

COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

José Aluísio de Oliveira Júnior

**VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA NOS PROCESSOS
DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA
ESPACIAL: Uma proposta utilizando o GeoGebra**

Rio de Janeiro
2025



José Aluísio de Oliveira Júnior

**VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA NOS PROCESSOS DE ENSINO E
APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ESPACIAL:**

Uma proposta utilizando o GeoGebra

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Professora Dra. Marilis Bahr Karam Venceslau

Rio de Janeiro
2025

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

D278 De Oliveira Júnior, José Aluísio

Visualização geométrica nos processos de ensino e aprendizagem de Geometria Espacial: uma abordagem utilizando o GeoGebra / José Aluísio de Oliveira Júnior. – Rio de Janeiro, 2025.

221 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Marilis Bahr Karam Venceslau.

1. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 2. Geometria espacial. 3. GeoGebra (Software). 4. Visualização geométrica. I. Venceslau, Marilis Bahr Karam. II. Colégio Pedro II. III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692

José Aluísio de Oliveira Júnior

**VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA NOS PROCESSOS DE ENSINO E
APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ESPACIAL:**

Uma proposta utilizando o GeoGebra

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 27/02/2025.

Banca Examinadora:

Dra. Marilis Bahr Karam Venceslau (Orientadora)
Colégio Pedro II – CPII

Dr. Daniel Felipe Neves Martins
Colégio Pedro II – CPII

Dr. Helder Manoel Venceslau
Centro Federal de Educação Tecnológica Celso
Suckow da Fonseca – CEFET – RJ

Rio de Janeiro
2025

Dedico este trabalho a minha mãe, Elce,
minha esposa, Jéssica, minha madrinha,
Nancy, e à memória de meu pai, Aluísio.

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte de minha fé, por me conceder a sabedoria necessária para não somente superar as adversidades diárias inerentes a esta profissão, mas também conciliar trabalho e vida particular, além de me conceder saúde e de me fortalecer nos momentos difíceis, me proporcionando a graça de concluir esta etapa tão importante.

A minha mãe, Elce Santos de Oliveira, por todo o amor, carinho e cuidado desde meu nascimento até o dia de hoje.

Ao meu pai, José Aluísio de Oliveira, cuja presença permanece viva em minha memória e cujo exemplo de força, caráter, valores e dedicação sempre me inspirou. Mesmo não estando mais presente fisicamente, continua sendo minha inspiração.

A minha esposa, Jéssica Xavier Rodrigues de Oliveira, por estar sempre ao meu lado, acreditando em mim, incentivando-me e compartilhando comigo cada desafio e conquista. Seu apoio foi fundamental para que eu chegasse até aqui, seu amor, paciência e apoio incondicional em todos os momentos, tornaram esta caminhada menos árdua e mais agradável, seu companheirismo e compreensão foram essenciais para que eu concluísse esta jornada.

A minha orientadora, Professora Marilis Bahr Karam Venceslau, por sua excepcional orientação acadêmica, marcada pela combinação de rigor técnico, didática e excelência intelectual. Seu amplo conhecimento, discernimento preciso e incansável dedicação não apenas enriqueceram este trabalho, mas também foram fundamentais para o aprimoramento de minha formação acadêmica e científica.

Aos amigos de turma do PROFMAT, Colégio Pedro II, André Luís, Wallace e Yaná por toda a amizade, cooperação, trabalho em equipe e todos os momentos compartilhados de felicidade.

Ao Professor Diego Nicodemos, Coordenador do PROFMAT no Colégio Pedro II, minha mais profunda gratidão pelo inestimável apoio, orientação e suporte prestados ao longo de toda a minha trajetória no curso.

Ao meu amigo Guilherme Parreira, por, além da inestimável amizade, compartilhar sua vasta experiência profissional e seus mais variados saberes, sendo minha referência intelectual, profissional e acadêmica.

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática do Colégio Pedro II, em especial, professores Ivail Muniz e Daniel Martins, por todas as enormes contribuições dadas à minha formação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Quem sabe, divide. Quem não sabe, pergunta. O conhecimento serve para encantar as pessoas, não para humilhá-las. Elogie em público e corrija em particular. Um sábio orienta sem ofender, e ensina sem humilhar.

Faça o teu melhor, nas condições que tem, enquanto não tem condições melhores para fazer melhor ainda!

(Mário Sérgio Cortella, 2019)

RESUMO

DE OLIVEIRA JÚNIOR, José Aluísio. **Visualização Geométrica nos processos de ensino e aprendizagem de Geometria Espacial:** Uma abordagem utilizando o GeoGebra. 2025. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, 2025.

Em alguns tópicos de Geometria Espacial, especialmente nos temas relacionados ao truncamento e à planificação de sólidos, bem como nas projeções ortogonais, é comum que tanto professores quanto alunos encontrem desafios ao abordar e compreender esses conceitos, dada a sua complexidade e a abstração que envolvem. A presente dissertação tem como objetivo principal contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem de Geometria Espacial no ensino médio, abordando temas essenciais, como projeções ortogonais, planificações de sólidos e sólidos de revolução. Para isto, propõe-se o uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica central, destacando-se pelo seu enorme potencial em promover a visualização tridimensional, bem como pela capacidade de criar uma interação dinâmica com conceitos geométricos. Essa abordagem facilita, de maneira significativa, tanto a compreensão dos alunos quanto a prática docente, proporcionando uma melhor assimilação dos conteúdos. As atividades apresentadas ao longo do trabalho foram cuidadosamente elaboradas com base em questões que atendem às necessidades educacionais específicas, assegurando, dessa forma, a relevância e a aplicabilidade do conteúdo proposto dentro do contexto da sala de aula. Esse cuidado com a construção das atividades busca alinhar a teoria à prática pedagógica, criando um ambiente de aprendizagem mais eficiente e adaptado à realidade dos estudantes. Assim, o trabalho almeja fornecer tanto um suporte teórico robusto quanto ferramentas práticas aos professores, possibilitando a criação de aulas mais dinâmicas e interativas. Além disso, ao proporcionar uma abordagem centrada na visualização geométrica, a dissertação favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico-espacial dos discentes, aprimorando capacidade de abstração, habilidades essenciais para formação acadêmica e intelectual. O impacto de tal metodologia visa, assim, contribuir não apenas para o sucesso imediato nas avaliações, mas também para o fortalecimento de habilidades que serão fundamentais ao longo de sua trajetória educacional.

Palavras-chave: geometria espacial; visualização geométrica; geogebra ; ensino médio.

ABSTRACT

DE OLIVEIRA JÚNIOR, José Aluísio. **Visualização Geométrica nos processos de ensino e aprendizagem de Geometria Espacial: Uma abordagem utilizando o GeoGebra.** 2025. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, 2025.

In some topics of Spatial Geometry, especially those related to truncation and the unfolding of solids, as well as orthogonal projections, it is common for both teachers and students to encounter challenges when addressing and understanding these concepts, given their complexity and the abstraction involved. The main objective of this dissertation is to contribute to the improvement of teaching and learning Spatial Geometry at the high school level, addressing essential topics such as orthogonal projections, solid unfoldings, and solids of revolution. To achieve this, the use of GeoGebra is proposed as the central pedagogical tool, standing out for its enormous potential in promoting three-dimensional visualization, as well as its ability to create dynamic interaction with geometric concepts. This approach significantly facilitates both student comprehension and teaching practice, allowing for better content assimilation. The activities presented throughout the work were carefully developed based on questions that meet specific educational needs, thus ensuring the relevance and applicability of the proposed content within the classroom context. This careful construction of activities aims to align theory with pedagogical practice, creating a more efficient learning environment adapted to students' realities. Therefore, the work aims to provide both a robust theoretical foundation and practical tools for teachers, enabling the creation of more dynamic and interactive lessons. Additionally, by offering a geometric visualization-centered approach, the dissertation favors the development of students' logical-spatial reasoning, enhancing their capacity for abstraction, essential skills for their academic and intellectual formation. The impact of such a methodology aims to contribute not only to immediate success in assessments but also to the strengthening of skills that will be fundamental throughout their educational journey.

Keywords: spatial geometry; geometric visualization; geogebra ; high school.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2 BREVE HISTÓRICO SOBRE A EDUCAÇÃO E O ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL	16
2.1 Contextualização Histórica da Legislação Educacional no Brasil	16
2.2 Evolução das Diretrizes Curriculares no Brasil	22
3 ALGUNS TÓPICOS DE GEOMETRIA ESPACIAL	43
3.1 Axiomas	43
3.2 Construção de Planos	48
3.2.1 Determinação de um plano por uma reta e um ponto externo a mesma.....	49
3.2.2 Determinação de um plano gerado por retas paralelas	50
3.2.3 Plano gerado por retas concorrentes	50
3.3 Paralelismo entre retas.....	52
3.3.1 Existência e unicidade de uma paralela dados uma reta e um ponto externo a esta.....	52
3.3.2 O paralelismo entre retas é uma relação de equivalência.....	52
3.4 Ângulo entre duas retas quaisquer	54
3.5 Projeção Ortogonal.....	54
3.5.1 Ortogonalidade ou perpendicularidade entre retas	55
3.5.2 Perpendicularidade entre reta e plano.....	59
3.5.3 Perpendicularidade entre planos	67
3.5.4 Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano	70
3.5.5 Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano.....	71
3.5.6 Projeção de uma figura sobre um plano	74
3.5.7 Segmento perpendicular e segmentos oblíquos a um plano por um ponto	75
3.6 Superfícies e Sólidos de Revolução.....	78
3.6.1 Superfícies de revolução.....	79
3.6.2 Sólidos de revolução.....	85
3.7 Truncamento de Sólidos.....	89
3.7.1 Poliedros de Platão	89
3.7.2 Poliedros de Arquimedes.....	95
3.7.3 Construindo Poliedros de Arquimedes	96
4 CONSTRUÇÃO DE HABILIDADES EM PERCEPÇÃO ESPACIAL.....	108
4.1 Geometria Dinâmica.....	114
4.2 Representações bidimensionais de objetos tridimensionais	117

5 VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA.....	121
5.1 Visualização.....	121
5.2 Alguns Conceitos acerca de Visualização Geométrica.....	124
5.3 Potencial dos softwares de Geometria Dinâmica.....	128
6 O USO DE UMA FERRAMENTA DIGITAL NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL: O GEOGEBRA.....	131
6.1 Competências e Habilidades do Discente no Contexto Atual.....	132
6.1.1 Competências e Habilidades Profissionais.....	132
6.1.2 Competências e Habilidades Pedagógicas.....	133
6.1.3 Competências e Habilidades Técnicas e Tecnológicas.....	135
6.2 O uso do GeoGebra no Ensino de Geometria Espacial.....	136
7 ATIVIDADES COM O USO DO GEOGEBRA.....	139
7.1 Atividades de Projeção Ortogonal.....	141
.7.1.1 Roteiro de Aplicação das Atividades de Projeção Ortogonal para Professores.....	169
7.2 Atividades de Sólidos de Revolução.....	168
7.2.1 Roteiro Didático - Atividades com Sólidos de Revolução no GeoGebra.....	169
7.2.2 Questões sobre Sólidos de Revolução.....	169
7.3 Atividades de truncamento de sólidos.....	187
7.3.1 Roteiro Didático - Conjunto de Atividades sobre Truncamento de Sólidos (GeoGebra).....	169
7.3.2 Questões sobre Truncamento de Sólidos.....	189
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	211
REFERÊNCIAS.....	213

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Espacial é um dos ramos mais desafiadores da Matemática, especialmente no Ensino Médio, onde conceitos como truncamento, planificação de sólidos e projeções ortogonais apresentam alto grau de abstração. A necessidade de uma visualização tridimensional minuciosa torna o ensino desses temas um desafio, exigindo abordagens pedagógicas diferenciadas para superar barreiras cognitivas. Professores e alunos frequentemente enfrentam dificuldades na assimilação desses conceitos, sobretudo na interpretação de representações bidimensionais de objetos tridimensionais e na compreensão das transformações geométricas.

Esta pesquisa aborda o ensino da Geometria Espacial, com ênfase na visualização geométrica como ferramenta essencial para a compreensão de projeções ortogonais, sólidos de revolução e truncamento de sólidos. A visualização geométrica permite a manipulação mental de representações tridimensionais, favorecendo o desenvolvimento do pensamento espacial e a interpretação das relações geométricas. A experiência docente do autor confirma a dificuldade recorrente dos estudantes em compreender tais conceitos, destacando a necessidade de metodologias que promovam a percepção espacial e tornem o aprendizado mais acessível e significativo.

Para atender a essa demanda, este trabalho propõe o uso do software GeoGebra como recurso didático, estruturado em um livro de atividades interativas. Esse material busca proporcionar uma aprendizagem mais intuitiva e dinâmica, permitindo a exploração de sólidos geométricos e suas transformações de forma interativa. O GeoGebra foi escolhido por sua capacidade de integrar tecnologia e geometria de maneira visual e experimental, estimulando a construção ativa do conhecimento.

A motivação da pesquisa fundamenta-se nos documentos normativos da educação brasileira, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que destacam a importância da Geometria Espacial no desenvolvimento do pensamento lógico e da abstração. Assim, o estudo alinha-se às diretrizes educacionais vigentes, contribuindo para a consolidação das competências matemáticas no ensino básico.

A dissertação inclui uma revisão bibliográfica sobre visualização geométrica e Geometria Espacial, abordando projeções ortogonais, revolução de superfícies e truncamento de sólidos, sustentando a elaboração do material didático. A construção do livro de atividades segue princípios metodológicos que incentivam a interação ativa dos estudantes com os

conceitos abordados, promovendo diferentes formas de representação e manipulação dos objetos geométricos. Dessa forma, a pesquisa não se restringe à teoria, mas propõe uma aplicação prática para o ensino.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: O Capítulo 2 discute a evolução da legislação educacional brasileira, abordando a LDB, os PCN e a BNCC. Já o Capítulo 3 apresenta os fundamentos da Geometria Espacial, incluindo axiomas, construção de planos, paralelismo, perpendicularidade, projeção ortogonal e sólidos de revolução e truncamento. O Capítulo 4 trata do desenvolvimento da percepção espacial, explorando a geometria dinâmica e a representação bidimensional de objetos tridimensionais. No Capítulo 5, são abordadas a visualização geométrica e o potencial dos softwares de Geometria Dinâmica. Seguindo essa linha, o Capítulo 6 analisa o uso da tecnologia no ensino da Geometria Espacial, destacando as habilidades desenvolvidas pelo aluno no uso do GeoGebra. Já o Capítulo 7 apresenta as atividades desenvolvidas no GeoGebra, organizadas nos eixos de projeção ortogonal, sólidos de revolução e truncamento de sólidos. Por fim, o Capítulo 8 traz as considerações finais, ressaltando as contribuições da pesquisa e a elaboração do material didático interativo.

2 BREVE HISTÓRICO SOBRE A EDUCAÇÃO E O ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL

Neste capítulo, faz-se um panorama histórico das principais legislações que regem e estruturam a Educação no Brasil, elencando os marcos normativos que desempenharam papel central na organização e desenvolvimento do sistema educacional nacional. Inicialmente, serão apresentadas as bases fundadoras e as implicações práticas da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), que constitui o eixo normativo fundamental da Educação brasileira. Em seguida, será explorado o papel dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) como documentos orientadores que, ao longo das últimas décadas, ofereceram subsídios e diretrizes pedagógicas para a implementação de currículos escolares.

Por fim, este capítulo culminará na apresentação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) voltada para o Ensino Médio, evidenciando as competências e habilidades nela estabelecidas, com ênfase especial naquelas que dialogam diretamente com o ensino e a aprendizagem de conceitos e propriedades associados à Geometria Espacial. Essa abordagem busca não apenas destacar as inter-relações entre esses marcos regimentais, mas também evidenciar a atuação da BNCC como uma estrutura contemporânea que redefine prioridades curriculares, promovendo uma integração mais significativa entre teoria e prática no contexto da educação matemática, especialmente no que tange aos aspectos ligados à visualização e manipulação de formas geométricas espaciais.

Este capítulo é baseado na dissertação de Ferreira (2020), a qual além de oferecer a base teórica também contribuiu significativamente para a estruturação das ideias e a organização dos conceitos abordados. A análise realizada por Ferreira sobre o uso de material manipulável no ensino de Geometria Espacial foi crucial para o desenvolvimento da discussão e a construção do raciocínio apresentado neste trabalho.

2.1 Contextualização Histórica da Legislação Educacional no Brasil

A educação básica no Brasil teve seu início em 1549, com a chegada da Companhia de Jesus, ordem religiosa formada pelos jesuítas (missionários dedicados à educação, que buscavam promover os ideais da Igreja por meio de diversas atividades, como a fundação de escolas, colégios e universidades, além de missões religiosas em territórios recém-descobertos ou colonizados) e fundada por Inácio de Loyola, em um contexto marcado pela Contrarreforma, movimento de reação da Igreja Católica à expansão da Reforma Protestante. Este modelo

educacional, inserido em uma conjuntura histórica de forte influência religiosa, consolidou-se como a principal referência na formação educacional no período colonial, estabelecendo-se como pilar fundamental do ensino no Brasil por mais de dois séculos. A Companhia de Jesus desempenhou papel de protagonismo absoluto na estruturação e disseminação da educação formal, promovendo não apenas a instrução religiosa, mas também o ensino de línguas, artes e ciências em suas escolas. Contudo, essa hegemonia foi abruptamente interrompida em 1759, quando o Marquês de Pombal, como parte de suas reformas iluministas e centralizadoras, decretou a expulsão dos jesuítas de Portugal e de seus territórios coloniais, incluindo o Brasil. Este episódio marcou uma inflexão significativa na história da Educação brasileira, desarticulando o modelo jesuítico e abrindo caminho para novas formas de organização e práticas pedagógicas no contexto colonial (De Almeida, 2014).

Conforme destaca De Almeida, os objetivos iniciais da Companhia de Jesus estavam intrinsecamente relacionados ao projeto de catequização e instrução dos povos indígenas e da população colonial. A catequização era estruturada com base no catecismo brasílico, que compreendia ensinamentos fundamentais como os sete sacramentos, os dez mandamentos, as orações do Pai-Nosso e da Ave-Maria, bem como a diferenciação entre pecados veniais e mortais. Paralelamente, os jesuítas dedicavam-se à instrução educacional dos indígenas, com ênfase no ensino das primeiras letras em português e tupi, além de disseminar a cosmovisão da civilização ocidental cristã. Ademais, cabia-lhes a formação da prole masculina da nascente elite colonial, com o propósito de habilitá-los à administração de latifúndios e negócios familiares, enquanto, em conformidade com os padrões patriarcais da época, as mulheres permaneciam excluídas das instituições de ensino. A prática pedagógica dos jesuítas unia o ensino acadêmico à catequese, organizando-se de maneira segmentada: a catequese voltava-se aos indígenas, desenvolvendo-se nos aldeamentos, enquanto a formação acadêmica era direcionada à elite, ocorrendo nos colégios religiosos. O modelo educacional jesuítico fundamentava-se nas virtudes cristãs e no ensino das letras, sendo marcado, inicialmente, pelo esforço dos missionários em dominar a língua tupi-guarani, como estratégia para comunicação e ensino. Nesse contexto, a musicalidade dos povos nativos foi incorporada como metodologia pedagógica, embora a barreira linguística tenha representado um dos principais desafios enfrentados no processo de educação e evangelização.

Durante o período de atuação missionária no Brasil, a Companhia de Jesus implementou um plano de estudos universal, conhecido como *Ratio Studiorum*, promulgado em 1599. Esse plano foi o primeiro sistema organizado de educação católica, estruturado em um currículo uniforme e dividido em graus, almejando a formação integral do indivíduo, com ênfase no

domínio das habilidades elementares de leitura, escrita e cálculo. Conforme destacado por Saviani (2007), o *Ratio Studiorum* consistia em um conjunto de regras que abrangiam as atividades de todos os envolvidos no processo educativo, desde o provincial até os professores, os alunos e os administradores das academias. No Brasil, a educação jesuítica organizou-se em quatro graus sucessivos e propedêuticos: curso elementar, humanidades, artes e teologia (Rocha, 2010). O curso elementar, com duração de um ano, incluía em seu currículo a doutrina católica e as primeiras letras, valorizando a disciplina, a atenção e a perseverança como qualidades essenciais ao aprendizado e à formação de caráter dos alunos, fundamentais para futuros sacerdotes e cristãos leigos. Contudo, à medida que a Companhia de Jesus superava os desafios iniciais de promover condições mínimas de vida civilizada na colônia, a catequese foi progressivamente sendo relegada em favor da educação das elites, o que conferiu maior importância à criação de colégios (Rocha, 2010). Esse processo foi influenciado pela dizimação da população indígena, decorrente da violenta ocupação territorial para a monocultura da cana-de-açúcar, e pela necessidade de atender às demandas da elite colonial emergente. A ação missionária, que inicialmente guiava a educação jesuítica, perdeu protagonismo em prol de um modelo educacional voltado para atender às classes dominantes, caracterizado pela exclusão de mulheres, negros e pobres. Assim, enquanto os homens eram educados nos colégios, as mulheres recebiam instrução em igrejas e capelas, evidenciando a segregação social e de gênero. Além disso, muitos missionários careciam de formação específica para a docência, uma limitação que não impediu a relevância da atuação jesuítica no contexto colonial, especialmente em virtude da ausência de políticas educacionais efetivas por parte da Coroa. Dessa maneira, o ensino jesuítico contribuiu significativamente para a sistematização da educação na colônia, embora perpetuasse um modelo excludente, onde cada indivíduo era destinado a um tipo de trabalho, de acordo com seu lugar na hierarquia social (Rocha, 2010). Esse cenário reforçou a divisão entre o pensar e o fazer, acentuada pelo Estado, em um contexto em que o trabalho manual era desvalorizado.

De maneira progressiva, os seminários foram adquirindo maior relevância enquanto instituições de ensino, ampliando seu público e passando a atender não apenas aqueles que aspiravam à carreira religiosa, mas também estudantes externos interessados em uma formação propedêutica que os qualificasse a prosseguir os estudos na Europa. Esse movimento resultou em uma expansão significativa no número de colégios destinados também a alunos leigos, consolidando a atuação educacional dos jesuítas, que se voltava prioritariamente para a formação da sociedade colonial (De Almeida, 2014).

Diante de uma análise crítica da educação promovida pela Companhia de Jesus no Brasil, é possível identificar inúmeros elementos que influenciaram e ainda ecoam na estrutura educacional contemporânea. Como observado por Franca (1952, p. 5), "[...] para o desenvolvimento da educação moderna o *Ratio Studiorum* ou Plano de Estudos da Companhia de Jesus desempenha um papel cuja importância não se pode desconhecer ou menosprezar". Esse plano, caracterizado pela criação de colégios organizados em rede, por um método pedagógico uniforme e por um currículo sistematizado, consolidou-se como um marco na organização do ensino no Brasil colonial.

Embora a colonização tenha se configurado como um processo de imposição cultural, frequentemente voltado para a dominação dos povos indígenas, a atuação dos jesuítas promoveu o desenvolvimento educacional no país. O modelo pedagógico implementado atendeu, sobretudo, às demandas das elites, ao mesmo tempo em que integrou e disseminou elementos das culturas europeia e indígena por meio de colégios e igrejas. A sistematização do ensino, com base no *Ratio Studiorum*, trouxe diretrizes regimentais coerentes para a época, favorecendo uma educação catequética, mas organizada e eficiente.

Esse legado estruturante permanece, em parte, nas bases da educação nacional contemporânea. Alguns princípios fundamentais da educação jesuítica, como o foco na formação básica do cidadão e o domínio das competências de leitura, escrita e cálculo, ainda se refletem nas diretrizes da educação básica estabelecidas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996). No entanto, a educação no Brasil segue marcada por desigualdades estruturais e políticas que privilegiam interesses específicos, reproduzindo dinâmicas históricas de controle e dominação cultural.

A segmentação entre o ensino técnico e acadêmico, herdada do modelo colonial, ainda persiste e reforça o capital cultural das classes dominantes, contribuindo para a manutenção de um sistema desigual. Esse cenário é agravado pelo descompasso entre os setores público e privado: enquanto parte da população recorre ao ensino privado como alternativa à baixa qualidade do sistema público, os estudantes oriundos dessas instituições privadas frequentemente ocupam as vagas nas universidades públicas de excelência. Esse paradoxo reflete a persistência de barreiras sociais e econômicas que dificultam o acesso igualitário à educação superior.

