acertos/erros para realizar uma análise das soluções;
- investigação/estudo de tabuleiros/grafos mais simples que servirão de alicerce para grafos mais robustos;
- relações entre possíveis soluções ótimas (a ordem de ativações altera o resultado obtido?);
- buscar generalizações do jogo.

Todos estes aspectos dialogam com a premissa básica difundida por Freire [7] que defende que ensinar não é transmitir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua produção ou sua construção. Desta maneira, proporcionaríamos condições ideais para que os alunos possam ter contato com argumentos e soluções combinatórias simples a robustas através de discussões lúdicas e motivadoras. Além disso, a proposta de explorar o jogo *Lights Out* a partir de grafos se dá na intenção de tornar o jogo mais acessível e democrático, pois o desenho de um grafo é algo que pode ser obtido através de um lápis e um papel, ou de uma canetinha e um quadro branco ou até mesmo através de um desenho no chão.

Podemos associar as várias fases de implementação às atividades específicas para cada ano de escolaridade, levando em consideração também o *Modelo de Van Hiele* e seus cinco níveis de compreensão: *visualização*, *análise*, *dedução informal*, *dedução formal* e *rigor*, segundo o artigo "Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele" de Kaleff [12].

Figura 02 – Diagrama representativo sobre os níveis de compreensão do modelo de Van Hiele



Fonte: Adaptado Lydia Hall Blog (2016)¹

No nível zero (estágio inicial), de acordo com Kaleff [12], os alunos raciocinam basicamente por meio de considerações visuais. Os conceitos geométricos são levados em conta como um todo, sem considerações explícitas das propriedades dos seus componentes. Além disso, propomos apresentar o jogo *Lights Out* em papel e digitalmente², sem a necessidade de mencionar que aquela estrutura é um grafo. Há também a possibilidade de apresentar uma versão mais simples do jogo à luz dos poliedros. Veja que esse processo também está de acordo com a BNCC do 4º e 5º anos de escolaridade do Fundamental I, que é explicitado pelas seguintes habilidades (Brasil, 2018, p. 291; 293; 295):

(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais;

(EF04MA17) Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais;

(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

¹ Disponível em: lydiahallblog.wordpress.com/2016/02/14/250comment-page-1/. Acesso em 2025

² Disponível em: https://perfectweb.org/ddo/solver/vale_puzzle.html. Acesso em 2025

Já no nível 1 (nível da análise), segundo Kaleff [12], os alunos raciocinam sobre conceitos geométricos, por meio de uma análise informal de suas partes e atributos através de observação e experimentação. Os estudantes começam a discernir características das figuras geométricas, estabelecendo propriedades, que são então usadas para conceituar classes e formas.

No nível 2, nível da dedução informal ou ordenação, mais uma vez segundo Kaleff [12], os alunos formam definições abstratas, podendo estabelecer inter-relações das propriedades nas figuras. Além disso, podem também distinguir entre a necessidade e a suficiência de um conjunto de propriedades no estabelecimento de um conceito geométrico.

A partir desses níveis já podemos apresentar o conceito de grafo, explorar a representação dos poliedros por meio de grafos, instigá-los por meio de perguntas para que eles deduzam informalmente algumas formas duais por meio da comparação entre os grafos, e introduzir as tabelas de produtos de números primos apresentados na Seção 4 desta dissertação. Estes níveis estão associados ao 6º e 7º anos de escolaridade, respaldados não só pelo contato com os poliedros (faces, arestas e vértices) mas também por suas planificações geométricas; sendo respaldado pelas habilidades da BNCC, descritas a seguir:

Ensino Fundamental II:

(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial. (BNCC, 2018, p.303);

(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros. (BNCC, 2018, p.307).

Os níveis 3 e 4 tratam da dedução formal e do rigor, nestes níveis Kaleff [12] prevê que os alunos desenvolvem sequências de afirmações deduzindo uma afirmação a partir de uma outra ou de outras. A relevância de tais deduções é entendida como um caminho para o estabelecimento de uma teoria geométrica. Os alunos raciocinam formalmente no contexto de um sistema matemático completo, além disso, avaliam vários sistemas dedutivos com um alto grau de rigor, comparam

sistemas baseados em diferentes axiomas e estudam várias geometrias na ausência de modelos concretos.

Estes níveis estão mais acessíveis aos alunos do Ensino Médio, não só pelo seu contato mais formal com os conceitos de Contagem e Geometria Espacial, mas também pelo contato direto ou indireto com sistemas axiomáticos, e demonstrações de algumas propriedades e/ou teoremas dos conceitos abordados e também de outros conceitos. Os conceitos de combinatória podem ser abordados no contexto da habilidade da BNCC do ensino médio:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. (BNCC, 2018, p.537)

Acreditamos que seria viável, no Ensino Fundamental, introduzir o jogo utilizando tabuleiros/grafos menos complexos, para que as discussões possam ser aderentes ao nível de matemática dos alunos. Propomos estudar o *Lights Out* a partir de grafos caminhos, ciclos, *caterpillars*, *grid 2x2* e *3x3*, sempre pensando que as discussões que emergirão do jogo serão bem-vindas. Já no Ensino Médio, onde os alunos já tiveram contato com Geometria Espacial e com os Métodos de Contagem tradicionais propomos tabuleiros/grafos e discussões mais aprofundadas, isto é, além de utilizar os grafos mencionados acima em que a solução seja menos complexa, também utilizar tabuleiros/grafos que são imersões planares de poliedros e discussões sobre a qualidade das soluções apresentadas.

De um modo mais amplo, o jogo *Lights Out* aborda aspectos primitivos da Matemática Combinatória em que a suposição de solução de um problema pode ser verificada, testada, comprovada ou refutada. No entanto, a demonstração formal de uma solução ótima, neste caso um conjunto de nós de cardinalidade mínima que, ao serem acionados, conduzem de uma configuração inicial toda apagada a uma configuração final toda acesa do tabuleiro (grafo) pode requerer do(a) jogador(a) maior esforço e sofisticação em seus argumentos.

A metodologia utilizada neste trabalho repousa em um vasto estudo bibliográfico acerca do jogo *Lights Out* à luz dos conteúdos tradicionalmente discutidos no Ensino Básico. Realizamos o estudo do jogo *Lights Out* sobre uma classe particular de grafos obtida a partir de poliedros comumente abordados na

Educação Básica, tais quais os poliedros de Platão (ou seja, o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro), assim como toda a classe de prismas, de pirâmides e de bipirâmides. Convém observar que vamos estudar as estruturas discretas destas figuras, por este motivo as medidas das arestas que compõem estes sólidos tornam-se irrelevantes. Neste cenário, estamos interessados na quantidade de faces que compõem cada poliedro (que, no grafo, serão representadas pelos nós), além das adjacências entre pares de faces (que serão representadas pelas arestas no grafo).

Será possível obter uma solução ótima (com o mínimo de acionamentos possível) para cada poliedro de Platão? Em uma solução ótima, um mesmo nó pode ser acionado mais de uma vez? A ordem dos nós que são acionados importa para obtermos uma solução? Existe uma estratégia que sempre gera uma solução para o *Lights Out* de prismas? E para as Bipirâmides? Há alguma relação entre a solução minimal de um poliedro e a solução do seu dual? Estes são questionamentos que propomos nos debruçar ao longo do texto para embasar as discussões e enriquecer os problemas levantados.

Convém destacar que parte deste trabalho, sob a forma de um Artigo, foi submetido ao Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), realizado em 2024. Tal Artigo, intitulado "Lights Out em Poliedros", foi aceito para apresentação oral, foi apresentado e foi publicado nos anais do respectivo congresso. Além disso, também em 2024, submetemos um outro Artigo sobre este mesmo tema ao *Latin American Workshop on Cliques in Graphs* (LAWCG) sob o título de *Lights Out on Spherical Fullerenes*, que também foi aceito para apresentação oral. Ambos os Artigos foram inseridos, respectivamente, como Apêndices A e B nessa Dissertação;

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: o Capítulo 2 trata de Geometria Espacial, onde são abordados os conceitos e as definições sobre poliedros, incluindo a dualidade face-vértice, no Capítulo 3 são apresentados conceitos básicos de teoria de Grafos, enquanto o Capítulo 4 destina-se a apresentar o jogo *Lights Out*, mostrá-lo em alguns grafos mais simples e então investigar o jogo *Lights Out* sobre poliedros (de Platão, prismas, pirâmides e bipirâmides).

2 - SOBRE POLIEDROS

Abordamos, neste capítulo, as definições dos poliedros utilizados como tabuleiros para jogar o *Lights Out*, além do conceito de dualidade face-vértice que será fundamental para a geração dos grafos desses poliedros.

2.1 - Poliedros Convexos

Para os nossos propósitos, usamos a definição de Dolce e Pompeo (2015, p.121) [5], que diz:

Consideremos um número finito n ($n \geq 4$) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:

- a) dois polígonos não estão num mesmo plano;
- b) cada lado de polígono é comum a dois, e somente dois, polígonos;
- c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semiespaço.

Nessas condições, ficam determinados n semiespaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semiespaços é chamado **poliedro convexo**.

Um poliedro convexo possui: **faces**, que são os polígonos convexos; **arestas**, que são os lados dos polígonos; e **vértices**, que são os vértices dos polígonos.

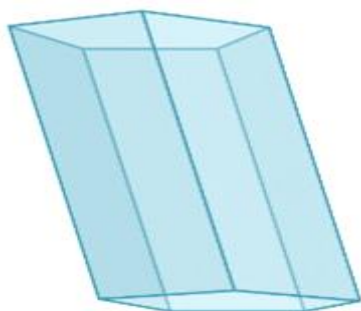
A reunião das faces é a **superfície** do poliedro.

2.2 - Relação de Euler

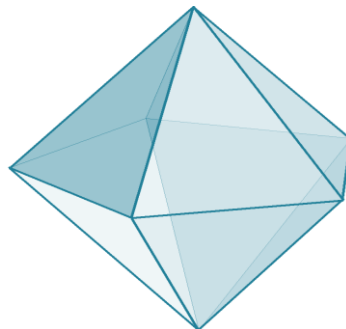
Seja V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces de um poliedro P (não necessariamente convexo), o valor $\chi(P) = V - A + F$ é chamado de **característica euleriana do poliedro**.

A seguir são apresentados alguns poliedros convexos e não-convexos, respectivamente, na Figura 03 e na Figura 04.

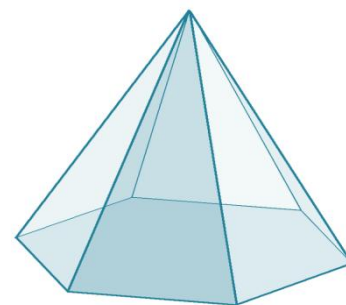
Figura 03 – Alguns exemplos de poliedros convexos e suas respectivas características



$$\begin{aligned} V &= 10 \\ A &= 15 \\ F &= 7 \\ \chi(P) &= 2 \end{aligned}$$



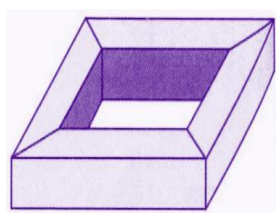
$$\begin{aligned} V &= 7 \\ A &= 15 \\ F &= 10 \\ \chi(P) &= 2 \end{aligned}$$



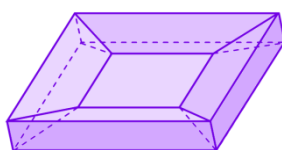
$$\begin{aligned} V &= 7 \\ A &= 12 \\ F &= 7 \\ \chi(P) &= 2 \end{aligned}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 04 – Alguns exemplos de poliedros não-convexos e suas respectivas características



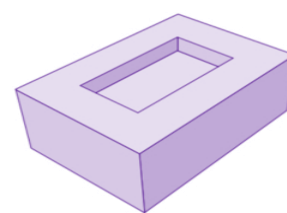
$$\begin{aligned} V &= 16 \\ A &= 32 \\ F &= 16 \\ \chi(P) &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= 12 \\ A &= 24 \\ F &= 13 \\ \chi(P) &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= 16 \\ A &= 24 \\ F &= 10 \\ \chi(P) &= 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= 16 \\ A &= 24 \\ F &= 11 \\ \chi(P) &= 3 \end{aligned}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

O Teorema da *Relação de Euler* nos diz que a característica χ de qualquer poliedro convexo P é sempre igual a 2. Isto é:

$$P \text{ é um poliedro convexo} \Rightarrow \chi(P) = V - A + F = 2$$

Demonstração do Teorema da Relação de Euler:

A demonstração que será utilizada aqui, foi baseada na prova contida nas páginas 122 e 123 do já referido livro de Dolce e Pompeo [5].

Antes, exclusivamente para os propósitos dessa demonstração, definimos o que é **superfície poliédrica limitada convexa aberta**:

Dada a superfície de um poliedro convexo P com V vértices, A arestas e F faces, ao retirarmos k faces de P ($1 \leq k < F$), de modo a gerar uma única abertura contínua sem faces, obteremos uma **superfície poliédrica limitada convexa aberta** S .

Agora, provamos por indução sobre F que vale a relação $\chi(S) = V - A + F = 1$ para toda superfície poliédrica limitada convexa aberta S . Esse fato será necessário para a demonstrarmos da Relação de Euler para poliedros convexos.

(i) Caso Base: $F = 1$

Neste caso, a superfície S_1 será apenas um polígono plano convexo com n lados.

Logo, $V = n$ (vértices do polígono) e $A = n$ (lados do polígono).

Portanto, $\chi(S_1) = V - A + F = n - n + 1 = 1$

(ii) Passo de Indução:

Hipótese de Indução: Admitindo que a relação vale para uma superfície S_f com f faces, a arestas e v vértices. Ou seja: $\chi(S_f) = V - A + F = v - a + f = 1$

Como a superfície S_f é aberta, podemos acrescentar 1 face com p lados (arestas), onde q desses lados (arestas) coincidam com as arestas já existentes, para obter uma outra superfície aberta S_{f+1} .

Dessa forma, a superfície S_{f+1} terá:

$(f + 1)$ faces;

$(a + p - q)$ arestas; (q arestas coincidiram)

$[v + p - (q+1)]$ vértices; ($q+1$ vértices coincidiram)

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \chi(S_{f+1}) &= V - A + F = [v + p - (q+1)] - (a + p - q) + (f + 1) = \\ &= v + p - q - 1 - a - p + q + f + 1 = v - a + f = 1. \end{aligned}$$

Com isso, pelo Princípio da Indução Matemática, provamos que a relação $\chi(S) = V - A + F = 1$ será sempre verdadeira para qualquer superfície poliédrica limitada convexa aberta S . \square

Enfim, para demonstrar a Relação de Euler $\chi(P) = V - A + F = 2$ em poliedros convexos, tomemos um poliedro convexo P qualquer (com V vértices, A arestas e F faces) e retiremos dele 1 de suas faces.

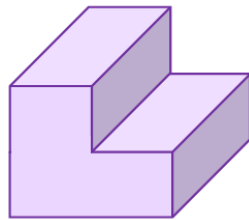
Assim, ficaremos com uma superfície poliédrica limitada convexa aberta (com V vértices, A arestas e $F - 1$ faces).

Portanto, vale a relação $V - A + (F - 1) = 1$.

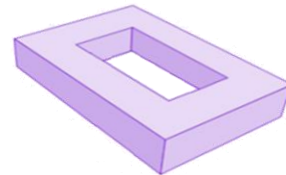
Logo, se P é um poliedro convexo, então $\chi(P) = V - A + F = 2$. \blacksquare

Note que a recíproca não é válida: se $\chi(P) = V - A + F = 2$, então o poliedro P não será necessariamente convexo (ou seja: $\chi(P)$ pode ser igual a 2 para um poliedro P não convexo), conforme exemplificado na Figura 05.

Figura 05 – Exemplos de poliedros não-convexos com característica euleriana igual a 2



$$\begin{aligned} V &= 12 \\ A &= 18 \\ F &= 8 \\ \chi(P) &= 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= 16 \\ A &= 24 \\ F &= 10 \\ \chi(P) &= 2 \end{aligned}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2.3 - Os Poliedros de Platão

Em Dolce e Pompeo (2015, p.127) [5], temos:

Um poliedro é chamado **poliedro de Platão** se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

- todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas;
- todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (m) de arestas;
- vale a relação de Euler ($V - A + F = 2$).

Existem exatamente 5 (cinco) classes de poliedros de Platão: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Demonstraremos, a seguir, esse fato de que há exatamente 5 (cinco) classes de poliedros, e quais são.

Demonstração:

Usando as 3 condições necessárias para um poliedro ser de Platão, temos:

a) Cada uma das F faces tem exatamente n arestas ($n \geq 3$). Como cada aresta pertence simultaneamente a duas faces, temos:

$$n \cdot F = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{n} \quad \text{(I)}$$

b) Cada um dos V ângulos poliédricos tem exatamente m arestas ($m \geq 3$). Como cada aresta contém dois vértices, temos:

$$m \cdot V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{m} \quad \text{(II)}$$

c) Vale a Relação de Euler para poliedros convexos. Portanto:

$$V - A + F = 2 \quad \text{(III)}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), e depois dividindo ambos os membros da igualdade por $2A$, e reorganizando as parcelas, obtemos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \Rightarrow \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{A} \quad (\text{IV})$$

Sabemos que $m \geq 3$ e $n \geq 3$. No entanto, se $m > 3$ e $n > 3$, então teríamos:

$$\left. \begin{array}{l} m > 3 \Rightarrow m \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \leq 0 \stackrel{(\text{IV})}{\Rightarrow} \frac{1}{A} \leq 0$$

Logo, m e n não podem ser simultaneamente maiores que 3. Ou seja: $m = 3$ ou $n = 3$. Isto significa que um poliedro de Platão possui, obrigatoriamente, triedros ou triângulos.

* **1º caso:** $m = 3$ (poliedro contendo triedros)

$$(\text{IV}) \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow n < 6$$

Portanto: se $m = 3$, então $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 5$. (Isto é: se o poliedro possui vértices triédricos, então ele possui faces triangulares ou quadrangulares ou pentagonais).

* **2º caso:** $n = 3$ (poliedro contendo triângulos)

$$(\text{IV}) \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} > 0 \Rightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Rightarrow m < 6$$


Portanto: se $n = 3$, então $m = 3$ ou $m = 4$ ou $m = 5$. (Isto é: se o poliedro possui faces triangulares, então ele possui vértices triédricos ou tetraédricos ou pentaédricos).

Conclusão: todas as possíveis classes de poliedros de Platão são obtidas pelos seguintes 5 pares ordenados (m, n) : $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$; $(4, 3)$ e $(5, 3)$.

Para saber quantas arestas (A) cada classe de poliedros tem, basta substituir os valores de m e n em (IV). Tendo encontrado os valores de A de cada classe, basta substituí-los em (I) e (II) para obter, respectivamente, os valores de F (número de faces) e V (número de vértices).

Efetando os cálculos conforme descritos anteriormente, concluímos que os únicos casos possíveis de poliedros de Platão são as 5 classes de poliedros organizadas na Quadro 01:

Quadro 01 – Os 5 poliedros de Platão

m	n	A	V	F	NOME	IMAGEM
3	3	6	4	4	Tetraedro	
3	4	12	8	6	Hexaedro	
4	3	12	6	8	Octaedro	
3	5	30	20	12	Dodecaedro	
5	3	30	12	20	Icosaedro	

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

O que conclui o que queríamos demonstrar. ■

2.4 - Poliedros de Platão e Poliedros Regulares

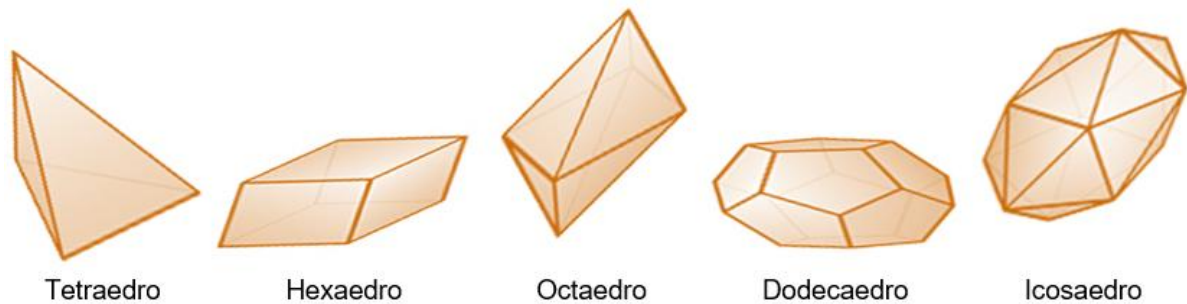
Note que as faces dos poliedros de Platão não precisam ser necessariamente polígonos regulares, assim como não há a necessidade de que os ângulos poliédricos tenham a mesma medida. Portanto, existe uma diferença entre poliedros de Platão e poliedros regulares.

De acordo com Dolce e Pompeo (2015, p.129) [5], "um poliedro convexo é **regular** quando:

- a) suas faces são polígonos regulares e congruentes;
- b) seus ângulos poliédricos são congruentes."

Nem todo poliedro de Platão é um poliedro regular (conforme exemplificado na Figura 06), mas todo poliedro regular é um poliedro de Platão. Por isso existem exatamente 5 tipos de poliedros regulares.

Figura 06 – Exemplos dos 5 poliedros de Platão que não são regulares



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Como o intuito deste trabalho é atuar sobre os grafos dos poliedros, então as medidas das arestas e dos ângulos poliédricos serão irrelevantes, sendo importante apenas saber quantos lados tem o polígono de cada face e quais faces são adjacentes. Portanto, este trabalho investigará o jogo *Lights Out* através das classes de poliedros de Platão.

2.5 - Prismas

Abordaremos, a seguir, uma classe especial de poliedros amplamente discutida no Ensino Básico, os prismas.

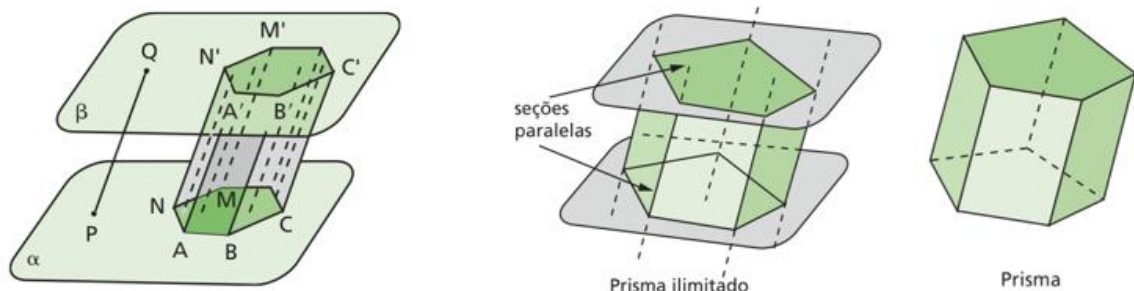
De acordo com Dolce e Pompeo (2015, p.136) [5]:

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) $ABCD\dots MN$ situado num plano α e um segmento de reta PQ , cuja reta suporte intercepta o plano α . Chama-se **prisma** (ou prisma convexo) à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ , com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semiespaço dos determinados por α .

Podemos também definir o prisma como segue:

Prisma convexo limitado ou **prisma convexo definido** ou **prisma convexo** é a reunião da parte do prisma convexo ilimitado, compreendida entre os planos de duas seções paralelas e distintas, com essas seções.

Figura 07 – Exemplos de prismas



Fonte: Dolce e Pompeo (2015, p. 136) [5]

Como já foi mencionado, utilizamos os poliedros apenas como base para a criação de seus respectivos grafos. Grafos esses que não levam em consideração os ângulos ou as medidas das arestas dos seus poliedros geradores. Por esse motivo, não nos atemos a qualquer classificação de prismas no que concerne a ser reto, oblíquo ou regular. Nossa única atenção aos prismas é em relação à natureza do prisma, isto é, se as suas bases são triângulos, quadriláteros, pentágonos, ... , n -ângulos (respectivamente denominados de prismas triangulares, quadrangulares, pentagonais, ... , n -gonais).