Ademais, a precariedade estrutural do sistema educacional brasileiro continua evidente. Escolas públicas enfrentam problemas como infraestrutura inadequada, excesso de alunos por sala, escassez de recursos e baixas remunerações para os professores, que ainda enfrentam longas jornadas de trabalho. Apesar das diferenças em relação ao período jesuítico, em que os

educadores eram missionários religiosos, o magistério atual ainda é frequentemente tratado pelo Estado de maneira desvalorizada, perpetuando desafios históricos que dificultam a oferta de uma educação de qualidade para todos.

No contexto do período colonial, a Educação brasileira começou a apresentar novas configurações com a chegada da família real portuguesa em 1808, marco que resultou na fundação das primeiras faculdades de Medicina, situadas na Bahia e no Rio de Janeiro. Contudo, o estabelecimento das primeiras universidades ocorreu apenas no início do século XX, e a estruturação de diretrizes gerais para a educação nacional foi consolidada tardiamente com a promulgação da primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Brasil) em 1961, seguida pela segunda em 1971 e pela terceira, que vigora atualmente, em 1996. Desde as primeiras constituições, o direito à educação tem sido reconhecido como um princípio fundamental da sociedade brasileira. De acordo com Carneiro (1998), a Constituição de 1824 assegurava à sociedade a liberdade de instituir colégios e universidades, além de estabelecer a gratuidade do ensino primário como norma. Posteriormente, a Constituição de 1891 delegou ao Congresso Nacional a responsabilidade de legislar sobre o ensino superior e de criar escolas secundárias e instituições de ensino superior nos Estados. Já em 1934, a Constituição consolidou a competência exclusiva da União para deliberar sobre as diretrizes e bases da educação nacional, instituindo o Conselho Nacional de Educação e concedendo aos Estados a autonomia para criar seus respectivos Conselhos Estaduais de Educação. Esse desenvolvimento normativo evidencia a progressiva construção de um sistema educacional estruturado e regulado por diretrizes nacionais, ainda que permeado por desafios históricos e estruturais.

Entre os anos de 1934 e 1935, o Brasil presenciou a fundação das Universidades de São Paulo e do Rio de Janeiro, eventos que marcaram o início da institucionalização dos cursos de formação docente em diversas áreas do conhecimento. Nos cursos de Matemática, em particular, houve esforços para unificar a disciplina sob a responsabilidade de um único professor. Entretanto, os registros históricos dos materiais didáticos da época indicam que o ensino de Matemática permanecia fragmentado, com álgebra, aritmética e geometria sendo tratadas de forma isolada e alocadas a diferentes anos escolares, sem uma integração sistêmica entre essas áreas (Alves, 2016).

A Constituição de 1946 trouxe inovações significativas para a educação no país, estabelecendo a obrigatoriedade do ensino primário universal e a exigência de concursos públicos para o ingresso na carreira docente. Outro aspecto relevante dessa Carta Magna foi a imposição de que empresas com mais de cem funcionários ofertassem ensino primário gratuito, reforçando a corresponsabilidade entre o Estado e o setor privado no provimento educacional.

Além disso, essa Constituição reconheceu a educação como uma responsabilidade compartilhada entre família e escola, ampliando o escopo do compromisso social com a formação básica.

Segundo Ferreira, com a definição dos princípios fundamentais da educação na Constituição de 1946, foi criada uma comissão de educadores para propor uma reforma educacional abrangente, cujo resultado foi a promulgação da primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a Lei 4.026 de 1961. Posteriormente, a Constituição de 1967 promoveu a expansão do ensino privado, criando dispositivos que autorizavam o redirecionamento de recursos públicos para o setor particular, evidenciando uma nova orientação na política educacional brasileira.

A Lei 5.692/71, de 1971 (Brasil, 1971), reconfigurou o sistema educacional brasileiro, concedendo aos professores maior autonomia na definição dos currículos escolares. Contudo, essa medida revelou-se problemática para o ensino de Geometria, como aponta Alves (2016, p. 19), ao destacar que essa liberdade curricular resultou, frequentemente, na exclusão da Geometria no ensino de 1º grau, com os docentes restringindo-se à aritmética e às noções de conjuntos. Dessa forma, o ensino da Geometria ficou relegado ao 2º grau, comprometendo a formação geométrica dos alunos em níveis iniciais. Paralelamente, a partir de 1968, a expansão da rede pública de ensino para o 1º e o 2º graus evidenciou a necessidade de maior número de professores qualificados, levando as instituições de ensino a investirem na formação docente para atender a essa demanda.

Nesse contexto histórico, observou-se o início de uma ruptura significativa no ensino de Geometria no Brasil, cujos impactos perduram até os dias atuais. Como argumentam Neves Junior *et al.* (2013, p. 4), esse cenário marcou o declínio da abordagem geométrica no ambiente escolar, prejudicando não apenas o aprendizado específico desse conteúdo, mas também de outras disciplinas que demandam habilidades de visualização espacial, como a interpretação de gráficos estatísticos e mapas. A ausência de uma instrução formal e estruturada em Geometria dificulta o desenvolvimento dessas competências, levando a uma formação deficitária em aspectos fundamentais da educação.

Com a promulgação da Constituição Federal de 1988, a Educação brasileira passou a ocupar um papel central na agenda nacional, mobilizando esforços coletivos em torno dessa causa. Entre os avanços trazidos por esse marco constitucional, Carneiro (1998, p. 20) destaca princípios fundamentais, como a igualdade de condições para acesso e permanência na escola, a liberdade de ensinar e aprender, o pluralismo de ideias e concepções pedagógicas, a gratuidade do ensino público, a valorização dos profissionais da educação, a gestão democrática do ensino

público e a garantia de um padrão de qualidade. Esses dispositivos visaram corrigir desigualdades históricas e promover uma educação mais inclusiva e qualificada, embora o legado das lacunas do ensino de Geometria ainda permaneça como um desafio educacional significativo.

O estudo do percurso histórico da Educação brasileira revela a importância de não nos acomodarmos diante das adversidades impostas pelas circunstâncias. Ao contrário, é imprescindível avançar na busca por novos modelos educacionais que formem indivíduos capazes de contribuir significativamente para a construção de um futuro promissor. Conforme enfatiza Ribeiro (1993, p. 14), "não se pode ignorar a bagagem educacional que o tempo nos legou, pois, se assim o fizermos, estaremos regredindo historicamente". Nesse sentido, torna-se essencial que os governos valorizem e aprimorem projetos e ideias que demonstraram eficácia ou potencial, independentemente de suas origens político-ideológicas. A prática de avaliar iniciativas educacionais com base apenas na identidade de seus autores ou na ideologia associada prejudica o avanço de políticas públicas, comprometendo o desenvolvimento sustentável do sistema educacional nacional.

2.2 Evolução das Diretrizes Curriculares no Brasil

O artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei nº 9.394/96 (Brasil, 1996), estabelece, em seu parágrafo 2º, que "a educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social". Tal princípio evidencia a intenção de que o conhecimento construído no espaço escolar seja fundamentado em bases que capacitem os educandos para uma convivência harmoniosa, ética e produtiva no contexto comunitário em que estão inseridos. Para tanto, a escola, enquanto um espaço privilegiado de formação cidadã, deve direcionar suas práticas pedagógicas – independentemente da área de conhecimento – para a promoção de competências e habilidades que preparem os discentes para enfrentar, de maneira eficaz, as demandas impostas pelo exercício profissional.

A Educação, de acordo com os preceitos dessa legislação, estrutura-se em quatro pilares fundamentais: prática social, mundo do trabalho, movimentos sociais e manifestações culturais. Esses eixos representam um rompimento com concepções educativas tradicionais, que restringiam o aprendizado escolar às habilidades de leitura e cálculo. Adicionalmente, o artigo 2º da LDB/96 reforça que "a educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho" .

Nesse sentido, o ambiente escolar deve priorizar ações pedagógicas que despertem nos estudantes a motivação para atribuir significado ao aprendizado, tarefa que demanda intervenções pedagógicas voltadas para uma aprendizagem verdadeiramente significativa.

A LDB destaca-se como a principal referência normativa sobre Educação no Brasil, delineando os princípios, objetivos, formação e diretrizes aplicáveis à carreira dos profissionais da área. Dado o dinamismo das transformações sociais, a lei tem sido alvo de constantes atualizações. Exemplos disso incluem a ampliação do Ensino Fundamental de oito para nove anos (Brasil, 2006) e alterações no Ensino Médio, como a revogação dos parágrafos 2º e 4º do artigo 36.

A fim de proporcionar uma melhor compreensão sobre a estrutura do regime educacional no Brasil, à luz das diversas versões da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), é conveniente observar o Quadro 1, apresentado a seguir.

Quadro 1 – A Organização do Ensino na LDB da Educação Nacional

Lei 4.024/1961	Duração	Lei 5.692/1971	Duração	Lei 9.394/1996	Duração
Ensino Primário Ciclo Ginásial do Ensino Médio Ciclo Colegial do Ensino Médio Ensino Superior	4 anos 4 anos 3 anos variável	• Ensino de Primeiro Grau • Ensino de Segundo Grau • Ensino Superior	8 anos 3 a 4 anos variável	• Educação Básica – Educação Infantil: > Creche > Pré-escola – Ensino Fundamental – Ensino Médio • Educação superior	> 17 anos > 5 anos, sendo: • 3 anos • 2 anos > 9 anos > 3 anos (no mínimo) > variável
Obs.		Obs.		Obs.	
a) A passagem do Primário para o Ginásial era feita através de uma prova de acesso: o Exame de Admissão. b) Os ciclos Ginásial e Colegial eram divididos em Ramos de Ensino, a saber: Secundário, Comercial, Industrial, Agrícola, Normal e outros. O industrial dividido em básico (4 anos) e de mestría (2 anos). Havia, ainda, os cursos artesanais, de duração curta e variável, e os de aprendizagem.		a) Com a junção dos antigos Primário e Ginásial, desapareceu o Exame de Admissão. b) A duração normal do 2º Grau era de 3 anos. Ultrapassava, no entanto, este limite quando se tratava de Curso Profissionalizante. c) O Ensino de 1º e 2º Grau tinha uma carga horária mínima anual de 720 horas e o ano letivo de duração mínima de 180 dias.		a) Os níveis macroestruturantes da educação escolar (art. 1º, § 1º) passam a ser dois: Educação Básica e educação superior. b) As modalidades de educação inicialmente são: Educação de Jovens e Adultos (art. 37), Educação Especial (art. 58), Educação Profissional (art. 39) e Educação Escolar Indígena (art. 78). Com a Resolução CNE/CEB 4/2010, por via do art. 27, foram acrescentadas: Educação do Campo e Educação a Distância. c) O Ensino Fundamental e o Ensino Médio passam a ter carga horária mínima anual de 800 horas. No Ensino Médio, deverá ser ampliada progressivamente para 1.400 horas, devendo os sistemas de ensino oferecer, no prazo máximo de 5 anos, pelo menos mil horas anuais, a partir de 2 de março de 2017 (nova redação dada ao art. 24, § 1º da LDB, pela Lei 13.415/2017, Lei da Reforma do Ensino Médio). Aqui, as mudanças se estendem também à reestruturação das áreas e à adoção da BNCC com direitos e objetivos da aprendizagem e desenvolvimento (art. 35-A).	

Fonte: Carneiro, p.34, 2018.

A análise comparativa do Quadro 1 evidencia uma mudança significativa no número de dias letivos, marcada pela transição entre a Lei 5692/71 e a Lei 9394/96. A partir da promulgação da Lei 9394/96, observou-se um aumento na carga horária mínima anual, passando de 720h para 800 h. Tal alteração reflete uma clara intenção do legislador em estender o tempo de permanência do aluno no ambiente escolar, proporcionando-lhe uma carga maior de atividades educacionais ao longo do ano letivo.

A mais recente modificação, promovida pela Lei nº 13.415/2017, reafirma a necessidade de ajustar as diretrizes educacionais às novas demandas sociais. Além disso, como a LDB abrange múltiplos níveis de ensino, fez-se necessária a criação de instrumentos complementares, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que serão detalhados a seguir.

Em conformidade com o disposto no artigo 210 da Constituição Federal de 1988, que estabelece a obrigatoriedade de normatizar os conteúdos mínimos a serem trabalhados no Ensino Fundamental, o Ministério da Educação (MEC) introduziu, em 1996, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) voltados para os anos iniciais do Ensino Fundamental (Brasil, 1997) e, posteriormente, em 1998, para os anos finais dessa etapa de ensino (Brasil, 1998). A iniciativa visava não apenas atender à exigência constitucional, mas também promover a qualificação da formação básica, respeitando os valores culturais, artísticos, nacionais e regionais, além de contribuir para a melhoria da qualidade do ensino e para a unificação das reformas curriculares implementadas em diferentes regiões do país.

Entre as inovações trazidas pelo primeiro documento, destacam-se os chamados "temas transversais", que foram concebidos para serem trabalhados de maneira integrada nas diversas áreas de conhecimento. Esses temas abrangem questões fundamentais como ética, saúde, meio ambiente, orientação sexual e pluralidade cultural, conferindo um caráter interdisciplinar ao currículo. Sobre a relevância desses temas, Macedo (1999, p.47) argumenta que:

Os temas transversais propostos pelo MEC apresentam-se como mais uma tentativa de articulação entre as diferentes disciplinas que compõem o currículo, tendo por justificativa a incapacidade dessas mesmas disciplinas de dar conta da realidade social. A forma de articulação não está bem definida, o que nos leva a imaginar que dificilmente se efetivará no currículo vivido das diferentes escolas do país.

Na prática educacional, verificou-se um significativo afastamento do corpo docente em relação à diretriz proposta pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) no que tange à abordagem dos temas transversais. Tal distanciamento pode ser atribuído, em grande parte, à ausência de uma formação adequada para os professores e à falta de uniformidade nas interpretações e implementações realizadas pelas diferentes unidades escolares. Essa lacuna

evidencia a necessidade de maior suporte e orientação aos educadores, de modo a garantir a efetividade das diretrizes estabelecidas.

Segundo o Ministério da Educação (MEC), os PCN foram concebidos com o propósito de aprimorar o conceito de currículo, delineando linhas de ação que permitam às escolas de todo o território nacional promover uma maior uniformização – dentro de limites previamente definidos – dos conteúdos disciplinares a serem trabalhados. Nesse sentido, o documento busca orientar a construção de um currículo que, ao mesmo tempo em que respeita as especificidades regionais e culturais, assegure uma base comum de conhecimentos, conforme explicitado no seguinte trecho:

Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram elaborados procurando, de um lado, respeitar diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Com isso, pretende-se criar condições, nas escolas, que permitam aos nossos jovens ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania. [...] Esperamos que os Parâmetros sirvam de apoio às discussões e ao desenvolvimento do projeto educativo de sua escola, à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de suas aulas, à análise e seleção de materiais didáticos e de recursos tecnológicos e, em especial, que possam contribuir para sua formação e atualização profissional (Brasil, 1998, p. 5)

No ano de 2000, a Educação brasileira foi enriquecida com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) pelo Ministério da Educação (MEC) (Brasil, 2000). Assim como os PCN voltados para as etapas anteriores, os PCNEM apresentaram uma proposta inovadora de reformulação curricular, direcionada à última etapa de formação da Educação Básica. Este documento estruturou o conhecimento escolar em três grandes áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e suas Tecnologias. No entanto, essas áreas não devem ser abordadas de maneira isolada; pelo contrário, a proposta curricular enfatiza a inter-relação entre elas, buscando a construção do conhecimento por meio da interdisciplinaridade e da contextualização, como princípios norteadores do processo de ensino-aprendizagem.

O PCNEM também reforça o papel fundamental do Ensino Médio como etapa final da Educação Básica, cuja finalidade é promover a formação integral do educando. Nesse sentido, o documento prioriza o desenvolvimento de valores, competências e habilidades que fomentem a autonomia e o pensamento crítico, preparando os estudantes não apenas para os níveis posteriores de estudo, mas também para uma atuação ética e responsável na sociedade. Para alcançar tais objetivos, a estrutura curricular foi organizada em torno de quatro eixos fundamentais, que orientam as práticas pedagógicas: aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a viver e aprender a ser. Esses pilares refletem uma concepção ampla de Educação,

alinhada às demandas de um mundo em constante transformação e às competências que os alunos dessa etapa precisam construir ao longo dos anos escolares.

Reconhecendo as rápidas mudanças sociais e tecnológicas que caracterizam a contemporaneidade, o Ministério da Educação, por meio desse documento, destacou a necessidade de preparar os jovens para lidar com os desafios de um mundo dinâmico, no qual o conhecimento não é estático, mas um processo contínuo e integrador. Nesse contexto, o documento expressa os fundamentos que orientam essa visão educativa, conforme descrito no seguinte trecho:

O volume de informações produzido em decorrência das novas tecnologias é constantemente superado, estabelecendo novos parâmetros para a formação dos cidadãos. Não se trata de acumular conhecimentos, mas de direcionar a formação do aluno para a aquisição de conhecimentos básicos, a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relacionadas às áreas de atuação. No nível do Ensino Médio, propõe-se uma formação geral, em contraposição à formação específica, promovendo o desenvolvimento de capacidades como pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las, além da habilidade de aprender, criar e formular, em vez de limitar-se ao simples exercício de memorização (Brasil, 2000, p. 50).

Diante das transformações ocasionadas pela produção massiva de informações impulsionada pelas novas tecnologias, parece haver consenso entre os pesquisadores quanto à necessidade de adaptação dos processos educacionais para atender a essas novas demandas. Nesse contexto, cabe aos ambientes educativos, especialmente os voltados à Educação Básica, a responsabilidade de oferecer aos estudantes condições para utilizar, de maneira consciente e racional, os meios de produção de conhecimento disponíveis. Essa perspectiva reafirma o papel da escola como promotora de um aprendizado que prepare os alunos para enfrentar as complexidades da sociedade contemporânea.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em sua essência, buscavam integrar a interdisciplinaridade como fundamento do processo de construção do conhecimento, entendendo que a aprendizagem deve ser orientada para responder às demandas da vida contemporânea de forma contextualizada e significativa. Ao incorporar o termo "tecnologias" às diversas áreas do conhecimento, como em "Matemática e suas tecnologias", os PCN ampliaram o escopo do ensino, conectando o saber não apenas à compreensão abstrata, mas também ao desenvolvimento de competências práticas. Essa abordagem visava equipar os educandos com habilidades que os capacitassem a analisar situações, avaliar riscos e aplicar conhecimentos técnicos em contextos diversos, fortalecendo, assim, sua preparação para o exercício da cidadania e a atuação no mercado de trabalho.

No âmbito específico da Matemática no Ensino Médio, conforme delineado pelos PCN, o aprendizado deveria ir além da ênfase em procedimentos mecânicos ou da simples memorização de fórmulas e conceitos. O objetivo era fomentar uma aprendizagem que integrasse teoria e prática, valorizando a capacidade de resolver problemas, interpretar dados e aplicar o conhecimento matemático em situações concretas. Essa orientação reflete o compromisso com a formação de indivíduos aptos a atuar de maneira crítica e reflexiva em um mundo marcado pela constante evolução tecnológica e social, conforme verifica-se em:

O desenvolvimento dos instrumentos matemáticos de expressão e raciocínio, contudo, não deve ser uma preocupação exclusiva do professor de Matemática, mas sim das quatro disciplinas científico-tecnológicas, preferencialmente de forma coordenada, permitindo que o aluno construa efetivamente as abstrações matemáticas e evitando a memorização indiscriminada de algoritmos, o que pode ser prejudicial ao aprendizado. A relevante presença da Matemática no desenvolvimento de competências essenciais, envolvendo habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico, estatístico e probabilístico, é claramente expressa nos objetivos educacionais da Resolução CNE/98 (Brasil, 2000, p. 9).

Nesse contexto, é relevante reconhecer que a formação do aluno não deve estar pautada no desenvolvimento isolado de disciplinas, mas sim na integração de diferentes saberes dentro do ambiente escolar. Essa abordagem fundamenta-se no princípio de que, na vida cotidiana, os eventos não ocorrem de maneira fragmentada, mas sim interligados em uma teia de relações que demandam uma compreensão holística. A interdisciplinaridade, assim, assume uma posição de destaque nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), evidenciando-se como um pilar de extraordinária importância para o processo educativo.

No âmbito do Ensino Médio, etapa em que os conhecimentos abordados no Ensino Fundamental devem ser aprofundados, a Matemática ocupa um papel central ao avançar progressivamente em direção às abstrações. Entretanto, tal avanço não deve ser realizado de maneira abrupta ou desvinculada do aprendizado baseado em elementos concretos. É essencial reconhecer que os alunos, ainda em processo de amadurecimento cognitivo, podem apresentar dificuldades no desenvolvimento de habilidades como análise, construção de argumentos e elaboração de ideias consistentes.

A linguagem matemática, em sua riqueza e complexidade, oferece um conjunto de instrumentos valiosos que capacitam o aluno a interpretar fenômenos em outras áreas do conhecimento. Essa característica confere à Matemática um caráter transversal e imprescindível, que não apenas sustenta o desenvolvimento do pensamento lógico e analítico, mas também promove a interconexão entre disciplinas, fortalecendo a formação integral do educando. Dessa forma, a integração de saberes, a valorização da interdisciplinaridade e o

equilíbrio entre o concreto e o abstrato configuram-se como estratégias indispensáveis para uma Educação que prepare o aluno para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo, pois:

A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem, portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver (Brasil, 2000, p.9).

Historicamente, o papel do professor era centralizado na transmissão de conhecimentos para os alunos, cabendo a estes o papel passivo de receptores das informações. Contudo, na contemporaneidade, o estudante passou a ocupar uma posição mais ativa e protagonista em seu processo de aprendizagem. Esse protagonismo permite que ele formule questões a partir de situações concretas, desenvolva modelos explicativos, empregue instrumentos de medição e cálculo, além de organizar informações pertinentes para resolver problemas contextualizados. Além disso, estimula-se que o aluno construa hipóteses, conceba estratégias de resolução, analise criticamente os resultados obtidos e reflita sobre sua aplicabilidade em diferentes contextos.

A presença da Matemática como ferramenta indispensável no cotidiano do indivíduo é inquestionável, abrangendo desde situações triviais até tomadas de decisão mais complexas. A utilização de conceitos Matemáticos permeia atividades cotidianas diversas, como a organização do orçamento doméstico, o cálculo da economia em compras utilizando promoções ou descontos progressivos, e até a estimativa do consumo de combustível em deslocamentos regulares. Essas práticas evidenciam a aplicabilidade da Matemática em um amplo espectro de ações, demonstrando que seu aprendizado vai além do domínio técnico, configurando-se como uma competência essencial para a formação de cidadãos capazes de interagir de maneira crítica e autônoma com o mundo que os cerca.

No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno (Brasil, 2000, p.9).

Pode-se observar que a natureza da competência a ser desenvolvida na formação do discente não reside essencialmente na quantidade ou sofisticação das estratégias que este

possua, mas sim nas atitudes e na proatividade apresentadas ao lidar com as diversas situações que se lhe apresentam. Dessa maneira, o conhecimento adquirido deve estar intrinsecamente associado ao desenvolvimento de habilidades práticas e à adoção de atitudes assertivas no uso das ferramentas disponíveis para a resolução de problemas específicos. Considerando que a Matemática constitui uma linguagem privilegiada para a expressão de significados e valores, os objetivos previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) em relação à Matemática incluem, entre outros aspectos, a habilidade do estudante de se expressar de maneira oral, escrita e gráfica em contextos matemáticos, além de valorizar a precisão da linguagem e a rigorosidade das demonstrações matemáticas (PCNEM, 2020, p. 42).

Dessa forma, entende-se que é fundamental que o professor demonstre uma predisposição ativa para criar situações didáticas que permitam avaliar e estimular o desenvolvimento dessas competências. Como o presente estudo foca no conhecimento matemático no campo da Geometria Espacial, torna-se relevante destacar que os PCNEM incluem objetivos específicos para essa área, visando promover uma aprendizagem significativa e duradoura. No entanto, tais objetivos não podem ser efetivamente alcançados se persistirem práticas pedagógicas pautadas predominantemente na aprendizagem por memorização, em detrimento da aprendizagem por construção de significados. Na abordagem baseada na memorização, os conteúdos são apresentados de forma compartimentada, com exemplos seguidos de exercícios repetitivos, enquanto na aprendizagem por significados, busca-se uma integração coerente dos diversos componentes curriculares, proporcionando condições concretas para a aplicação imediata dos conhecimentos na resolução de situações-problema.

Ademais, a produção de conhecimento significativo exige uma articulação efetiva de ideias, na qual o papel do docente se revela como sendo de grande relevância. O professor, enquanto agente catalisador de atitudes e decisões, possui um impacto significativo na formação do pensamento crítico e nas escolhas dos alunos, constituindo-se, assim, em uma peça central no processo educativo voltado para a construção de competências significativas e aplicáveis. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade (Brasil, 2000, p.9).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) destacam, de maneira inequívoca, a relevância da contextualização e da interdisciplinaridade no processo de construção do conhecimento. Essa ênfase reflete a necessidade de que os temas abordados no ambiente educacional sejam explorados em sua máxima potencialidade, seja no interior de uma

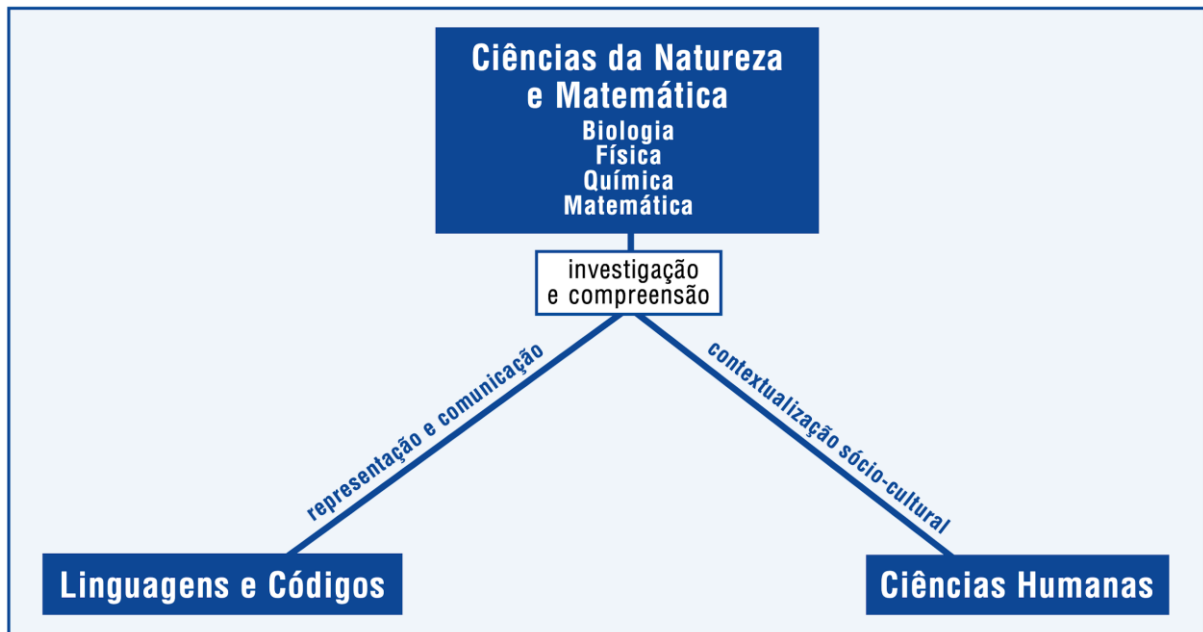
disciplina específica ou em sua interação com outras disciplinas, tanto dentro da mesma área do saber quanto em áreas distintas. Tal abordagem visa fomentar a compreensão integrada e significativa dos conteúdos, promovendo a formação de um estudante mais preparado para os desafios da vida contemporânea.

Nesse sentido, o documento salienta a importância da articulação entre as diversas áreas de conhecimento, como Ciências da Natureza e Matemática, Linguagem e Códigos e Ciências Humanas, de modo a evidenciar as conexões que as disciplinas de cada área estabelecem entre si. A interdisciplinaridade, nesse contexto, é concebida como um meio eficaz para a promoção de uma aprendizagem significativa, na qual os alunos possam identificar e compreender as interrelações existentes entre diferentes saberes. Essa abordagem não apenas enriquece o aprendizado, mas também potencializa a aplicabilidade dos conhecimentos em situações concretas, contribuindo para o desenvolvimento integral do educando.

Por meio de tal perspectiva integradora, busca-se superar a visão fragmentada do conhecimento, incentivando a percepção de que os fenômenos do mundo real estão interligados. Assim, o papel da escola e do professor é estruturar práticas pedagógicas que permitam aos estudantes transitar entre diferentes áreas de conhecimento, reconhecendo as interconexões e aplicando-as de maneira contextualizada e relevante ao seu cotidiano. A representação visual dessa articulação, frequentemente expressa por meio de diagramas ou esquemas, auxilia na compreensão das dinâmicas existentes entre as áreas e suas respectivas disciplinas, evidenciando as múltiplas possibilidades de interação que enriquecem o processo de ensino e aprendizagem, conforme mostra a Figura 1.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), a Geometria é apresentada como uma ferramenta didática e epistemológica de grande importância, com potencial para proporcionar ao aluno uma compreensão mais aprofundada e significativa da realidade que o circunda. Essa abordagem se fundamenta na ideia de que a Geometria, quando explorada de maneira sistemática e contextualizada, pode promover não apenas o domínio de conceitos e propriedades geométricas, mas também o desenvolvimento de habilidades indispensáveis para a formação integral do indivíduo.

Figura 1 – Interação entre Áreas de Conhecimento



Fonte: O autor, 2025.

Conforme explicitado nos PCNEM:

Numa outra direção, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. [...] De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física (Brasil, 2000, p. 44).

O trecho imediatamente anterior reforça a noção de que a Geometria se torna um meio pelo qual o aluno pode utilizar formas e propriedades geométricas para representar e visualizar aspectos concretos e abstratos do ambiente em que vive, contribuindo para a construção de uma percepção mais estruturada e articulada da realidade. Além disso, ao correlacionar representações bidimensionais, como desenhos, mapas e telas de computador, com objetos tridimensionais, a Geometria apoia a compreensão de outras ciências, especialmente a Física. Essa abordagem não apenas amplia as possibilidades de concepção e criação de novas formas, planos e estruturas, mas também promove um aprendizado que transcende a memorização e se alinha à formação de um pensamento crítico e inovador.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) evidenciam de forma explícita a imprescindibilidade de uma formação adequada e contínua dos professores, fator essencial para a efetiva implementação de um currículo que propõe uma renovação

significativa nos caminhos percorridos pela formação discente nesta etapa da Educação Básica. Reconhece-se que, em um contexto marcado por um desencontro entre os avanços científicos, tecnológicos e culturais, por um lado, e o desenvolvimento educacional, por outro, não é possível negligenciar a formação permanente do professor, principal mediador no processo de ensino e aprendizagem.

Como desdobramento e aprofundamento das diretrizes já estabelecidas pelos PCNEM, foram publicados, em 2002, os PCN+EM, que introduzem reflexões acerca de um novo papel a ser desempenhado pelas instituições escolares. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e, com maior ênfase, os PCN+ destacam a importância de que a escola amplie seus objetivos, transcendendo a mera apropriação de conteúdos disciplinares isolados. Nesse sentido, adotam a concepção de competências como elemento central, mesmo que esse conceito permita interpretações diversas. A integração entre competências e conteúdos é apresentada como uma inovação relevante introduzida pelos documentos curriculares, sendo estruturada com base nos temas que orientam e organizam o currículo (Ricardo e Zylbersztajn, 2016).

Dessa forma, os PCN+EM reforçam a necessidade de repensar a escola como um espaço de articulação não apenas de conteúdos tradicionais, mas também de competências que favoreçam o desenvolvimento integral do aluno. Essa articulação entre competências e conteúdos é, sem dúvida, uma inovação proposta pelos documentos curriculares, e sua efetivação depende de forma indissociável da atuação qualificada e reflexiva dos professores. Para que essa inovação se materialize, torna-se imperativo que o professor seja continuamente preparado para interpretar e aplicar essas diretrizes de maneira contextualizada e eficiente, promovendo a integração entre os temas estruturadores e a formação de indivíduos críticos e preparados para os desafios contemporâneos.

Ainda nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), são evidenciadas propostas que visam a implementação de um novo modelo de avaliação. Dado que os métodos de ensino e aprendizagem passaram por modificações significativas, não há justificativa para a manutenção dos métodos tradicionais de avaliação, os quais se limitam a estabelecer critérios baseados em notas periódicas lançadas no diário de classe. Nesse contexto, é crucial observar que a avaliação não deve se restringir a uma única prova isolada, visto que ela deve ser encarada como um processo contínuo e orientador da prática pedagógica. Como parte integrante do processo de aprendizagem, a avaliação deve incluir registros detalhados e comentários sobre a produção tanto coletiva quanto individual do conhecimento, o que implica que ela não deve ser tratada como um procedimento imposto aos alunos, mas como um processo colaborativo que envolva sua participação ativa (Brasil, 2000, p. 44).

Além disso, é importante destacar que o Ensino Médio deixou de ser, predominantemente, uma mera porta de acesso ao Ensino Superior, uma vez que a maioria dos estudantes dessa etapa educacional busca, antes de tudo, uma qualificação mais abrangente, voltada tanto para a vida cotidiana quanto para o mercado de trabalho. Portanto, aprimorar a escola para que atenda adequadamente a esse público-alvo significa contribuir de maneira significativa para o desenvolvimento pessoal e profissional dos alunos. No campo da Matemática, a resolução de problemas se constitui como um elemento essencial para o desenvolvimento do raciocínio lógico e para a aquisição de habilidades no uso de instrumentos característicos da disciplina, como axiomas e teoremas. Nesse sentido, ao tratar dos conceitos de conhecimento e competência, os PCN+ para o Ensino Médio deixam claro que essas duas dimensões não são opostas, mas podem, e devem, ser integradas e trabalhadas de forma conjunta na formação do aluno, especialmente nesta última etapa da Educação Básica. Como afirmado nos documentos, a abordagem dessas duas dimensões em conjunto é fundamental para o desenvolvimento pleno do educando.

Embora a implementação de novas abordagens pedagógicas seja fundamental, é relevante ressaltar que a eliminação de exercícios tradicionais, como aqueles do tipo “calcule...” ou “resolva...”, não se mostra apropriada, pois esses exercícios desempenham um papel significativo no aprendizado das técnicas e propriedades fundamentais. Entretanto, é imprescindível reconhecer que, por si só, esses exercícios não são suficientes para preparar os alunos, tanto para a continuidade de seus estudos, quanto para o desenvolvimento de uma visão de mundo abrangente, ou ainda, para sua integração plena no contexto social e no mercado de trabalho (Brasil, 2002, p. 110). Dessa forma, é possível afirmar que, apesar de sua importância, a limitação de um ensino focado unicamente na resolução de exercícios não proporciona, por si só, uma formação integral do aluno, sendo necessária a incorporação de abordagens mais amplas que favoreçam seu desenvolvimento como cidadão e profissional.

À luz dessas considerações, pode-se observar que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) representaram um avanço significativo ao procurar padronizar e direcionar a qualidade do ensino no Brasil, alinhando a educação do país a um conjunto comum de diretrizes. No entanto, a implementação efetiva desses parâmetros se depara com uma série de desafios, os quais incluem, entre outros, a carência de professores qualificados no ensino público, a ausência de programas de formação continuada para os educadores e a deficiência de infraestrutura nas escolas, o que compromete as condições necessárias para o desenvolvimento de atividades pedagógicas produtivas, que, por sua vez, são essenciais para garantir uma aprendizagem verdadeiramente significativa. Além disso, é necessário compreender que, em uma sociedade

dinâmica e em constante transformação, a educação precisa evoluir de maneira concomitante aos movimentos sociais, culturais e econômicos, a fim de atender às demandas e necessidades emergentes de seus componentes.

Com esse objetivo, foram instituídos diversos fóruns de discussão em distintas regiões do país, nos quais buscava-se encontrar novas soluções para o problema da diversidade de currículos que ainda persiste nos sistemas educacionais do Brasil. Esse processo de debate e reflexão inicial constituiu o embrião da Base Nacional Curricular Comum (BNCC), um marco importante que será analisado com maior profundidade na próxima seção deste estudo. Assim, pode-se perceber que, ao longo do tempo, as diretrizes curriculares do país vêm se adaptando às novas exigências educacionais, buscando sempre promover uma educação de qualidade e equidade para todos os estudantes, independente das diferenças regionais e socioeconômicas.

A publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) representou, sem dúvida, um esforço significativo para o aprimoramento da educação no Brasil. No entanto, é importante reconhecer que tal iniciativa não se configurou como a solução definitiva para todos os problemas enfrentados pelo sistema educacional brasileiro. Isso se deve, em parte, ao fato de que, em algumas situações, a implementação desses parâmetros gerou consequências indesejadas nas práticas pedagógicas de determinados profissionais. Tais consequências, muitas vezes, resultaram em comportamentos que contrariam os princípios éticos fundamentais da profissão docente. Conforme aponta Moreira (1996), diversos estudos evidenciam a utilização de artifícios por parte dos educadores, os quais, em defesa de suas próprias práticas, acabam por se concentrar mais no treinamento técnico de seus alunos, com o objetivo de garantir o cumprimento dos requisitos exigidos pelos testes de avaliação. A pressão para obter bons resultados nas avaliações acaba por redirecionar o foco da formação para aspectos superficiais e quantificáveis, como a simples execução de tarefas mecânicas, em detrimento de um aprendizado mais profundo e reflexivo. Em alguns casos, a busca por resultados rápidos leva alguns docentes a adotarem comportamentos que, embora possam parecer eficazes em curto prazo, configuram práticas avaliativas pouco éticas, como a manipulação de resultados para garantir notas mais altas (Moreira, 1996, p. 6).

Esse cenário evidencia que, embora os PCN representem um avanço significativo, ainda há uma grande necessidade de aperfeiçoamento no campo educacional, no que tange à formação e prática dos educadores. Isso se reflete não apenas na implementação de novos modelos de avaliação e de ensino, mas também na construção de uma cultura educacional mais ética e comprometida com o desenvolvimento integral do aluno. Os desvios de procedimento identificados nas práticas pedagógicas de alguns professores, ao priorizarem a adequação aos

testes e não a formação plena das competências e habilidades dos alunos, indicam a urgência de se repensar a maneira como os objetivos educacionais são perseguidos. Assim, o processo de evolução da Educação brasileira exige não apenas a aplicação de novos parâmetros curriculares, mas também uma reflexão profunda sobre os métodos pedagógicos e as avaliações, com vistas a garantir que o desenvolvimento do aluno seja realmente significativo e ético.

A BNCC, resultado de amplos debates realizados em diversos fóruns representativos da sociedade brasileira, foi concebida com o propósito de estabelecer diretrizes sobre o que deve ser ensinado nas instituições de ensino durante a Educação Básica. Este esforço culminou na aprovação e homologação da BNCC para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental em dezembro de 2017, e, posteriormente, para o Ensino Médio em dezembro de 2018 (Brasil, 2019). Dessa forma, foram consolidados documentos que oferecem uma referência unificada para definir os objetivos de aprendizagem a serem alcançados em cada etapa da Educação Básica, eliminando, assim, a diversidade de modelos educacionais que antes existia sem uma base comum de aprendizagem.

Dado que este estudo se concentra na análise da Geometria Espacial, cuja abordagem se intensifica no Ensino Médio, a BNCC desse nível de ensino será o objeto principal de atenção. A Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio está organizada em quatro grandes áreas do conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Essas áreas, por sua vez, são estruturadas em competências que, de maneira articulada, visam atender às aprendizagens essenciais que caracterizam o Ensino Médio como a etapa final da Educação Básica.

No desdobramento dessas competências, encontram-se habilidades específicas que definem as aprendizagens mínimas indispensáveis à formação integral do estudante dessa etapa. Tendo em vista que este trabalho propõe investigar a aplicação de Geometria Dinâmica e Visualização Geométrica no desenvolvimento de habilidades relacionadas à Geometria Espacial, será dada ênfase às competências que abarcam esse tema, especificamente as Competências Específicas 2, 3 e 5, conforme descritas na BNCC. Essas competências serão analisadas de forma detalhada, considerando suas inter-relações com os objetivos de aprendizagem e a potencial contribuição dos materiais manipuláveis no processo de ensino-aprendizagem da Matemática no Ensino Médio.

A Competência Específica 2, delineada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, apresenta-se de forma a enfatizar a necessidade de os estudantes desenvolverem a capacidade de interpretar, analisar e representar fenômenos e situações do

cotidiano utilizando diferentes linguagens matemáticas. Essas linguagens abrangem, de modo amplo, ferramentas como gráficos, tabelas, fórmulas, diagramas, esquemas e representações geométricas, sendo este último um aspecto que conecta diretamente a referida competência à Geometria Espacial. A abordagem desta competência visa, portanto, estimular a construção de um raciocínio matemático sólido, ancorado em uma multiplicidade de formas de expressão que permitam ao aluno compreender, comunicar e resolver situações diversas, associando teoria e prática de forma integrada, apresentando-se da seguinte forma:

Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática (Brasil, 2018, p. 526).

Tal competência está pautada na proposta de aplicação prática e integrada dos conhecimentos adquiridos, englobando conceitos, linguagens e procedimentos específicos da Matemática, construídos ao longo dessa etapa da Educação Básica. Através de uma abordagem estruturada, busca-se que tais conhecimentos sejam utilizados em ações planejadas, seja de forma individual ou colaborativa, com o objetivo de enfrentar e solucionar problemas concretos. Nesse contexto, enfatiza-se a importância de fomentar o diálogo entre os estudantes, incentivando a troca de ideias, intervenções dialógicas e a apresentação de argumentos embasados, que conduzam à formulação de respostas éticas e socialmente responsáveis.

Dessa maneira, a competência em questão desempenha um papel fundamental no processo de engajamento social do aluno, habilitando-o como cidadão ativo e consciente, apto a agir em diferentes situações e contextos. Tal desenvolvimento não apenas contribui para a ampliação de sua capacidade de interpretar e compreender a realidade que o cerca, mas também fortalece a percepção de que a Matemática transcende seu caráter disciplinar tradicional, assumindo um papel instrumental significativo na solução de problemas reais. Exemplos disso podem ser observados em áreas como saúde, sustentabilidade e outras esferas que demandam uma análise matemática criteriosa para a construção de respostas e ações adequadas.

Com o propósito de alcançar tal finalidade, evidencia-se que o elemento específico da Matemática, que se configura como ferramenta essencial no contexto da Geometria Espacial, encontra-se devidamente delineado na habilidade: (EM13MAT201) Propor ações comunitárias, como as voltadas aos locais de moradia dos estudantes, dentre outras, envolvendo cálculos das medidas de área, de volume, de capacidade ou de massa, adequados às demandas da região (Brasil, 2018, p. 526).

O domínio da anteriormente referida habilidade, por sua vez, transcende o âmbito puramente acadêmico ao fomentar uma integração efetiva e responsável do estudante na comunidade em que está inserido. Tal processo resulta na aplicação prática e significativa dos conhecimentos matemáticos adquiridos em sala de aula, direcionados a atividades que promovem melhorias no ambiente em que o aluno reside. Dessa forma, o aprendizado ultrapassa os limites do espaço escolar, estabelecendo uma conexão produtiva entre o saber teórico e sua utilidade no cotidiano, evidenciando o valor do trabalho colaborativo na construção de soluções reais. Ademais, essa dinâmica de ensino e aprendizagem não apenas valoriza o conhecimento adquirido, mas também exerce um papel essencial na elevação da autoestima do discente, ao proporcionar-lhe a oportunidade de contribuir ativamente para o bem-estar de sua comunidade (veja Quadro 2).

Já a Competência Específica 3, estabelecida na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, busca ressaltar a importância do desenvolvimento de habilidades que possibilitem aos estudantes a proposição e a execução de ações voltadas à resolução de problemas complexos presentes na sociedade, com uma ênfase particular na aplicação dos conhecimentos matemáticos em contextos sociais e comunitários. A competência almeja que os alunos possam, de forma ética e responsável, utilizar os conceitos, as técnicas e os procedimentos da Matemática, integrando-os ao processo de tomada de decisões que envolvem questões relevantes, como as que se referem à saúde, sustentabilidade e aos impactos da tecnologia no mundo do trabalho. Além disso, essa competência propõe o engajamento do estudante na análise crítica de situações reais, estimulando sua atuação como cidadão capaz de influenciar e modificar a realidade que o cerca, por meio de um trabalho coletivo que envolva a Matemática como ferramenta essencial para a compreensão e solução de desafios concretos da vida cotidiana.

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018, p.527).

Quadro 2 – Análise Curricular (EM13MAT201)

Habilidade	EM13MAT201 Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
Comentário	Essa habilidade redireciona o foco dos conceitos de medição, antes centrados em si mesmos, para sua aplicação prática na resolução de problemas vinculados a demandas específicas, identificadas pelo estudante ou pelo grupo ao qual pertence. Os cálculos de perímetro, área, volume, capacidade e massa tornam-se instrumentos transformadores da realidade local, incorporando, de forma integrada, aspectos sociais e ambientais relevantes à comunidade.
Objetos do conhecimento	Geometria métrica: conceitos e procedimentos. Sistema métrico decimal e unidades não convencionais. Funções, fórmulas e expressões algébricas
Exemplo de objetivos de aprendizagem	Compreender diferentes métodos para calcular o perímetro de espaços produtivos ou terrenos voltados ao manejo agrícola. Utilizar composição e decomposição de figuras geométricas para calcular áreas de cultivo, desmatamento ou preservação, com base em imagens obtidas na internet. Resolver problemas locais que envolvam perímetro, área, volume, capacidade ou massa. Avaliar a relação entre área e volume interno de embalagens para armazenamento. Escolher unidades de capacidade adequadas para medir situações como irrigação, índices pluviométricos e desperdício de água. Propor iniciativas de reciclagem, reutilização ou reparo, considerando a produção de lixo na comunidade, entulhos de obras e descarte de resíduos eletrônicos.
Possibilidades para o currículo	Essa competência, ao prever a produção de algo por parte do estudante — seja de forma individual ou colaborativa —, posiciona a Matemática como uma ferramenta essencial, com seus procedimentos e linguagem, interagindo com outros componentes curriculares. A proposta de ações que envolvem os objetos de conhecimento mencionados sugere a adoção de metodologias ativas, como a execução de projetos. A escolha dos temas, feita pelos próprios alunos, pode abranger a diversidade de realidades, contextos e culturas do Brasil. Um projeto significativo para os jovens certamente envolve uma questão inicial que se transforma em um problema relevante, passando por etapas de pesquisa em diversas fontes, organização de dados e sua representação. Durante o desenvolvimento dessa habilidade, pode surgir a necessidade de modelos matemáticos para resolver problemas antes desconhecidos, o que contribui para o letramento matemático do estudante. Essa competência se alinha à Competência Geral 1 da BNCC, pois o conhecimento historicamente produzido possibilita ao estudante compreender e explicar situações em consonância com seus interesses e motivações.

Fonte: O autor, 2025.

O desenvolvimento da Competência Específica 3 requer que o aluno não apenas domine os conceitos fundamentais presentes nos campos da Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística, mas também que seja capaz de aplicá-los de maneira eficaz nos procedimentos necessários à resolução de problemas. Contudo, é importante destacar que o alcance desta competência vai além da simples resolução de problemas, pois envolve a construção de modelos matemáticos que representem situações concretas. Para tanto, faz-se necessário que o aluno, ao longo do processo de modelagem e resolução, analise e valide os resultados obtidos, reconhecendo que nem sempre as soluções iniciais serão adequadas ou precisas. Esse processo de análise, frequentemente, envolve a aplicação de uma abordagem de

tentativas e erros, o que, por sua vez, exige que o estudante adote uma postura reflexiva, avaliando e discutindo as estratégias empregadas, promovendo assim um ciclo de aprendizagem contínuo que favorece o aprimoramento das suas habilidades matemáticas e do seu raciocínio lógico, enunciando-se da seguinte forma: (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados (Brasil, 2018, p. 529).

Para o desenvolvimento pleno dessa habilidade, é de grande importância que o estudante adquira e se aproprie dos conceitos e dos instrumentos matemáticos disponíveis no campo da Geometria, os quais devem ser alicerçados nos elementos que foram inicialmente abordados nos anos finais do Ensino Fundamental. A partir dessa base teórica, espera-se que o aluno consiga aplicar tais conhecimentos em contextos práticos e reais, evidenciando a relevância da Matemática no cotidiano. Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) busca, de maneira explícita, integrar o aprendizado matemático à realidade vivida pelos alunos, superando a concepção de uma Matemática excessivamente teórica, desvinculada das necessidades e desafios do seu dia a dia. Ao aproximar o processo de aprendizagem da prática cotidiana, a BNCC contribui significativamente para o desenvolvimento de uma aprendizagem que se caracteriza como significativa, permitindo ao aluno perceber a utilidade do que aprende no seu contexto social e no mundo que o cerca (Quadro 3 – Análise Curricular (EM13MAT309)).