2.6 - Pirâmides

A definição de pirâmide conforme Dolce e Pompeo (2015, p.178) [5]:

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) $ABC...MN$ situado num plano α e um ponto V fora de α . Chama-se **pirâmide** (ou pirâmide convexa) à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do polígono.

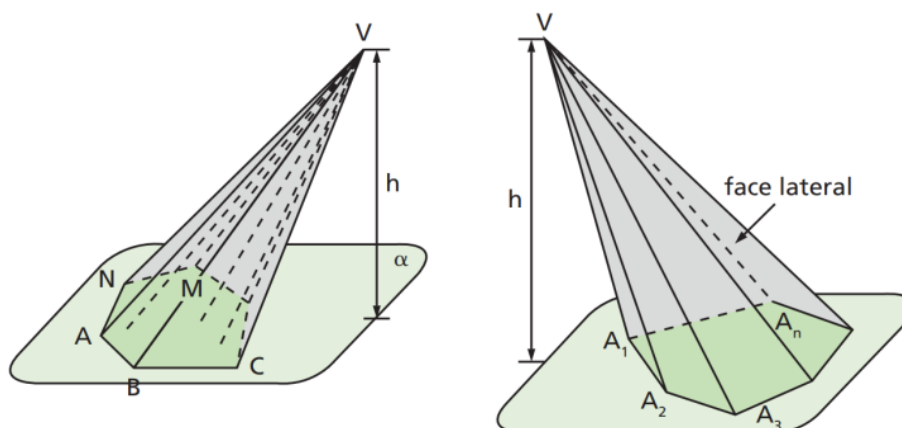
V é o vértice, e o polígono $ABC...MN$ a base da pirâmide.

Podemos também definir a pirâmide como segue:

Pirâmide convexa limitada ou **pirâmide convexa definida** ou **pirâmide convexa** é a parte da pirâmide ilimitada que contém o vértice quando se divide essa pirâmide pelo plano de uma seção, reunida com essa seção.

Abaixo, na Figura 08 pode-se ver os exemplos de pirâmides contidos em [11]:

Figura 08 – Geração de Pirâmides

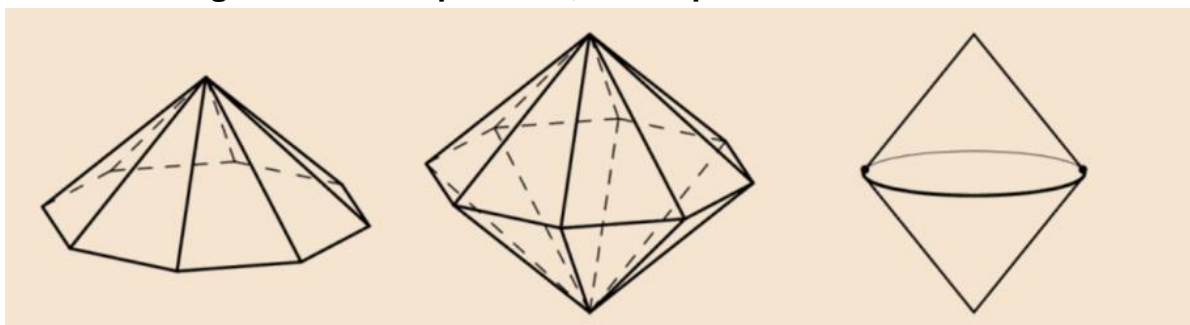


Fonte: Dolce e Pompeo, 2015, p. 178 [5]

2.7 - Bipirâmides

A partir de G. Polya (1954, p.138) [13] e de J. M. Aarts (2008, p.303) [1], e para os objetivos desse trabalho, definiremos bipirâmides da seguinte maneira: dadas duas pirâmides de bases congruentes e simétricas, uma **bipirâmide**, também conhecida como **dipirâmide**, consiste no poliedro gerado a partir da justaposição das bases dessas duas pirâmides.

Figura 09 – Uma pirâmide, uma bipirâmide e um bicone



Fonte: Livro *Plane and Solid Geometry*, de J. M. Aarts, página 303 (2008) [1]

2.8 - Dualidade Face-Vértice

Dados dois poliedros, dizemos que um é dual do outro ou que os poliedros são duais, quando um dos poliedros pode ser inscrito no outro, de maneira que os vértices do poliedro inscrito incidam no interior de cada uma das faces do outro poliedro. Uma definição mais precisa, dada por Grünbaum [10] é fornecida a seguir:

Dizemos que dois poliedros convexos P e Q são **duais** um do outro se existe uma bijeção f da família de vértices e faces de P na família de faces e vértices de Q , que satisfaz as seguintes propriedades:

- a) Se v é um vértice de P , então $f(v)$ é uma face de Q ;
- b) Se F é uma face de P , então $f(F)$ é um vértice de Q ;
- c) v é vértice da face F de P se, e somente se, $f(F)$ é vértice da face $f(v)$ de Q .

Desse modo, a quantidade de vértices de P é a quantidade de faces de Q (e vice-versa) e o número de arestas de P é igual ao de Q . Além disso, cada face n -gonal de P se transforma num vértice n -édrico de Q ; assim como cada vértice m -édrico de P se transforma numa face m -gonal de Q ; e ainda: cada aresta que conecta dois vértices v_1 e v_2 de P se transforma numa aresta que pertence simultaneamente às faces $f(v_1)$ e $f(v_2)$ de Q ; e cada aresta que pertence simultaneamente a duas faces F_1 e F_2 de P se transforma numa aresta que conecta os dois vértices $f(F_1)$ e $f(F_2)$ de Q .

A seguir, a Quadro 02 apresenta todas as classes de poliedros analisadas neste trabalho e suas correlatas classes duais.

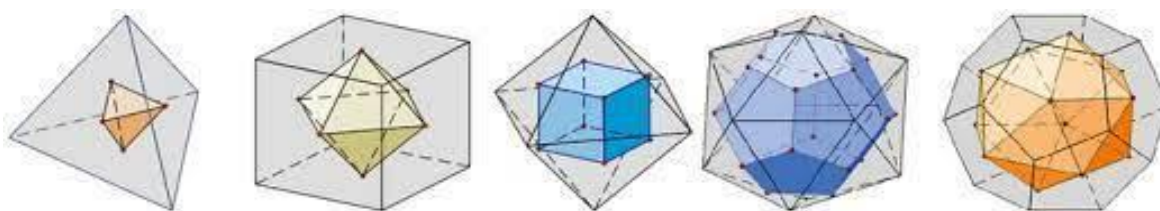
Quadro 02 – As classes de poliedros abordadas nesse trabalho e suas correspondentes classes duais

Classe de poliedro	Classe dual correspondente
Prisma de base n	Bipirâmide de base n
Pirâmide de base n	Pirâmide de base n [auto dual]
Bipirâmide de base n	Prisma de base n
Tetraedro (pirâmide de base triangular)	Tetraedro [auto dual]
Hexaedro (prisma de base quadrangular)	Octaedro (bipirâmide de base quadrangular)
Octaedro (bipirâmide de base quadrangular)	Hexaedro (prisma de base quadrangular)
Dodecaedro	Icosaedro
Icosaedro	Dodecaedro

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na Figura 10, pode-se ver 5 poliedros de Platão inscritos em seus correlacionados poliedros duais.

Figura 10 – Os 5 poliedros de Platão, cada um inscrito no seu respectivo dual



Fonte: Aula Aberta de Matemática (2024)³

³ Disponível em: <https://matematicasiesoja.wordpress.com/wp-content/uploads/2020/04/0a1-98.png> . Acesso em 2024

3 - SOBRE GRAFOS

Com o intuito de embasar todos os resultados sobre *Lights Out* discutidos no Capítulo 4, apresentamos definições e propriedades acerca de Teoria de Grafos. As definições e resultados foram baseados em Bond e Murty (1989) [2] e Jurkiewicz (2009) [11].

3.1 - Apresentação do conceito intuitivo de Grafos

A maioria de nós já se deparou, por exemplo, com uma figura, no trem ou metrô, onde cada "bolinha" simboliza uma estação e cada "linha" representa o caminho entre uma estação e outra, como vemos na Figura 11. Essa figura, composta por "bolinhas" conectadas por "linhas" é um exemplo de um grafo. Existem várias aplicações de grafos, como: descrever as conexões de amizades em redes sociais; simbolizar moléculas químicas; representar mapas para analisar rotas, distâncias, ou solucionar o Problema das 4 Cores; descrever árvores de possibilidades em Análise Combinatória e árvores de probabilidades; além de serem utilizados em algoritmos de programação computacional; dentre outros diversos assuntos.

Figura 11 – Mapa com as linhas do Metrô-Rio e suas estações

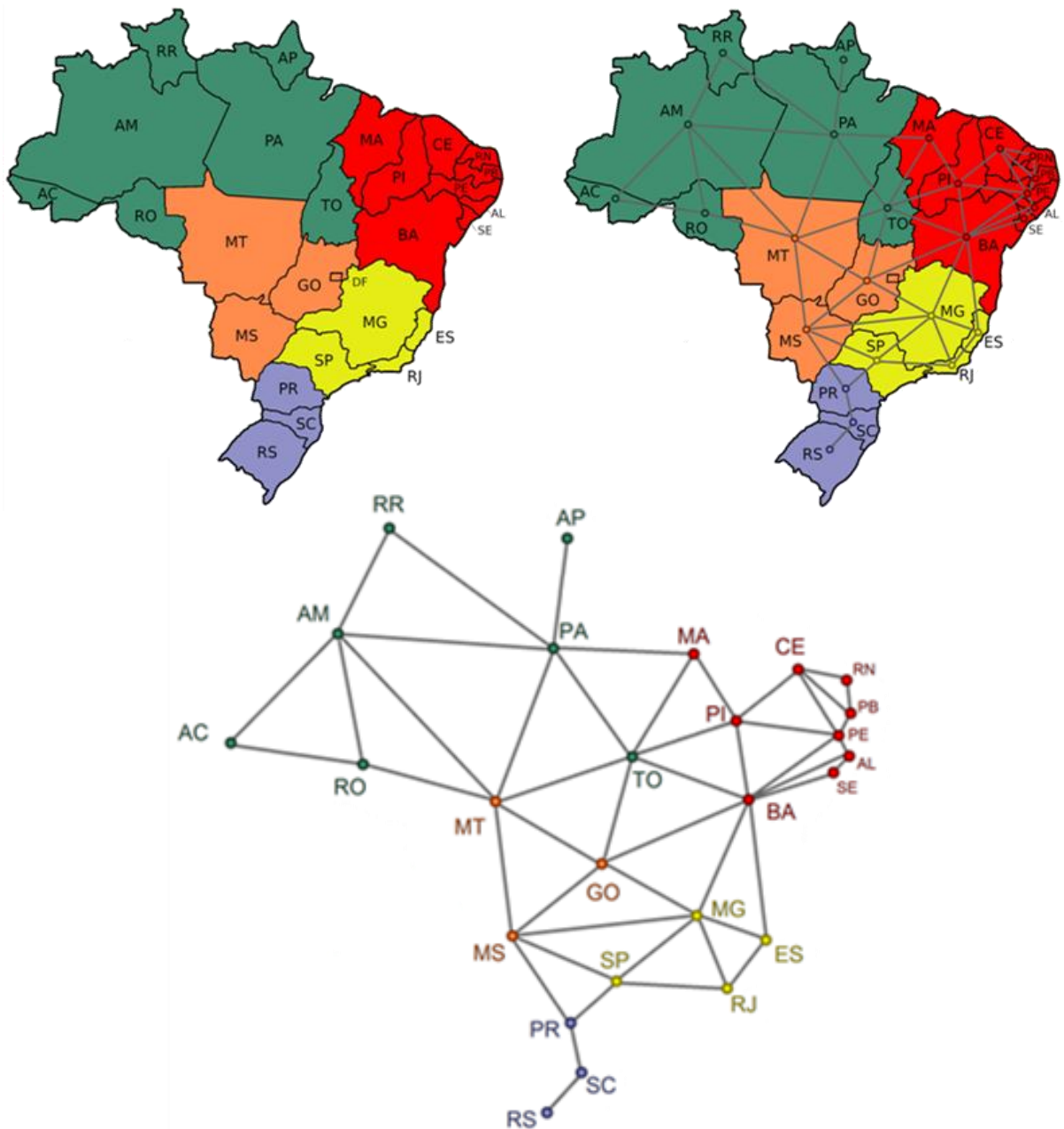


Fonte: Wikipedia (2025)⁴

⁴ Disponível em: https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Mapa_de_metro_rio.png. Acesso em 2025.

Neste trabalho, usamos grafos, semelhante a sua utilização em mapas, a qual exprimimos regiões por meio das "bolinhas" (chamadas de nós ou vértices) e suas conexões através das "linhas" (chamadas de arestas), conforme a Figura 12, onde à esquerda temos o mapa do Brasil com seus estados destacados; à direita o mesmo mapa com sua representação por grafo sobre ele; e abaixo no centro a representação planar do seu correspondente grafo, de modo que estado é representado por um nó e dois estados adjacentes são representados por dois nós conectados por uma aresta.

Figura 12 – Mapa do Brasil e sua representação por grafo



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3.2 - Definições sobre Grafos

As definições a seguir foram embasadas em Bond e Murty (1989) [2].

Um **grafo** $G = (V(G), E(G))$ consiste de um conjunto não vazio $V(G)$ de **vértices** ou **nós** e de um conjunto $E(G)$ de **arestas**, de modo que cada aresta $e \in E(G)$ é um par não ordenado de nós distintos, isto é, para toda aresta $e \in E(G)$ existem dois nós distintos $u \in V(G)$ e $v \in V(G)$ e tais que $e = \{u, v\}$ ou simplesmente $e = uv = vu$. Quando não houver risco de ambiguidade usamos $G = (V, E)$ ou simplesmente G . Neste caso, dizemos que os nós u e v são **adjacentes** ou **vizinhos** e que a aresta e é **incidente** aos nós u e v ou que u e v são as **extremidades** da aresta e . Duas arestas que possuem uma extremidade em comum são chamadas de **arestas adjacentes**.

Neste trabalho, todos os grafos considerados são **simples**, isto é, não possuem arestas múltiplas ou **paralelas** (arestas distintas que unem o mesmo par de nós) ou **laços** (aresta que une um nó a ele mesmo). Quando não houver risco de ambiguidade usaremos $G = (V, E)$ ou simplesmente apenas G para denotar o grafo $G = (V(G), E(G))$.

O **grau** de um nó v em G , representado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes à v . Denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ os graus mínimo e máximo, respectivamente, dos nós do grafo G .

3.3 - Tipos de Grafos

Apresentamos nesta seção alguns tipos de grafos estratégicos para este trabalho, são eles: os grafos regulares e completos, conexos, bipartidos e planares.

3.3.1 - Grafos Regulares

De acordo com Jurkiewicz (2009) [11], um grafo é regular quando todos os seus nós têm o mesmo grau. Um grafo é **k-regular** se todos os seus nós têm grau k . Um grafo 3-regular é chamado de grafo **cúbico**. Se todos os nós de um grafo têm graus menores que 3, então ele é chamado de grafo **subcúbico**. Um grafo em que cada par de vértices distintos está unido por uma aresta é chamado de grafo **completo**. Todo grafo completo com n nós é $(n-1)$ -regular e é denotado por K_n .

3.3.2 - Grafos Conexos

Para definirmos um grafo conexo é necessário definirmos a priori alguns conceitos elementares. Dado $k \geq 0$, um **passeio** $P = v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 v_4 \dots v_{k-1} e_{k-1} v_k e_k v_{k+1}$ é uma sequência intercalada de nós e arestas de um grafo, tal que $v_i \in V$, $e_i \in E$, e $e_i = v_i v_{i+1}$ ($1 \leq i \leq k$). Neste caso, o comprimento de P é igual a k , que corresponde ao seu número de arestas com ou sem repetição. Denotamos o passeio somente pela sua sequência $(v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$ subjacente de nós. Quando um passeio não possui arestas repetidas, o chamamos de **trilha**. Quando o passeio não repete nós, o chamamos de **caminho**. Em outras palavras, dados dois nós u e v de um grafo $G = (V, E)$, um caminho entre u e v em G (ou caminho que conecta u à v em G) é uma sequência $P = L_0 L_1 \dots L_k$, em que $u = L_0$; $v = L_k$; os nós L_i são distintos; e $L_i L_{i+1} \in E$. O caminho geodésico ou caminho mínimo ou menor caminho ou caminho entre dois nós de um grafo é o caminho de menor comprimento dentre todos os caminhos que conectam esses nós. Um grafo G é **conexo** quando existe um caminho entre qualquer par de nós de G , caso contrário dizemos que G é **desconexo**.

A **distância** entre dois nós u e v de um grafo conexo $G = (V, E)$ é representada por $dist_G(u, v)$ ou por $dist(u, v)$ (se não houver risco de ambiguidade) e é definida como o comprimento do menor caminho entre u e v em G . O **diâmetro** de um grafo conexo, representado por $diam(G)$, é dado pela máxima distância entre dois nós quaisquer do grafo, ou pode ser visto como o comprimento do maior caminho geodésico entre dois nós. Dois nós $u, v \in V(G)$ são ditos nós **diametralmente opostos** quando $dist(u, v) = diam(G)$.

3.3.3 - Grafos Bipartidos

De acordo com Jurkiewicz (2009) [11], um grafo **bipartido** é um grafo em que o conjunto V de nós pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 tal que toda aresta de G tem uma extremidade em V_1 e outra em V_2 . De acordo com Bond e Murty (1989) [2], um grafo $G = (V, E)$ é bipartido quando é possível particionar o seu conjunto de nós V em dois subconjuntos X e Y de modo que cada uma de suas arestas têm uma extremidade em X e a outra extremidade em Y . A partição (X, Y) é chamada de bipartição do grafo G . Uma caracterização para os grafos bipartidos é a ausência de ciclos ímpares, isto é, um grafo é bipartido se e somente se ele não possui ciclos de comprimento ímpar. A demonstração deste fato pode ser obtida nas bibliografias citadas.

3.3.4 - Grafos Planares

Um grafo G é **planar** se existe uma representação (desenho, imersão) de G no plano de modo que as arestas se encontrem somente nos nós, isto é, de modo que as arestas não se cruzem. Uma tal representação de G é dita plana ou planar. Uma representação planar divide o plano em regiões chamadas **faces**. Existe sempre uma única face chamada **externa** ou **infinita**, que não está limitada (tem área infinita). Dado um grafo planar G definimos o **grafo dual** de uma representação plana $D(G)$ de G , representado por $(D(G))^*$, da seguinte forma: a cada face f de $D(G)$ corresponde um vértice f^* de $(D(G))^*$, e a cada aresta e de $D(G)$ corresponde uma aresta e^* de $(D(G))^*$ de modo que dois nós f^* e g^* de $(D(G))^*$ são ligados por uma aresta e^* se e somente se as faces f e g em $D(G)$ são separadas pela aresta e .

3.4 - Algumas Classes de Grafos

Nesta seção, apresentamos alguns exemplares de grafos que serviram ou servirão de tabuleiro para os trabalhos estudados e/ou propostos: grafos ciclos, caminhos, bipartidos completos e *grids*.

3.4.1 - Grafos Ciclos (C_n)

Um **grafo ciclo** é um grafo conexo, regular de grau 2. Utilizamos a notação C_n para indicar um ciclo de comprimento n (com n nós e n arestas).

3.4.2 - Grafos Caminhos (P_n)

Segundo Jurkiewicz (2009) [11], um **grafo caminho** ou simplesmente **caminho** é obtido a partir de um ciclo do qual retiramos uma aresta. Assim, o grafo caminho P_n é obtido retirando uma aresta do ciclo C_n .

3.4.3 - Grafos Bipartidos Completos ($K_{p,q}$)

Um grafo **bipartido completo**, cujas partições (X, Y) de seu conjunto de nós V têm cardinalidade p e q , respectivamente, é um grafo bipartido em que cada um dos p nós de X é adjacente a cada um dos q nós de Y .

3.4.4 - Grafo *Grids* ($G_{p \times q}$)

Uma **grade** de dimensão $p \times q$ ou um **grid** $p \times q$ é um grafo cujos nós são os pontos de coordenadas inteiras (x, y) tal que $1 \leq x \leq p$ e $1 \leq y \leq q$ e tal que dois nós são adjacentes se, e somente se, a distância entre os pontos é igual a 1.

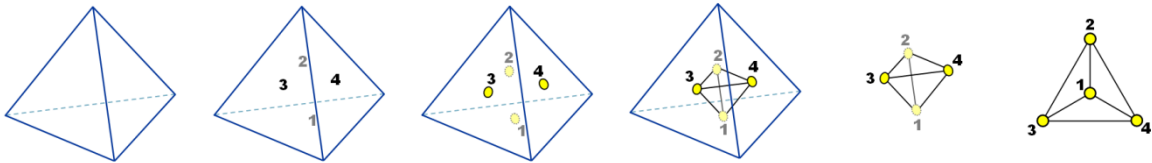
3.5 - Grafos dos Poliedros de Platão

A seguir, apresentamos a geração dos grafos dos poliedros de Platão, onde cada nó do grafo foi obtido por uma das faces do poliedro e cada aresta do grafo representa a conexão entre duas faces adjacentes (isto é, a aresta do poliedro).

3.5.1 - Grafo do Tetraedro

O tetraedro (pirâmide de base triangular) gera um grafo completo de 4 nós, o K_4 .

Figura 13 – O tetraedro e a construção de seu grafo

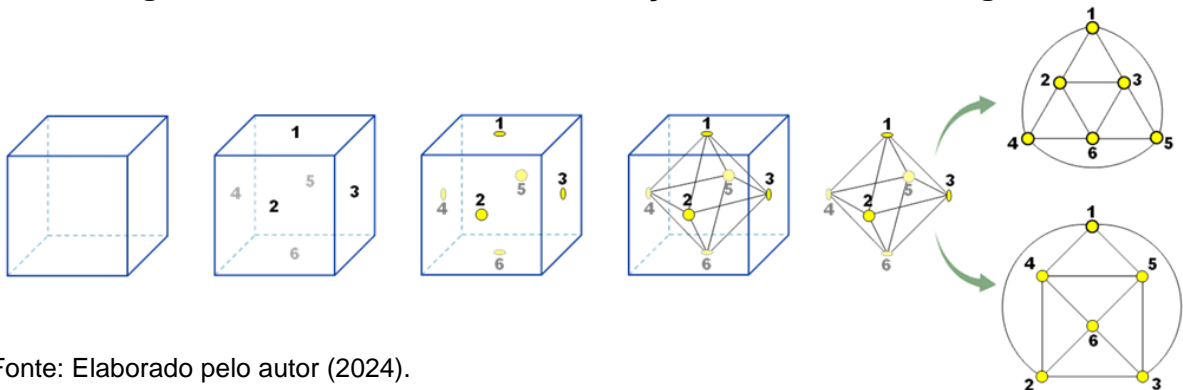


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3.5.2 - Grafo do Hexaedro

Para o hexaedro (cubo), apresentamos dois grafos isomorfos. Evidentemente, ambos contendo 6 nós.

Figura 14 – O hexaedro e a construção de dois dos seus grafos

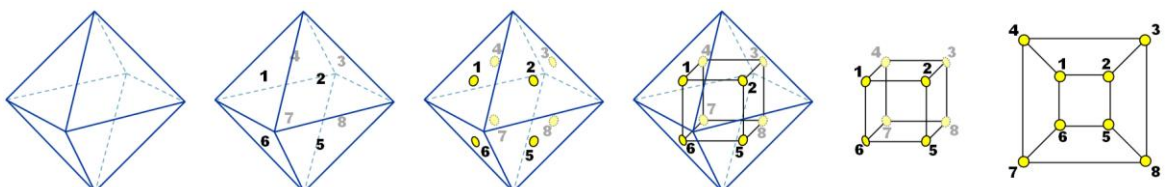


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3.5.3 - Grafo do Octaedro

A seguir, o octaedro (bipirâmide de base quadrada) produz um grafo de 8 nós (que pode ser apresentado como dois quadrados ligados por seus nós).