A Competência Específica 5, estabelecida pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, se apresenta de maneira a ressaltar a importância de os estudantes utilizarem estratégias matemáticas eficazes no processo de resolução de problemas que envolvem questões práticas do cotidiano. A proposta dessa competência não se limita à mera aplicação de cálculos ou técnicas isoladas, mas se estende ao desenvolvimento de uma capacidade analítica, crítica e reflexiva que permita ao aluno, de maneira articulada e estruturada, interpretar e construir modelos matemáticos que reflitam situações reais e complexas. Assim, essa competência incita a utilização de conceitos e procedimentos que abrangem os diversos campos da Matemática, como a Aritmética, a Álgebra, a Geometria, entre outros, visando, inclusive, à análise da plausibilidade e adequação dos resultados obtidos. O ensino, nesse sentido, torna-se um processo integrador, que vai além da resolução de problemas isolados, promovendo o desenvolvimento de um raciocínio lógico e argumentativo consistente capaz de proporcionar soluções adequadas e éticas, aplicáveis a desafios do cotidiano.

Quadro 3– Análise Curricular (EM13MAT309)

Habilidade	EM13MAT309 Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Comentário	Essa competência aborda a Geometria Métrica aplicada aos sólidos geométricos, focando no cálculo de suas áreas e volumes. No Ensino Médio, a Geometria Espacial passa a integrar e relacionar as propriedades e características dos poliedros e corpos redondos. Embora essa habilidade tenha uma abordagem prática bastante marcante, é fundamental considerar os processos cognitivos envolvidos na resolução de problemas dessa área. O estudante deve ser capaz de associar situações cotidianas a representações geométricas, construir modelos adequados e aplicar métodos de cálculo para características desses sólidos, a fim de resolver e analisar os problemas propostos.
Objetos do conhecimento	Geometria Métrica: poliedros e corpos redondos. Área total e volume de prismas, pirâmides e corpos redondos.
Exemplo de objetivos de aprendizagem	Determinar o volume de poliedros e corpos redondos em contextos práticos, como no cálculo da capacidade de embalagens e recipientes. Empregar técnicas de decomposição ou composição de sólidos mais simples para calcular volumes, por exemplo, ao calcular a capacidade de um copo descartável (tronco de cone) ou o volume de materiais necessários para construir um redutor de velocidade (quebramolas) (tronco de pirâmide). Estimar a quantidade de material necessário para cobrir (área) objetos ou embalagens compostos por partes semelhantes a sólidos geométricos (prismas, pirâmides e corpos redondos). Aplicar as propriedades geométricas de figuras planas e espaciais em situações reais, envolvendo o cálculo de áreas e volumes de sólidos inscritos ou circunscritos. Criar problemas que envolvam representações de sólidos geométricos e/ou o cálculo de áreas e volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos.
Possibilidades para o currículo	Esta habilidade aborda duas principais aplicações dos sólidos geométricos no Ensino Médio. A primeira conecta-se às Artes, por meio da criação de maquetes, modelos e esculturas utilizando sólidos geométricos, o que favorece a visualização e aplicação dos conceitos. A segunda se foca na preparação para o mercado de trabalho, ao propor situações-problema em que é necessário otimizar recursos na fabricação de embalagens, recipientes, containers, silos, entre outros. Em ambos os casos, é essencial o cálculo preciso da área e do volume dos objetos. O uso de tecnologias, como softwares gráficos e impressoras 3D, potencializa o desenvolvimento dessa habilidade, ampliando as opções de aprendizagem. A formulação de problemas pelos estudantes, em contextos reais, estimula o desenvolvimento da comunicação matemática e a análise crítica das soluções, sendo fundamental para o aprofundamento do conhecimento.

Fonte: O autor, 2025.

Dessa maneira, a Competência 5 objetiva a formação de cidadãos que saibam aplicar os conhecimentos matemáticos de maneira contextualizada e responsável, ampliando a compreensão do mundo e as possibilidades de ação do aluno dentro de uma sociedade dinâmica e multifacetada, elucidando-se da seguinte maneira:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 532).

A manifestação dessa competência pode ser evidenciada por meio da realização de experiências que permitam ao estudante observar fenômenos, seguidas de investigações e explicações fundamentadas em argumentos devidamente elaborados, que justifiquem suas observações ou, alternativamente, em contraexemplos que refutem as proposições iniciais. Sempre que possível, essas observações devem ser formalizadas em proposições matemáticas passíveis de demonstração, traduzindo os fenômenos observados para a linguagem rigorosa e precisa da Matemática. Nesse contexto, o uso de materiais manipuláveis revela-se uma estratégia pedagógica eficaz, como, por exemplo, na utilização de sólidos geométricos para a determinação da massa de um corpo imerso em um líquido, desde que a densidade da substância constitutiva seja conhecida.

Além disso, é fundamental ressaltar que o desenvolvimento dessa competência conduz o aluno a compreender que, embora a Matemática pertença ao domínio das ciências exatas, não está imune a equívocos em sua formulação, especialmente quando aplicada como instrumento para explorar a realidade. Esse reconhecimento é vital para que o estudante perceba que, por ser manipulada e aplicada por seres humanos, a Matemática pode, ocasionalmente, estar sujeita a falhas, reforçando a necessidade de uma postura crítica e reflexiva em relação ao seu uso.

No que tange à Geometria Espacial, o item associado ao desenvolvimento dessa competência encontra-se expresso na habilidade EM13MAT504, que propõe: "Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras" (Brasil, 2019, p. 533). Essa habilidade, em sua essência, promove uma inversão da prática tradicional em sala de aula, que frequentemente se limita à entrega de fórmulas prontas ou, no máximo, à exposição de suas deduções no quadro. Com essa abordagem, o aluno é encorajado a propor métodos próprios para a obtenção das expressões matemáticas, explorando, sempre que possível, materiais concretos ou tecnologias apropriadas, como o uso de softwares educacionais (Quadro 4).

Neste capítulo, foi realizada uma análise histórica e normativa da implementação do processo educacional no Brasil, iniciando na era colonial, atravessando o período imperial e alcançando a contemporaneidade, com destaque para a LDB, os PCN e a BNCC. Com base nessa análise, destacaram-se as competências e habilidades que se relacionam diretamente aos elementos de Geometria Espacial. No capítulo seguinte, apresenta-se alguns conceitos de Geometria Espacial necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Quadro 4 – Análise Curricular (EM13MAT504)

Habilidade	EM13MAT504 Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
Comentário	Essa habilidade refere-se ao estudo dos processos para o cálculo de volume de sólidos geométricos. O trabalho envolvendo o cálculo de volume começa nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e, de acordo com a BNCC, se desenvolve de maneira progressiva até culminar no aprimoramento dessa habilidade. A compreensão intuitiva/experimental do Princípio de Cavalieri é a base para o cálculo do volume desses sólidos, ou seja, a partir da observação e análise de modelos e da comparação de suas características, o estudante poderá generalizar o processo de obtenção do cálculo de volume para cada tipo de sólido. Nesse contexto, a experimentação/exploração precede a sistematização dos procedimentos de cálculo e a resolução de problemas, conforme previsto em EM3MAT309.
Objetos do conhecimento	Estudo dos sólidos geométricos, como prismas, pirâmides, cilindros e cones, e o cálculo de seus volumes.
Exemplo de objetivos de aprendizagem	Verificar que as seções paralelas à base de um prisma são congruentes entre si por meio da manipulação de materiais variados, como blocos de papel, pedaços de papelão ou cartas de baralho. Realizar comparações de volumes entre modelos de prismas retos e pirâmides retas com a mesma altura e área de base, utilizando materiais de preenchimento, como serragem, sementes, areia fina e água, para visualização prática. Estabelecer uma comparação entre o volume interno de cones e cilindros de mesma base e altura, novamente utilizando diferentes materiais de preenchimento. Desenvolver expressões algébricas que representem o volume de sólidos geométricos como prismas, pirâmides, cilindros e cones, com base na fórmula do volume de um paralelepípedo.
Possibilidades para o currículo	Uma abordagem para o desenvolvimento dessa competência envolve a aplicação da geometria prática por meio da construção de modelos algébricos para determinar o volume de sólidos geométricos. O Princípio de Cavalieri pode ser deduzido de forma informal pelo aluno ao observar e comparar o volume de um sólido ao modificar a disposição de suas seções transversais. É fundamental ressaltar que não são os objetos em si que facilitam o aprendizado, mas a reflexão sobre seus volumes, que são entendidos como a medida do espaço que ocupam. Ao realizar comparações entre as características dos sólidos geométricos, o aluno vivencia o processo de construção do conceito e se apropria desse conhecimento, aplicando-o de forma autônoma. Durante o processo investigativo, o estudante evolui de um mero utilizador de fórmulas para um verdadeiro criador das expressões algébricas que determinam os cálculos de volume.

Fonte: O autor, 2025.

3 ALGUNS TÓPICOS DE GEOMETRIA ESPACIAL

Este capítulo tem por objetivo explorar os seguintes tópicos de Geometria Espacial: projeções ortogonais, sólidos de revolução e truncamento de sólidos. O estudo realizado nas próximas subseções está baseado em Lira (2020); Dolce *et al* (2013) e Carvalho (1999), obras estas que podem ser consultadas para maiores esclarecimentos.

Pontos, retas e planos são conceitos primitivos que não têm uma definição, mas podem ser representados geometricamente. Para tais conceitos é adotada a seguinte notação:

- **Pontos:** letras maiúsculas, como A, B, X, Y;
- **Retas:** letras minúsculas, como r, s, t;
- **Planos:** letras gregas, como α , β , Γ .

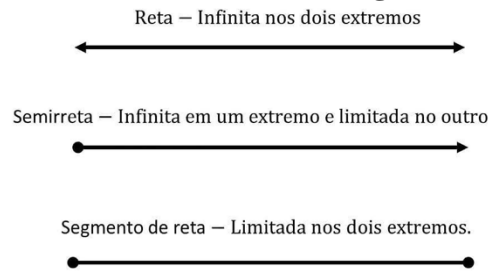
3.1 Axiomas

Abaixo, enuncia-se alguns Axiomas que embasam a teoria de Geometria Espacial.

Axioma 1. Em qualquer reta no espaço, é possível identificar-se tanto pontos que estão localizados sobre a reta quanto pontos que estão fora dela.

Axioma 2. para quaisquer dois pontos distintos que sejam escolhidos no espaço tridimensional, existe exatamente uma reta única que pode ser traçada, passando por esses dois pontos simultaneamente.

A **reta** que passa pelos pontos A e B é indicada pela notação \overleftrightarrow{AB} , na qual a seta sobre as letras A e B simboliza que se trata de uma reta contínua que passa por estes dois pontos. Quando se trata de um **segmento de reta**, que é a parte da reta limitada pelos pontos A e B, utiliza-se a notação \overline{AB} , onde o traço horizontal sobre as letras indica que é uma porção finita da reta, ou seja, um segmento que começa em A e termina em B. Por fim, a **semirreta** é uma parte da reta que tem um ponto de origem, mas se estende infinitamente em uma direção. A notação para semirreta que começa no ponto A e passa por B \overrightarrow{AB} , em que a seta sobre as letras indica que a reta se estende infinitamente a partir do ponto A, passando por B, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 2 – Reta, Semirreta e Segmento de Reta

Fonte: O autor, 2025.

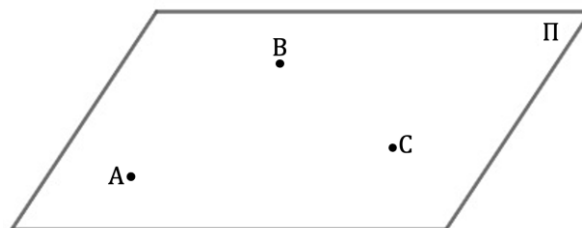
Axioma 3. Em qualquer conjunto de três pontos que não sejam colineares, define-se de forma única um plano, estabelecendo-se assim uma relação clara entre os pontos e os planos.

Axioma 4. Para qualquer plano específico, existem pontos que estão localizados sobre o plano e outros que estão fora dele.

Axioma 5. quando se consideram dois planos que compartilham um ponto em comum, não se limita a uma simples interseção pontual, pelo contrário, esses planos se cruzam ao longo de uma linha, implicando que compartilhem infinitos pontos em comum, além disso, caso compartilhem todos os seus pontos, são planos coincidentes.

Por fim, os critérios de congruência que são aplicáveis a triângulos em geometria plana mantêm sua validade mesmo quando se trata de triângulos situados em planos distintos, garantindo assim a consistência das características geométricas independentemente da posição dos planos.

O (único) plano que passa por três pontos não colineares A , B e C é indicado por $\langle A, B, C \rangle$. Portanto, se um plano Π é tal que inclui os pontos A , B e C , sua notação é indicada por $\Pi = \langle A, B, C \rangle$.

Figura 3 – Plano

Fonte: O autor, 2025.

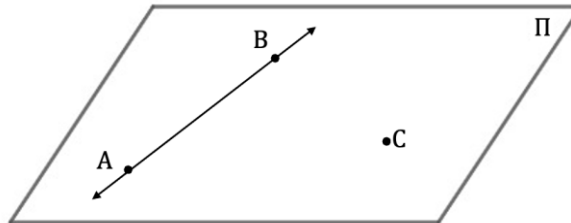
A seguir dois resultados importantes.

I) Para quaisquer dois pontos distintos, existe um plano capaz de contê-los.

Considerando-se A e B dois pontos distintos, de acordo com o Axioma 2, tem-se uma reta r que contém A e B . Também conforme o referido axioma, tem-se um ponto C que não

pertence à tal reta. Sendo assim, A, B e C não pertencem a uma mesma reta (são não colineares) e, por conseguinte, do Axioma 3, tem-se um plano que contém A, B e C.

Figura 4 – Plano determinado por uma reta e um ponto exterior à reta

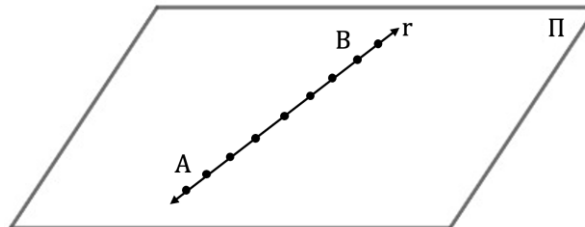


Fonte: O autor, 2025.

II) Para uma reta que contém dois pontos situados em um mesmo plano, toda ela está situada nesse plano.

Considerando-se A e B dois pontos distintos tais que ambos pertençam a um mesmo plano Π e considerando-se reta $r = \underline{AB}$, mostrar-se-á que $r \subset \Pi$. Sabe-se que, em Geometria Plana, tem-se uma reta $s \subset \Pi$ que contenha A e B. Portanto, sendo r e s retas que contenham A e B, de acordo com o Axioma 2, tem-se a igualdade $r = s$. Assim sendo, tem-se $r \subset \Pi$.

Figura 5 – Reta pertencente ao plano

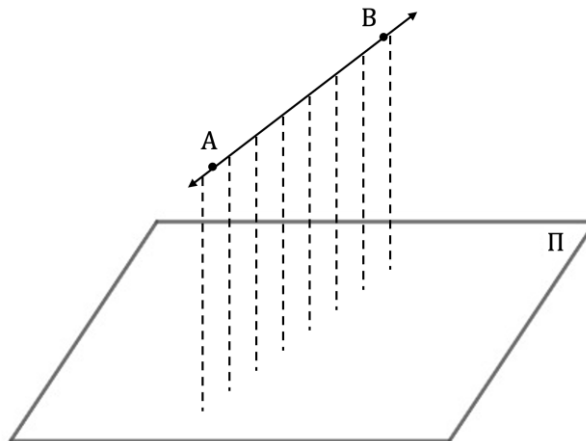


Fonte: O autor, 2025.

Em decorrência desta justificativa, tem-se as seguintes situações das posições relativas entre uma reta r e um plano Π :

i) Não havendo interseção entre a reta r e o plano Π ($r \cap \Pi = \emptyset$), tem-se que a reta r é paralela ao plano Π ;

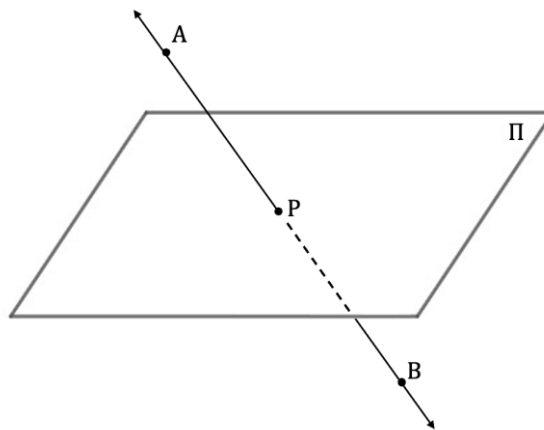
Figura 6 – Reta paralela ao plano



Fonte: O autor, 2025.

- ii) A interseção entre a reta r e o plano Π sendo um (único) ponto ($r \cap \Pi = \exists!$, $r \cap \Pi = P$), tem-se que a reta r é secante ao plano Π ;

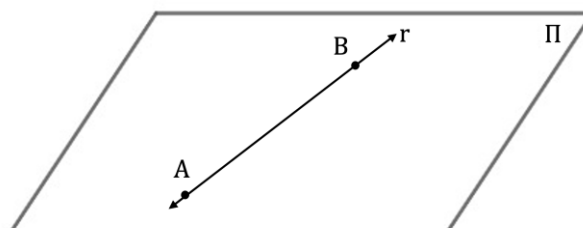
Figura 7 – Interseção entre reta e plano



Fonte: O autor, 2025.

- iii) A reta r estando contida no plano Π ($r \subset \Pi$), tem-se que todos os seus pontos pertencem à reta r .

Figura 8 – Reta contida no plano



Fonte: O autor, 2025.

Observação: Denota-se por $r \parallel \Pi$, o paralelismo entre a reta r e um plano Π .

III) Considerando-se Π e Π' dois planos distintos, e A e B dois pontos distintos situados na interseção entre eles, tem-se como resultante a reta \overleftrightarrow{AB} ($\overleftrightarrow{AB} = \Pi \cap \Pi'$).

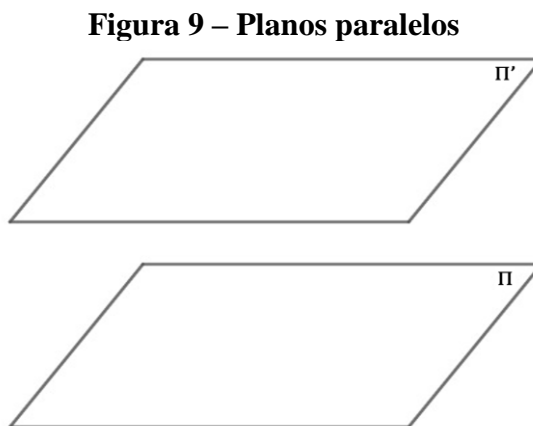
Pois, sendo os pontos A e B pertencentes à interseção entre os planos Π e Π' ($A, B \in \Pi \cap \Pi'$), de acordo o Axioma 5, tem-se que a reta que passa pelos pontos A e B está contida na interseção entre os referidos planos ($\overleftrightarrow{AB} \subset \Pi \cap \Pi'$). Considerando-se que exista um ponto C pertencente à interseção entre os referidos planos, desde que este ponto não pertença à reta que passa por A e B ($C \in \Pi \cap \Pi' \mid C \notin \overleftrightarrow{AB}$), tem-se que os pontos A, B e C não pertencem à mesma reta. Porém, ainda pelo Axioma 3, $\langle A, B, C \rangle$ é o único plano que contém A, B e C , de tal forma que os planos Π, Π' e $\langle A, B, C \rangle$ são o mesmo plano ($\Pi = \langle A, B, C \rangle = \Pi'$), resultando assim num absurdo, visto que os planos Π e Π' são dois planos distintos entre si. Logo, a reta que passa pelos pontos A e B está situada na interseção entre os referidos planos ($\overleftrightarrow{AB} = \Pi \cap \Pi'$).

IV) Considerando-se dois planos distintos com pelo menos um ponto em comum, tem-se que a interseção entre ambos é uma reta.

Pois, tomando-se Π e Π' dois planos distintos e um ponto A pertencente à interseção entre tais planos ($A \in \Pi \cap \Pi'$), existe um ponto B distinto de A ($B \neq A$) tal que mesmo ponto B pertença à interseção entre os referidos planos ($B \in \Pi \cap \Pi'$). Pelo próprio Axioma 5, a resultante da interseção entre os planos é a reta \overleftrightarrow{AB} ($\overleftrightarrow{AB} = \Pi \cap \Pi'$).

Em decorrência disto, tem-se, para a posição relativa entre dois planos Π e Π' :

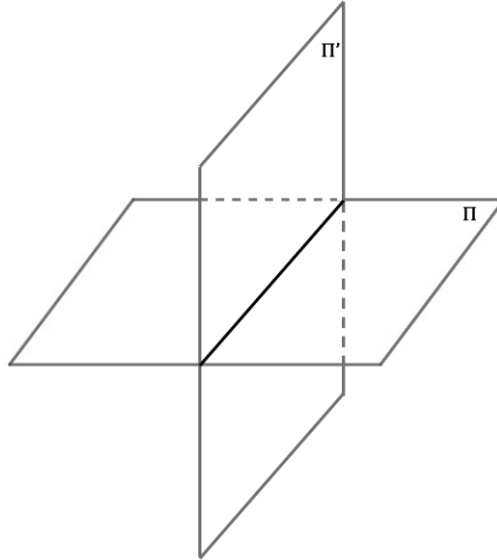
i) Não havendo interseção entre os planos Π e Π' ($\Pi \cap \Pi' = \emptyset$), diz-se que os planos são paralelos.



Fonte: O autor, 2025.

- ii) Sendo uma reta, a interseção entre os planos Π e Π' , ($\Pi \cap \Pi'$), diz-se que os planos são secantes.

Figura 10 – Planos secantes



Fonte: O autor, 2025.

- iii) Sendo todos os pontos de um plano Π pertencentes ao plano Π' ($\Pi = \Pi'$), diz-se que os planos são coincidentes.

Figura 11 – Planos coincidentes



Fonte: O autor, 2025.

Observação: Dois planos paralelos Π e Π' são representados por $\Pi \parallel \Pi'$.

3.2 Construção de Planos

Três pontos distintos e não colineares são suficientes para determinar, de forma única, a existência de um plano. Partindo deste Axioma, esta seção se dedicará ao estudo de outros resultados e propriedades intrinsecamente relacionados à caracterização e compreensão dos planos no contexto geométrico.

3.2.1 Determinação de um plano por uma reta e um ponto externo a mesma.

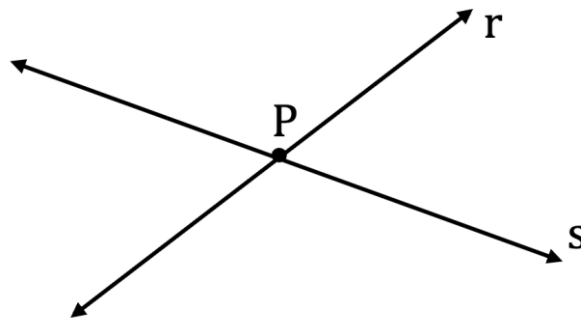
Teorema. *Dados uma reta e um ponto não pertencente a ela, existe apenas um plano que os contém.*

Considere-se uma reta r e um ponto P não pertencente a esta reta ($P \notin r$). Sendo A e B dois pontos distintos em r , como A , B e P não estão alinhados, pelo Axioma 3, existe um único plano Π que contém estes três pontos, isto é, $\Pi = \langle A, B, P \rangle$ (ver figura 3). Logo, tem-se que o plano Π contém a reta r ($\Pi \supset r$ ou $r \subset \Pi$). O mesmo Axioma 3 garante que tal condição seja única.

Tomando-se duas retas r e s no espaço, podemos classificar suas posições relativas da seguinte maneira:

- I) se existe um ponto P que é a interseção entre duas retas r e s ($r \cap s = P$), diz-se que r e s são concorrentes;

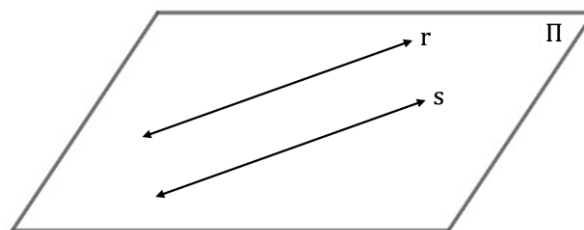
Figura 12 – Retas concorrentes



Fonte: O autor, 2025.

- II) se r e s são coplanares (pertencem ao mesmo plano) e não existe interseção entre ambas ($r \cap s = \emptyset$), diz-se que r e s são paralelas;

Figura 13 – Retas paralelas



Fonte: O autor, 2025.

- III) se r e s não são coplanares e não existe interseção entre ambas ($r \cap s = \emptyset$), diz-se que r e s são reversas;

3.2.2 Determinação de um plano gerado por retas paralelas

Teorema. *Dado um par de retas paralelas, existe um único plano que as contém.*

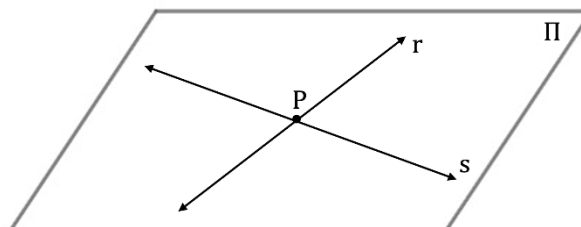
Considere-se r e s duas retas paralelas (e coplanares, por consequência do paralelismo entre ambas), existe um plano Π que as contém. Supondo-se agora que Π' também seja um plano que inclui r e s , dado que r e s são paralelas, e tomando-se um ponto P sobre a reta r , tem-se que P não pertence a s . Portanto, como Π e Π' contêm o ponto P , conclui-se que $\Pi = \Pi'$. Assim sendo, o plano que contém r e s é único (Figura 13).

3.2.3 Plano gerado por retas concorrentes

Teorema. *Dado um par de retas concorrentes, existe um único plano que as contém.*

Considere-se r e s duas retas concorrentes e sendo o ponto P a interseção entre ambas ($P = r \cap s$). Tomando-se dois pontos A e B (distintos de P) pertencentes a r e s , respectivamente ($A \in r$ e $B \in s$), obtém-se três pontos A , P e B não colineares. De acordo com o Axioma 3, um único plano (Π) pode ser determinado por estes três pontos ($\Pi = \langle A, B, P \rangle$). Tomando-se as retas r e s que passam simultaneamente por P e por apenas um dos outros demais dois pontos A e B , respectivamente ($r = \overleftrightarrow{PA}$ e $s = \overleftrightarrow{PB}$), conclui-se que ambas as retas r e s estão contidas no plano Π ($r, s \subset \Pi$). Para que seja garantida a unicidade de tal condição, consideremos também o Axioma 3, da seguinte forma: Supondo-se Π' um plano que também contenha r e s , tem-se que os pontos P , A e B estão contidos no plano Π' , pois o ponto A pertence à reta r e o ponto B pertence à reta s ($A \in r$ e $B \in s$). Assim sendo, tem-se que os planos Π e Π' estão situados exatamente no mesmo lugar, isto é, $\Pi = \langle A, B, P \rangle = \Pi'$. Assim sendo, existe um e somente um plano que contenha simultaneamente r e s .

Figura 14 – Retas concorrentes contidas no plano

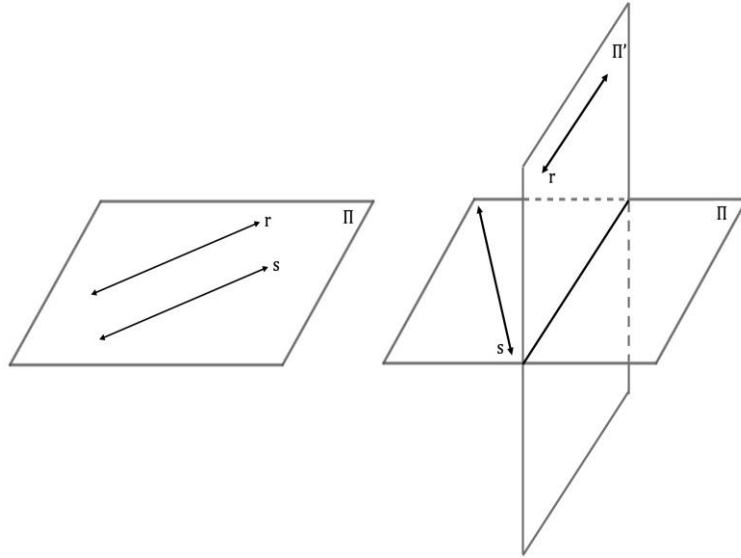


Fonte: O autor, 2025.

Tomando-se duas retas r e s no espaço:

- I) Se as retas são paralelas (coplanares) ou reversas (não coplanares), não há interseção entre ambas ($r \cap s = \emptyset$);

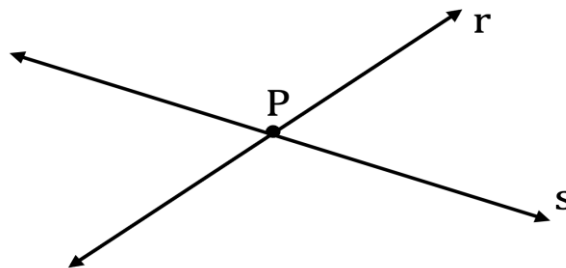
Figura 15 – Retas sem interseção



Fonte: O autor, 2025.

- II) Se as retas são concorrentes, a interseção entre ambas é um e somente um ponto ($r \cap s = P$);

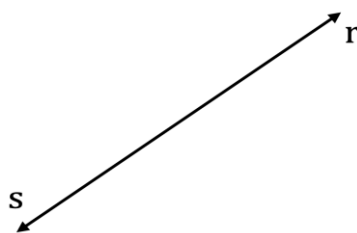
Figura 16 – Retas concorrentes



Fonte: O autor, 2025.

- III) Se as retas são coincidentes, então ambas estão situadas exatamente no mesmo lugar do espaço ($r = s$).

Figura 17 – Retas coincidentes



Fonte: O autor, 2025.

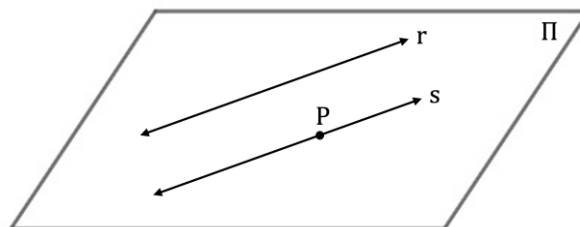
3.3 Paralelismo entre retas

3.3.1 Existência e unicidade de uma paralela dados uma reta e um ponto externo a esta

Teorema. *Dados uma reta e um ponto não pertencente a esta reta, é possível traçar uma e somente uma outra reta paralela a esta, que passe por tal ponto.*

Considere-se uma reta r e um ponto P não pertencente a ela ($P \notin r$). Tem-se, de acordo com o Axioma 3, que existe somente um único plano, ao qual o ponto P pertence e no qual a reta r está contida. Desta forma, de acordo com o Axioma das retas paralelas (geometria plana), tem-se que apenas uma reta s (contida em Π) passa pelo ponto P , de tal maneira que as retas r e s sejam paralelas. Para justificarmos a unicidade desta condição, (s ser a única reta paralela à outra reta r e que passe por P), suponhamos a existência de alguma outra reta s' , paralela à reta r e que passe pelo ponto P e um plano que contenha ambas as retas ($\Pi' = \langle r, s' \rangle$), assim sendo, tem-se que ambos os planos (Π e Π') contém a reta r . Isto é, de acordo com o Axioma 3, tem-se que os planos Π e Π' estão situados no mesmo lugar do espaço ($\Pi = \Pi'$), ou seja, as retas s e s' também estão situadas no mesmo lugar do espaço ($s = s'$).

Figura 18 – Unicidade e existência de uma paralela dados uma reta e um ponto externo a esta



Fonte: O autor, 2025.

3.3.2 O paralelismo entre retas é uma relação de equivalência

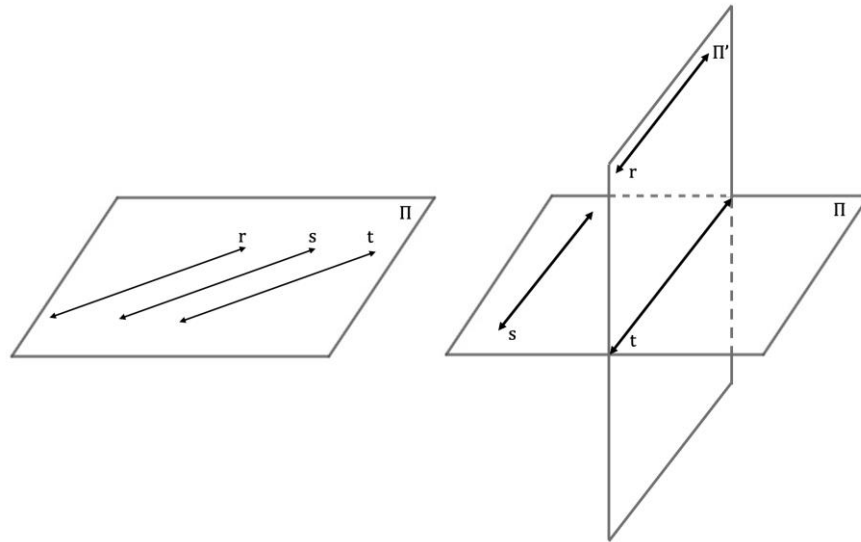
O paralelismo entre retas é uma relação de equivalência pois satisfaz as três propriedades a seguir.

- i) Dada a reta r , ela é paralela a si própria, ou seja, $r \parallel r$ (propriedade reflexiva).
- ii) Dadas as retas r e s , se $r \parallel s$ então $s \parallel r$ (propriedade simétrica).
- iii) Dadas três retas distintas r , s e t tais que $r \parallel t$ e $t \parallel s$ então $r \parallel s$ (propriedade transitiva).

Considere-se duas retas r e s , paralelas a uma terceira reta t . Tem-se que as retas r e s estão situadas no mesmo plano (coplanares), ou seja, existe um plano que contém ambas. Assim sendo, diz-se que as retas r e s são paralelas ($r \parallel s$). De outra forma, considerando-se que r e s

não estejam situadas no mesmo plano (não coplanares), tem-se que as retas r e t estão situadas no plano Π e as retas s e t estão situadas no plano Π' ($\Pi = \langle r, t \rangle$ e $\Pi' = \langle s, t \rangle$). Assim sendo, tem-se que os planos Π e Π' intersectam-se (secantes), e que a interseção entre ambos é a reta t ($\Pi \cap \Pi' = t$).

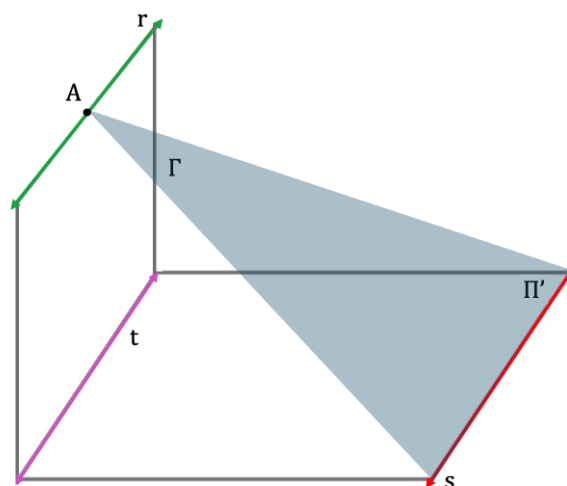
Figura 19 – Transitividade do Paralelismo



Fonte: O autor, 2025.

- D) Inicialmente, será provado que as retas r e s não pertencem a um plano em comum (coplanares). Considere-se o ponto A pertencente à reta r e o plano Γ o plano gerado por s e A ($A \in r$ e $\Gamma = \langle s, A \rangle$).

Figura 20 – Transitividade de retas paralelas



Fonte: O autor, 2025.

Assim sendo, tem-se que a interseção entre os planos Γ e Π' gera a reta s ($\Gamma \cap \Pi' = s$), tendo em vista que os planos Γ e Π' são distintos, o ponto A pertence ao plano Γ e não pertence

ao plano Π' , e a reta s está contida na interseção entre os planos Γ e Π' ($\Gamma \neq \Pi'$, $A \in \Gamma$, $A \notin \Pi'$ e $s \subset \Gamma \cap \Pi'$). Sabendo-se que o ponto A pertence à interseção entre os planos distintos Γ e Π (a distinção entre estes planos está garantida pelo fato de a reta s estar contida no plano Γ e não estar contida no plano Π) [$A \in \Gamma \cap \Pi$], tem-se que a interseção entre os referidos planos gera uma reta na qual o ponto A está contido. Considerando-se r' esta reta gerada pela interseção entre os tais planos, tem-se que as retas r e t são coplanares, já que o plano Π contém ambas ($\Pi \supset r, t$) e que não há interseção entre as retas r e t , pois, sendo o ponto B pertencente à interseção entre as retas r' e t , para um determinado ponto B , tem-se que a reta r' pertence ao plano Γ e que a reta t pertence ao plano Π' (se $B \in r' \cap t$, $\exists B$, então $r' \subset \Gamma$ e $t \subset \Pi'$), assim sendo, o ponto B pertence à reta s , reta esta que é a interseção entre os planos Γ e Π' , isto é, o ponto B pertence à reta s também a reta t , resultando assim em um absurdo, já que as retas s e t são paralelas ($B \in \Gamma \cap \Pi' = s$, ou seja, $B \in s$ e $B \in t$, absurdo, pois $s \parallel t$), daí, tem-se que as retas são paralelas ($r' \parallel t$). Em decorrência disto, sendo as retas r e r' duas retas paralelas à reta t que passa pelo ponto A , conclui-se, do Axioma 4, que as retas r' e r estão situadas no mesmo lugar do espaço. Assim sendo, as retas r e s estão contidas no plano Γ , isto é, as retas r e s são coplanares ($r, s \subset \Gamma$, ou seja, coplanares).

II) Será provado agora que não há interseção entre as retas r e s ($r \cap s = \emptyset$).

Como visto anteriormente, caso haja algum ponto P , pertencente à interseção entre as retas r e s , tem-se que o este ponto P pertence à reta, já que se o ponto P pertence à reta r e a reta r está contida no plano Π , então o ponto P pertence ao plano Π ($P \in r$ e $r \subset \Pi \Rightarrow P \in \Pi$) e se o ponto P pertence à reta s e a reta s está contida no plano Π' , então o ponto P pertence ao plano Π' ($P \in s$ e $s \subset \Pi' \Rightarrow P \in \Pi'$), resultando que o ponto P pertença à reta t , interseção entre os planos Π e Π' . Assim sendo, o ponto P pertence à interseção entre as retas t e s , absurdo, já que as retas t e s são paralelas ($t \parallel s$). Em decorrência de I e II, conclui-se que $r \parallel s$.

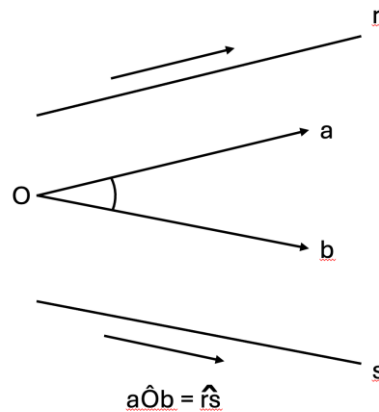
3.4 Ângulo entre duas retas quaisquer

O estudo do ângulo entre duas retas quaisquer é fundamental para a compreensão das relações angulares no espaço tridimensional. Esse conceito permite analisar a inclinação relativa de duas retas em relação a um ponto de interseção ou, em alguns casos, em relação à sua posição no espaço. A determinação desse ângulo é essencial para uma variedade de aplicações, como no estudo da ortogonalidade e da perpendicularidade, que são conceitos-chave na geometria. Ao compreender como as retas podem se inclinar uma em relação à outra, é

possível estabelecer as bases para uma análise mais profunda de outras relações geométricas, especialmente aquelas que envolvem projeções ortogonais e interações espaciais entre objetos. Assim, o ângulo entre duas retas quaisquer constitui um conceito básico, porém crucial, para o avanço no estudo de diversos outros tópicos na geometria espacial.

Definição. Um ângulo é denominado como o ângulo entre duas retas orientadas quando, e somente quando, ele possui um vértice arbitrário, e os lados do ângulo apresentam sentidos que correspondem, de forma respectiva, aos sentidos das retas consideradas. Na ilustração a seguir, o ângulo plano \hat{aOb} representa o ângulo formado pelas retas reversas (orientadas) r e s .

Figura 23 – Ângulo entre duas retas



Fonte: O autor, 2025.

Observação 1: A definição apresentada tem como objetivo primordial estabelecer o conceito de ângulo formado por duas retas reversas, ressaltando as relações angulares entre essas retas no espaço tridimensional.

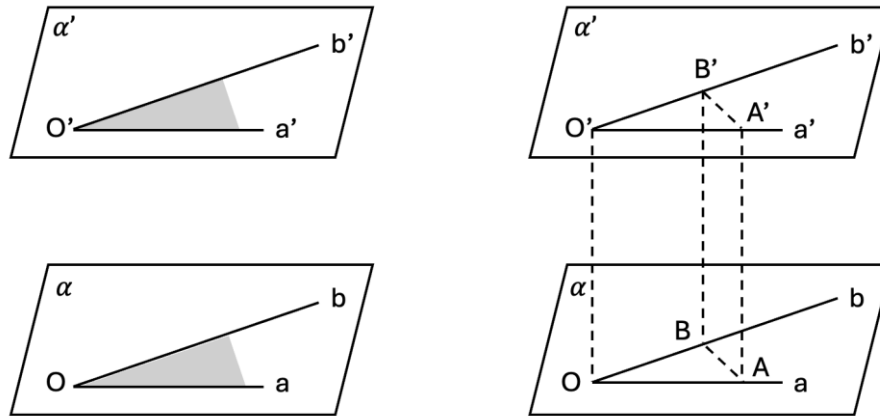
Observação 2: Quando duas semirretas possuem sentidos concordantes ou discordantes, elas são consideradas partes de retas paralelas, ou seja, essas semirretas estão dispostas de forma a não se cruzarem, mantendo a mesma direção ou orientação oposta entre si.

Ângulos entre lados respectivamente paralelos

Proposição 1: Se os lados de dois ângulos possuem sentidos correspondentes e concordantes, conclui-se que os ângulos sejam congruentes.

Prova 1: Considere-se o caso mais geral, as retas Oa e Ob não são coincidentes nem opostas, e os ângulos \hat{aOb} e $\hat{a'O'b'}$ não pertencem ao mesmo plano.

Figura 24 – Congruência entre ângulos com sentidos correspondentes e concordantes



Fonte: O autor, 2025.

Note-se que os planos α e α' dos ângulos \widehat{aOb} e $\widehat{a'O'b'}$ são paralelos. Considerem-se os pontos $A \in a$, $B \in b$, $A' \in a'$ e $B' \in b'$, tal que:

$$\underline{OA} \equiv \underline{O'A'} \text{ e } \underline{OB} \equiv \underline{O'B'} \quad (\text{I})$$

Tem-se que o quadrilátero $OAA'O'$ é um paralelogramo, visto que as semirretas \overrightarrow{OA} e $\overrightarrow{O'A'}$ possuem sentidos concordantes e os segmentos \underline{OA} e $\underline{O'A'}$ e são congruentes. Assim sendo, tem-se:

$$\underline{OO'} \parallel \underline{AA'} \text{ e } \underline{OO'} \equiv \underline{AA'} \quad (\text{II})$$

Da mesma forma, o quadrilátero $OBB'O'$ é um paralelogramo, o que implica que:

$$\underline{OO'} \parallel \underline{BB'} \text{ e } \underline{OO'} \equiv \underline{BB'} \quad (\text{III})$$

Daí, de (II) e (III), tem-se:

$$[(\text{II}) \text{ e } (\text{III})] \Rightarrow (\underline{AA'} \parallel \underline{BB'} \text{ e } \underline{AA'} \equiv \underline{BB'}) \Rightarrow AA'BB' \text{ é paralelogramo} \Rightarrow$$

$$\underline{AB} \equiv \underline{A'B'} \quad (\text{IV})$$

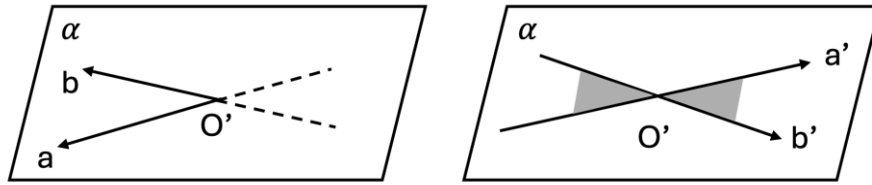
Logo, de (I) e (IV), tem-se:

$$[(\text{I}) \text{ e } (\text{IV})] \Rightarrow \Delta AOB \equiv \Delta A'O'B' \Rightarrow \Delta A\hat{O}B \equiv \Delta A'\hat{O}'B' \Rightarrow \widehat{aOb} \equiv \widehat{a'O'b'}$$

Proposição 2: Se dois ângulos possuem os lados com sentidos discordantes, conclui-se que eles sejam congruentes.

Prova 2: Esta é uma aplicação direta da proposição anterior, assim como uma proposição sobre ângulos opostos pelo vértice.

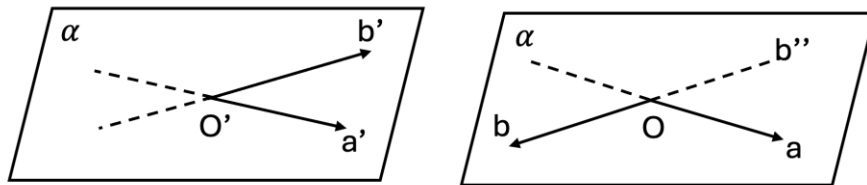
Figura 25 – Congruência entre ângulos com sentidos discordantes



Fonte: O autor, 2025.

Proposição 3: Se dois ângulos em que um lado de um deles possui sentido concordante com um lado do outro, enquanto os outros dois lados apresentam sentidos discordantes, conclui-se que tais ângulos sejam suplementares.

Figura 26 – Ângulos suplementares



Fonte: O autor, 2025.

Prova 3: Considerando-se a semirreta Ob'' oposta à semirreta Ob , tem-se que os ângulos $a\hat{O}b''$ e $a'\hat{O}'b'$ são congruentes ($a\hat{O}b'' \equiv a'\hat{O}'b'$). Como os ângulos $a\hat{O}b$ e $a'\hat{O}'b''$ são suplementares, segue que os ângulos $a\hat{O}b$ e $a'\hat{O}'b'$ também são suplementares."

Diante das informações anteriores, se dois ângulos possuem lados que são paralelos entre si, então, de acordo com a orientação de seus lados, eles podem ser classificados da seguinte forma:

- (i) **Congruentes:** Quando os lados dos ângulos paralelos apresentam sentidos concordantes (direção idêntica) ou discordantes (direção oposta), os ângulos são considerados congruentes. Isso se deve ao fato de que, nestas condições, ambos os ângulos mantêm a mesma medida angular.
- (ii) **Suplementares:** Quando os sentidos de um lado de um dos ângulos e de um lado do outro ângulo são concordantes (voltados na mesma direção), enquanto os outros dois lados apresentam sentidos discordantes (orientados em direções opostas), então os ângulos são suplementares.

3.5 Projeção Ortogonal

3.5.1 Ortogonalidade ou perpendicularidade entre retas

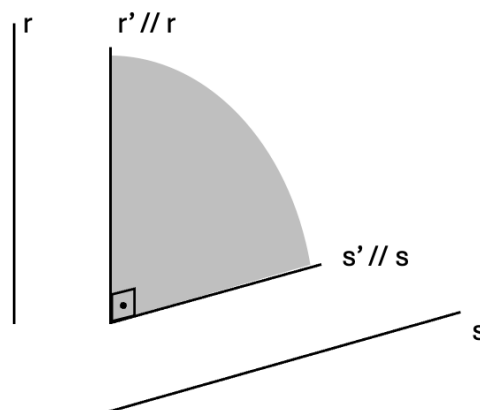
Duas retas são consideradas ortogonais se, e somente se, forem reversas e formarem um ângulo reto entre si.

Para representar cada uma das seguintes relações, serão utilizados, neste trabalho, os símbolos:

- \perp , para representar *ortogonalidade*;
- $\perp\!\!\!\perp$, para representar *perpendicularidade*;
- $\underline{\perp\!\!\!\perp}$, para representar *perpendicularidade* ou *ortogonalidade*.

Quando duas retas, denominadas a e b, formam um ângulo reto, elas podem ser chamadas de perpendiculares ou ortogonais, sendo expressas pela notação $a \underline{\perp\!\!\!\perp} b$ [$a \underline{\perp\!\!\!\perp} b \Leftrightarrow a \perp\!\!\!\perp b \Leftrightarrow a \perp b$]. As retas perpendiculares se cruzam em um único ponto, caracterizando-se como concorrentes, e, conforme a definição, se duas retas formam um ângulo reto, elas são perpendiculares entre si.