Figura 15 – O octaedro e a construção de seu grafo

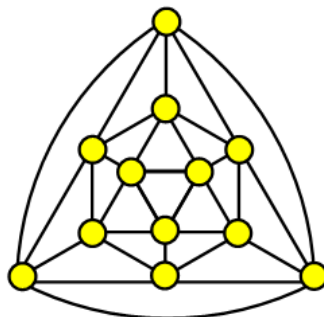


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3.5.4 - Grafo do Dodecaedro

O dodecaedro gera um grafo 5-regular com 12 nós.

Figura 16 – O grafo do dodecaedro

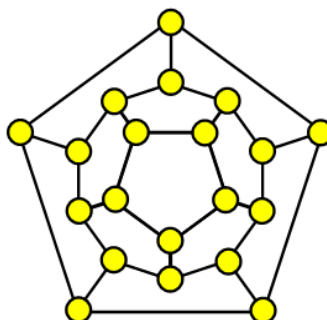


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

3.5.5 - Grafo do Icosaedro

Terminando os poliedros de Platão, o icosaedro origina um grafo cúbico com 20 nós.

Figura 17 – O grafo do icosaedro

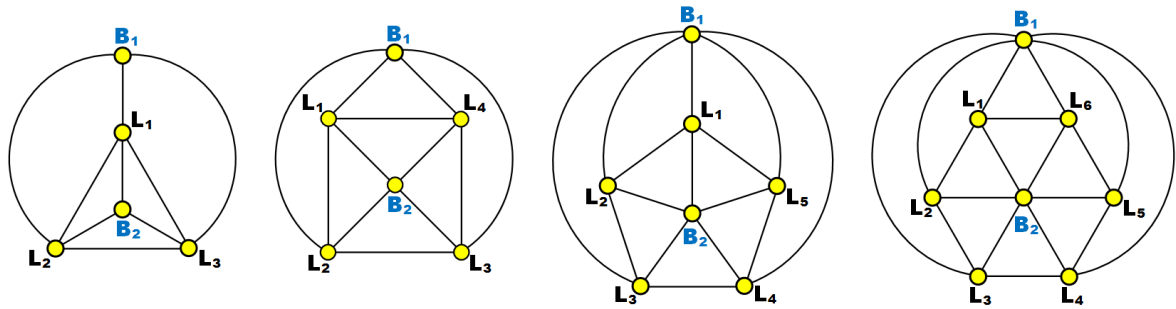


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

3.6 - Grafos dos Prismas

Uma vez que, para o *Lights Out*, os grafos não possuem pesos associados nas suas arestas e os nós recebem apenas as informações de aceso/ligado ou apagado/desligado, então, para nossos propósitos, não será relevante as medidas das arestas dos prismas. Isto é, a única pertinência recai sobre quantos lados possui cada base do prisma, não importando se tal base é um polígono regular ou não, nem a altura do prisma, muito menos se o prisma é reto ou oblíquo, pois dois prismas n -gonais fornecerão o mesmo grafo, mesmo que a base de um deles seja regular e a do outro prisma não, ou se um dos prismas tem altura várias vezes maior que a do outro, e tão pouco se um deles é reto e o outro oblíquo.

Figura 18 – Os grafos dos prismas de bases triangular, quadrangular, pentagonal e hexagonal

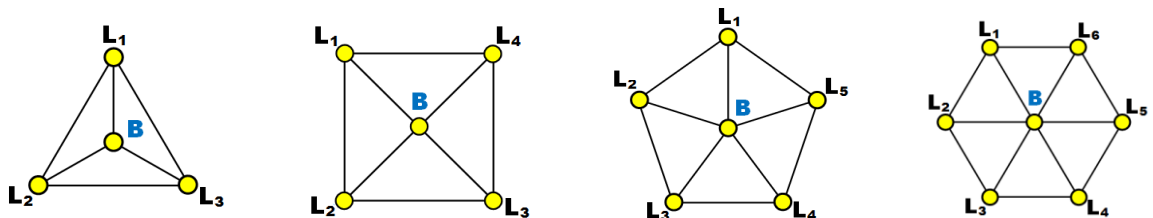


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3.7 - Grafos das Pirâmides

Como, para os objetivos desta Dissertação, estamos elaborando grafos a partir da dualidade face-vértice, e a pirâmide é um poliedro autodual, cada pirâmide de base n -gonal apresentará um nó circundado de um ciclo de n nós (com cada um desses n nós conectado ao nó do centro) como seu correspondente grafo (onde o nó central representa a base n -gonal da pirâmide e os n nós ao seu redor simbolizam suas n faces triangulares laterais).

Figura 19 – Os grafos das pirâmides de bases triangular, quadrangular, pentagonal e hexagonal

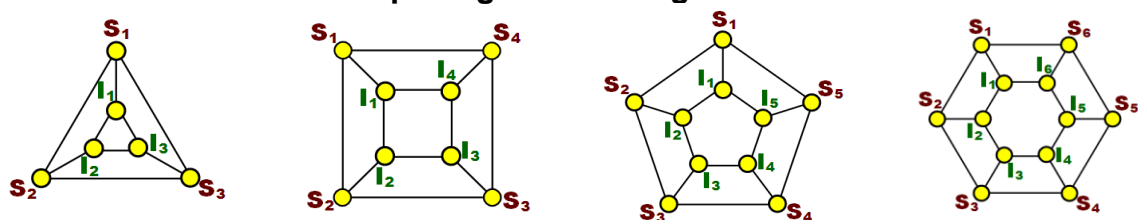


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3.8 - Grafos das Bipirâmides

A bipirâmide n -gonal é o poliedro dual do prisma n -gonal. Assim sendo, o grafo que utilizaremos para representar uma bipirâmide n -gonal será formado por dois ciclos de n nós, um interno e outro externo, com seus nós homólogos de cada ciclo conectados entre si.

Figura 20 – os grafos das bipirâmides triangular, quadrangular, pentagonal e hexagonal



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4 - SOBRE *LIGHTS OUT*

Abordamos, neste capítulo, o jogo *Lights Out* a partir de poliedros e de grafos. Discorreremos sobre a versão clássica do jogo, em que a configuração inicial do tabuleiro se encontra completamente apagada/desligada ou acesa/ligada. Inicialmente lançamos um olhar para o jogo tomando como tabuleiro grafos caminhos, ciclos e *grids*, para então abordarmos o cerne desta dissertação que é discutir o jogo *Lights Out* clássico sobre os poliedros de Platão, sobre os prismas, sobre as pirâmides e bipirâmides e seus respectivos grafos. Neste sentido, exibimos soluções ótimas (minimais), cuja cardinalidade é representada por $\alpha(G)$, sendo G o grafo considerado como tabuleiro, dual de algum sólido poliédrico.

4.1 - *Lights Out* Clássico e suas regras

O jogo *Lights Out* é um *puzzle* baseado no homônimo jogo eletrônico que é jogado por um único jogador em uma malha 5x5 em que cada célula contém um botão e uma luz indicadora, e ao pressionarmos o botão de uma célula deste tabuleiro a luz dessa respectiva célula assim como as luzes das suas células vizinhas trocam de estado, isto é, células acesas apagam-se, enquanto células apagadas se acendem. Neste jogo, dada uma célula, são consideradas como suas vizinhas as células que estão imediatamente à esquerda, à direita, acima e abaixo (caso existam células nessas posições), não sendo consideradas como vizinhas as células na diagonal.

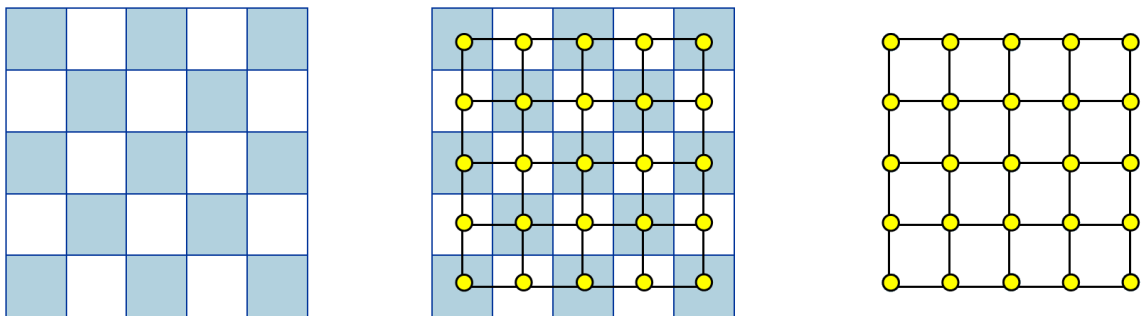
Na versão clássica do jogo *Lights Out* todas as células encontram-se inicialmente apagadas e o objetivo do jogo é acionar uma sequência de células que resultem num estado final em que todas as células estejam acesas. Além de determinar uma configuração final oposta à configuração inicial, ou seja, uma configuração em que todas as células se encontram acesas, desejamos que a quantidade de células diretamente acionadas seja a menor possível. A esta solução damos o nome de solução ótima ou minimal.

4.2 - *Lights Out* em Grafos

Como vimos, o jogo *Lights Out* foi originalmente concebido sobre uma grade (*grid*) 5x5. Este jogo propunha que as células do seu *grid* fossem acionadas de modo a obter a configuração final desejada, a partir das regras já mencionadas. Quando modelamos este *grid* em um grafo, o jogo *Lights Out* passa a ser considerado sobre os nós deste grafo, isto é, desejamos acender todos os seus nós que se encontram inicialmente apagados. Esta reinterpretação do jogo se deve, pois, as células do *grid* passam a ser representadas por nós no respectivo grafo.

Abaixo, na Figura 21, apresentamos o tabuleiro 5x5 e a construção do seu correspondente grafo, o *grid* $G_{5 \times 5}$, onde cada casa é representada por um nó e duas casas adjacentes do tabuleiro são representadas por dois nós conectados por uma aresta.

Figura 21 – O tabuleiro 5x5 e a construção do seu grafo (*grid* 5x5)



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

O *Lights Out* pode ser generalizado para tabuleiros de formatos diversos, que por sua vez poderão ser acessível e simplificada e representados por grafos, de modo que as células do tabuleiro são representadas pelos nós e as adjacências entre as células são representadas pelas arestas do grafo. Por esse motivo, a partir de agora, analisaremos a alteração dos estados dos nós desses grafos (de desligados/apagados para ligados/acesos e vice-versa).

Algumas definições importantes:

Seja o grafo $G = (V, E)$, onde:

- $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é o conjunto de nós de G (e, portanto, $\#V = n$);
- $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ é o conjunto de arestas de G (e, portanto, $\#E = m$).

No *Lights Out*, cada nó v_i de G possui um **estado de luz** $L(v_i) \in \{0, 1\}$; onde $L(v_i) = 0$ indica que v_i está desligado/apagado; e $L(v_i) = 1$ significa que v_i está ligado/aceso. Nas próximas figuras deste capítulo, usaremos a cor cinza para simbolizar um nó desligado/apagado e a cor amarela para um nó ligado/aceso.

Para os estudos nesta Dissertação, trataremos de grafos cuja configuração inicial é tal que todos os seus nós estejam apagados/desligados (ou seja: $C_{\text{inicial}} = \{L(v_i) = 0 \mid v_i \in V\}$), e objetivaremos uma configuração final em que todos os nós estejam acesos/ligados (isto é: $C_{\text{final}} = \{L(v_i) = 1 \mid v_i \in V\}$).

O **acionamento** de um nó v_i de G , resulta na ação de alternar o seu estado de luz (de 0 para 1 ou vice-versa) e de todos os nós da vizinhança fechada $N_G[v_i]$. Por exemplo, se v_i estiver ligado/aceso ($L(v_i) = 1$) ao ser acionado seu estado de luz será alternado para desligado/apagado ($L(v_i) = 0$), e todos os nós de sua vizinhança fechada também terão seus estados de luz alternados, os ligados/acesos serão desligados/apagados e os desligados/apagados serão ligados/acesos.

Seja $(v_k)_G$ uma sequência de k nós de $V(G)$ que, ao serem acionados, alteram o *Lights Out* de G , de uma configuração inicial $C_{\text{inicial}} = \{L(v_i) = 0 \mid \forall v_i \in V(G)\}$ para uma configuração final $C_{\text{final}} = \{L(v_i) = 1 \mid \forall v_i \in V(G)\}$, que a chamaremos de **sequência-solução** de G ; e seja $S_{(v_k)_G}$ ou S_G (ou simplesmente S , caso não haja ambiguidade) o conjunto formado pelos k nós dessa sequência-solução (v_k) . Quando nos referirmos a **uma solução** do *Lights Out* de um grafo G – mesmo que estivermos apresentando uma sequência-solução (v_k) de nós – estaremos, de fato, nos referindo ao conjunto $S_{(v_k)}$ (cuja cardinalidade $\#S_{(v_k)}$ será igual a k , significando a quantidade de nós que foram acionados nessa solução).

Uma **solução ótima** do *Lights Out* de um grafo G será um conjunto $S_{(v_k)}$ com a menor cardinalidade possível. Denotaremos por $\alpha(G)$ (ou simplesmente α) a cardinalidade dessa menor solução possível do *Lights Out* de G .

Algumas desigualdades importantes:

- (i) Acionar um mesmo nó q vezes é o mesmo que: acioná-lo 1 única vez, caso q seja ímpar; ou não acioná-lo vez alguma, caso q seja par. Portanto: $1 \leq k \leq n$.
- (ii) Como a permutação dos acionamentos dos nós de (v_k) não altera a configuração final do *Lights Out* (fato esse que será demonstrado em 4.3); e como não existem nós repetidos em (v_k) ; segue que: $1 \leq \alpha \leq k \leq n$.

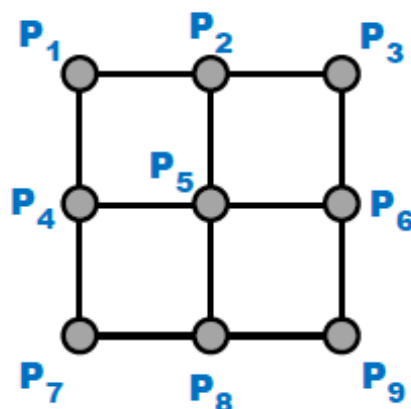
4.3 - Permutação dos acionamentos dos nós

Agora, será demonstrado que, para qualquer grafo, não importa a ordem da sequência dos nós acionados que gera uma solução. Isto é, dada uma sequência de nós que acionados transforma um grafo de uma configuração inicial toda apagada para uma configuração final toda acesa, uma permutação qualquer da ordem desses acionamentos também acarreta no mesmo resultado final exitoso.

Antes da demonstração, analisemos um exemplo.

Tomemos o grafo de um *grid* 3×3 , cujos nós nomearemos de P_1, P_2, \dots, P_9 , de forma arbitrária, conforme a Figura 22.

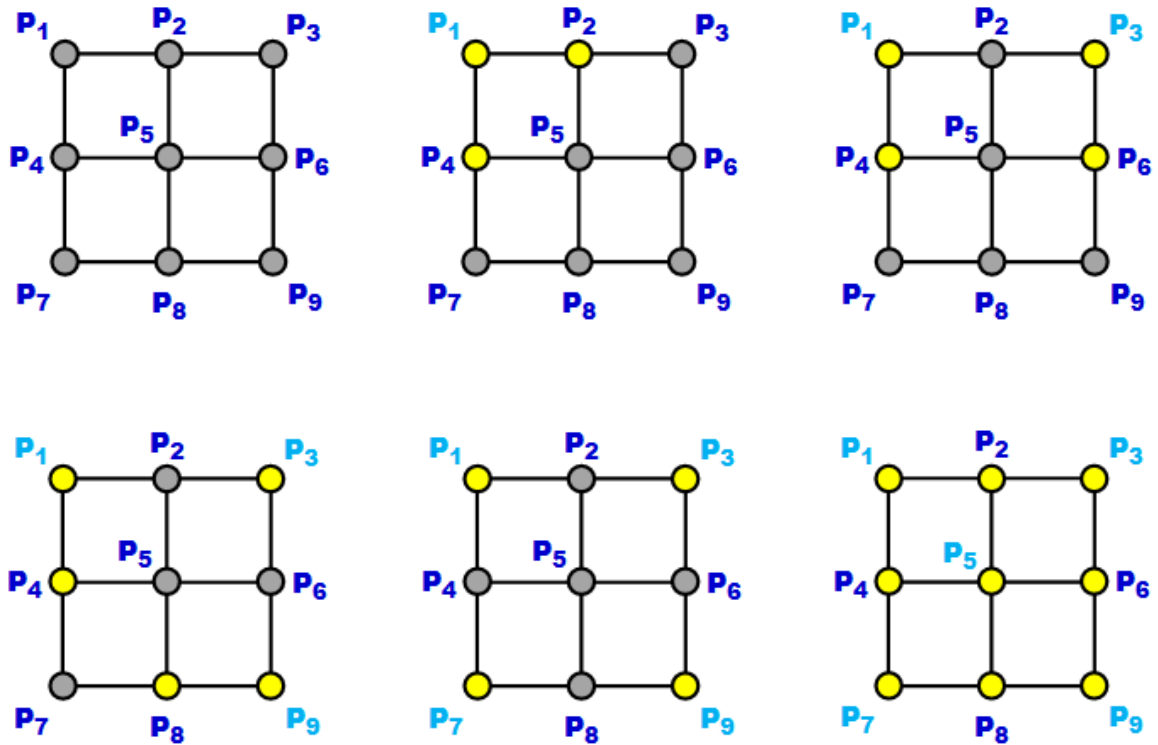
Figura 22 – O grafo *grid* $G_{3 \times 3}$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A seguir, na Figura 23, vejamos tal grafo (inicialmente todo apagado) e uma sequência de ativações que, ao final, deixa todos os seus nós acesos:

Figura 23 – Sequência (P_1, P_3, P_9, P_7, P_5) de nós acionados que soluciona o *Lights Out* do grafo $G_{3 \times 3}$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Analisamos, agora, como se comportam cada um dos nós a medida que acionamos a sequência de nós anterior. Para tal, criamos um quadro (Quadro 03) onde a primeira coluna apresenta todos os nós do grafo (P_1, P_2, \dots, P_9) e a primeira linha mostra a sequência dos nós acionados (P_1, P_3, P_9, P_7 e P_5). Preencheremos este quadro da seguinte maneira: a cada acionamento de um nó P_k qualquer, colocaremos uma coluna de números inteiros cujo módulo é equivalente ao k -ésimo número primo, onde esse número será positivo, caso o estado do nó não mude; ou será negativo, caso seu estado tenha sido alterado.

Quadro 03 – Sequências de números primos gerada a partir da solução (P_1, P_3, P_9, P_7, P_5) que soluciona o *Lights Out* do grafo $G_{3 \times 3}$

		Sequência de nós acionados					Produto:
		P_1	P_3	P_9	P_7	P_5	
Todos os nós do Grafo	P_1	-2	+5	+23	+17	+11	-43.010
	P_2	-2	-5	+23	+17	-11	-43.010
	P_3	+2	-5	+23	+17	+11	-43.010
	P_4	-2	+5	+23	-17	-11	-43.010
	P_5	+2	+5	+23	+17	-11	-43.010
	P_6	+2	-5	-23	+17	-11	-43.010
	P_7	+2	+5	+23	-17	+11	-43.010
	P_8	+2	+5	-23	-17	-11	-43.010
	P_9	+2	+5	-23	+17	+11	-43.010

N^{os} Primos = $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, \dots\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Perceba que o produto final de cada linha será sempre um número negativo, pois, se cada nó (inicialmente apagado) deve estar acesso ao final do processo, cada nó teve seu estado alterado um número ímpar de vezes.

Note então que não precisaríamos ter escolhido a sequência dos números primos para a associação com os índices dos nós do grafo. Poderíamos ter escolhido o próprio valor do índice (Quadro 04) ou mesmo nem ter usado números, apenas os sinais de positivo e negativo (Quadro 05), uma vez que o importante de fato é a quantidade ímpar de mudanças de estado de cada nó.

Quadro 04 – Sequência dos índices da solução do *Lights Out*

		Sequência de nós acionados					Produto:
		P_1	P_3	P_9	P_7	P_5	
Todos os nós do Grafo	P_1	-1	+3	+9	+7	+5	-945
	P_2	-1	-3	+9	+7	-5	-945
	P_3	+1	-3	+9	+7	+5	-945
	P_4	-1	+3	+9	-7	-5	-945
	P_5	+1	+3	+9	+7	-5	-945
	P_6	+1	-3	-9	+7	-5	-945
	P_7	+1	+3	+9	-7	+5	-945
	P_8	+1	+3	-9	-7	-5	-945
	P_9	+1	+3	-9	+7	+5	-945

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quadro 05 – Sequência dos sinais da solução do *Lights Out*

		Sequência de nós acionados					Produto:
		P_1	P_3	P_9	P_7	P_5	
Todos os nós do Grafo	P_1	-	+	+	+	+	-
	P_2	-	-	+	+	-	-
	P_3	+	-	+	+	+	-
	P_4	-	+	+	-	-	-
	P_5	+	+	+	+	-	-
	P_6	+	-	-	+	-	-
	P_7	+	+	+	-	+	-
	P_8	+	+	-	-	-	-
	P_9	+	+	-	+	+	-

No entanto, a utilização dos números primos traz duas vantagens:

I - O valor absoluto de produto final, gerado pela sequência acionamentos, pode ser decomposto em fatores primos de maneira única, exceto pela ordem. Assim, poderemos saber quais nós foram acionados.

II - Em decorrência direta do fato anterior, tendo apenas o produto final, podemos saber quantos nós foram acionados contando quantos fatores primos existem em sua composição.

Agora, analisemos o que acontece quando, dada uma sequência que acende todos os nós, alteramos a ordem desses acionamentos. Para isso, tomemos como exemplos as sequências (P_5, P_3, P_1, P_7, P_9) e (P_1, P_3, P_5, P_7, P_9), apresentadas nos Quadros 06 e 07, respectivamente.

Quadro 06 – Solução (P_5, P_3, P_1, P_7, P_9)

		Sequência de nós acionados					Produto:
		P_5	P_3	P_1	P_7	P_9	
Todos os nós do Grafo	P_1	+11	+5	-2	+17	+23	-43.010
	P_2	-11	-5	-2	+17	+23	-43.010
	P_3	+11	-5	+2	+17	+23	-43.010
	P_4	-11	+5	-2	-17	+23	-43.010
	P_5	-11	+5	+2	+17	+23	-43.010
	P_6	-11	-5	+2	+17	-23	-43.010
	P_7	+11	+5	+2	-17	+23	-43.010
	P_8	-11	+5	+2	-17	-23	-43.010
	P_9	+11	+5	+2	+17	-23	-43.010

Quadro 07 – Solução (P_1, P_3, P_5, P_7, P_9)

		Sequência de nós acionados					Produto:
		P_1	P_3	P_5	P_7	P_9	
Todos os nós do Grafo	P_1	-2	+5	+11	+17	+23	-43.010
	P_2	-2	-5	-11	+17	+23	-43.010
	P_3	+2	-5	+11	+17	+23	-43.010
	P_4	-2	+5	-11	-17	+23	-43.010
	P_5	+2	+5	-11	+17	+23	-43.010
	P_6	+2	-5	-11	+17	-23	-43.010
	P_7	+2	+5	+11	-17	+23	-43.010
	P_8	+2	+5	-11	-17	-23	-43.010
	P_9	+2	+5	+11	+17	-23	-43.010

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Como cada nó acionado altera o estado sempre do mesmo conjunto de nós (ele próprio e seus adjacentes), comparando os dois quadros percebemos que, em cada linha, aparecem sempre o(s) mesmo(s) primo(s) negativo(s). Além disso, como a ordem dos fatores não altera o produto final, concluímos que também não importa a ordem dos acionamentos, mas apenas a escolha de quais nós serão acionados.