Figura 27 – Ortogonalidade ou perpendicularidade entre retas



Fonte: O autor, 2025.

Da mesma forma, o fato de duas retas serem perpendiculares implica que elas formam um ângulo reto. Quando se afirma que duas retas são ortogonais, isso também implica que elas se encontram em um ângulo reto. No entanto, retas que formam um ângulo reto não podem ser consideradas reversas, pois isso implicaria que elas não se intersectam. Se duas retas são perpendiculares a uma terceira, isso não garante que elas sejam perpendiculares entre si, já que

sua posição no espaço pode ser diferente. Ademais, o fato de duas retas serem perpendiculares a uma terceira não implica que elas sejam paralelas entre si, uma vez que podem estar em planos distintos. Finalmente, quando duas retas formam um ângulo reto, toda reta paralela a uma delas também formará um ângulo reto com a outra, devido à característica das retas paralelas compartilharem a mesma direção ou inclinação.

Com base nas definições expostas, é possível concluir que, se duas retas formam um ângulo reto, qualquer reta paralela a uma dessas retas também formará um ângulo reto com a outra. Isso ocorre porque as retas paralelas possuem a mesma direção ou inclinação, e, portanto, mantêm a relação angular com as retas que formam um ângulo reto entre si, assegurando que a reta paralela à primeira também se intersecte com a segunda formando um ângulo reto, isto é:

$$\triangleright (\mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \mathbf{b} // \mathbf{c}) \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{c};$$

$$\triangleright (\mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \mathbf{a} // \mathbf{c}) \Rightarrow \mathbf{b} \perp \mathbf{c}.$$

3.5.2 Perpendicularidade entre reta e plano

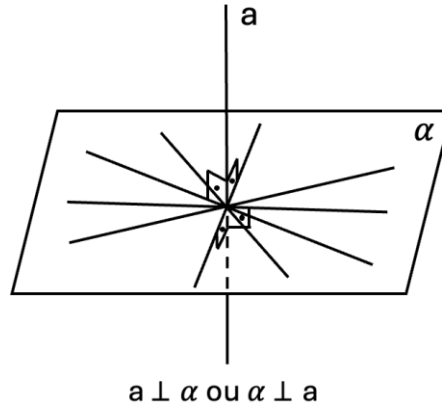
O estudo da perpendicularidade entre uma reta e um plano é um dos conceitos fundamentais da geometria espacial, essencial para a compreensão das interações geométricas no espaço tridimensional. Esse conceito envolve a análise de uma reta que, ao intersectar um plano, forma um ângulo reto com todas as linhas do plano que a cruzam. A perpendicularidade entre reta e plano é um tema central para várias aplicações, como no estudo das projeções ortogonais e na determinação de distâncias mínimas entre pontos e planos. Além disso, esse princípio é amplamente utilizado em áreas como a engenharia, a arquitetura e a física, onde a construção e o posicionamento preciso de objetos no espaço são cruciais. A compreensão da perpendicularidade entre reta e plano é, portanto, uma base importante para o desenvolvimento de outros tópicos avançados em geometria espacial, sendo uma ferramenta fundamental para a análise das propriedades e relações espaciais de figuras e sólidos.

Definição. Uma reta e um plano são considerados perpendiculares se, e somente se, eles possuem um ponto de interseção comum e a reta é perpendicular a todas as retas do plano que passam por esse ponto.

Quando uma reta a é perpendicular a um plano α , ou quando o plano α é perpendicular à reta a , o ponto de interseção da reta com o plano é denominado pé da perpendicular. Por outro lado, uma reta e um plano são classificados como oblíquos se, e somente se, eles são

concorrentes, ou seja, se possuem um ponto comum de interseção, mas não são perpendiculares entre si.

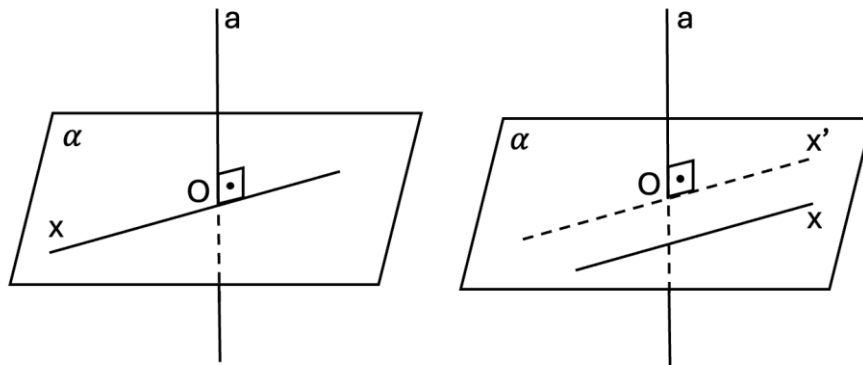
Figura 28 – Perpendicularidade entre reta e plano



Fonte: O autor, 2025.

Consequência da Definição. Considerando-se uma reta e um plano perpendiculares, tal reta é perpendicular a qualquer reta do referido plano.

Figura 29 – Perpendicularidade entre reta não contida no plano e retas do plano



Fonte: O autor, 2025.

Assim, sendo dada uma reta a perpendicular a um plano em um ponto O , e considerando-se x como uma reta qualquer contida no plano, tem-se duas possibilidades:

- I) A reta x passa pelo ponto O . Nesse cenário, pela definição de perpendicularidade, a reta a é perpendicular a x , ou seja, $a \perp x$;
- II) A reta x não passa pelo ponto O . Nesse caso, é possível considerar uma reta x' , paralela a x , que passe por O . Pela definição, como a é perpendicular a x' , e $x \parallel x'$, segue-se que a é perpendicular a x , ou seja, $a \perp x'$ e $a \perp x$. Com isso,

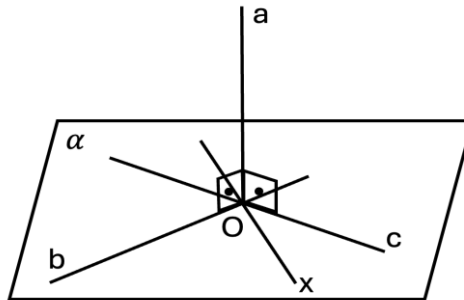
conclui-se que, independentemente da posição de x no plano, desde que x pertença ao plano, vale a implicação: $(a \perp \alpha, x \subset \alpha) \Rightarrow a \perp x$.

Condição de Perpendicularidade entre Reta e Plano

Sendo uma reta perpendicular a duas retas concorrentes em um plano, tem-se que essa reta é perpendicular ao plano.

- I) A fim de provar-se que a reta a é perpendicular ao plano α ($a \perp \alpha$), é necessário mostrar que a é perpendicular a todas as retas do plano α que passam pelo ponto O . Para isso, basta demonstrar-se que a é perpendicular a uma reta x genérica do plano α , que passa por O ;

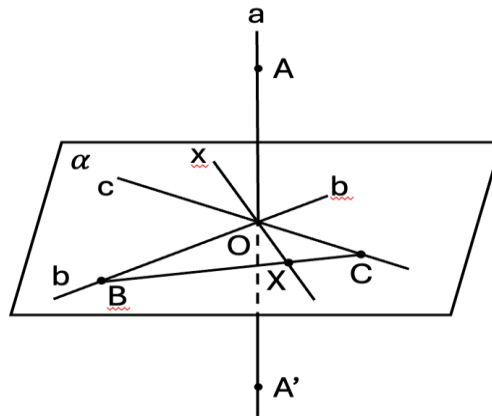
Figura 30 – Perpendicularidade entre reta e plano (I)



Fonte: O autor, 2025.

- II) Considere-se no plano α dois pontos A e A' , simétricos em relação ao ponto O , de modo que $OA \equiv OA'$. Seja B um ponto qualquer da reta b ($B \in b$) e C um ponto qualquer da reta c ($C \in c$), de tal forma que a reta \underline{BC} intercepte a reta x em um ponto X , sendo isto suficiente que os pontos B e C estejam em semiplanos opostos em relação à reta x . Observe que, sob essas condições, a reta b é a mediatriz de $\underline{AA'}$, e a reta c também é a mediatriz de $\underline{AA'}$, implicando que $\underline{AB} \equiv \underline{A'B}$ e $\underline{AC} \equiv \underline{A'C}$. Além disso, para concluir a prova, basta mostrar que a reta x é mediatriz de $\underline{AA'}$;

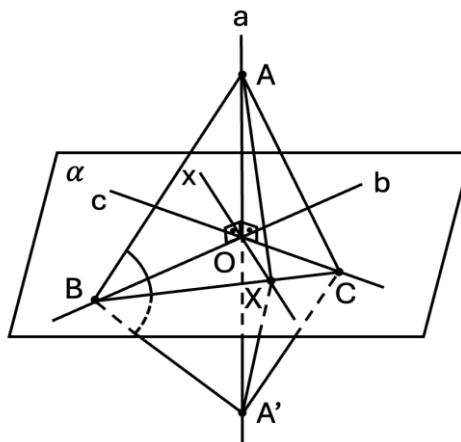
Figura 31 – Perpendicularidade entre reta e plano (II)



Fonte: O autor, 2025.

- III) Considerando-se congruentes os segmentos de reta \underline{AB} e $\underline{A'B}$, também congruentes os segmentos \underline{AC} e $\underline{A'C}$, com \underline{BC} uma reta comum, segue-se que são congruentes os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'BC$, o que implica congruência dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle A'BC$ (ambos com vértice em B). Logo, tem-se que são congruentes também os ângulos $\angle ABX$ e $\angle A'BX$ (com \underline{BX} sendo segmento de reta comum a ambos). Em seguida, isso leva à conclusão de que são congruentes os triângulos $\triangle ABX$ e $\triangle A'BX$, implicando congruência dos segmentos de reta \underline{XA} e $\underline{XA'}$;
- IV) Como são congruentes os segmentos de reta \underline{XA} e $\underline{XA'}$, conclui-se que a reta x é a mediatriz de $\underline{AA'}$, implicando a perpendicularidade entre as retas a e x , sendo o ponto O pertencente à reta x , e x uma reta genérica do plano α , portanto, a reta a é perpendicular ao plano.

Figura 32 – Perpendicularidade entre reta e plano

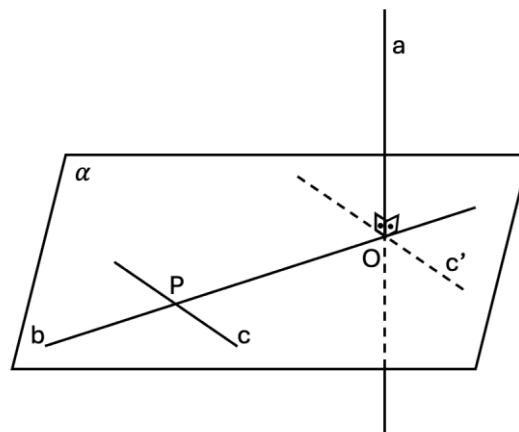


Fonte: O autor, 2025.

Consequência 1: Considerando-se em um plano α , duas retas b e c que são concorrentes no ponto P , se uma reta a é perpendicular à reta b no ponto O e ortogonal à reta c , então a reta a é perpendicular ao plano α .

Explicação 1: A perpendicularidade de a a b no ponto O indica que a forma um ângulo reto com b . Além disso, a ortogonalidade de a em relação a c implica que a reta a forma um ângulo reto com c . Como as retas b e c são concorrentes no ponto P , e a é perpendicular tanto a b quanto a c , segue-se que a é perpendicular a todas as retas do plano α que passam pelo ponto P , caracterizando a reta a como perpendicular ao plano α .

Figura 33 – Perpendicularidade entre reta e plano (Consequência 1)



Fonte: O autor, 2025.

Consequência 2: Se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

Explicação 2: Dado o plano α , com as retas a e b que se encontram no ponto P , e uma reta c que é ortogonal a ambas, pode-se concluir que a reta c é perpendicular ao plano α . Isso ocorre porque, por definição, uma reta ortogonal a duas retas concorrentes no plano forma um ângulo reto com qualquer reta do plano que passe pelo ponto de interseção das duas retas. Assim, a reta c , sendo ortogonal às retas a e b , é perpendicular ao plano α , pois o plano α é determinado por todas as retas que passam por P e são formadas por a e b .

Condição de Perpendicularidade entre Reta e Retas do Plano

Se uma reta forma um ângulo reto com duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

Dado um plano α com duas retas a e b que se encontram no ponto P , se uma reta c forma um ângulo reto com ambas a e b , então a reta c é perpendicular ao plano α . Isso ocorre porque,

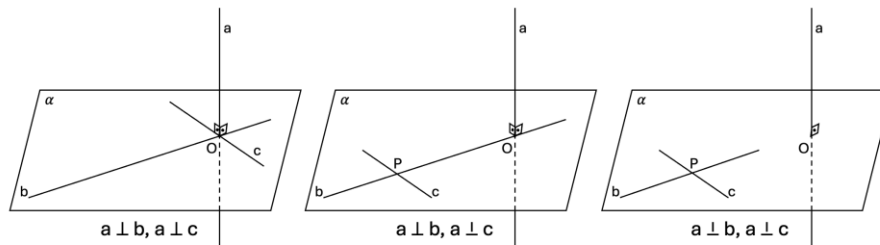
por definição, se uma reta forma um ângulo reto com duas retas concorrentes, ela é perpendicular a todas as retas que passam pelo ponto de interseção dessas retas. Como a e b são concorrentes no ponto P , a reta c , sendo perpendicular a ambas, deve ser perpendicular ao plano α , que é o plano determinado pelas retas a e b .

A condição necessária para que uma reta seja perpendicular a um plano é formar ângulo reto com duas retas concorrentes do plano.

Tendo em vista as condições e consequências anteriores, pode-se afirmar o seguinte:

Teorema. Considerando-se uma reta que forma ângulo reto com duas retas concorrentes de um plano, ela é perpendicular ao plano.

Figura 34 – Condição de perpendicularidade entre reta e retas do plano



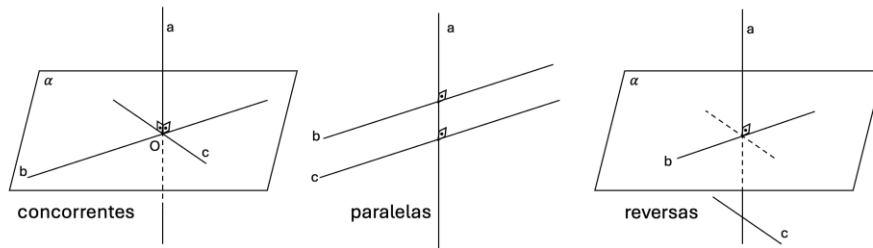
Fonte: O autor, 2025.

Exemplo 1. Tomando-se a , b e c três retas no espaço tais que $a \perp b$ e $c \perp a$, enunciar as possíveis posições relativas entre retas b e c .

Solução. As retas b e c podem se apresentar de três formas distintas em relação à reta a :

- **Concorrentes:** Quando as retas b e c se encontram em um ponto P , formando um ângulo reto com a reta a , então a é perpendicular ao plano formado pelas retas b e c , ou seja, $a \perp (b,c)$;
- **Paralelas:** Caso as retas b e c sejam paralelas, elas são coplanares, ou seja, existem em um único plano. Nesse caso, a reta a pode ser perpendicular a ambas, formando um ângulo reto com cada uma delas, e, portanto, perpendicular ao plano que contém b e c ;
- **Reversas:** Quando b e c são perpendiculares à reta a , mas não são coplanares, ou seja, estão em planos distintos, as retas b e c são chamadas de reversas. Nesse cenário, a reta a é ortogonal a ambas as retas b e c , mas as retas b e c não pertencem ao mesmo plano.

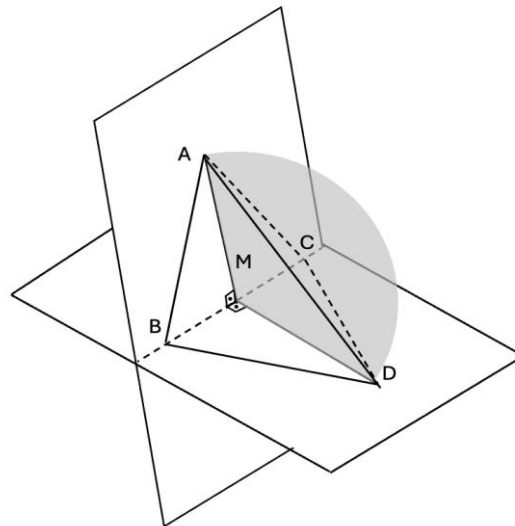
Figura 35 – Retas (concorrentes, paralelas e reversas)



Fonte: O autor, 2025.

Exemplo 2. Considerando-se os triângulos isósceles ABC e DBC , de base BC e situados em planos distintos, provar que as retas suportes dos segmentos de reta \overline{AD} e \overline{BC} são ortogonais.

Figura 36 – Retas ortogonais



Fonte: O autor, 2025.

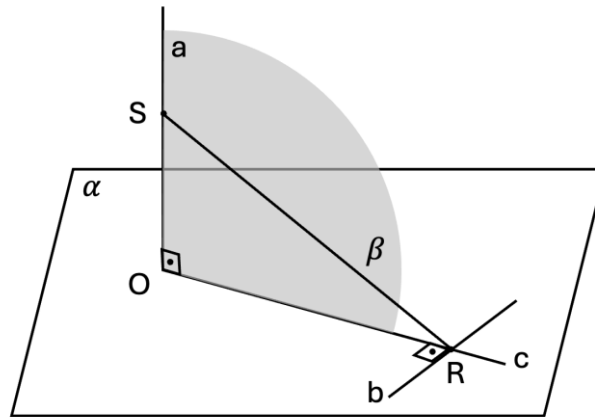
Solução. Se M é o ponto médio do segmento de reta \overline{BC} , então as retas suportes dos segmentos de reta \overline{AM} e \overline{DM} são concorrentes, tendo em vista que são distintos os planos formados pelos pontos A, B, C e D, B, C .

- Se o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles, então as retas suportes dos segmentos \overline{BC} e \overline{AM} são perpendiculares;
- Se o triângulo $\triangle DBC$ é isósceles, então as retas suportes dos segmentos \overline{BC} e \overline{DM} são perpendiculares;
- Assim sendo, a reta suporte do segmento \overline{BC} é perpendicular ao plano que contém os pontos A, M e D , implicando assim a perpendicularidade entre as retas suportes dos segmentos \overline{BC} e \overline{AD} .

De fato, as retas suportes dos segmentos de reta \overline{AD} e \overline{BC} são ortogonais.

Exemplo 3. Demonstrar o Teorema das três perpendiculares “Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano”.

Figura 37 – Demonstração do Teorema das três perpendiculares



Fonte: O autor, 2025.

Solução. Considerando-se β o plano que contém as retas a e c, tem-se que:

Se M é o ponto médio do segmento de reta \overline{BC} , então as retas suportes dos segmentos de reta \overline{AM} e \overline{DM} são concorrentes, tendo em vista que são distintos os planos formados pelos pontos A, B, C e D, B, C.

Se a reta a é perpendicular ao plano α , que contém a reta b, então as retas a e b são ortogonais ou perpendiculares;

- Se a reta b é ortogonal ou perpendicular à reta a, e a reta b é ortogonal ou perpendicular à reta c; o ponto O é a interseção entre as retas a e c; o plano β contém as retas a e c, então a reta b é perpendicular ao plano β ;
- Se a reta b é perpendicular ao plano β , o ponto R é a interseção entre a reta b e o plano β , e o plano β contém a reta suporte do segmento de reta \overline{SR} , então a reta b é perpendicular à reta suporte do segmento de reta \overline{SR} .
- Caso os pontos S e O sejam coincidentes, então a reta suporte do segmento de reta \overline{SR} e a reta c também são coincidentes, como as retas c e b são perpendiculares, tem-se que a reta suporte do segmento de reta \overline{SR} é perpendicular à reta b.

De fato, se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano, conforme enuncia o teorema das três retas perpendiculares.

Propriedades e Relações de Perpendicularidade e Paralelismo

No presente tópico, apresenta-se uma série de dez teoremas fundamentais que versam sobre as relações geométricas entre retas e planos no espaço tridimensional. Esses teoremas são relevantes para a compreensão das interações espaciais e das propriedades de perpendicularidade e paralelismo. No entanto, com o intuito de conferir maior fluidez e concisão ao desenvolvimento do trabalho, optou-se por não incluir as demonstrações formais de tais enunciados. Essa escolha visa permitir um foco mais abrangente na aplicação e na interpretação dos conceitos, sem que a complexidade das provas matemáticas interfira na compreensão dos tópicos abordados. Abaixo, estão dispostos os teoremas numerados, os quais são apresentados de maneira a propiciar uma análise mais clara e direta de suas implicações geométricas, sem prejuízo da rigorosidade lógica subjacente.

- I.** Tomando-se um ponto P , é possível traçar uma única reta perpendicular a um plano α .
- II.** Tomando-se um ponto P , é possível traçar um único plano que seja perpendicular a uma reta a .
- III.** Se uma reta a e um plano α são perpendiculares a uma reta b em pontos distintos, a e α são paralelos.
- IV.** Se duas retas a e b não são paralelas entre si, são paralelas a um plano α . Qualquer reta que forme um ângulo reto com ambas será perpendicular a esse plano.
- V.** Se duas retas a e b são paralelas, então qualquer plano perpendicular a uma delas será perpendicular à outra.
- VI.** Se duas retas a e b são perpendiculares a um mesmo plano, a e b são paralelas.
- VII.** Se duas retas a e b são perpendiculares, respectivamente, a dois planos paralelos, a e b são paralelas entre si.
- VIII.** Se dois planos α e β são perpendiculares a duas retas paralelas, α e β são paralelos.
- IX.** Se dois planos α e β são perpendiculares a uma mesma reta a , α e β são paralelos.
- X.** Se dois planos α e β são paralelos, qualquer reta perpendicular a um deles será também perpendicular ao outro.

Evidencia-se a importância dos teoremas apresentados na estruturação do pensamento geométrico no espaço tridimensional, com destaque para as relações de perpendicularidade e paralelismo entre retas e planos. Embora as demonstrações formais não tenham sido aqui exploradas, a exposição desses resultados estabelece uma base sólida para a compreensão das

propriedades fundamentais que regem tais interações. Essa abordagem busca reforçar a aplicabilidade prática dos conceitos tratados, mantendo a coerência e o rigor inerentes ao tema. Assim, os teoremas destacados constituem importantes ferramentas para a análise geométrica, ampliando as possibilidades de estudos e aplicações futuras.

3.5.3 Perpendicularidade entre planos

Definição. Um plano α será considerado perpendicular a um plano β se, e somente se, o plano α contiver uma reta que seja perpendicular ao plano β .

A possibilidade de estabelecer a relação de perpendicularidade entre dois planos fundamenta-se na premissa de que deve existir uma reta pertencente a um dos planos que seja perpendicular ao outro plano.

Teorema. Se dois planos forem perpendiculares entre si, e uma reta pertencente a um deles for perpendicular à linha de interseção desses planos, então essa reta será necessariamente perpendicular ao outro plano.

Se o plano α for perpendicular ao plano β , então α contém uma reta a , que é perpendicular ao plano β . Consequentemente, a reta a também será perpendicular à linha de interseção i entre os planos α e β .

No plano α que contém a reta r , dado que a reta i é perpendicular tanto à reta r quanto à reta a , tem-se que as retas r e a são paralelas. Além disso, se o plano α é paralelo à reta r , e considerando-se que os planos α e β são perpendiculares, segue-se que a reta r é perpendicular ao plano β .

Observação 1: De acordo com a definição, se uma reta é perpendicular a um plano, então qualquer outro plano que contenha essa reta será necessariamente perpendicular ao plano inicial.

Observação 2: Para que dois planos secantes sejam considerados perpendiculares, é necessário que toda reta pertencente a um dos planos, que seja perpendicular à linha de interseção entre eles, também seja perpendicular ao outro plano.

Observação 3: São denominados planos oblíquos o par de planos secantes que não formam entre si um ângulo reto.

Exemplo 4. Provar que, caso dois planos sejam perpendiculares entre si e uma reta que seja perpendicular a um deles tenha um ponto comum com o outro, essa reta está contida nesse outro plano.

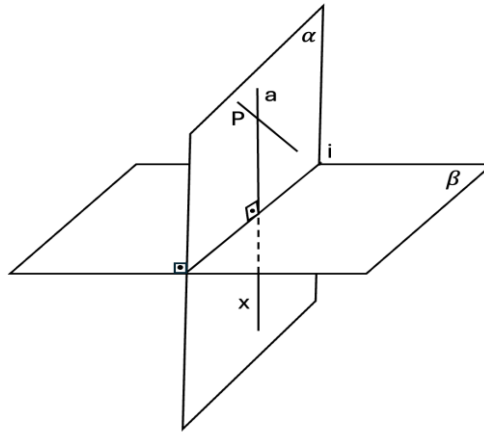
Solução. Tomando-se a reta x , que passa pelo ponto P , reta esta perpendicular à interseção da reta i com os planos α e β , observa-se que a reta x está contida no plano α .

Assim sendo, tem-se que:

- Se os planos α e β são perpendiculares, bem como as retas x e i , a reta i é interseção entre tais planos, a reta x está contida no plano α , então a reta x é perpendicular ao plano β ;
- Se o ponto P pertence às retas a e x , os planos α e β são perpendiculares, bem como a reta x e o plano β , então as retas a e x são coincidentes;
- Se as retas a e x são coincidentes e a reta x está contida no plano α , então a reta a está contida no plano α .

De fato, se dois planos sejam perpendiculares entre si e uma reta que seja perpendicular a um deles tenha um ponto comum com o outro, essa reta está contida nesse outro plano.

Figura 38 – Planos perpendiculares

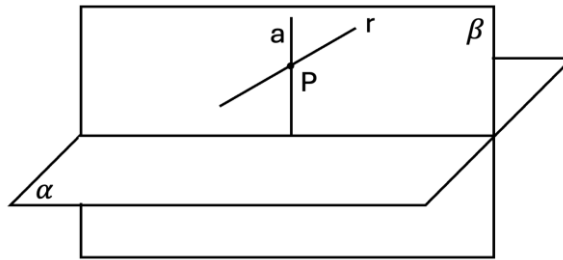


Fonte: O autor, 2025.

Exemplo 5. Provar que, por uma reta r não perpendicular a um plano α , passa um único plano β perpendicular a α .

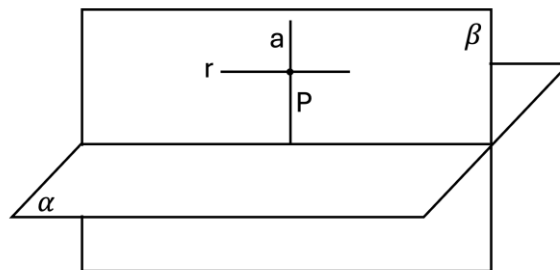
Solução. Em qualquer das três possibilidades de hipóteses a serem verificadas a seguir, o plano β contém a reta a e, dado que a reta a é perpendicular ao plano α , conclui-se que o plano β contém as retas a e r), isto é, o plano β é perpendicular ao plano α .

- Reta r oblíqua ao plano α :

Figura 39 – Reta r oblíqua ao plano α 

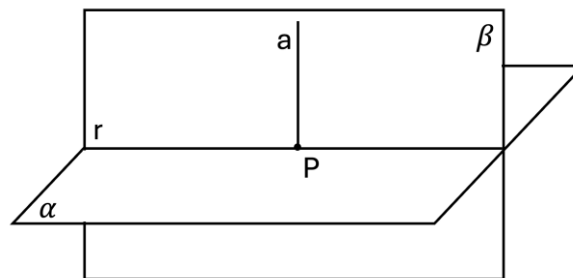
Fonte: O autor, 2025.

- Reta r paralela ao plano α :

Figura 40 – Reta r paralela ao plano α 

Fonte: O autor, 2025.

- Reta r contida no plano α :

Figura 41 – Reta r contida no plano α 

Fonte: O autor, 2025.

De fato, por uma reta r não perpendicular a um plano α , passa um plano β perpendicular a α . Porém, não se pode inferir ainda que este plano é único.

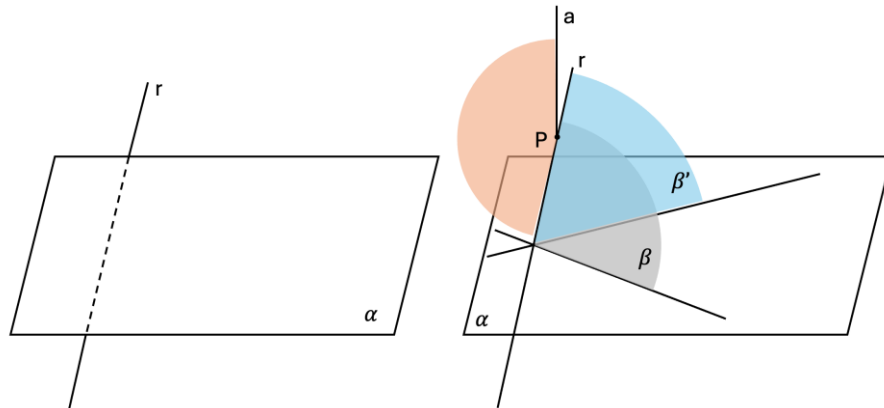
Para comprovar-se que este plano é único, caso houvesse dois planos distintos β e β' , ambos perpendiculares à reta α e passando pela reta r , ocorreria o seguinte raciocínio:

- Uma reta a , perpendicular a α e passando por um ponto P pertencente a r , estaria simultaneamente contida nos planos β e β' ;

- (ii) Sendo a e r duas retas concorrentes no ponto P , elas estariam determinando dois planos distintos β e β' , o que configuraria um absurdo, uma vez que contraria o teorema de determinação de um único plano por duas retas concorrentes.

Agora, de fato, por uma reta r não perpendicular a um plano α , **existe e é único** um plano β perpendicular a α .

Figura 42 – Prova de existência e unicidade do plano β perpendicular a α

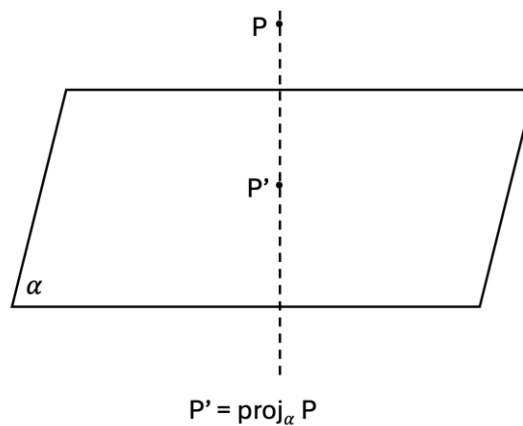


Fonte: O autor, 2025.

3.5.4 Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano

Definição. Denomina-se projeção ortogonal de um ponto sobre um plano o ponto de interseção da perpendicular ao plano, traçada a partir do ponto dado. O plano sobre o qual a projeção ocorre é denominado plano de projeção, enquanto a perpendicular traçada a partir do ponto é denominada reta projetante.

Figura 43 – Projeção de um ponto



Fonte: O autor, 2025.

3.5.5 Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano

Definição. Denomina-se projeção ortogonal de uma figura sobre um plano o conjunto formado pelas projeções ortogonais de todos os pontos que compõem a figura no referido plano. Além da projeção ortogonal, destacam-se algumas outras formas relevantes de *projeções*:

- *Paralelas (com foco no infinito)*: Nessas projeções, os raios projetantes são paralelos entre si, pois o ponto de projeção está no infinito.
- *Ortográficas*: Também chamada de projeção ortogonal, é a projeção perpendicular ao plano, sendo a mais precisa para desenhos técnicos.
- *Ortogonais Múltiplas*: Utiliza diferentes planos de projeção para representar um objeto sob diferentes vistas (como vistas frontal, lateral e superior).
- *Oblíquas*: Os raios projetantes não são perpendiculares ao plano de projeção, resultando em uma distorção da profundidade.

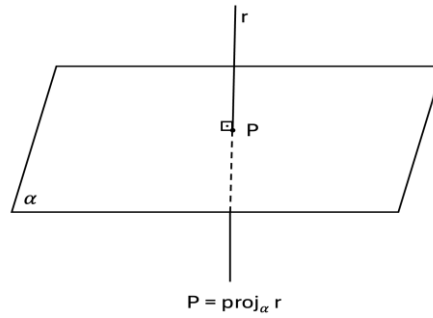
Dentre outras formas de projeções, tem-se também as *projeções em perspectiva* (projeções onde os raios projetantes convergem para um ponto de fuga, simulando a forma como os olhos humanos enxergam):

- *Perspectiva de um ponto*: Todas as linhas de profundidade convergem para um único ponto de fuga.
- *Perspectiva de dois pontos*: Utiliza dois pontos de fuga, geralmente aplicados a objetos tridimensionais com arestas visíveis.
- *Perspectiva de três pontos*: Além dos dois pontos no horizonte, há um terceiro ponto de fuga acima ou abaixo da linha do horizonte, usado para representar vistas de baixo ou de cima.

Com base na definição apresentada, tem-se que:

- (i) Se uma reta é perpendicular a um plano, a projeção ortogonal dessa reta sobre o referido plano corresponde ao traço da reta no plano, isto é, ao ponto de interseção entre a reta e o plano.

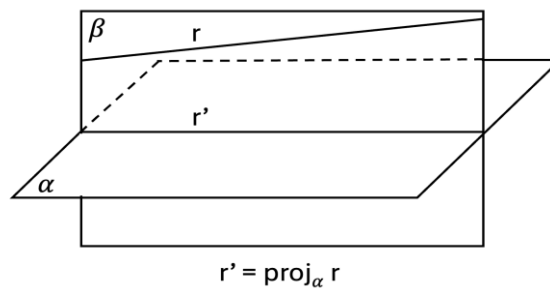
Figura 44 – Ponto de interseção entre a reta e o plano.



Fonte: O autor, 2025.

- (ii) Se uma reta não é perpendicular ao plano, a projeção ortogonal dessa reta sobre o plano é definida como o traço de r no plano α , do plano β , perpendicular a α , traçado pela reta r . Nesse caso, α é o plano de projeção e β é o plano projetante da reta r .

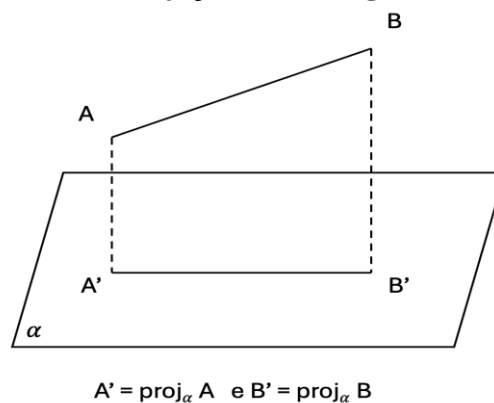
Figura 45 – Plano de projeção e plano projetante



Fonte: O autor, 2025.

Denomina-se projeção ortogonal sobre um plano α de um segmento \underline{AB} , contido em uma reta não perpendicular ao plano α , ao segmento $\underline{A'B'}$, onde A' é a projeção ortogonal de A sobre o plano α e B' é a projeção ortogonal de B sobre o mesmo plano.

Figura 46 – Projeção de um segmento de reta

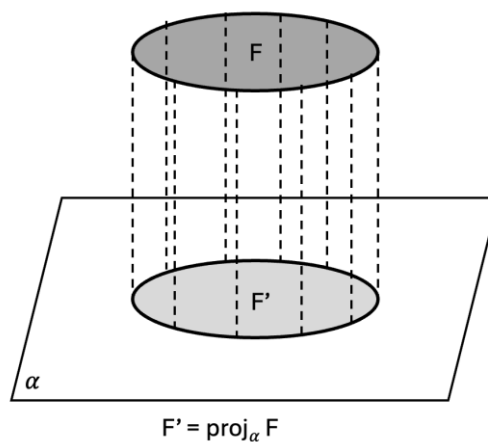


Fonte: O autor, 2025.

3.5.6 Projeção ortogonal de uma figura sobre um plano

Definição. Denomina-se projeção ortogonal de uma figura plana [forma geométrica bidimensional, ou seja, possui apenas duas dimensões (comprimento e largura), sem volume ou profundidade] sobre um plano ao conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos dessa figura sobre o plano em questão. Ou seja, é a transformação da figura original em uma representação no plano, onde cada ponto da figura é projetado ortogonalmente sobre o plano, preservando a disposição relativa dos pontos na projeção.

Figura 47 – Projeção de uma figura



Fonte: O autor, 2025.

Exemplo 6. Provar que a projeção ortogonal de um segmento oblíquo a um plano, sobre esse plano, é menor que o segmento.

Solução. Traçando-se a reta que é paralela à reta $A'B'^{\leftrightarrow}$ e que corta a reta projetante BB'^{\leftrightarrow} em B'' , tem-se que:

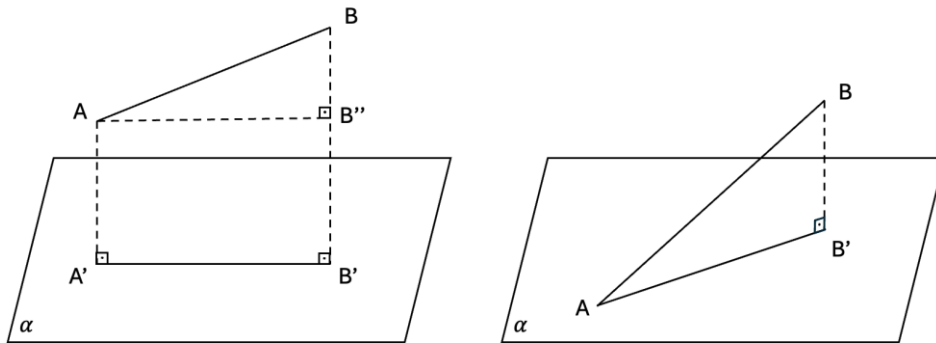
- (i) Se o quadrilátero $AA'B'B''$ é retângulo, então os segmentos de reta $\underline{A'B'}$ e $\underline{AB''}$ são congruentes;
- (ii) Se o triângulo $AB''B$ é retângulo no vértice B'' , então o segmento de reta $\underline{AB''}$ é menor do que o segmento \underline{AB} ;
- (iii) Por transitividade, se $\underline{A'B'}$ e $\underline{AB''}$ são congruentes, e se o segmento de reta $\underline{AB''}$ é menor do que o segmento \underline{AB} , então, $\underline{A'B'}$ é menor do que \underline{AB} .

Se alguma das extremidades, por exemplo, o ponto A, pertencer ao plano projetante, tem-se que:

- (iv) Se o triângulo $AB'B$ é retângulo no vértice B' , então o segmento é menor que o segmento $\underline{AB'}$ é menor que o segmento \underline{AB} , isto é, também por transitividade, o segmento $\underline{A'B'}$ é menor que o segmento \underline{AB} .

De fato, verificou-se que a projeção ortogonal de um segmento oblíquo a um plano, sobre esse plano, é menor que o segmento.

Figura 48 – Projeção ortogonal de um segmento oblíquo a um plano



Fonte: O autor, 2025.

Exemplo 7. Provar que se duas retas formam um ângulo reto, sendo uma delas paralela ou contida no plano de projeção, e a outra não perpendicular a esse plano, então as projeções ortogonais dessas retas sobre o plano serão perpendiculares entre si.

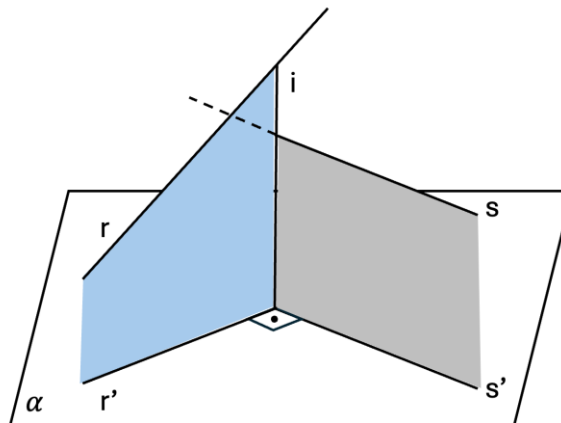
Solução. Para provar a afirmação apresentada, segue-se a sequência lógica de passos, explicando o raciocínio envolvido.

- (i) Se o plano α é paralelo a ou contém a reta s , e a reta s' é a projeção ortogonal de s , então a reta s' será paralela à reta s . Pois, se uma reta s está contida no plano α ou é paralela a ele, a projeção ortogonal de s sobre o plano também será paralela a s , pois a projeção ortogonal preserva a direção da reta (mantendo-se o paralelismo);
- (ii) Se a reta s' é paralela à reta s , e r é uma reta que intercepta s em um ponto, então r intercepta s' no ponto correspondente da projeção de s . Pois, a relação de paralelismo entre s' e s implica que qualquer reta que intercepte s em um ponto também irá interceptar s' no ponto correspondente da projeção. Isso acontece devido à preservação da posição relativa entre as retas na projeção ortogonal;
- (iii) Se i é a interseção dos planos projetantes de r e s , e s' está contido no plano α , então a interseção i estará sobre a reta s' . Pois, a interseção dos planos projetantes é um ponto onde as projeções de r e s se encontram, o que implica que a projeção de s (isto é, s') passará por esse ponto de interseção i ;

- (iv) Se as retas s' , r , e i são concorrentes (ou seja, se se encontram no mesmo ponto), então a reta s' se comporta como a reta que passa pelos pontos de interseção r e i . Pois, quando s' , r , e i são concorrentes, a projeção de s sobre o plano será uma reta que passa exatamente pelos pontos de interseção de r e i , isto é, a reta s' é a união dos pontos de interseção de r e i ;
- (v) Se s' é a reta que passa pelos pontos de interseção de r e i , então a reta r' é uma reta contida no plano gerado por r e i , e ela será concorrente com s' . Pois, se a reta s' passa pelos pontos de interseção r e i , a reta r' , que está contida nesse plano, será concorrente com a reta s' . Além disso, a reta r' estará contida na reta gerada pela interseção de r e i , mantendo-se a relação de concorrência entre s' e r' .

De fato, se duas retas formam um ângulo reto, sendo uma delas paralela ou contida no plano de projeção, e a outra não perpendicular a esse plano, então as projeções ortogonais dessas retas sobre o plano serão perpendiculares entre si, tendo em vista que com base nas propriedades geométricas de projeção ortogonal e da relação entre as retas e planos projetantes, mostrou-se que as retas e suas projeções mantêm uma relação de paralelismo e concorrência conforme descrito.

Figura 49 – Projeções ortogonais de retas sobre o plano

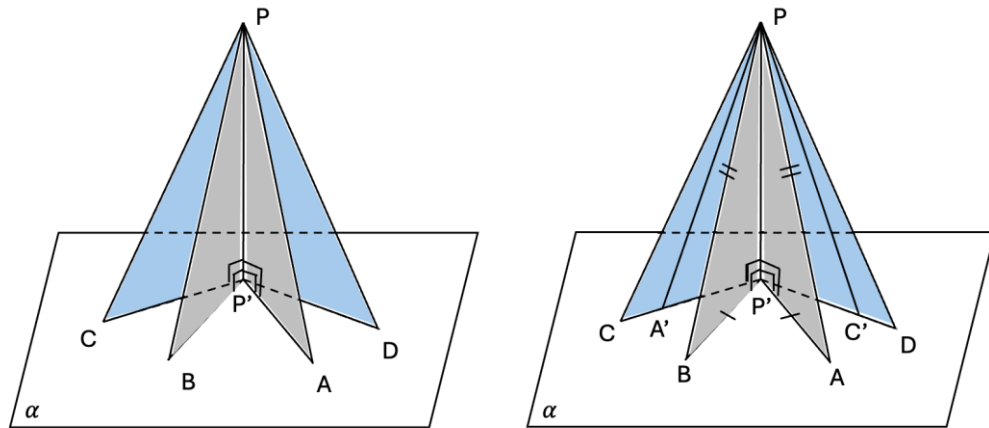


Fonte: O autor, 2025.

3.5.7 Segmento perpendicular e segmentos oblíquos a um plano por um ponto

Tomando-se um ponto P fora de um plano α , ao traçar-se os segmentos $\underline{PP'}$, \underline{PA} , \underline{PB} , \underline{PC} , \underline{PD} , ..., sendo o primeiro perpendicular e os demais oblíquos ao plano α , com as extremidades P' , A , B , C , D , ... no plano α , tem-se que:

Figura 50 – Segmento perpendicular e segmentos oblíquos a um plano por um ponto



Fonte: O autor, 2025.

- I) O segmento que é perpendicular ao plano é sempre menor do que qualquer um dos segmentos oblíquos traçados.

De fato, o segmento $\underline{PP'}$ corresponde ao cateto de triângulos retângulos, nos quais os segmentos \underline{PA} , \underline{PB} , \underline{PC} , \underline{PD} , ... atuam como hipotenusas. Assim sendo, conclui-se que $\underline{PP'} < \underline{PA}$, $\underline{PP'} < \underline{PB}$, $\underline{PP'} < \underline{PC}$, $\underline{PP'} < \underline{PD}$, ...

- II) Segmentos oblíquos que possuem projeções de mesmo comprimento também são congruentes.

Como o segmento $\underline{PP'}$ é comum aos triângulos $\Delta PP'A$ e $\Delta PP'B$, e os segmentos $\underline{P'A}$ e $\underline{P'B}$ são congruentes, segue-se que os triângulos $\Delta PP'A$ e $\Delta PP'B$ são congruentes. Assim sendo, conclui-se que os segmentos \underline{PA} e \underline{PB} são congruentes.

- III) Segmentos oblíquos que são congruentes possuem projeções também congruentes.

Tem-se uma aplicação direta da propriedade anterior. Como o segmento $\underline{PP'}$ é comum aos triângulos $\Delta PP'A$ e $\Delta PP'B$, e os segmentos \underline{PA} e \underline{PB} são congruentes, segue-se que os triângulos $\Delta PP'A$ e $\Delta PP'B$ são congruentes. Assim sendo, conclui-se que os segmentos $\underline{P'A}$ e $\underline{P'B}$ são congruentes.

- IV) Dentre dois segmentos oblíquos de projeções não congruentes, o maior deles é o de maior projeção.

Considerando-se o ponto A' pertencente ao segmento $\underline{P'C}$, tal que os segmentos $\underline{P'A'}$ e $\underline{P'A}$ são congruentes, segue que se o segmento $\underline{P'A'}$ e o segmento $\underline{P'A}$ são congruentes, então os segmentos $\underline{PA'}$ e \underline{PA} são congruentes. O ângulo $\angle PA'C$ é obtuso, pois é um ângulo externo ao triângulo $\Delta PP'A'$, no qual o ângulo $\angle PP'A'$ é reto. Portanto, no triângulo $\Delta PA'C$, tem-se que o ângulo $\angle PA'C$ é maior que o

ângulo $\angle PCA'$. De acordo com a propriedade que relaciona ângulos e lados em triângulos, o maior ângulo se opõe ao maior lado. Assim sendo, conclui-se que $\underline{PC} > \underline{PA'}$, isto é, $\underline{PC} > \underline{PA}$.

- V) Dentre dois segmentos oblíquos que não são congruentes, aquele que o maior deles possui maior projeção.

Se o segmento $\underline{P'C}$ fosse menor que $\underline{P'A}$, pelas propriedades anteriores, o segmento \underline{PC} seria menor que o segmento \underline{PA} , isto é, uma contradição em relação à hipótese inicial. Diante disto, tem-se que o segmento $\underline{P'C}$ é maior que o segmento $\underline{P'A}$.

- VI) Dentre dois segmentos oblíquos não congruentes, o maior deles forma um ângulo menor com sua projeção.

Se o segmento \underline{PD} é maior que o segmento \underline{PC} , então o segmento $\underline{P'D}$ é maior que o segmento $\underline{P'C}$. Tomando-se um ponto C' pertencente ao segmento de reta $\underline{P'D}$, sendo os segmentos $\underline{P'C'}$ e $\underline{P'C}$ congruentes entre si, tem-se que os triângulos $\triangle PP'C$ e $\triangle PP'C'$ são congruentes, isto é, ângulos $\angle PCP'$ e $\angle PC'P'$ também são congruentes. Já no triângulo $\triangle PC'D$, tem-se que o ângulo $\angle PDC'$ é menor que o ângulo $\angle PC'P'$, pois, em qualquer triângulo, um ângulo externo é maior do que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele. Assim sendo, conclui-se que se o ângulo $\angle PDC'$ é menor que o ângulo $\angle PC'P'$, então o ângulo $\angle PDP'$ é menor que o ângulo $\angle PC'P'$, isto é, o ângulo $\angle PDP'$ é menor que o ângulo $\angle PCP'$.

- VII) Dentre dois segmentos oblíquos não congruentes, o maior deles é aquele que forma um ângulo menor com a sua projeção.