Generalizando:

De maneira geral, seja G um grafo com n nós que possua pelo menos uma solução pra o seu *Lights Out*, e $(P_k) = (P_\alpha, P_\beta, \dots, P_k)$ um sequência de k nós de G que soluciona seu *Lights Out*.

Associando cada nó P_i que foi acionado ao i -ésimo número primo p_i e, com isso, gerando para cada um dos n nós de G uma sequência numérica de k elementos, onde cada elemento é $\pm p_i$, sendo positivo se o acionamento de P_i não mudar seu estado ou negativo se o acionamento de P_i alterar seu estado.

Como $(P_k) = (P_\alpha, P_\beta, \dots, P_k)$ soluciona o *Lights Out* se, e somente se, o produto final de cada sequência numérica é negativo (a saber, o produto será sempre: $-p_\alpha \cdot p_\beta \cdot \dots \cdot p_k$).

Se criarmos uma nova sequência $(P_k)'$ apenas permutando os elementos de (P_k) , continuaremos gerando sequências numéricas cujos produtos continuarão sendo $-p_\alpha \cdot p_\beta \cdot \dots \cdot p_k$, pois estaremos apenas permutando seus fatores.

Logo, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, qualquer permutação de uma sequência de nós que soluciona o *Lights Out* de um grafo G também será solução do *Lights Out* de G .

4.4 - Estratégias para a obtenção de uma solução de um *Lights Out*

Debateremos aqui, algumas estratégias para solucionar o *Lights Out* de um grafo qualquer, objetivando, quando não uma solução ótima, ao menos sempre uma minoração do número de nós acionados.

4.4.1 - Procurar acionar nós com o maior grau

Parece intuitivo preferir começar por acionar nós com os maiores graus (isto é, nós com mais conexões), pois um único acionamento inicial em um desses nós acarretará num maior número de nós acesos. E, de fato, procurar nós de maior grau é mesmo uma boa estratégia. No entanto, esta estratégia sozinha nem sempre garantirá um solução ótima (por vezes, sequer uma solução qualquer). Portanto é necessário combiná-la com outras estratégias.

4.4.2 - Evitar acionar nós com interseção de suas vizinhanças

Quando dois nós possuem alguma interseção (não-vazia) de suas vizinhanças, ao os acionarmos, faremos com que alguns nós (justamente os nós comuns de suas vizinhanças) tenham seus estados de luz alterados duas vezes, e portanto voltarão a ficar apagados.

Em outras palavras: sejam v_1 e v_2 dois nós de G tais que $N_G[v_1] \cap N_G[v_2] \neq \emptyset$ (ou seja: $\exists u_1, \dots, u_q \in V(G)$, tais que $N_G[v_1] \cap N_G[v_2] = \{u_1, \dots, u_q\} = I_{(v_1, v_2)}$), se acionarmos v_1 e v_2 , então os estados de luz de $I_{(v_1, v_2)}$ retornarão ao estado apagado (isto é: $L(u_1) = \dots = L(u_q) = 0$).

4.4.3 - Possíveis valores de $\alpha(G)$ a partir dos graus dos nós de G

Para nos certificarmos de que uma solução S_G do *Lights Out* de um grafo G trata-se de uma solução ótima (portanto: $\#S_G = \alpha(G)$), analisaremos os limites inferiores das cardinalidades das possíveis soluções de G .

Grafos g -regulares:

Se $G(V, E)$ um grafo g -regular com n nós (isto é: $d(v_1) = \dots = d(v_n) = g, \forall v_i \in V(G)$), então: $\alpha(G) \geq \frac{n}{g+1}$.

Onde: $\alpha(G) = \frac{n}{g+1} = k$ se e somente se $\exists S_{(v_k)} \subset V(G)$ tal que $N_G[v_1] \cup \dots \cup N_G[v_k] = V(G)$

e $N_G[v_i] \cap N_G[v_j] = \emptyset, \forall v_i, v_j \in S_{(v_k)}$.

Grafos não-regulares:

Seja $G(V, E)$ um grafo não-regular com n nós, dos quais k nós são de maior grau (isto é: $\exists U = \{u_1, \dots, u_k\} \subsetneq V(G) \mid d(u_1) = \dots = d(u_k) = g > d(v_i), \forall v_i \in V(G) - U$).

Se $k(g+1) \geq n$, então: $\alpha(G) \geq \frac{n}{g+1} = k$.

4.5 - Lights Out em alguns grafos preliminares

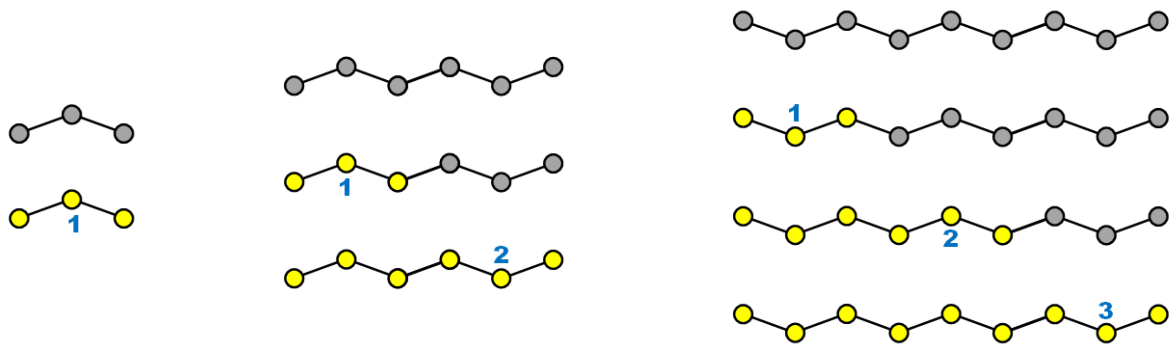
Apresentaremos aqui, algumas análises do *Lights Out* dos grafos, caminhos, ciclos, completos simples, completos bipartidos e *grids*, a fim de embasar e nos preparar para o *Lights Out* nos grafos dos poliedros.

4.5.1 - Lights Out em Grafos Caminhos (P_n)

Seja P_n um grafo caminho com n nós ($n \geq 2$), como solução ótima do seu *Lights Out*, temos que:

i) Se $n = 3k$ ($k \in \mathbf{IN}$), então $\alpha(P_n) = \frac{n}{3} = k$;

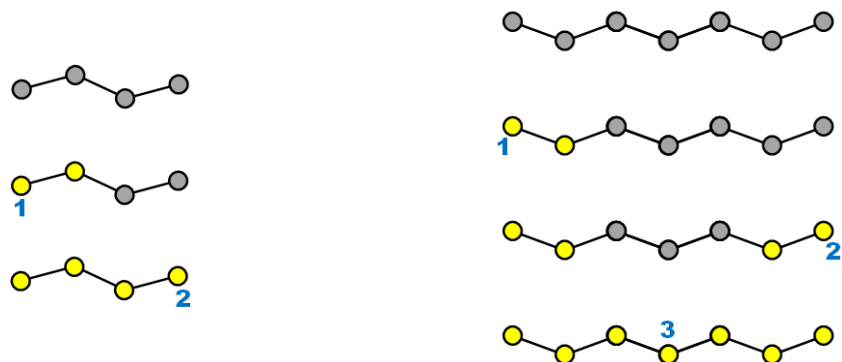
**Figura 24 – Lights Out nos grafos Caminhos P_3 , P_6 e P_9 :
 $\alpha(P_3) = 1$; $\alpha(P_6) = 2$; $\alpha(P_9) = 3$**



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

ii) Se $n = 3k+1$ ($k \in \mathbf{IN}$), então $\alpha(P_n) = \frac{n-4}{3} + 2 = \frac{n+2}{3} = k + 1$;

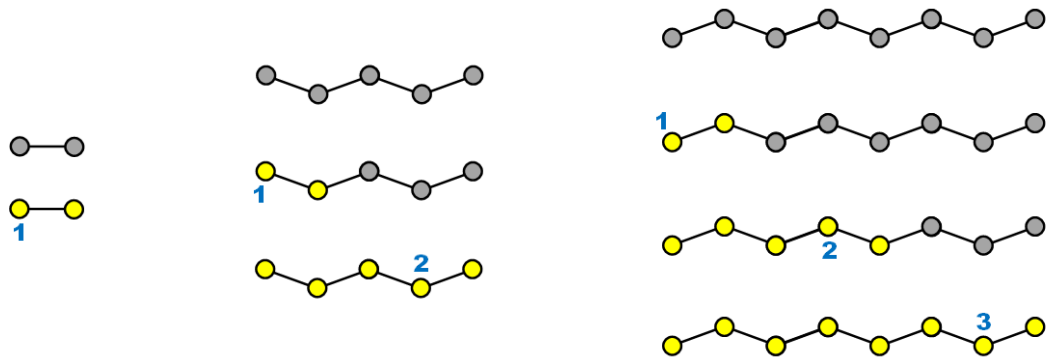
Figura 25 – Lights Out nos grafos Caminhos P_4 e P_7 : $\alpha(P_4) = 2$; $\alpha(P_7) = 3$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

iii) Se $n = 3k - 1$ ($k \in \mathbf{IN}$), então $\alpha(P_n) = \frac{n-2}{3} + 1 = \frac{n+1}{3} = k$.

Figura 26 – Lights Out nos grafos Caminhos P_2 , P_5 e P_8 :
 $\alpha(P_2) = 1$; $\alpha(P_5) = 2$; $\alpha(P_8) = 3$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Demonstração:

Dado um grafo caminho P_n qualquer, com n nós ($n \geq 2$), podemos nomear esses n nós da seguinte maneira: $V = \{e_1, m_2, m_3, m_4, \dots, m_{n-1}, e_n\}$; onde e_1 e e_n são os nós das extremidades (e portanto: $d(e_1) = d(e_n) = 1$); e m_2, \dots, m_{n-1} são nós intermediários (consequentemente: $d(m_2) = \dots = d(m_{n-1}) = 2$)

i) Sendo $n = 3k$, com $k \in \mathbf{IN}$ (isto é: n é um múltiplo de 3), temos que:

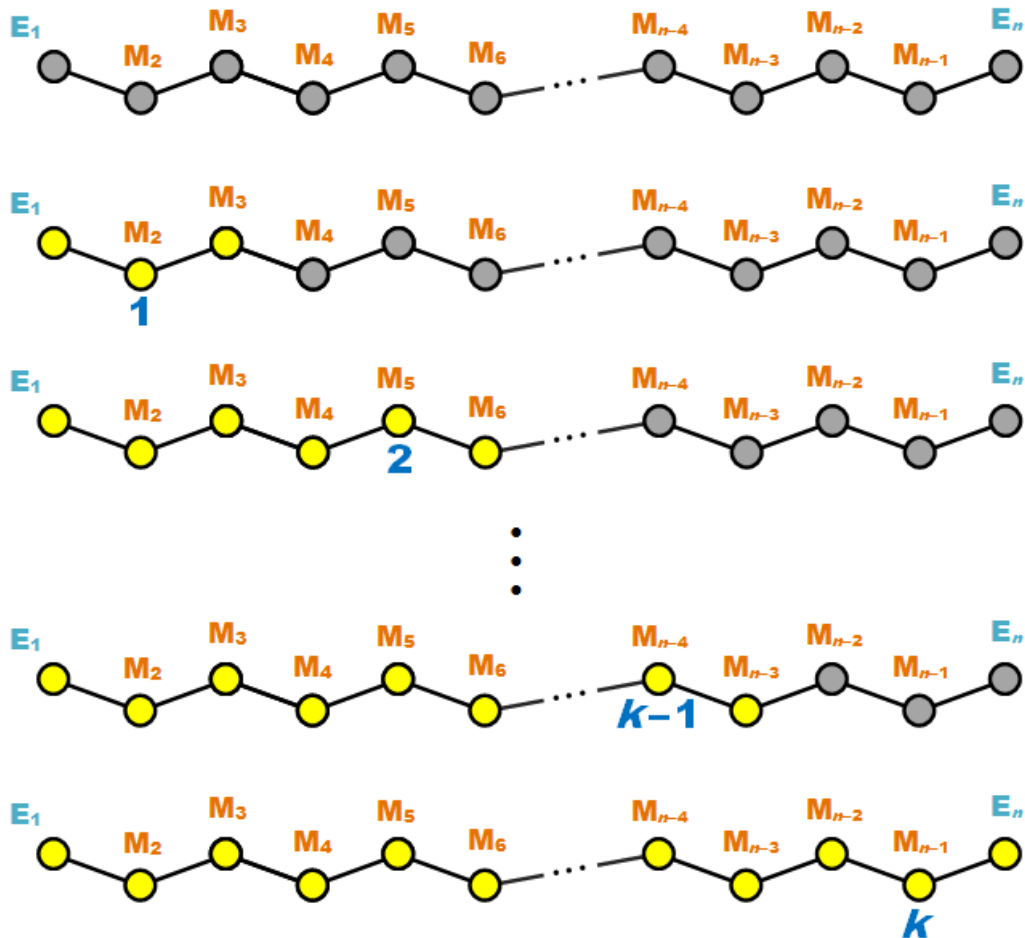
O conjunto $S = \{m_2, m_5, m_8, \dots, m_{n-1}\} = \{m_i \mid i = 3q - 1, q \in \mathbf{IN}, q \leq n/3\}$ será uma solução do *Lights Out* de P_n .

Além disso, $\#S = \frac{n}{3} = k$.

Como: o maior grau dos nós de P_n é 2 (o que faz com que o acionamento de algum nó de P_n altere o estado de no máximo 3 nós); e n é um múltiplo de 3; então a solução ótima $\alpha(P_n) \geq \frac{n}{3} = k$.

Portanto, $\alpha(P_n) = \frac{n}{3} = k$. ■

Figura 27 – *Lights Out* no grafo caminho P_n (com $n = 3k$, onde $k \in \mathbf{IN}$):
 $\alpha(P_n) = n/3 = k$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

ii) Sendo $n = 3k+1$, ($k \in \mathbf{IN}$),

Ao acionarmos ambos os nós das extremidades, alteraremos o estado de luz de 4 nós (e_1 , m_2 , m_{n-1} e e_n), e portanto faltarão exatamente $n - 4 = 3k - 3$ nós de P_n a serem acendidos.

O subgrafo P_{3k-3} gerado por esses nós que não foram acesos (m_3, \dots, m_{n-2}) formam um Caminho com $3k - 3$ nós (onde $3k - 3$ é múltiplo de 3).

Sabemos, pela demonstração anterior, que no processo de obtenção de uma solução ótima de um Caminho, cuja quantidade de nós é um número múltiplo de 3, não são acionados os nós das extremidades (que no caso do subgrafo P_{3k-3} são os nós m_3 e m_{n-2}). Logo, podemos acender todo o P_{3k-3} (ou seja, concluir o acendimento de P_n) acionando os nós m_4, m_7, \dots, m_{n-3} .

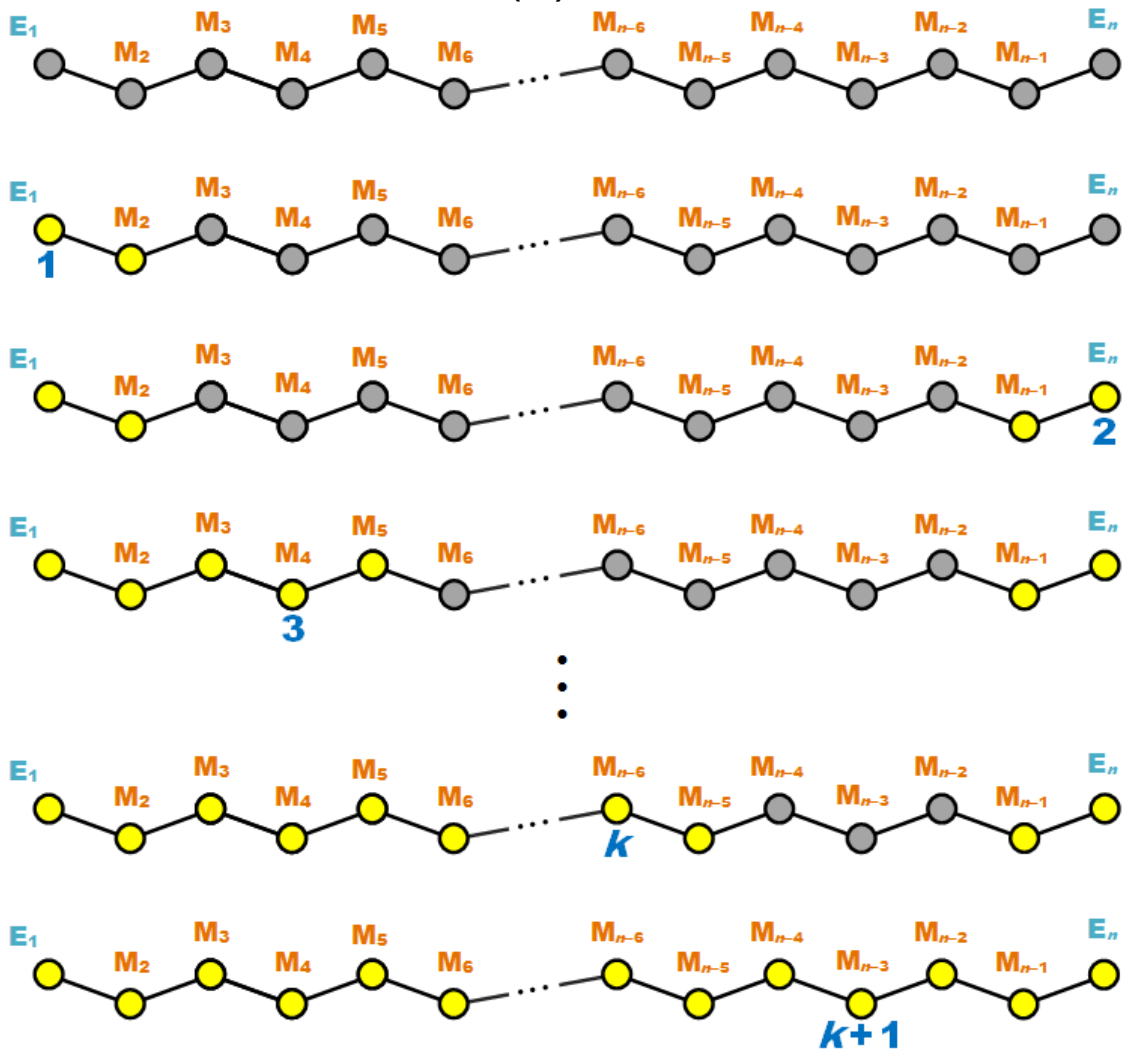
Portanto o conjunto $S = \{e_1, e_n\} \cup \{m_i \mid i = 3q + 1, q \in \mathbf{IN}\} = \{e_1, e_n, m_4, m_7, m_{10}, \dots, m_{n-3}\}$ será uma solução do *Lights Out* de P_n .

$$\text{Note que: } \#S = 2 + \frac{n-4}{3} = \frac{n+2}{3} = \frac{3k+1+2}{3} = k+1.$$

Já sabemos que o maior grau dos nós de P_n é 2 (o que faz com que o acionamento de algum nó de P_n altere o estado de no máximo 3 nós), e que isso acarreta que a solução ótima $\alpha(P_n) \geq \frac{n}{3} = \frac{3k+1}{3} > k$.

Portanto, $\alpha(P_n) = \#S = k+1$. ■

Figura 28 – *Lights Out* no grafo caminho P_n (com $n = 3k+1$, onde $k \in \mathbf{IN}$):
 $\alpha(P_n) = k+1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

iii) Sendo $n = 3k - 1$, ($k \in \mathbf{IN}$),

Se acionarmos o nó de uma das extremidades (por exemplo e_1), alteraremos o estado de luz de 2 nós (no nosso exemplo: e_1 e m_2), e portanto faltarão exatamente $n - 2 = 3k - 3$ nós de P_n a serem acendidos.

De forma análoga ao caso anterior, analisaremos o subgrafo P_{3k-3} gerado por esses nós que não foram acesos (pelo nosso exemplo: $m_3, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, e_n$) que é um Caminho com $3k - 3$ nós.

Assim, poderemos acender todo o P_{3k-3} (ou seja, concluir o acendimento de P_n) acionando os nós m_4, m_7, \dots, m_{n-1} .

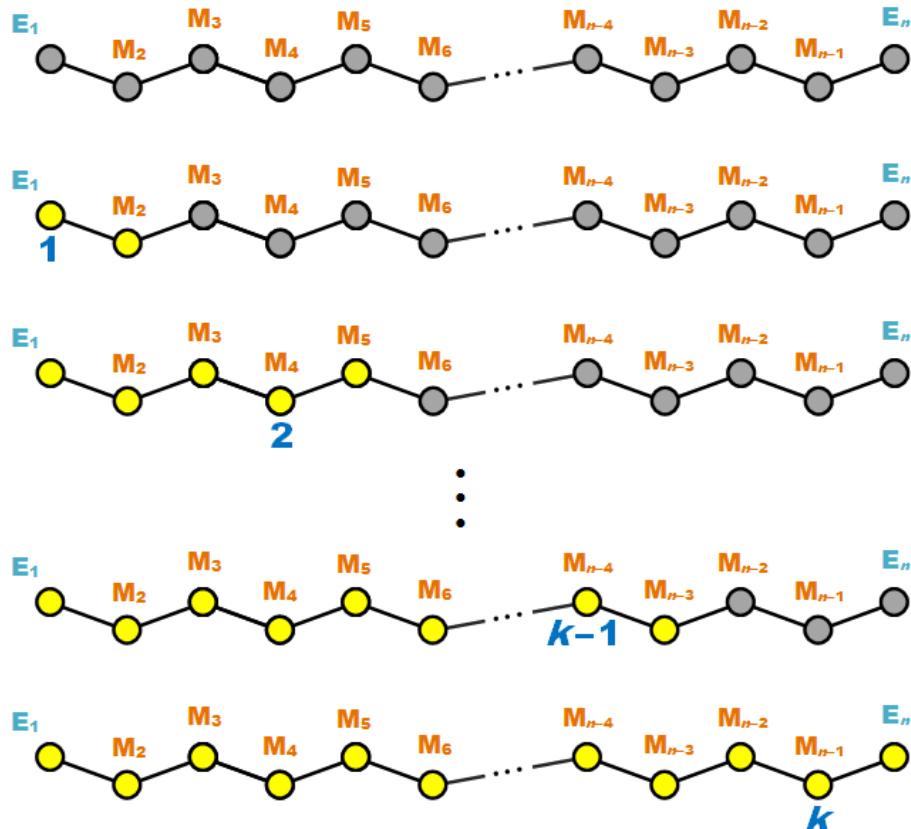
Logo o conjunto $S = \{e_1\} \cup \{m_i \mid i = 3q + 1, q \in \mathbf{IN}\} = \{e_1, m_4, m_7, m_{10}, \dots, m_{n-1}\}$ será uma solução do *Lights Out* de P_n .

Observe que: $\#S = 1 + \frac{n-2}{3} = \frac{n+1}{3} = \frac{3k-1+1}{3} = k$.

Já vimos que o fato do maior grau dos nós de P_n ser igual a 2 determina que a solução ótima satisfaz a desigualdade: $\alpha(P_n) \geq \frac{n}{3} = \frac{3k-1}{3} > k-1$.

Portanto, $\alpha(P_n) = \#S = k$. ■

Figura 29 – *Lights Out* no grafo caminho P_n (com $n = 3k - 1$, onde $k \in \mathbf{IN}$): $\alpha(P_n) = k$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4.5.2 - *Lights Out* em Grafos Ciclos (C_n)

Sutner, em [14], demonstrou que, no *Lights Out* em ciclos (C_n), temos que:

- i) O acionamento de todos os n nós de um grafo C_n sempre solucionará o seu *Lights Out* para $n \geq 3$ (ou seja: $s(C_n) = n, \forall n \geq 3$);
- ii) Se n não for múltiplo de 3, então $\alpha(C_n) = n$;
- iii) Se n for múltiplo de 3, então $\alpha(C_n) = n/3$.

4.5.3 - *Lights Out* em Grafos Completos Simples (K_n)

O *Lights Out* em um grafo completo simples K_n é trivialmente solucionado ao acionarmos qualquer um dos seus nós, visto que cada nó está conectado a todos os outros nós de K_n . Isto é: $N_{K_n}[v_i] = V(K_n), \forall v_i \in V(K_n)$.

Logo, $\alpha(K_n) = 1, \forall n \in \mathbf{IN}$.

4.5.4 - *Lights Out* em Grafos Completos Bipartido ($K_{a,b}$)

Seja $K_{a,b}$ um grafo Completo Bipartido com $(a+b)$ nós (com $a \leq b$, sem perda de generalização), como solução ótima do seu *Lights Out*, temos que:

- i) Se a for ímpar e b for par, então $\alpha(K_{a,b}) = a$.
- ii) Se a for par e b for ímpar, então $\alpha(K_{a,b}) = b$.
- iii) Se a for ímpar e b for ímpar, então $\alpha(K_{a,b}) = a$.
- iv) Se a for par e b for par, então $\alpha(K_{a,b}) = a+b$.

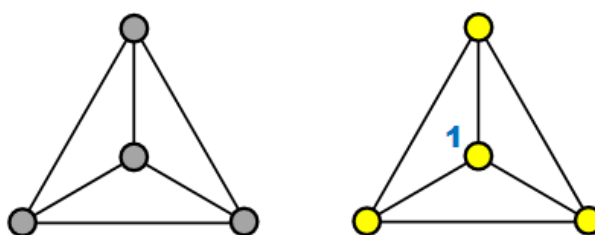
4.6 - *Lights Out* nos Grafos dos Poliedros de Platão

Se pensamos em jogar o *Lights Out* sobre os poliedros, considerando que as faces destes poliedros, inicialmente desligadas/apagadas, devem ser completamente ligadas/acesas, então o jogo *Lights Out*, pensado nos seus respectivos grafos (grafos esses, duais, como vimos anteriormente), deve ser considerado sobre os nós destes grafos.

4.6.1 - *Lights Out* no Grafo do Tetraedro

Desejamos acender as faces do tetraedro. Note que o grafo do tetraedro é o grafo completo K_4 . Isto nos diz que cada nó deste grafo tem grau 3 e, portanto, de acordo com 4.5.3, um único toque em qualquer nó trocará o estado de todos os nós que compõem o grafo, como indicado na Figura 30. Neste caso, acendendo todos os nós do grafo K_4 estamos acendendo todas as faces do tabuleiro tetraedro.

Figura 30 – *Lights Out* no tetraedro: $\alpha(k_4) = 1$



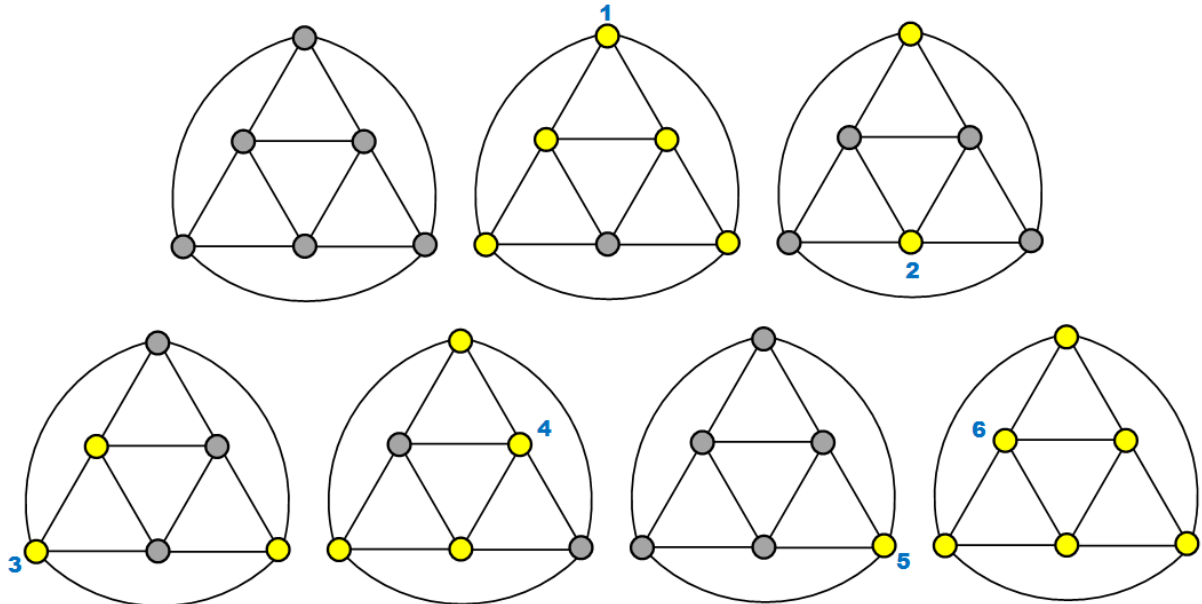
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4.6.2 - *Lights Out* no Grafo do Hexaedro

Conforme vimos anteriormente, o hexaedro gera um grafo que é 4-regular e contém 6 nós, isto é, de cada um de seus 6 nós partem 4 arestas, conseqüentemente, cada toque em um nó troca o estado de 5 nós (inclusive o do nó acionado). Dessa forma, o primeiro toque (indicado na Figura 31 pelo rótulo 1) acende/liga 5 nós. Para o segundo toque (rótulo 2), escolhemos o único nó não adjacente ao de rótulo 1, o que implica em tornar os nós de rótulos 1 e 2 os únicos acesos/ligados. O terceiro toque acionará um nó arbitrário que esteja apagado/desligado, acendendo este e outros dois nós e desligando os de rótulos 1 e 2. Neste momento, metade dos nós do grafo estão acesos e a outra metade está apagada. O quarto nó acionado, indicado pelo rótulo 4, é o nó apagado/desligado que ainda não foi diretamente acionado em nenhuma rodada prévia. Após esta rodada, restam apenas dois nós apagados/desligados, os únicos que ainda não foram diretamente acionados. Acionamos um destes nós e o rotulamos de 5,

obtendo apenas este nó aceso/ligado. Finalmente, acionamos o outro nó que ainda não foi diretamente acionado, rotulando-o de 6 e acendendo completamente o grafo, como mostra a Figura 31 e, conseqüentemente, as faces do hexaedro.

Figura 31 – Lights Out no hexaedro: $\alpha(G) = 6$

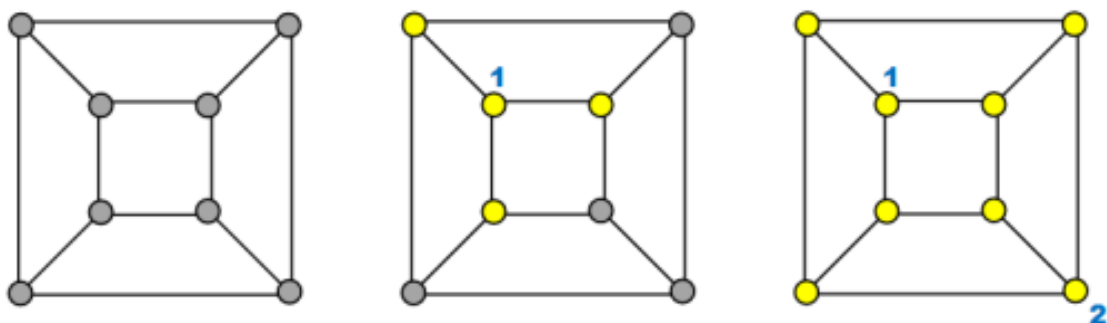


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4.6.3 - Lights Out no Grafo do Octaedro

O objetivo agora é acender completamente as faces do octaedro, ou seja, acender todos os 8 nós do seu respectivo grafo. O grafo do octaedro é 3-regular, e portanto, cada acionamento em um nó altera o estado de 4 nós. Logo, no melhor cenário, com 2 toques acenderíamos completamente todo o octaedro. O primeiro acionamento acende 4 nós, restando os outros 4 nós a serem acesos. Por fim, basta pressionar um nó desligado não adjacente a nenhum nó aceso que obtemos a configuração esperada, como exibido pela Figura 32.

Figura 32 – Lights Out no octaedro: $\alpha(G) = 2$

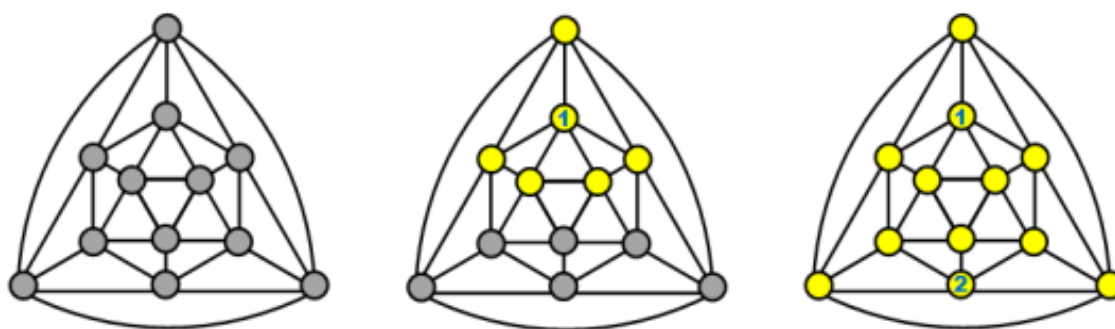


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4.6.4 - *Lights Out* no Grafo do Dodecaedro

Considerando o jogo sobre os nós do grafo do dodecaedro (que representam as faces do poliedro dodecaedro), temos uma estratégia simples a realizar: acionar 2 nós que não sejam adjacentes e cujos nós vizinhos sejam distintos, pois cada um dos 12 nós deste grafo tem grau 5 e, conseqüentemente, um acionamento em qualquer um deles trocará o estado de 6 nós (o próprio nó e seus 5 nós adjacentes), como ilustrado na Figura 33.

Figura 33 – *Lights Out* no dodecaedro: $\alpha(G) = 2$

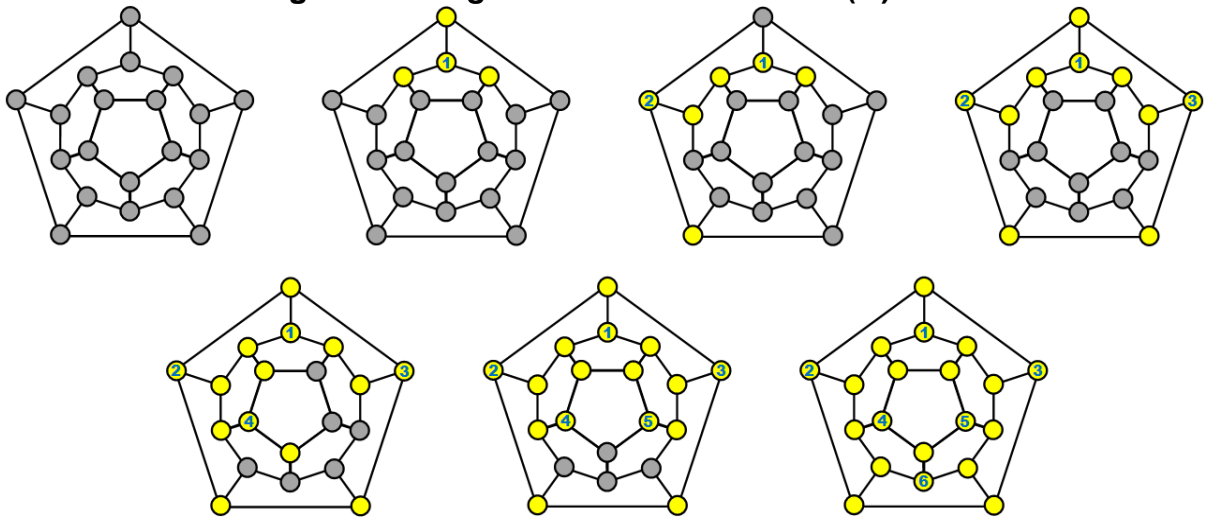


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4.6.5 - *Lights Out* no Grafo do Icosaedro

O último poliedro de Platão que servirá de tabuleiro para nossas discussões é o icosaedro. O grafo em questão é um grafo 3-regular contendo 20 nós. A sequência desejada inicia-se com o acionamento em um nó arbitrário (rótulo 1), em seguida acionamos um nó a uma distância 2 do rotulado na etapa anterior, e a este damos o rótulo 2. Para o terceiro acionamento (rótulo 3), escolhemos o nó a distância 2 dos nós rotulados de 1 e de 2. Esta sequência acende completamente (como pode ser visto na Figura 34) o pentágono externo. Agora, escolhemos um nó do pentágono central mais interno de modo a não apagar nenhum nó aceso (rótulo 4). Agora, ativando um outro nó, também do pentágono central interno, a uma distância 2 do de rótulo 4 (rótulo 5). Finalmente, acionamos o único nó a uma distância 2 simultânea dos nós de rótulos 4 e 5, acendendo completamente os 20 nós do grafo, correspondentes às 20 faces do icosaedro.

Figura 34 – Lights Out no icosaedro: $\alpha(G) = 6$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

De fato, seis ativações são o mínimo para solucionar o *Lights Out* no icosaedro. Observe que, no melhor cenário, com apenas 5 toques deveríamos ser capazes de acender todo o grafo ($\alpha(G) \geq 20/3+1 = 5$). Para isto, cada nó do grafo deveria ter seu estado alterado exatamente uma única vez, o que é inviável. Essa inviabilidade pode ser justificada através de uma análise sobre um dos ciclos pentagonais. Para acendermos todos os nós deste ciclo, teríamos 3 possíveis cenários:

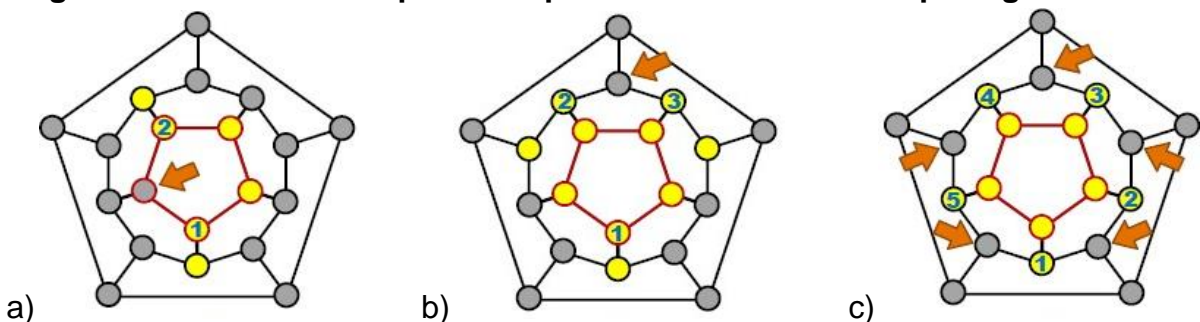
i) acionar dois de seus nós, o que faria com que um deles fosse novamente apagado, como mostra a Figura 35A;

ii) ativar apenas um de seus nós e ativar um nó adjacentes aos que estão apagados. Isto também faria com que um dos nós de um ciclo pentagonal vizinho ficasse apagado (Figura 35B);

iii) acionar somente em nós adjacentes aos nós do pentágono, o que faria com que vários nós dos pentágonos vizinhos fossem apagados (Figura 35C).

Portanto, como algum nó será sempre apagado, temos que $\alpha > 5$ e, conseqüentemente, $\alpha = 6$.

Figura 35 – Os 3 cenários possíveis para acender os 5 nós do pentágono central



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

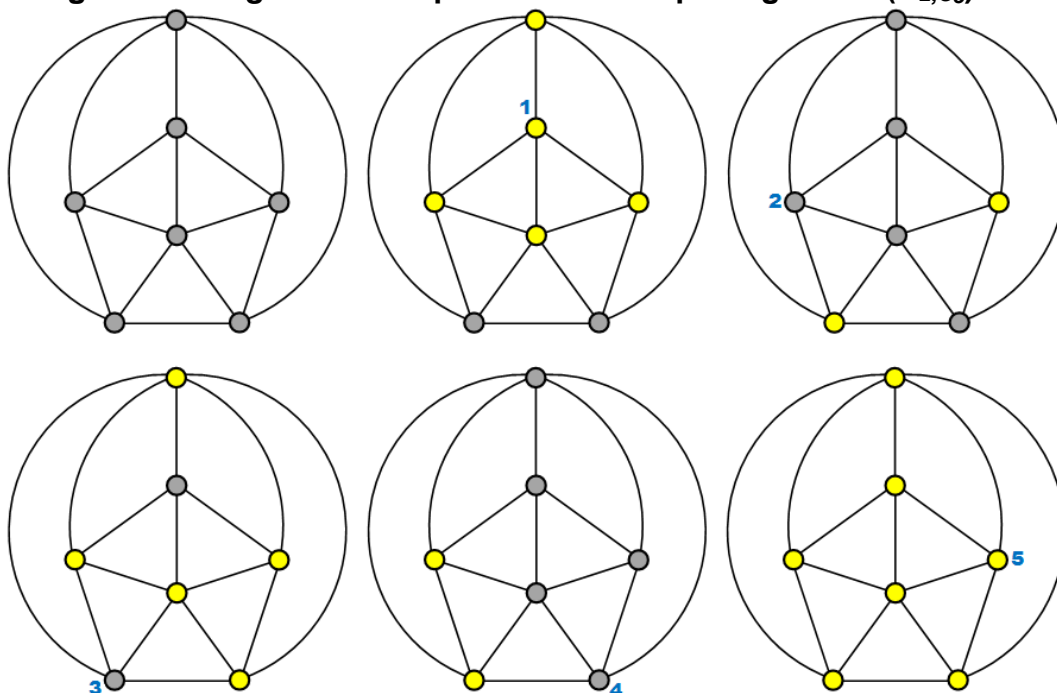
4.7 - *Lights Out* nos Grafos dos Prismas

Como estamos jogando sobre as faces dos poliedros, convém lembrarmos que o grafo que os representa é o seu dual. No capítulo 2, vimos que o dual de um prisma é uma bipirâmide e vice-versa, e no capítulo 3 apresentamos que um prisma de base n -gonal é representado por um grafo formado por um ciclo C_n (simbolizando as n faces laterais) com um nó no centro se conectando a cada nó dele (simbolizando a base inferior) e outro nó externo que também se conecta a cada nó do ciclo (simbolizando a base superior). Por esse motivo, usaremos os conhecimentos que temos sobre *Lights Out* em ciclos para iniciar e embasar nossa análise do *Lights Out* nos prismas.

4.7.1 - *Lights Out* nos Grafos dos Prismas de base n (n ímpar)

Como sabemos, se acionarmos cada um dos n nós de um ciclo C_n solucionamos o seu *Lights Out*. Dessa forma, se acionarmos cada nó (inicialmente apagado) do ciclo de um prisma teremos, ao final, todos eles acesos. Resta apenas verificarmos se os nós que representam as bases estarão também acesos ao final desse processo. Se a quantidade n de faces laterais do prisma for um número ímpar, então as bases terão seu estado simultaneamente alterados (de apagados para acesos e vice-versa) uma quantidade ímpar de vezes, o que garante que estarão acesas após acionarmos o último nó do ciclo, como exemplificado na Figura 36.

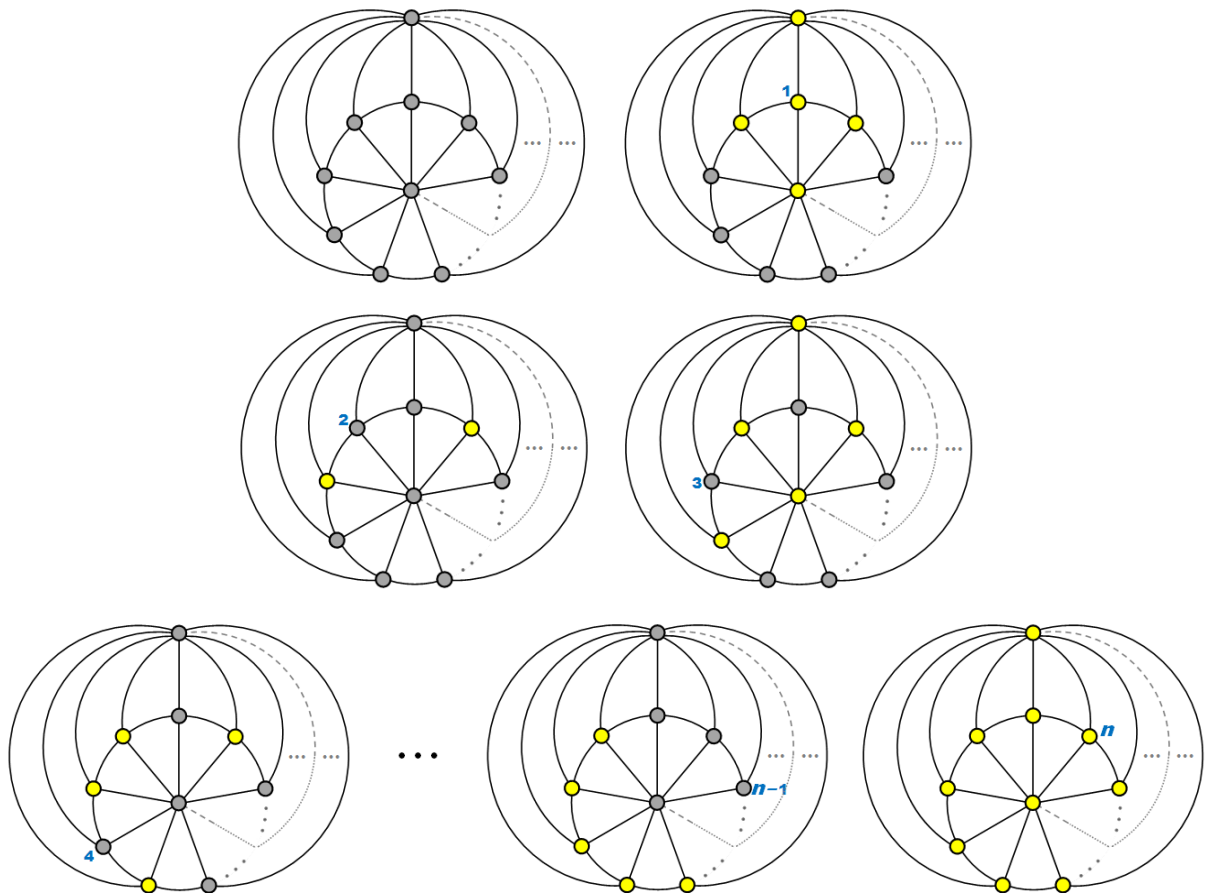
Figura 36 – *Lights Out* no prisma de base pentagonal: $\alpha(K_{2,C_5}) = 5$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Logo, concluímos que a estratégia de acionar todas as faces laterais de um prisma de base ímpar sempre resultará numa solução. Isto é: n é ímpar $\Rightarrow s(K_{2,C_n}) = n$, como pode ser visto na Figura 37.

Figura 37 – Lights Out no prisma de base n -gonal, com n ímpar: $s(K_{2,C_n}) = n$

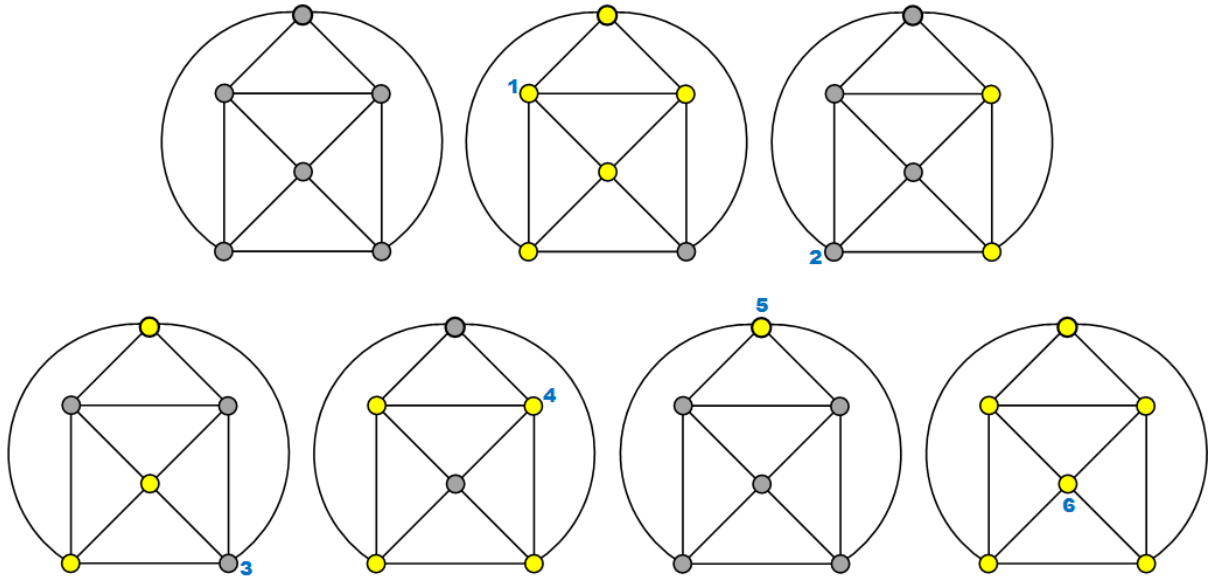


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4.7.2 - Lights Out nos Grafos dos Prismas de base n (n par)

Se o prisma em questão tiver como base um polígono com uma quantidade par de lados, ao utilizarmos a mesma estratégia anterior de acionar todas as faces laterais, perceberemos que, ao final do procedimento, que todas as faces laterais estarão acesas mas as bases estarão apagadas. No entanto, com mais 2 acionamentos conseguiremos acender todas as faces: acionando a base superior, a acenderemos ao mesmo tempo que apagamos todo o ciclo; por fim, acionando a base inferior, a acenderemos ao passo que também reacenderemos todo o ciclo. Culminando assim em um grafo todo ligado. A seguir, na Figura 38, apresentamos um exemplo deste fato.

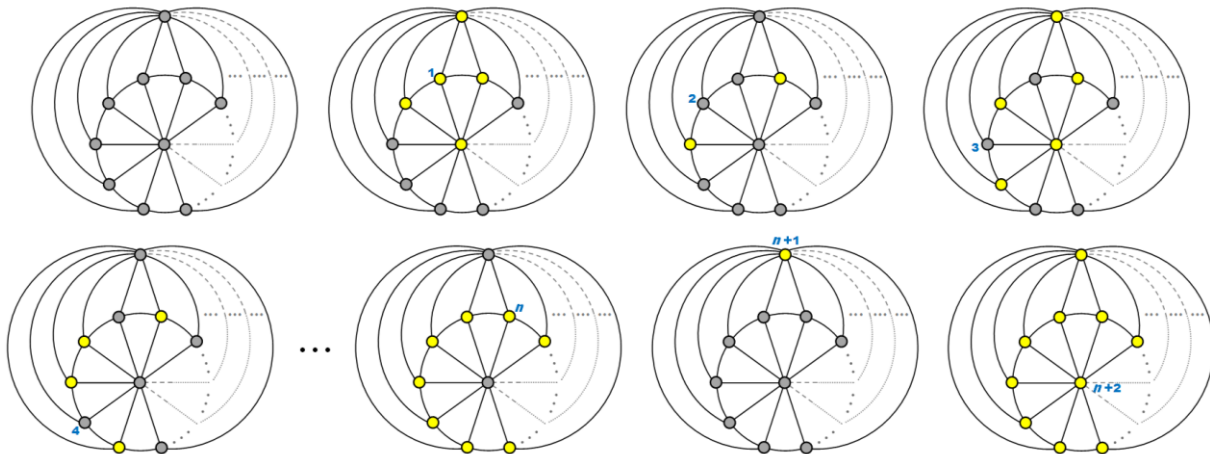
Figura 38 – Lights Out no prisma de base quadrangular: $\alpha(K_{2,C_4}) = 6$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Depreendemos, portanto, que acionar todas as faces (laterais e bases) de um prisma de base par sempre resultará numa solução. Isto é: n é par $\Rightarrow s(K_{2,C_n}) = n+2$, como explicitado na Figura 39.

Figura 39 – Lights Out no prisma de base n -gonal, com n par: $\alpha(K_{2,C_n}) = n + 2$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

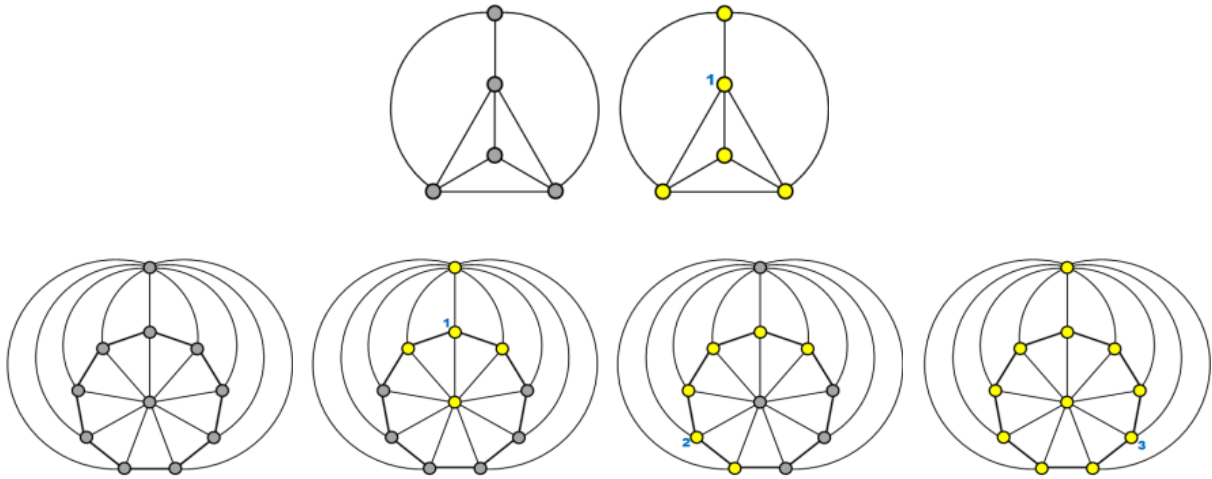
Acabamos de analisar soluções gerais para dois conjuntos de prismas de base n : quando n é ímpar; e quando n é par. Vejamos agora, se há algum subconjunto onde exista uma solução menor que essas; caso exista, qual é o valor, para quais tipos de prismas se aplica e por quê; e por fim, se esta é a solução menor possível (α).

4.7.3 - *Lights Out* nos Grafos dos Prismas de base n (n múltiplo de 3)

De forma geral, nos baseando nos *Lights Out* dos ciclos, percebemos que uma boa estratégia envolve acionarmos todas as faces laterais do prisma (todos o nós do ciclo) para que todas as faces fiquem acesas. Mas, quando tratamos dos *Lights Out* dos ciclos, também vimos que ciclos C_n com n múltiplo de 3 eram completamente acesos ao acionarmos apenas um terço dos nós. Para isso, bastava dividirmos todos os n nós em $n/3$ grupos, cada grupo com 3 nós distintos e em sequência, e por fim acionarmos apenas o nó central de cada um desses grupos.

Se n for um múltiplo de 3 e ímpar, então $n/3$ também será ímpar, e portanto ao acionarmos os $n/3$ nós conforme descrito acima, além de acenderemos todos os nós do ciclo, também terminaremos com os dois nós referentes às bases acesos, por terem sido alterados de estado uma quantidade ímpar de vezes. Apresentamos 2 exemplos desse fato na Figura 40.

Figura 40 – *Lights Out* no prisma de base triangular: $\alpha(K_{2,C_3}) = 1$ e *Lights Out* no prisma de base nonagonal: $\alpha(K_{2,C_9}) = 3$



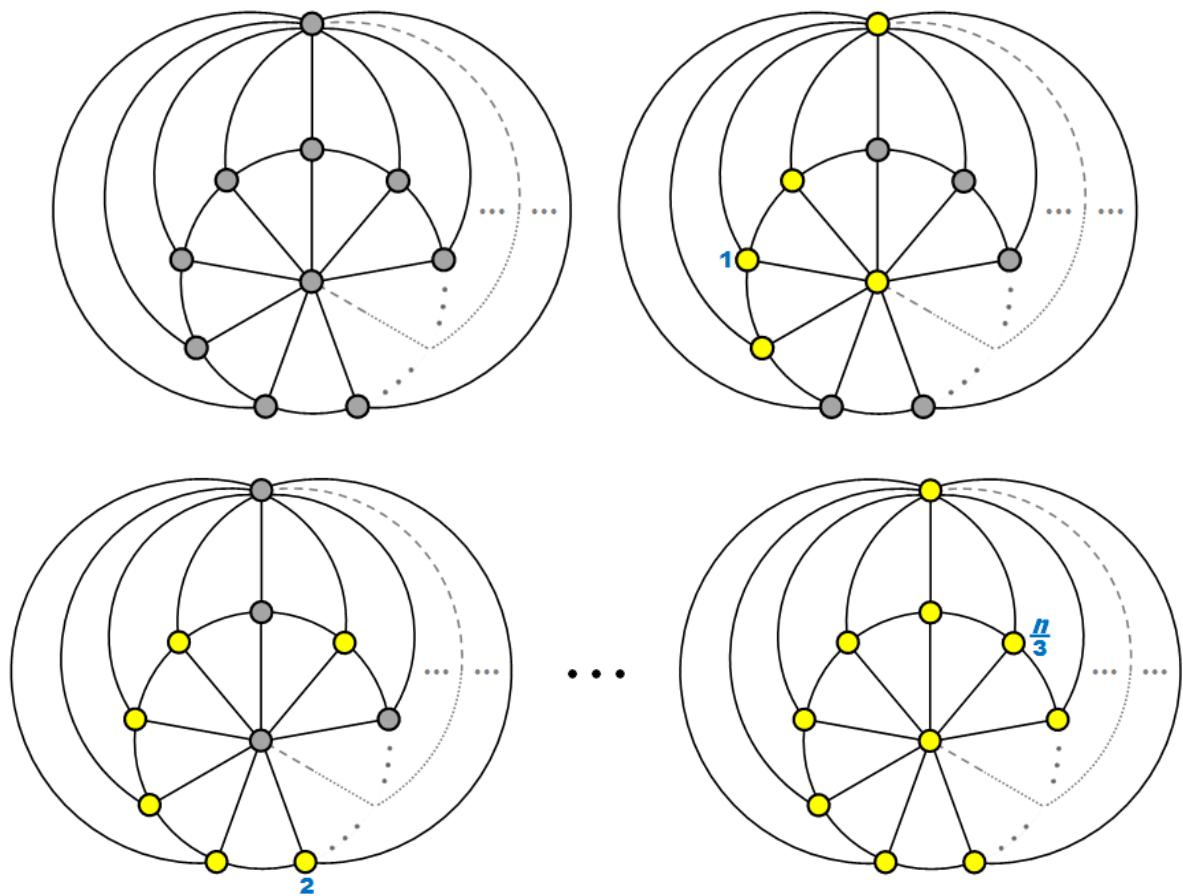
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Logo, para $n = 6k + 3$ (isto é: n ímpar e múltiplo de 3), a estratégia descrita gera sempre uma solução ótima.

Isto é: n é ímpar e múltiplo de 3 $\Rightarrow \alpha(K_{2,C_n}) = n/3$.

Na Figura 41 exibimos uma representação da generalização desta solução ótima.

Figura 41 – *Lights Out* no prisma de base n -gonal, com n ímpar e múltiplo de 3:
 $\alpha(K_{2,C_n}) = n/3$



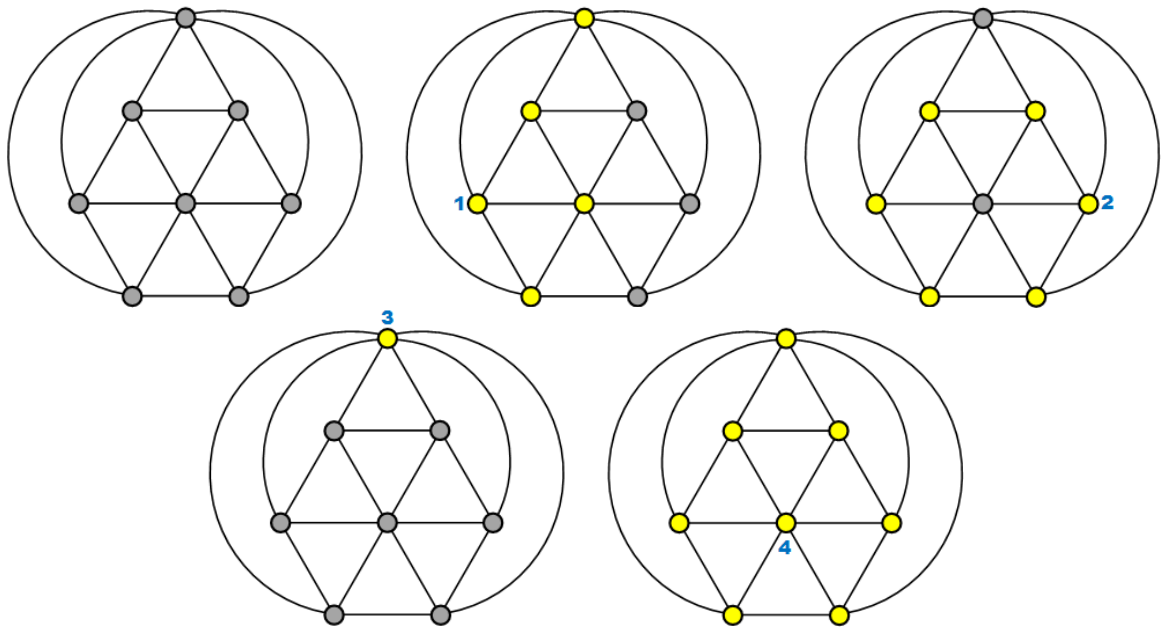
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Note que: $3|n$ e $2|n \Rightarrow 6|n \Rightarrow n = 6q \Rightarrow n/3 = 2q \Rightarrow 2|n/3$

Em outras palavras: se n é um múltiplo de 3 e par, então $n/3$ também é par.

Daí, ao final do processo já descrito de acionamentos dos $n/3$ nós do ciclo, culminaríamos em um prisma com todas as faces laterais acesas, mas ambas as bases apagadas (pois seus estados teriam sido alterados uma quantidade par de vezes). Para concluirmos e acendermos todo o prisma, aplicamos o método já conhecido de acionarmos as duas bases. Vemos um exemplo desse processo aplicado a um prisma de base hexagonal na Figura 42.

Figura 42 – Lights Out no prisma de base hexagonal: $\alpha(K_{2,C_6}) = 4$



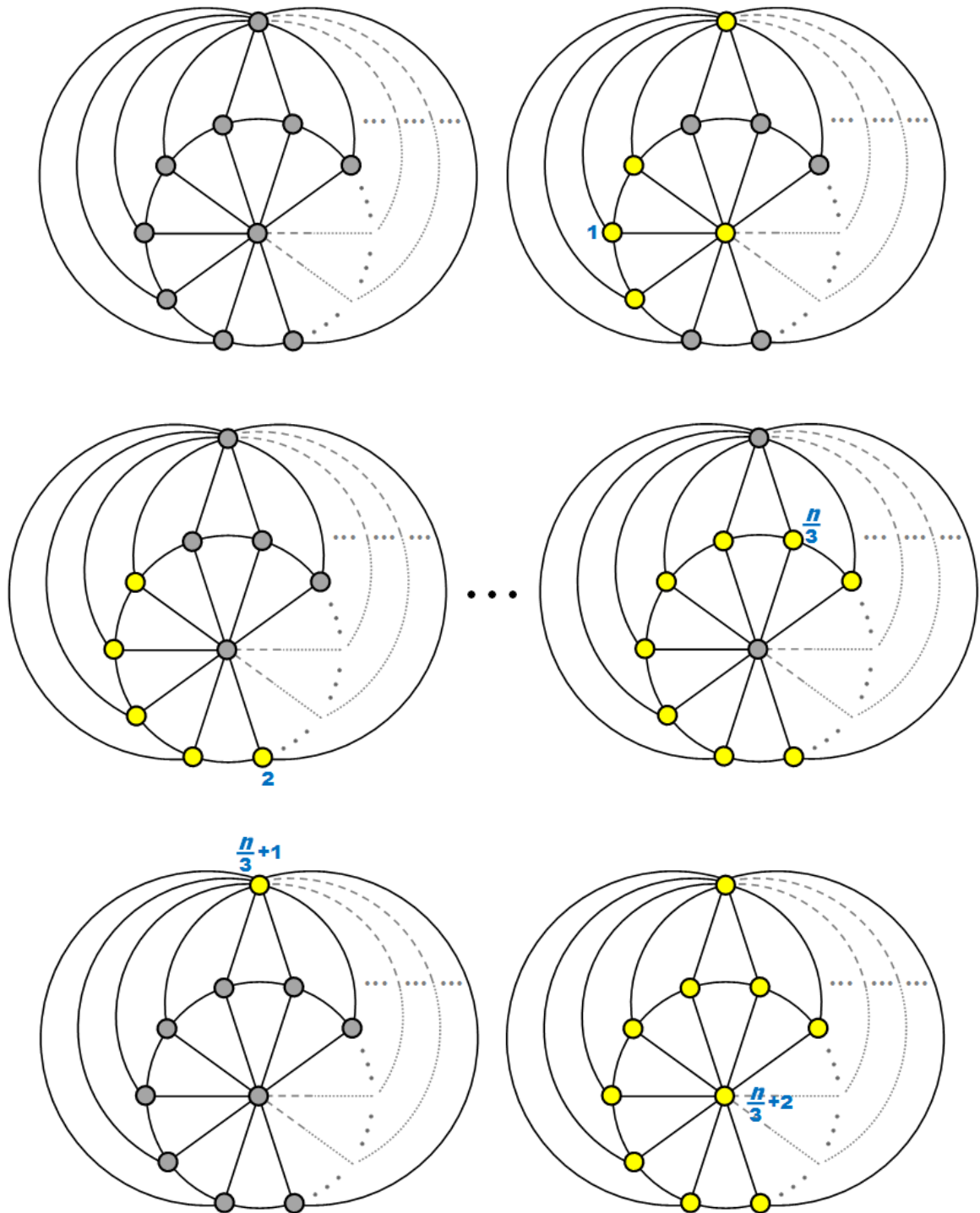
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Logo, para $n = 6k$ (isto é: n par e múltiplo de 3), a técnica anterior redundava numa solução ótima e análoga a anterior.

Ou seja: n é par e múltiplo de 3 $\Rightarrow \alpha(K_{2,C_n}) = n/3 + 2$.

Uma visualização generalizada deste fato é apresentada na Figura 43.

Figura 43 – *Lights Out* no prisma de base n -gonal, com n par e múltiplo de 3:
 $\alpha(K_{2,Cn}) = n/3 + 2$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4.7.4 - Resumo dos *Lights Out* dos Prismas

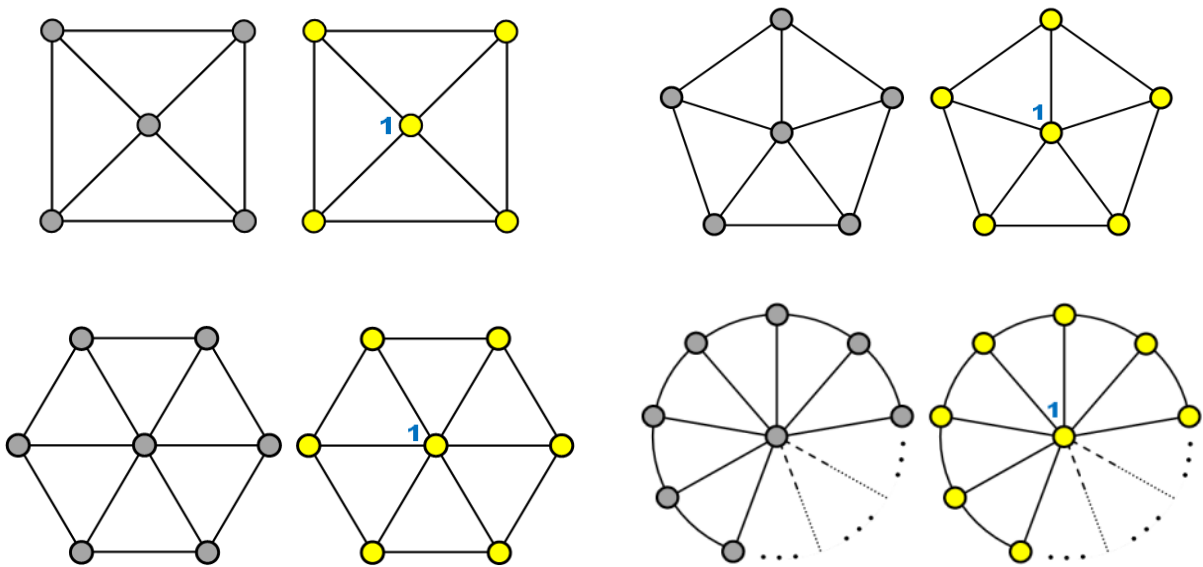
Quadro 08 – Prismas de base n -gonal e suas soluções ótimas	
$n = 6k + 3$ (n ímpar e múltiplo de 3)	$\implies \alpha(K_{2,C_n}) = n/3$
$n = 6k$ (n par e múltiplo de 3)	$\implies \alpha(K_{2,C_n}) = n/3 + 2$
$n = 6k + 1$ ou $n = 6k + 5$ (n ímpar e não múltiplo de 3)	$\implies \alpha(K_{2,C_n}) = n$
$n = 6k + 2$ ou $n = 6k + 4$ (n par e não múltiplo de 3)	$\implies \alpha(K_{2,C_n}) = n + 2$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4.8 - *Lights Out* nos Grafos das Pirâmides

O *Lights Out* em pirâmides é facilmente solucionado ao acionarmos a sua base, o que ligará/acenderá todas as suas faces, uma vez que a base de uma pirâmide é uma face adjacente a todas as faces laterais. Como já vimos anteriormente, uma pirâmide de base n -gonal gera um grafo formado por um ciclo de n nós (que representam as faces laterais), onde todos eles estão conectados com o nó central (representando a base). Portanto, acionando o nó central, ligamos/acendemos todos os nós. Logo, $\alpha(K_{1,C_3}) = \alpha(K_{1,C_4}) = \alpha(K_{1,C_5}) = \dots = \alpha(K_{1,C_n}) = 1$, como mostramos na Figura 44.

Figura 44 – *Lights Out* nas pirâmides de bases quadrada, pentagonal, hexagonal e n -gonal: $\alpha(K_{1,C_4}) = \alpha(K_{1,C_5}) = \alpha(K_{1,C_6}) = \alpha(K_{1,C_n}) = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

4.9 - *Lights Out* nos Grafos das Bipirâmides

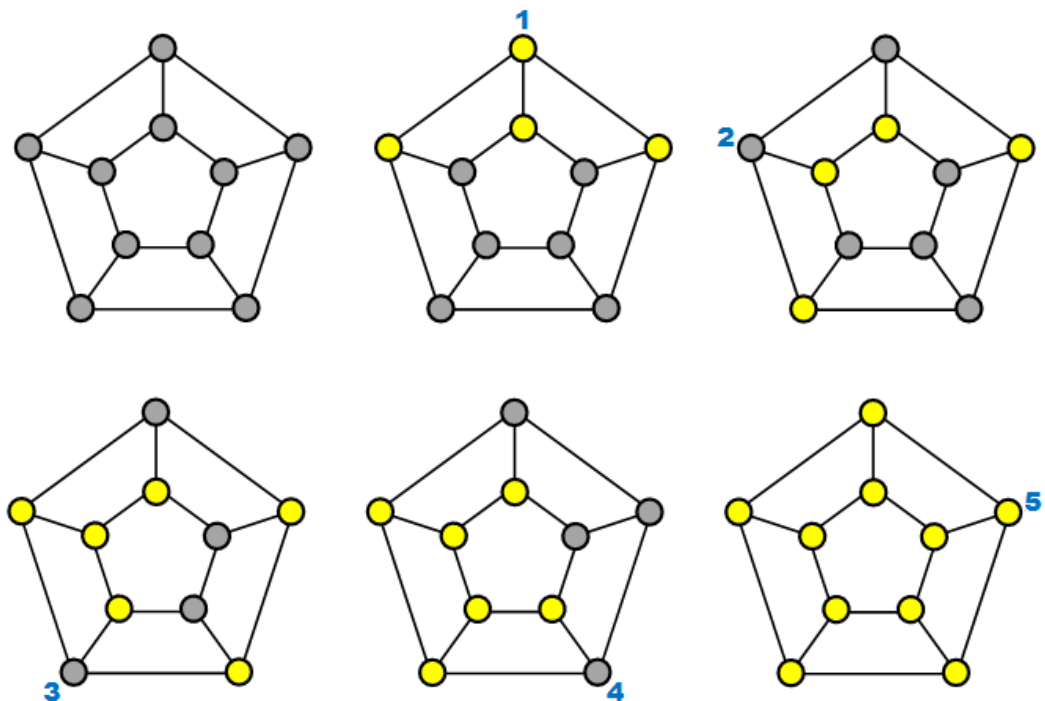
Como já apresentado anteriormente, retrataremos uma bipirâmide n -gonal através de um grafo composto por dois ciclos C_n (cada um designando as n faces laterais de uma das pirâmides) ligados entre si por seus nós homólogos. Aqui, novamente, iremos iniciar nossa inspeção tendo como parâmetro o que conhecemos sobre o *Lights Out* em ciclos.

4.9.1 - Solução Geral para *Lights Out* em Grafos de Bipirâmides

Quando acionamos qualquer um dos nós do grafo de uma bipirâmide sempre alteramos o estado de exatamente 4 nós, sendo 3 deles de um ciclo e 1 nó do outro ciclo (mais especificamente, o nó acionado, os seus 2 vizinhos do mesmo ciclo e o seu nó homólogo do outro ciclo). Assim sendo, e lembrando que o acionamento de todos os nós de um ciclo torna esse ciclo todo aceso, dada uma bipirâmide n -gonal qualquer, ao acionarmos todos os n nós de um dos seus ciclos findaremos não só com todos os nós desse ciclo acesos mas também com todos os nós do outro ciclo acesos (pois os nós homólogos aos acionados foram sendo acendidos um a um).

Expomos um exemplo desse fato na Figura 45.

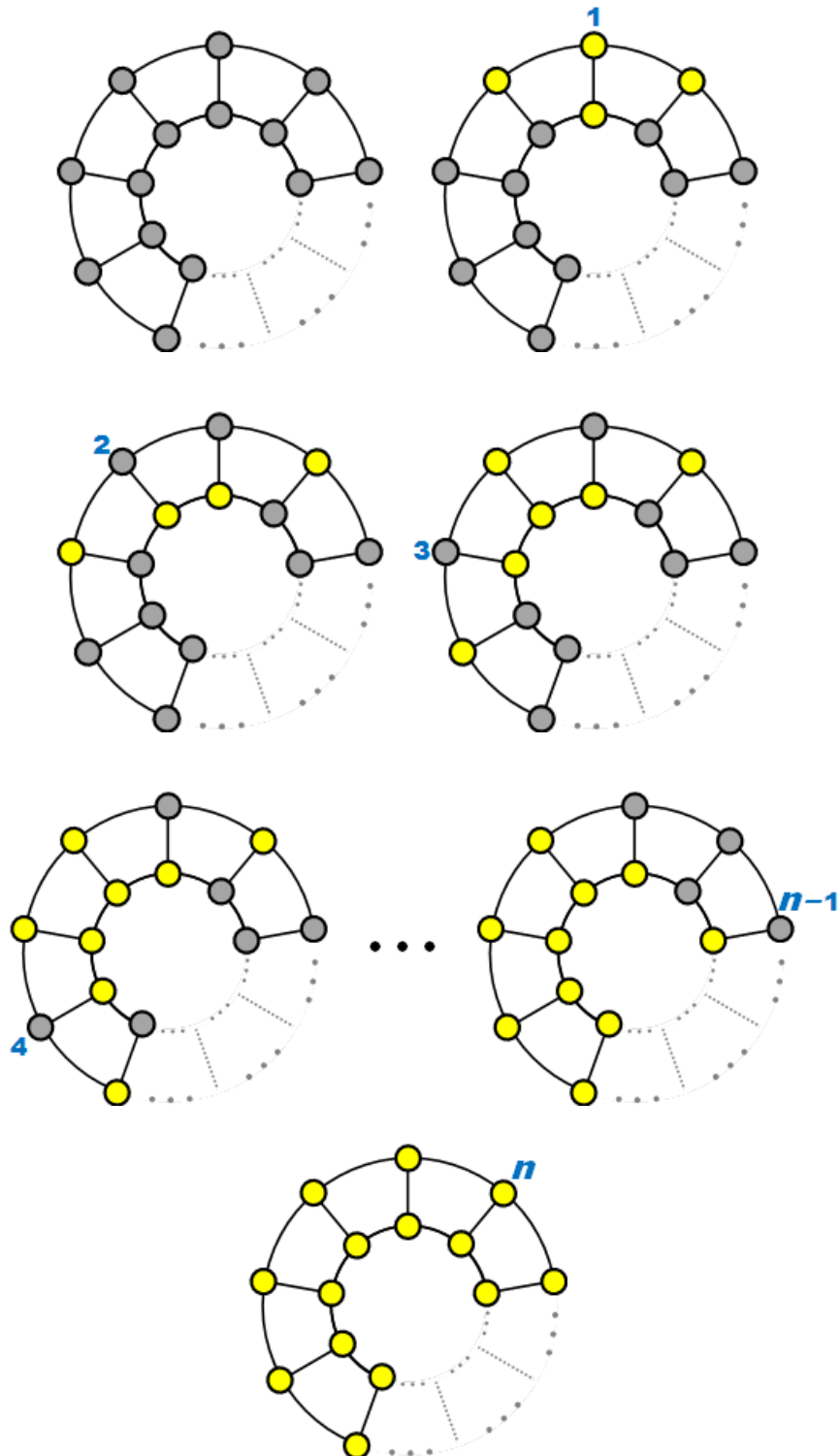
Figura 45 – *Lights Out* na bipirâmide pentagonal: $s(G) = 5$



Portanto, a técnica de acionar todos os n nós de um dos ciclos do grafo de uma bipirâmide n -gonal sempre acarretará em uma solução: $\#S_G = n$.

Na Figura 46 pode-se observar uma generalização visual desta técnica

Figura 46 – *Lights Out* na bipirâmide n -gonal: $s(G) = n$



4.9.2 - *Lights Out* em Grafos de Bipirâmides n -gonais (n múltiplo de 4)

Examinaremos agora, se existe alguma outra técnica que forneça um número menor de nós a ser acionado para solucionar o *Lights Out* de uma bipirâmide.

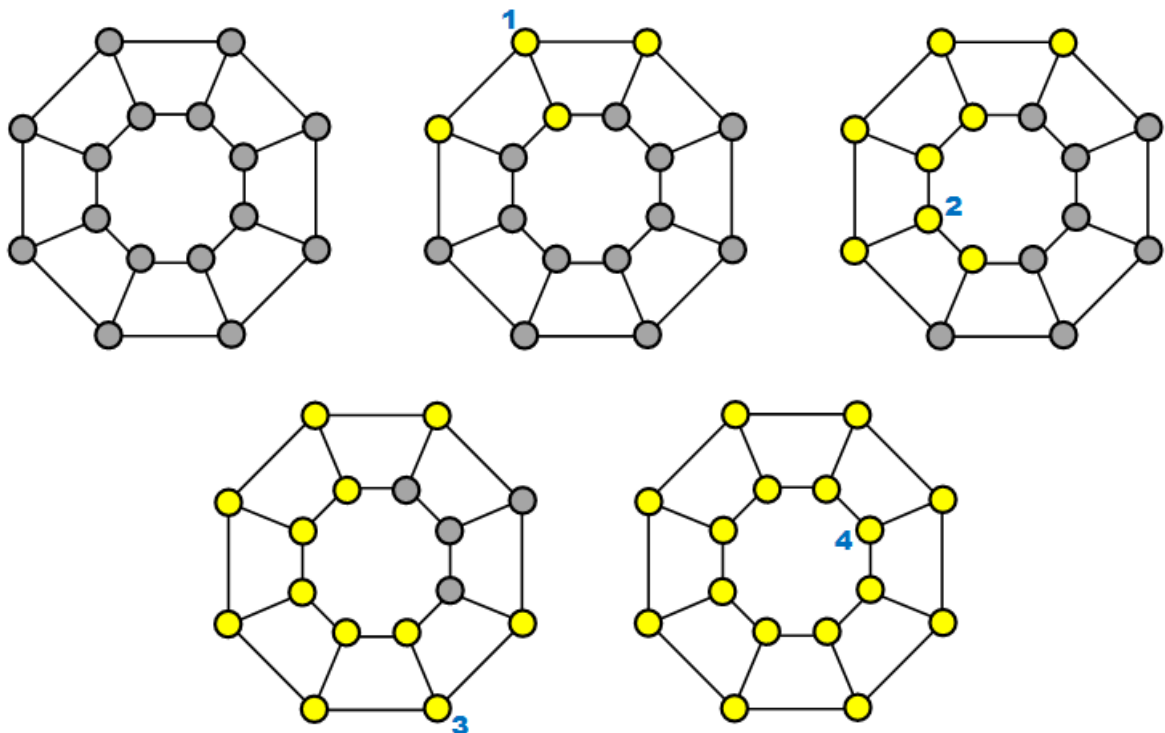
Pela característica dos grafos das bipirâmides que mencionamos antes (a de que cada acionamento altera sempre o estado de 3 nós de um ciclo e 1 nó do outro ciclo), se acionarmos p nós de um dos ciclos (por exemplo, do ciclo externo) e q nós do outro ciclo (no exemplo, do ciclo interno) de um grafo de uma bipirâmide n -gonal, sendo que esses p nós e esses q nós tenham vizinhanças disjuntas, então podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{array}{l} \text{nós alterados do ciclo externo} \rightarrow \\ \text{nós alterados do ciclo interno} \rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3p + q = n \\ p + 3q = n \end{array} \right. \Rightarrow p = q = n/4$$

A solução do sistema acima nos garante que, se n for um múltiplo de 4, então cada nó será aceso uma única vez, e portanto a solução ótima do *Lights Out* (se existir) será $\alpha(G) = p + q = n/2$.

Podemos observar um exemplo disso na Figura 47.

Figura 47 – *Lights Out* na bipirâmide octogonal: $\alpha(G) = 4$

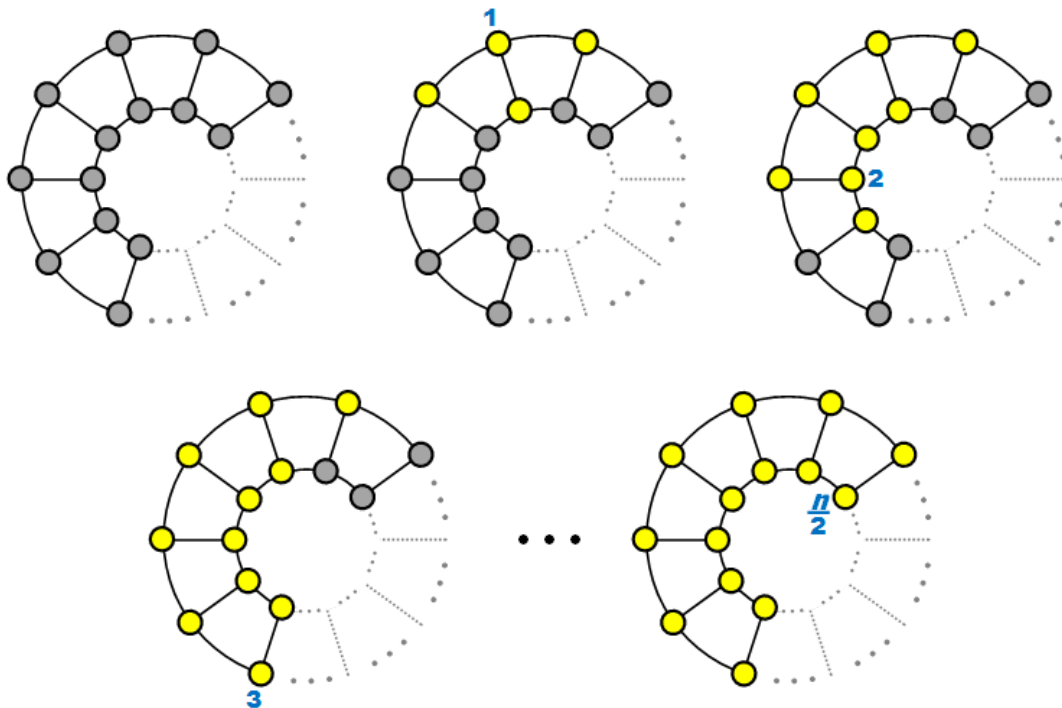


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Mas a existência de um possível valor numérico para o α não garante necessariamente que este valor possa efetivamente ser alcançado. Será preciso examinar a existência de uma técnica que produza o $\alpha(G) = p + q = n/2$.

E, de fato, tal técnica existe! Nomeando os nós do ciclo externo (superior) de $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ e os nós do ciclo interno (inferior) de $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$, se acionarmos os nós $S_1, I_3, S_5, I_7, \dots, S_{1+4k}, I_{3+4k}, \dots, S_{n-3}, I_{n-1}$, terminaremos com o grafo todo aceso e teremos acionado $n/4 = p$ nós do ciclo externo e outros $n/4 = q$ nós do ciclo interno, totalizando $n/2$ nós acionados, como exibido na Figura 48.

Figura 48 – Lights Out na bipirâmide n -gonal, com n múltiplo de 4: $\alpha(G) = n/2$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Apresentamos, neste trabalho, uma sequência didática para um jogo combinatório solitário sobre algumas classes específicas de poliedros. Relacionamos o problema de trocar os estados das faces de poliedros ao problema equivalente que é o de trocar os estados dos nós de seus respectivos grafos duais. Neste sentido, promovemos a resolução de um problema a partir de diferentes pontos de vista. Acreditamos que este tipo de caracterização proporciona investigações de estruturas para além da matemática combinatória, ensejando discussões sobre a estrutura espacial inerente aos poliedros convexos.

Sobre o jogo, convém observar que alguns valores obtidos para o parâmetro α representam, de maneira trivial, o melhor cenário como é o caso do tetraedro e demais pirâmides, do octaedro e de bpirâmides (de base múltipla de 4) e do dodecaedro, enquanto outros valores obtidos carecem de argumentos menos intuitivos de modo a justificar que as soluções apresentadas são de fato ótimas (como ocorreu no hexaedro e no icosaedro). Vale enfatizar que propostas similares a estas convergem para que a utilização de jogos no ensino promovam uma aprendizagem interessante e até divertida da matemática, despertando o interesse dos alunos em acessar as soluções através de trocas de ideias e de argumentações muitas vezes criativas e originais.

Neste sentido, algumas questões emergem naturalmente dos problemas aqui propostos:

- É possível obter uma solução ótima para cada poliedro de Platão? Vimos que sim. Obtivemos as soluções ótimas para todos os 5 poliedros de Platão: Tetraedro: $\alpha(G) = \alpha(K_4) = 1$; Hexaedro: $\alpha(G) = \alpha(K_{2,C4}) = 6$; Octaedro: $\alpha(G) = 2$; Dodecaedro: $\alpha(G) = 2$; e Icosaedro: $\alpha(G) = 6$.
- A ordem dos nós que são acionados importa para se obter uma solução? Vimos que não e demonstramos que a ordem dos acionamentos dos nós não é importante para qualquer solução de um *Lights Out*. Pode-se permutar os acionamentos de uma sequência de nós que mesmo assim o resultado final será o mesmo. Em outras palavras, a sequência de nós em si não é relevante, apenas quais foram os nós acionados. O que torna mais adequado

usarmos o termo o "*conjunto de nós acionados*", em vez de "*sequência de nós acionados*".

- Em uma solução ótima, um mesmo nó pode ser acionado mais de uma vez? Na mesma demonstração em que estabelecemos que não importa a ordem dos nós, é possível constatar que acionar um mesmo nós uma quantidade qualquer ímpar de vezes acarreta no mesmo resultado de um único acionamento, e acionar um mesmo nó uma quantidade par de vezes têm o mesmo efeito que não acioná-lo. Donde depreendemos que a relevância está na paridade de acionamentos.
- Existe uma estratégia que sempre gera uma solução para o *Lights Out* de prismas? Sim. Constatamos que pode-se sempre solucionar o *Lights Out* de um prisma de base n qualquer em, no máximo, duas etapas: primeiro acendemos todas as n faces laterais (que, no caso de n múltiplo de 3, conseguimos isso acionando $n/3$ nós do ciclo de forma intercalada onde cada nó acionado esteja entre dois nós que não acionados; e no caso de n não múltiplo de 3, basta acionar todos os nós do ciclo); após isso, inspecionando as bases, se n é ímpar, então o prisma já estará com todas as faces acesas, mas, se n for par, então as bases estarão apagadas, bastando acionar ambas as bases para resultar em todas as faces acesas.
- E para as Bipirâmides, existe uma estratégia que sempre gera uma solução para o *Lights Out*? Sim e, de uma forma geral, para qualquer bipirâmide de base n (e portanto, com $2n$ faces) ao acionarmos todas as n faces laterais de uma das pirâmides terminaremos com todas as $2n$ faces da bipirâmide acesas. E no caso específico de n múltiplo de 4, há um método que soluciona o *Lights Out* com apenas $n/2$ acionamentos.
- Há alguma relação entre a solução minimal de um poliedro e a solução do seu dual? Com tudo o que abordamos e analisamos até agora, não foi possível inferir se há ou não alguma correlação entre o parâmetro α de um poliedro e o parâmetro α de seu respectivo dual.

Este trabalho naturalmente sugere e direciona à alguns trabalhos futuros que podem ser divididos em 2 grupos: análises teóricas e pesquisas/aplicações em práticas educacionais. Dentre algumas análises teóricas que este trabalho suscita, podemos destacar a investigação do *Lights Out* sobre grafos de outras classes de poliedros: Antiprismas e Trapezoedros (duais entre si); Poliedros de Arquimedes e Poliedros de Catalan (também duais entre eles); Poliedros de Johnson; Poliedros Fullerenos; Poliedros não convexos; e Hiperpoliedros (poliedros de dimensão 4 ou maior). Além disso, mas ainda nessa mesma linha de perscrutação acadêmica, o presente estudo motiva conjecturar e explorar uma generalização de *Lights Out* com 3 ou mais estados de iluminação.

No campo de pesquisas e aplicações práticas educacionais, podemos citar a construção de materiais concretos dos mais diversos tabuleiros para *Lights Out* (em especial os da forma de poliedros) utilizando o Arduino e LEDs, com o intuito de serem usados em aula, a criação de visualizações geométricas computacionais do *Lights Out* em poliedros (seja por intermédio do GeoGebra, ou pela programação de programas ou aplicativos no estilo do *Poly*), com o objetivo de ser usado em sala de aula ou para trabalhos de casa e uma pesquisa pedagógica da inserção lúdica e colaborativa dos mais variados *Lights Out* em sala de aula com um número significativo de estudantes.

REFERÊNCIAS

- [1] AARTS, J. M. **Plane and Solid Geometry**, New York: Springer, 2008.
- [2] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph Theory**. Canadá: Springer, 2008.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>> acesso em: 14 abr. 2024.
- [4] COUTO, F.; BRITO, I. B.; SENTO SÉ, W. A. Lights Out em grafos: apagando luzes da menor maneira. *In: Encontro de Teoria da Computação (ETC), 7., 2022, Niterói. Anais [...].* Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2022. p. 137-140.
- [5] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial, posição e métrica**. São Paulo: Atual Editora, 2015.
- [6] FLEISCHER, R.; YU, J. A Survey of the Game “Lights Out!” *In: BRODNIK, A; LÓPEZ-ORTIZ, A; RAMAN, V; VIOLA, A. (Eds.) Space-Efficient Data Structures, Streams, and Algorithms. Lecture Notes in Computer Science.* v. 8066. Berlin, Heidelberg: Springer, p. 176–198, 2013.
- [7] FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996
- [8] GROENWALD, C. L. O.; TIMM, U. T. **Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula**. Disponível em: <<https://www.somatematica.com.br/artigos/a1/>> Acesso em 23 mar. 2024.
- [9] GROFF, J. **Menos trigonometria, mais pensamento crítico**. Disponível em: <<http://www.bbc.com/portuguese/brasil-41182484>>. Acesso em: 23 mar. 2024.
- [10] GRÜNBAUM, B.; Shephard G. Duality of Polyhedra. *In: SENECHAL, M; FLECK, G. (Eds.). Shaping Space: A Polyhedral Approach.* Burkhouse, 1988.
- [11] JURKIEWICZ, S. **Grafos: Uma Introdução**. Rio de Janeiro, 2009.
- [12] KALEFF, A. M.; HENRIQUES, A. S.; REI, D. M. **Desenvolvimento do pensamento geométrico: o modelo de van Hiele**. Bolema, Rio Claro - SP, v.9, n. 10, p. 21-30, 1994.
- [13] PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- [14] SUTNER, K. Linear cellular automata and the Garden-of-Eden. *In: The Mathematical Intelligencer. Computational and Applied Mathematics*, v.11, n. 2, p. 49–53, 1989.

Lights Out em Poliedros

Wallace A. Salgueiro Jr.¹, Diego S. Nicodemos², Patrícia E. de Moraes³

Colégio Pedro II, Profmat, Rio de Janeiro, RJ

João Pedro S. G. Costa⁴

Colégio Pedro II, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ

Fernanda Couto⁵

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Pesc/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. O jogo solitário *Lights Out* é um jogo eletrônico jogado por um único jogador em um grid 5x5 em que cada célula contém um botão e uma luz indicadora. Ao pressionarmos um botão deste tabuleiro a luz da célula acionada e de suas células vizinhas trocam de estado, isto é, células acesas apagam-se, enquanto células apagadas se acendem. Considerando que há uma configuração inicial para as células do tabuleiro, isto é, todas as células encontram-se apagadas, o objetivo do jogo *Lights Out* é determinar um conjunto mínimo de células que, ao serem pressionadas, trocam os estados de todas as células do tabuleiro, acendendo-o completamente. O *Lights Out* pode ser generalizado para tabuleiros de formatos distintos, democraticamente representados por grafos, de modo que as células do tabuleiro são representadas pelos vértices e células adjacentes são representadas pelas arestas do grafo. Investigamos o jogo *Lights Out* à luz dos poliedros e da teoria de grafos, relacionando assuntos a priori desconectados.

Palavras-chave. Lights Out, Grafos, Poliedros, Ensino Básico

1 Introdução

O jogo **Lights Out** foi introduzido por Sutner [8], em 1989, no contexto da teoria de grafos. Sutner mostrou que sempre é possível alterar o estado de todos os vértices de um grafo inicialmente desligado. O jogo pensado sobre grafos torna a sua jogabilidade mais acessível e democrática ao passo em que é simples e barato construir um grafo utilizando apenas lápis e papel, ou mesmo através de um desenho no chão ou em um quadro negro. A Figura 1 fornece um exemplo de um tabuleiro 5x5 e de sua respectiva representação através de um grafo.

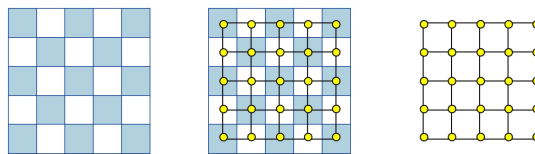


Figura 1: À esquerda um tabuleiro 5x5 e à direita uma de suas representações através de um grafo. No tabuleiro, células contendo segmentos em comum são representadas, no grafo, por vértices e uma aresta conectando-os. Fonte: dos autores.

¹profwallacesalgueiro@cp2.g12.br

²diegonicodemos@cp2.g12.br

³patricia.ertal@gmail.com

⁴jpg.3000@hotmail.com

⁵nandavdc@gmail.com

O objetivo deste trabalho é inserir o jogo Lights Out em um ambiente de Ensino Básico, propondo a sua jogabilidade através de poliedros regulares. Apesar do jogo Lights Out ser um jogo solitário, a proposta que buscamos viabilizar é a de olhá-lo como um jogo cooperativo, vindo ao encontro de uma das competências específicas descritas na BNCC [3] que é a de promover a interação com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles [[3], p. 267].

Neste sentido, Groff [6] defende que o ensino deveria ser mais baseado em habilidades e competências do que em disciplinas tradicionais. Groenwald e Timm [5] afirmam que a utilização de jogos no ensino permite que os alunos façam da aprendizagem um processo interessante e até divertido. Destacam ainda que existem essencialmente três aspectos que justificam a incorporação do jogo nas aulas: o caráter lúdico inerente aos jogos, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais.

Pólya [7] identifica quatro etapas necessárias para a resolução de um problema: a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução do plano e o retrospecto. Na etapa de compreensão do problema o aluno deve ser instigado a partir de perguntas, de modo a identificar os dados e condições propostas no mesmo. Em seguida, deve estabelecer um plano de ação, fazendo articulações com conhecimentos já construídos. Na etapa seguinte, o aluno deve pôr em prática o plano de ação elaborado. No retrospecto, acontece a verificação da solução encontrada, de modo a analisar se a mesma corresponde ao(s) questionamento(s) do problema.

O jogo Lights Out aborda aspectos primitivos da Matemática Combinatória em que a suposição de solução de um problema pode ser verificada, testada, comprovada ou refutada. No entanto, a demonstração da factibilidade de uma solução ótima, neste caso um conjunto de vértices de cardinalidade mínima que, ao serem acionados, conduzem à configuração final do tabuleiro (grafo) pode requerer do jogador maior laboriosidade e sofisticação em seus argumentos. Isto converge para as etapas pensadas por Pólya, uma vez que a compreensão do jogo é algo trivialmente necessária. Em seguida, espera-se que haja um plano para solucionar o jogo. Este plano deve ser executado (testado) e, por fim, sua solução demonstrada.

Neste trabalho, o estudo do jogo Lights Out repousa sobre uma classe particular de grafos obtida a partir de poliedros regulares. Desta maneira, os tabuleiros considerados são os poliedros regulares, ou seja, o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Convém observar que vamos estudar as estruturas discretas destas figuras, por este motivo as medidas das arestas que compõem estes sólidos tornam-se irrelevantes. Neste cenário, estamos interessados na quantidade de vértices que compõem cada sólido, além das adjacências entre pares de vértices.

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na Seção 2, apresentamos conceitos básicos de teoria de grafos e do jogo Lights Out; na Seção 3, investigamos o jogo Lights Out sobre poliedros regulares e, finalmente, na Seção 4, apresentamos uma discussão sobre trabalhos futuros relacionados a essa pesquisa.

2 Preliminares

Discutimos, nesta seção, conceitos preliminares sobre a teoria de grafos e sobre o jogo Lights Out. As definições e resultados apresentados referentes à teoria de grafos podem ser obtidas em [1]. Para maiores detalhes sobre o atual estado da arte sobre Lights Out o leitor é convidado a consultar [2] e [4].

2.1 Sobre Grafos

Um *grafo* $G = (V(G), E(G))$ consiste de um conjunto não vazio $V(G)$ de **vértices** e de um conjunto $E(G)$ de **arestas**, de modo que cada **aresta** $e \in E(G)$ é um par não ordenado de vértices distintos, isto é, para toda aresta $e \in E(G)$ existem $u \in V(G)$ e $v \in V(G)$ distintos e tais que $e = \{u, v\}$ ou simplesmente $e = uv$. Neste caso, dizemos que os vértices u e v são **adjacentes** ou **vizinhos** e que a aresta e é **incidente** aos vértices u e v ou que u e v são as **extremidades** da aresta e . Duas arestas que possuem uma extremidade em comum são chamadas de **arestas adjacentes**. Quando não houver risco de ambiguidade escreveremos $G = (V, E)$ ou simplesmente G . Neste trabalho, todos os grafos considerados são **simples**, isto é, não possuem arestas **múltiplas** ou **paralelas** (arestas distintas que unem o mesmo par de vértices) ou **laços** (aresta que une um vértice a ele mesmo).

O **grau** de um vértice v em G , representado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes à v . Denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ os graus mínimo e máximo, respectivamente, dos vértices do grafo G . Um grafo é **k -regular** se todos os seus vértices têm grau k . Um grafo 3-regular é chamado de grafo **cúbico**. Se todos os vértices de um grafo têm graus menores que 3, então ele é chamado de grafo **subcúbico**. Um grafo em que cada par de vértices distintos está unido por uma aresta é chamado de grafo **completo**. Todo grafo completo com n vértices é $(n - 1)$ -regular.

A **distância** entre dois vértices u e v de um grafo conexo $G = (V, E)$ é representada por $dist_G(u, v)$ ou por $dist(u, v)$ (se não houver risco de ambiguidade) e é definida como o comprimento do menor caminho entre u e v em G . O **diâmetro** de um grafo conexo, representado por $diam(G)$, é dado pela máxima distância entre dois vértices do grafo, ou pode ser visto como o comprimento do maior caminho geodésico entre dois vértices. Dois vértices $u, v \in V(G)$ são ditos vértices **diametralmente opostos** quando $dist(u, v) = diam(G)$.

Um grafo G é **planar** se existe uma representação (desenho, imersão) de G no plano de modo que as arestas se encontrem somente nos vértices, isto é, de modo que as arestas não se cruzem. Uma tal representação de G é dita plana ou planar. Uma representação planar divide o plano em regiões chamadas **faces**. Existe sempre uma única face chamada **externa** ou **infinita**, que não está limitada (tem área infinita). Dado um grafo planar G definimos o **grafo dual** de um desenho plano $D(G)$ de G , representado por $(D(G))^*$, da seguinte forma: a cada face f de $D(G)$ corresponde um vértice f^* de $(D(G))^*$, e a cada aresta e de $D(G)$ corresponde uma aresta e^* de $(D(G))^*$ de modo que dois vértices f^* e g^* de $(D(G))^*$ são ligados por uma aresta e^* se e somente se as faces f e g em $D(G)$ são separadas pela aresta e . Na Figura 5, vemos a construção do grafo dual de um hexaedro, neste caso, um octaedro. No último frame da Figura 5 vemos uma representação planar para o octaedro.

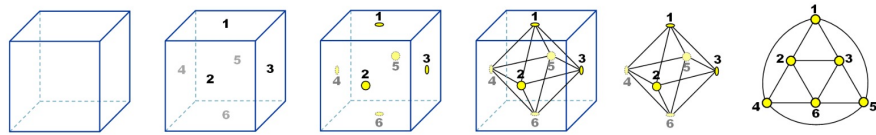


Figura 2: Hexaedro e a construção de seu grafo dual, um octaedro. Fonte: dos autores.

2.2 Sobre Lights Out

Uma definição formal para o jogo Lights Out, dada por Fleischer e Yu [4], considera um grafo simples $G = (V, E)$ contendo n vértices, de modo que cada vértice $v \in V$ possui um estado (luminosidade) inicial, isto é, cada vértice do grafo G encontra-se inicialmente desligado/apagado ou ligado/aceso. Esta configuração inicial de cada vértice do grafo é predeterminada de modo que

o jogador tem conhecimento dos estados iniciais de cada vértice do grafo. Uma etapa do jogo consiste em escolher um vértice v , que inverterá os estados de v e de todos os seus vizinhos em G de ligado/aceso para desligado/apagado ou vice-versa. Esta etapa é chamada de etapa de ativação do vértice v . A configuração inicial proposta para todos os grafos deste trabalho é aquela em que cada vértice do referido grafo está desligado/apagado.

O objetivo do jogo Lights Out é obter uma configuração em que todos os vértices dos grafos encontram-se ligados/ativados através de uma sequência finita de ativações. Neste caso, dizemos que a configuração inicial é solucionável. Em outras palavras, dado um grafo $G = (V, E)$, o jogo Lights Out, sobre o grafo G , é solucionável quando existe um conjunto de vértices $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$, subconjunto de V , de modo que ao acionarmos os vértices de S atingimos completamente o estado do tabuleiro (grafo). Além disso, S é uma solução ótima para o jogo Lights Out sobre o grafo G , quando todo conjunto S' , solução para o jogo Lights Out sobre G , é tal que $|S| \leq |S'|$. A cardinalidade de uma solução ótima para o jogo Lights Out sobre um grafo G será indicada por $\alpha(G)$. Ressaltamos que existem várias versões de estudo para o jogo Lights Out. A versão apresentada neste trabalho é a de minimização, ou seja, estamos procurando o menor conjunto que conduz à configuração final.

Um aspecto peculiar sobre as soluções ótimas para o jogo Lights Out está no fato de que o número de tais soluções é dado pelo número de permutações sobre os elementos que compõem uma solução ótima arbitrária. Em outras palavras, se há uma solução ótima para o jogo Lights Out, então a ordem em que os vértices que compõem uma solução ótima são acionados é indiferente.

Os tabuleiros considerados neste trabalho serão representados por grafos regulares. Se G é um grafo k -regular contendo n vértices, então uma cota inferior trivial para $\alpha(G)$, prevista por Brito e Sento Sé [2], é dada por $\alpha(G) \geq \frac{n}{k+1}$, pois cada toque aciona o vértice escolhido e outros k vértices adjacentes. Então o produto entre $k + 1$ e $\alpha(G)$ retornaria, no melhor cenário, a quantidade de vértices do grafo G .

3 Lights Out Sobre Poliedros

O jogo Lights Out foi historicamente concebido em uma grid 5x5, como indicado na Figura 1. Originalmente este jogo propunha que as faces do grid fossem acionadas de modo a obter a configuração desejada. Quando modelamos este grid em um grafo, o jogo Lights Out passa a ser pensado sobre os vértices deste grafo, pois os vértices do grafo representam as faces do grid. Se pensamos em jogar o Lights Out sobre os poliedros regulares, considerando que as faces destes poliedros, inicialmente desligadas/apagadas, devem ser completamente ligadas/acesas, então o jogo Lights Out, pensado nos respectivos grafos duais dos poliedros regulares, deve ser considerado sobre os vértices destes grafos.

3.1 Lights Out Sobre Tetraedros

Desejamos acender as faces do tetraedro. Note que o tetraedro é autodual, isto é, seu grafo dual também pode ser visto como um tetraedro ou como o grafo completo K_4 . Isto nos diz que cada vértice deste grafo tem grau 3 e, portanto, um único toque em qualquer vértice trocará o estado de todos os vértices que compõem o grafo, como indicado na Figura 3. Neste caso, acendendo todos os vértices do grafo K_4 estamos acendendo todas as faces do tabuleiro tetraedro.

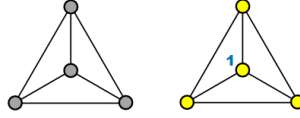


Figura 3: Lights Out sobre os vértices do tetraedro: $\alpha(K_4) = 1$. Fonte: dos autores.

3.2 Lights Out Sobre Hexaedros

O dual do hexaedro é o octaedro. Neste caso, o octaedro visto como um grafo é 4-regular e contém 6 vértices, isto é, de cada um de seus 6 vértices partem 4 arestas, consequentemente, cada toque em um vértice troca o estado de 5 vértices (inclusive do vértice acionado). Dessa forma, o primeiro toque (indicado na Figura 4 pelo rótulo 1) acende/liga 5 vértices. Para o segundo toque (rótulo 2), escolhemos o único vértice não adjacente ao de rótulo 1, o que implica em tornar os vértices de rótulos 1 e 2 os únicos acesos/ligados. O terceiro toque acionará um vértice arbitrário que esteja apagado/desligado, acendendo este e outros dois vértices e desligando os de rótulos 1 e 2. Neste momento, metade dos vértices do grafo estão acesos e a outra metade está apagada. O quarto vértice acionado, indicado pelo rótulo 4, é o vértice apagado/desligado que ainda não foi diretamente acionado em nenhuma rodada prévia. Após esta rodada, restam apenas dois vértices apagados/desligados, os únicos que ainda não foram diretamente acionados. Acionamos um destes vértices e o rotulamos de 5, obtendo apenas este vértice aceso/ligado. Finalmente, acionamos o outro vértice que ainda não foi diretamente acionado, rotulando-o de 6 e acendendo completamente o grafo octaedro, como mostra a Figura 4 e, consequentemente, as faces do hexaedro.

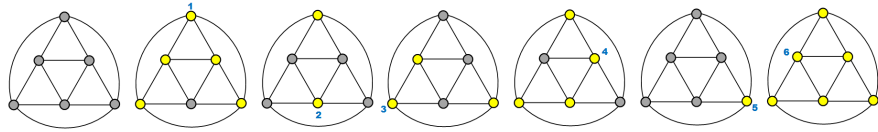


Figura 4: Lights Out sobre os vértices do grafo octaedro: $\alpha(G) = 6$. Fonte: dos autores.

3.3 Lights Out Sobre Ocatedros

O objetivo agora é acender completamente as faces do octaedro, ou seja, os vértices do grafo hexaedro (o hexaedro é o dual do octaedro). O grafo hexaedro é 3-regular e contém 8 vértices. Neste caso, cada toque em um vértice altera o estado de 4 vértices e, portanto, no melhor cenário com 2 toques acenderíamos completamente todo o hexaedro. O primeiro toque acende 4 vértices, restando 4 vértices a serem acesos. Por fim, basta pressionar um vértice desligado não adjacente a nenhum vértice aceso que obtemos a configuração esperada, como exibido pela Figura 5.

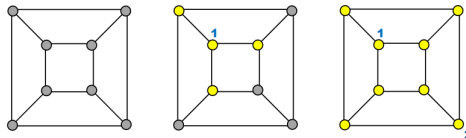


Figura 5: Lights Out sobre os vértices do grafo hexaedro: $\alpha(G) = 2$. Fonte: dos autores.

3.4 Lights Out Sobre Dodecaedros

Considerando o jogo sobre as faces do dodecaedro, conseqüentemente sobre os vértices do grafo dual (icosaedro), temos uma estratégia simples a realizar: acionar 2 vértices que não sejam adjacentes e cujos vizinhos sejam distintos, pois cada um dos 12 vértices deste grafo tem grau 5 e um toque em qualquer um deles trocará o estado de 6 vértices, como ilustrado na Figura 6.

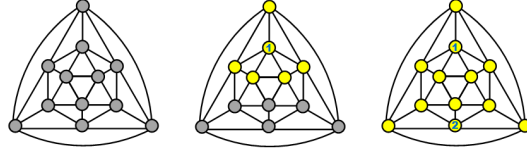


Figura 6: Lights Out sobre o grafo icosaedro: $\alpha(G) = 2$. Fonte: dos autores.

3.5 Lights Out Sobre Icosaedros

O último poliedro que servirá de tabuleiro para nossas discussões é o icosaedro que tem o dodecaedro como dual. Neste caso, o dodecaedro, visto como um grafo, está representado pela Figura 7. O grafo a ser considerado, um dodecaedro, é um grafo 3-regular contendo 20 vértices. A sequência desejada inicia-se em um vértice arbitrário (rótulo 1), em seguida acionamos um vértice a uma distância 2 do rotulado na etapa anterior, a este damos o rótulo 2. Para o terceiro toque (rótulo 3), escolhemos o vértice a distância 2 dos vértices rotulados de 1 e de 2. Esta sequência acende completamente, na Figura 7, a face externa. Escolhemos um vértice da face pentagonal central de modo a não apagar nenhum vértice aceso (rótulo 4). Pressionamos um vértice, também na face pentagonal central, a uma distância 2 do de rótulo 4, a este damos o rótulo 5. Finalmente, acionamos o vértice o único vértice a distância 2 dos de rótulos 4 e 5, acendendo completamente os vértices do dodecaedro e, conseqüentemente, as faces do icosaedro.

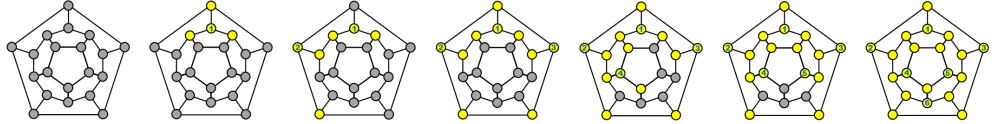


Figura 7: Lights Out sobre o grafo dodecaedro: $\alpha(G) = 6$. Fonte: dos autores.

De fato, seis toques são o mínimo para o dodecaedro. Observe que, no melhor cenário, com apenas 5 toques deveríamos ser capazes de acender todo o grafo ($\alpha(G) \geq \frac{20}{3+1} = 5$). Para isto, cada vértice do grafo deveria ter seu estado alterado exatamente uma única vez, o que é inviável. Essa inviabilidade pode ser justificada através de uma análise sobre uma de suas faces pentagonais. Para acendermos todos os vértices desta face, teríamos 3 cenários: acionar dois de seus vértices, o que faria com que um deles ficasse novamente apagado, como mostra a Figura 8a); acionar apenas um de seus vértices e tocar em vértices adjacentes aos que estão apagados. Isto também faria com que um dos vértices de uma face pentagonal vizinha ficasse apagado, Figura 8b); tocar somente em vértices adjacentes aos vértices do pentágono, o que faria com que vários vértices de faces vizinhas fossem apagados, Figura 8c). Portanto, como algum vértice será apagado, temos que $\alpha > 5$ e, conseqüentemente, $\alpha = 6$.

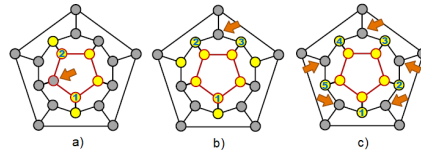


Figura 8: Face pentagonal do dodecaedro. Fonte: dos autores.

4 Considerações Finais

Apresentamos neste trabalho uma sequência didática para um jogo combinatório solitário sobre uma classe específica de sólidos. Relacionamos o problema de trocar os estados das faces de sólidos ao problema equivalente de trocar os estados dos vértices dos respectivos grafos duais destes poliedros. Neste sentido, promovemos a resolução de um problema a partir de diferentes pontos de vistas. Acreditamos que este tipo de abordagem do jogo promove investigações de estruturas para além da matemática combinatória, ensejando discussões sobre a estrutura espacial inerente aos poliedros regulares. Sobre o jogo, convém observar que no tetraedro, no octaedro e no dodecaedro os valores obtidos para a cardinalidade de uma solução ótima para o jogo Lights Out representam, de maneira trivial, o melhor cenário, enquanto os valores obtidos para o hexaedro e para o icosaedro careceram de argumentos combinatórios mais robustos, a fim de justificar que as soluções apresentadas são de fato ótimas. Pesquisas futuras sugerem a abordagem deste jogo sobre outras classes de grafos, por exemplo, sobre os prismas, as pirâmides e as bipirâmides, generalizando os resultados aqui obtidos. Vale enfatizar que propostas similares às discutidas neste trabalho propiciam um ensino de combinatória mais participativo, colaborativo e consistente, tornando a sala de aula um lugar de diálogos, trocas e descobertas.

Referências

- [1] J. A. Bondy e U. S. R. Murty. **Graph Theory**. Canada: Springer, 2008. ISBN: : 978-1-84628-969-9.
- [2] I. B. N. Brito e W.A Sento Sé. “Lights Out: como apagar as luzes da melhor maneira possível (em grafos)”. Dissertação de mestrado. UFRRJ, 2021.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>.
- [4] R. Fleischer e J. Yu. “A Survey of the Game “Lights Out!”” Em: **Space-Efficient Data Structures, Streams, and Algorithms. Lecture Notes in Computer Science**. Ed. por A. Brodnik, A. López-Ortiz, V. Raman e A. Viola. Vol. 8066. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013, pp. 176–198. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-40273-9_13.
- [5] C. L. O. Groenwald e U. T. Timm. **Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula**. Acessado em 23/03/2024, <https://www.somatematica.com.br/artigos/a1/>.
- [6] J. Groff. **Menos trigonometria, mais pensamento crítico**. Online. Acessado em 23/03/2024, <http://www.bbc.com/portuguese/brasil-41182484>.
- [7] G. Pólya. “A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático”. Em: **2o reimpr. Rio de Janeiro: interciência** (1995).
- [8] K. Sutner. “Linear cellular automata and the Garden-of-Eden”. Em: **The Mathematical Intelligencer. Computational and Applied Mathematics** 11(2) (1989), pp. 49–53.

Lights Out on Spherical Fullerenes

João Pedro S. G. Costa^{1,2,*} Wallace A. Salgueiro^{1,3}

Fernanda Couto⁴ Diego S. Nicodemos^{1,3}

¹ Colégio Pedro II

² Pesc/COPPE-Universidade Federal do Rio de Janeiro

³ Profmat-CPII

⁴ Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Keywords: Lights Out, Fullerene, Graph Theory

In 1989, Sutner[2] conceived a solitary combinatorial game/problem in which the cells of a board (vertices of a graph) would change state when pressed, that is, if a cell was off it would go to the state of on or vice versa. In addition, tapping on a cell inverts the states of all the cells adjacent to it. The aim of Sutner's game/problem, called *Lights Out Game/Problem*, is to completely change the states of the board, that is, to change the states of each of its cells, changing the input configuration to a completely opposite configuration. Obviously we are interested in obtaining, among all feasible solutions for the lights out game/problem, the one in which the number of touches is minimal. In this sense, Berman, Borer and Hungerbühler[1] showed in 2019 that finding the smallest solution of a graph G for the lights out is an NP-hard problem. We get tight values for the lights out game on the spherical fullerenes and we conjecture that this result could be a lower bound for all fullerene graphs. Moreover we note that there are initial configurations for the lights out game on the fullerenes that are unsolvable.

References

- [1] A. Berman, F. Borer, and N. Hungerbühler. Lights out on graphs. *Mathematische Semesterberichte*, 68, 10 2021.
- [2] K. Sutner. Linear cellular automata and the garden-of-eden. *The Mathematical Intelligencer. Computational and Applied Mathematics*, (11(2)):49–53, 1989.