Se o segmento de reta \underline{PD} fosse menor ou igual ao segmento de reta \underline{PC} , como consequência da propriedade anterior, o ângulo $\angle PDP'$ seria menor ou igual ao ângulo $\angle PCP'$, isto é, uma contradição em relação à hipótese inicial. Ou seja, o segmento \underline{PD} é maior que o segmento \underline{PC} .

3.6 Superfícies e Sólidos de Revolução

As superfícies e os sólidos de revolução ocupam um papel de relevante destaque na Geometria Espacial, especialmente devido à sua relevância tanto no campo teórico quanto nas aplicações práticas. Esses conceitos envolvem a geração de superfícies tridimensionais por meio da rotação de figuras planas em torno de um eixo, proporcionando uma compreensão mais

profunda das relações entre as dimensões e a forma de objetos geométricos. A habilidade de compreender superfícies e sólidos de revolução é fundamental tanto para a resolução de problemas matemáticos quanto para áreas que exigem modelagem espacial, como engenharia, arquitetura e design.

Ao tratar desse tema, é relevante observar que, no contexto educacional, a abordagem de superfícies e sólidos de revolução nem sempre recebe a devida atenção. Foi realizada uma análise detalhada em dez livros didáticos de matemática utilizados no ensino médio, abrangendo editoras amplamente reconhecidas, como FTD, Saraiva, Moderna, Ática, SM e Leya. Os livros analisados foram os das seguintes coleções: Prisma – FTD (Bonjorno *et al*, 2020), Ciência e Aplicações – Saraiva (Iezzi *et al*, 2016), Ciência e Aplicações | Conecte – Saraiva (Iezzi *et al*, 2014), Integração e Tecnologia – Leya (Balestri, 2016), Conexões com a Matemática – Moderna (De Leonardo e Silva, 2016), Contexto e Aplicações – Ática (Dante, 2016), Contato – FTD (Souza e Garcia, 2016), Conexões – Moderna (De Leonardo, 2020), Quadrante – SM (Chavante e Prestes, 2016) e Matemática Completa – FTD (Bonjorno *et al*, 2016).

A partir dessa análise, constatou-se que nenhum dos livros examinados apresenta um capítulo específico dedicado ao estudo aprofundado das superfícies e sólidos de revolução. O conteúdo referente a esse tema é limitado à exploração de alguns sólidos mais comuns, como cilindros retos, cones retos e esferas. Esses sólidos são introduzidos de forma isolada, com descrições que geralmente abordam o processo de geração e suas propriedades principais, como volumes e áreas.

Por exemplo, os cilindros retos são descritos como o resultado da rotação de um retângulo de 180° em torno de uma de suas mediatrizes ou de 360° em torno de um de seus lados. Os cones retos são definidos como sólidos gerados pela rotação de um triângulo retângulo 360° em torno de um de seus lados ou de um triângulo isósceles 180° em torno da mediatriz da base. Por fim, as esferas são apresentadas como superfícies de revolução obtidas pela rotação de uma semicircunferência 360° em torno de seu diâmetro ou de uma circunferência 180° em torno de seu diâmetro.

Essa limitação nos materiais didáticos pode ser atribuída a uma abordagem mais pragmática, que privilegia conteúdos frequentemente cobrados em exames como o ENEM e outros vestibulares. No entanto, essa escolha restringe a oportunidade de os alunos explorarem outras superfícies de revolução, como toroides ou paraboloides, que, embora menos comuns, apresentam aplicações relevantes em áreas como física e engenharia.

Portanto, o estudo das superfícies e sólidos de revolução vai além de um conhecimento matemático pontual, constituindo uma oportunidade única de desenvolver o pensamento espacial e a capacidade de abstração. Ao compreender as relações entre a figura plana geradora e o sólido resultante, os alunos são incentivados a refletir sobre como as transformações geométricas podem ser aplicadas a diferentes contextos, contribuindo para uma formação mais abrangente e crítica.

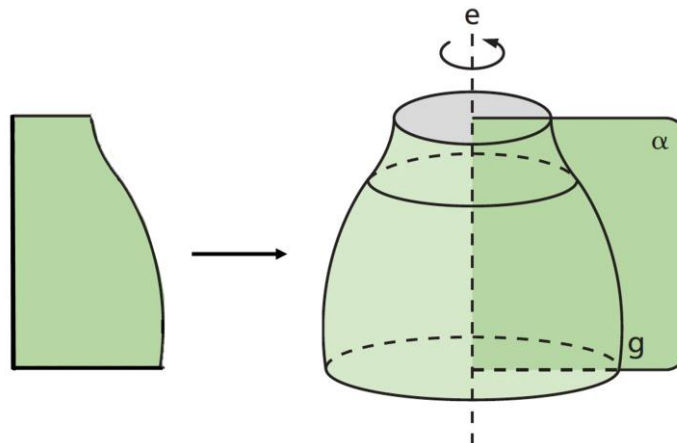
3.6.1 Superfícies de revolução

As superfícies de revolução constituem um objeto de estudo de relevante destaque na geometria espacial estudada no ensino básico, sendo obtidas a partir da rotação de uma curva plana em torno de um eixo fixo. A análise dessas superfícies revela propriedades essenciais relacionadas à simetria, continuidade e curvatura, ampliando a compreensão das interações espaciais entre formas e estruturas. Esse estudo não se limita ao campo teórico, pois encontra aplicações relevantes em disciplinas como a arquitetura e a engenharia, onde a modelagem precisa de superfícies é indispensável para o desenvolvimento de projetos que conciliam funcionalidade e eficiência estrutural.

Essas superfícies são estudadas de maneira mais basal no ensino básico, porém, no ensino superior, conectam conceitos introdutórios de geometria plana a abordagens mais avançadas de cálculo diferencial e integral. No ensino básico, são introduzidas de maneira intuitiva, muitas vezes vinculadas a exemplos concretos do cotidiano, como superfícies cilíndricas e esféricas. Já no ensino superior, essas superfícies tornam-se objeto de estudo rigoroso, sendo parametrizadas e analisadas em profundidade por meio de ferramentas matemáticas, como o cálculo de áreas de superfície e o estudo de curvas geradoras. Essa transição não apenas promove uma compreensão mais formal e técnica das superfícies, mas também serve de alicerce para aplicações práticas em disciplinas como física, engenharia e design computacional

Definição. Considera-se um semiplano que possui a origem e o eixo (denotados por e). Dentro desse semiplano, encontra-se uma curva g , a qual é considerada uma geratriz. Ao realizar-se uma rotação deste semiplano em torno do eixo e , a curva g gera uma superfície, a qual é denominada de superfície de revolução. A menos que explicitamente indicado em contrário, assume-se que essa rotação é completa, ou seja, ocorre ao longo de um ângulo de 360° em torno do eixo.

Figura 51 – Superfície de revolução

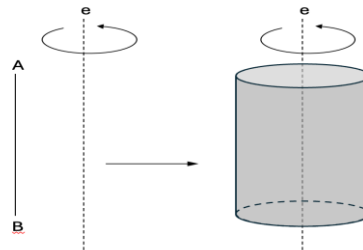


Fonte: Dolce ; Pompeo, 1993.

Exemplos

- I) A superfície lateral de um cilindro gerada pela rotação do segmento AB, conforme mostra a Figura 52.

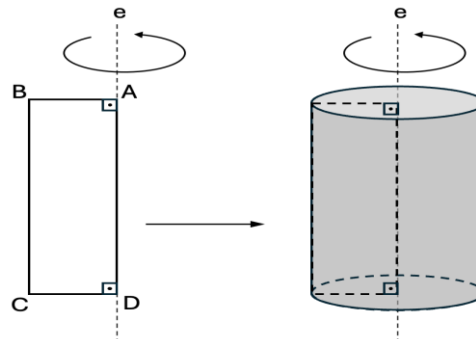
Figura 52 – Superfície lateral de um cilindro



Fonte: O autor, 2025.

- II) A superfície total de um cilindro gerada pela rotação do retângulo ABCD (Fig. 53).

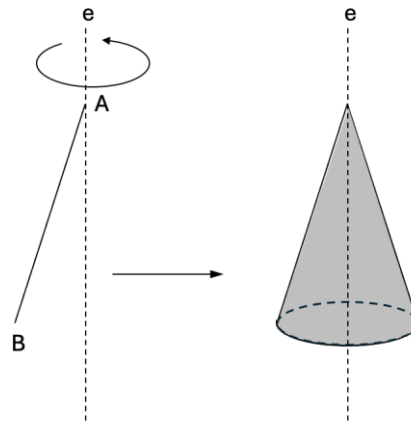
Figura 53 – Superfície total de um cilindro



Fonte: O autor, 2025.

- III) A superfície lateral de um cone gerada pela rotação do segmento AB (Fig. 54).

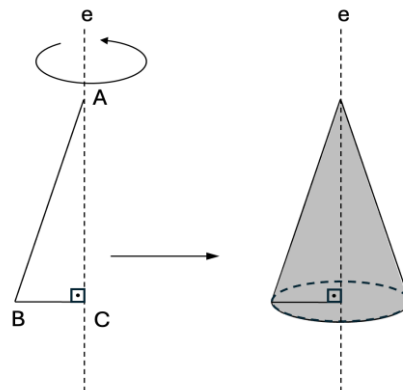
Figura 54 – Superfície lateral de um cone



Fonte: O autor, 2025.

IV) A superfície total de um cone gerada pela rotação do segmento AB (Fig. 55).

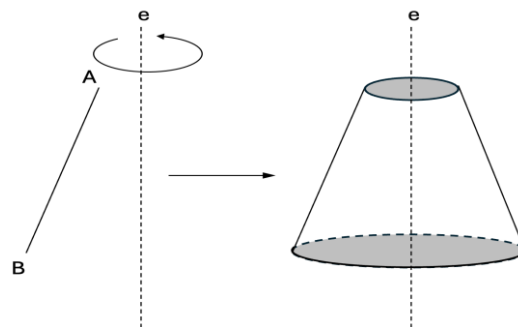
Figura 55 – Superfície total de um cone



Fonte: O autor, 2025.

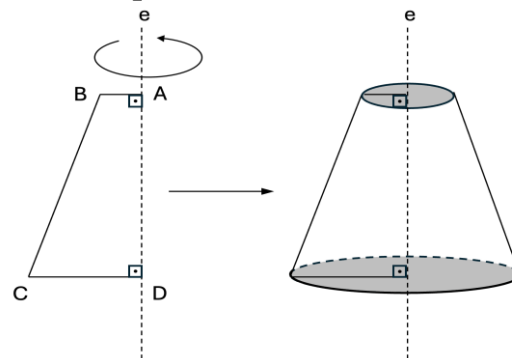
V) A superfície lateral de um tronco de cone gerada pela rotação do segmento AB (Fig. 56).

Figura 56 – Superfície lateral de um tronco de cone



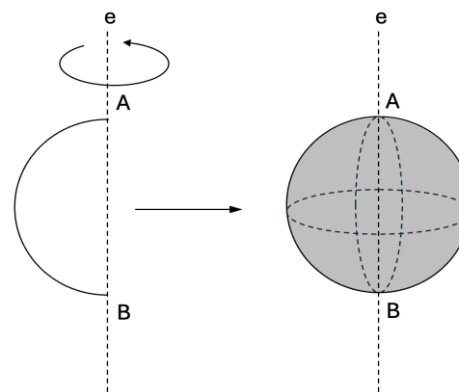
Fonte: O autor, 2025.

VI) A superfície total de um tronco de cone gerada pela rotação do segmento AB (Fig. 57).

Figura 57 – Superfície total de um tronco de cone

Fonte: O autor, 2025.

- VII)** A superfície de uma esfera gerada pela rotação da semicircunferência de extremidades situadas em A e B:

Figura 58 – Superfície de uma esfera

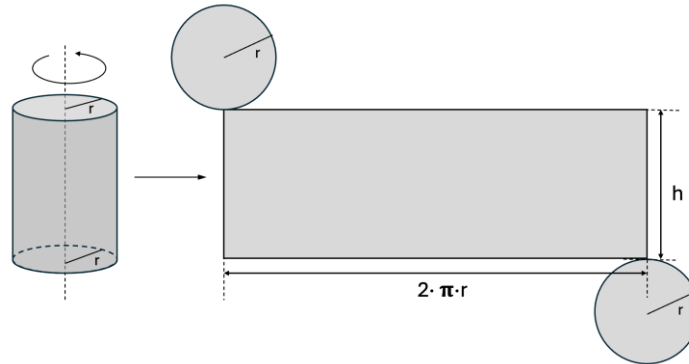
Fonte: O autor, 2025.

Áreas das Superfícies de Revolução

A determinação da área de uma superfície de revolução pode ser realizada utilizando-se as fórmulas de área lateral e área total previamente conhecidas, abordadas em livros didáticos de Ensino Básico (cilindros, cones, troncos de cones e esferas), tendo em vista que o enfoque deste trabalho é a utilização da Visualização Geométrica nos estudos dos assuntos contemplados (Projeção ortogonal, Superfícies e Sólidos de Revolução, e Truncamentos de Sólidos).

- (i) Áreas de um cilindro de revolução:

Figura 59 – Planificação de um cilindro de revolução



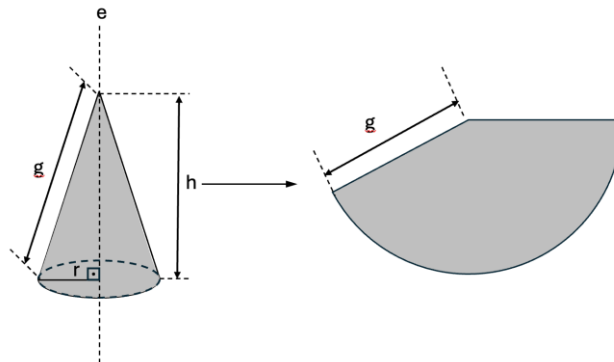
Fonte: O autor, 2025.

- Área(s) da(s) Base(s): $A_{Base} = \pi r^2$
- Área Lateral: $A_{Lateral} = 2\pi r h$
- Área Total: $A_{Total} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r \cdot (r + h)$

Observação: Na ausência de uma das bases do cilindro, a área total será a soma de πr^2 com $2\pi r h$, que resulta em $\pi r \cdot (r + 2h)$. E, na ausência de ambas as bases, o cálculo da área total será dado pela própria área lateral.

(ii) Áreas de um cone de revolução:

Figura 60 – Planificação de um cilindro de revolução



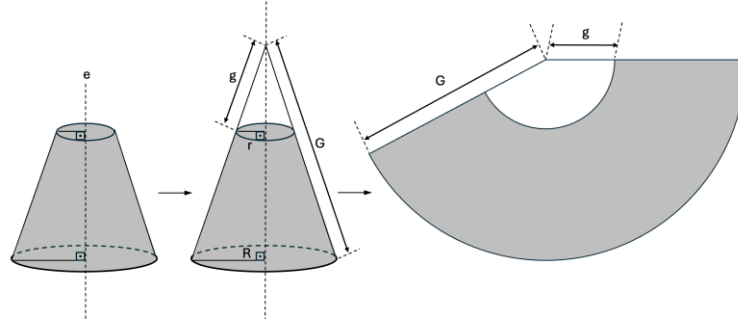
Fonte: O autor, 2025.

- Área da Base: $A_{Base} = \pi r^2$
- Área Lateral: $A_{Lateral} = \pi r g$
- Área Total: $A_{Total} = \pi r^2 + \pi r g = \pi r \cdot (r + g)$

Observação: Na ausência da base do cone, o cálculo da área total será dado pela própria área lateral.

(iii) Áreas de um tronco de cone de revolução:

Figura 61 – Planificação de um tronco de cone de revolução



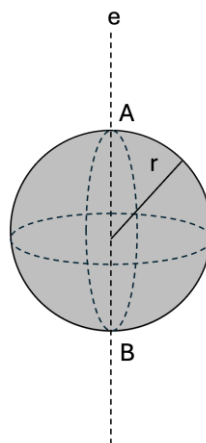
Fonte: O autor, 2025.

- Áreas das Bases: $A_{Base\ Maior} = \pi R^2$ e $A_{Base\ Menor} = \pi r^2$
- Área Lateral: $A_{Lateral} = \pi RG - \pi rg = \pi \cdot (RG - rg)$
- Área Total: $A_{Total} = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi RG - \pi rg = \pi \cdot (R^2 + r^2 + RG - rg) = \pi \cdot [R \cdot (R + G) + r \cdot (r - g)]$

Observação: Considerando-se a complexidade da utilização de uma fórmula para tal cálculo, convém calcular-se a área total do tronco de cone somando-se as áreas das partes envolvidas (área lateral e a área de uma ou duas bases, a depender da quantidade de bases existentes).

(iv) Área de uma superfície esférica:

Figura 62 – Superfície esférica



Fonte: O autor, 2025.

- Área da Esfera: $A_{Esfera} = 4 \cdot \pi \cdot R^2 = 4\pi R^2$

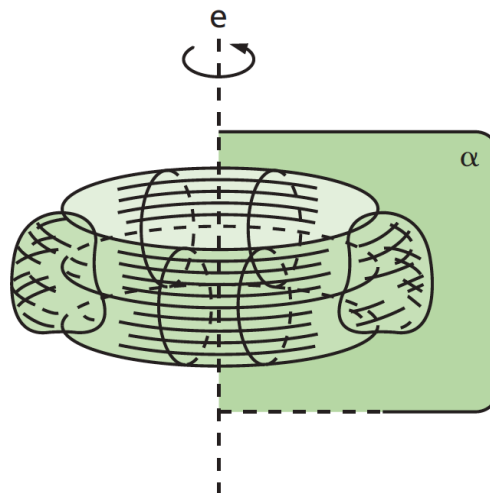
3.6.2 Sólidos de revolução

Os sólidos de revolução constituem, dentre outras características, um elo entre o ensino básico e o superior, possibilitando o aprofundamento gradual de conceitos geométricos e

analíticos. No ensino básico, o foco recai sobre sólidos como cilindros, cones e esferas, explorando suas formas e volumes por meio de fórmulas diretas. No entanto, no ensino superior, esses sólidos são revisitados sob a ótica do cálculo integral, permitindo a dedução de volumes e áreas de superfície a partir da rotação de funções em torno de eixos coordenados. Essa abordagem interdisciplinar consolida a compreensão geométrica adquirida no ensino médio e expande seu alcance, preparando o estudante para aplicações em modelagem tridimensional, otimização e outras áreas que exigem precisão analítica e geométrica.

Definição. Considere-se um semiplano com origem em e (no eixo) e contendo uma superfície S . Quando esse semiplano é girado em torno de e , a superfície S forma um sólido, conhecido como sólido de revolução.

Figura 63 – Sólido de revolução

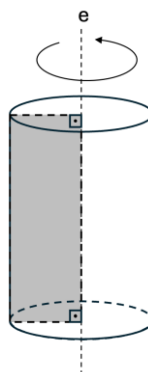


Fonte: Dolce, Pompeo, (1993).

Exemplos

I) Cilindro de revolução gerado pela rotação de um retângulo:

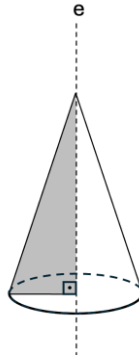
Figura 64 – Cilindro de revolução



Fonte: O autor, 2025.

- II) Cone de revolução gerado pela rotação de um triângulo retângulo:

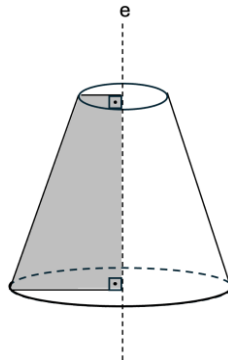
Figura 65 – Cone de revolução



Fonte: O autor, 2025.

- III) Tronco de cone de revolução gerado pela rotação de um triângulo retângulo:

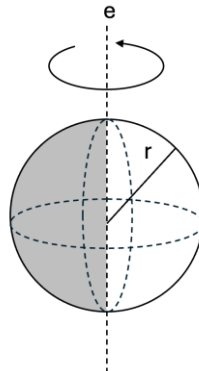
Figura 66 – Tronco de cone de revolução



Fonte: O autor, 2025.

- IV) Esfera gerada pela rotação de um semicírculo:

Figura 67 – Esfera



Fonte: O autor, 2025.

Volume dos Sólidos de Revolução

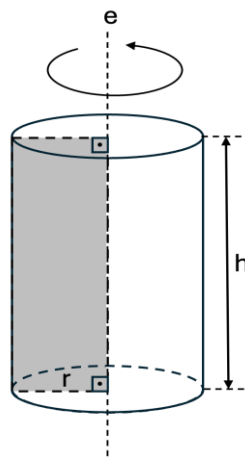
Bem como os cálculos de áreas das superfícies de revolução, a determinação do volume de um sólido de revolução pode ser realizada por meio das fórmulas já estabelecidas para o cálculo de volumes, amplamente apresentadas em materiais didáticos do Ensino Básico. Essas fórmulas abrangem sólidos como cilindros, cones, troncos de cones e esferas. Dado que o foco deste trabalho reside na aplicação da Visualização Geométrica para a compreensão dos temas abordados — Projeção Ortogonal, Superfícies e Sólidos de Revolução, e Truncamentos de Sólidos —, essa abordagem se torna especialmente relevante para a análise e interpretação geométrica desses conceitos.

Exemplos

(i) Volume de um cilindro gerado pela rotação de um retângulo:

$$V_{cilindro} = \pi R^2 h$$

Figura 68 – Cilindro gerado pela rotação de um retângulo

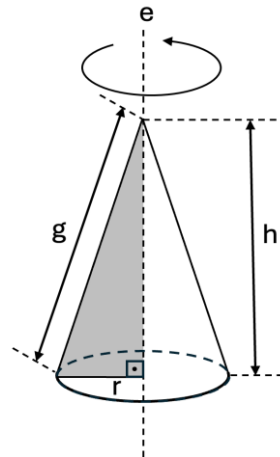


Fonte: O autor, 2025.

(ii) Volume de um cone gerado pela rotação de um triângulo retângulo:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 h$$

Figura 69 – Cone gerado pela rotação de um triângulo retângulo

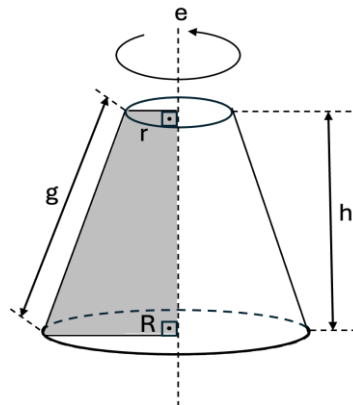


Fonte: O autor, 2025.

(iii) Volume de um tronco de cone gerado pela rotação de um trapézio retângulo:

$$V_{\text{Tronco de Cone}} = \frac{1}{3} \cdot \pi h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{1}{3} \cdot \pi h \cdot (R^2 + Rr + r^2)$$

Figura 70 – Tronco de cone gerado pela rotação de um trapézio retângulo

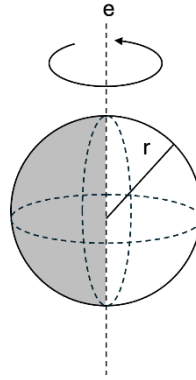


Fonte: O autor, 2025.

(iv) Volume de uma esfera gerada pela rotação de um setor circular:

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3$$

Figura 71 – Esfera gerada pela rotação de um setor circular



Fonte: O autor, 2025.

3.7 Truncamento de Sólidos

Para uma melhor compreensão dos sólidos truncados, em particular, os arquimedianos, é relevante o conhecimento prévio dos sólidos platônicos, visto que os primeiros se originaram de operações ou extensões realizadas sobre os segundos (Almeida, 2010). Nesse contexto, é possível observar que a autora faz referência direta aos sólidos platônicos, uma vez que, ao estudar os sólidos arquimedianos, nota-se que alguns são gerados por truncamentos (operação geométrica em que uma parte de um sólido é "cortada" por um plano, removendo uma seção do sólido original) realizados nos vértices dos sólidos platônicos, enquanto outros resultam de uma operação chamada snubificação (operação geométrica que transforma um sólido poliedro, geralmente um sólido platônico, em um novo poliedro, ao aplicar uma combinação de duas transformações: **rotacionar** e **truncar**), aplicada às suas faces.

3.7.1 Poliedros de Platão

Define-se poliedro como uma região do espaço tridimensional cujas fronteiras são formadas por faces poligonais adjacentes, de modo que cada aresta seja compartilhada por exatamente duas dessas faces. Nos poliedros convexos, é possível verificar-se a Relação de Euler, dada por $V - A + F = 2$, na qual, V , A e F correspondem, respectivamente, ao número de vértices, arestas e faces do poliedro. Um poliedro convexo é classificado como regular quando satisfaz determinadas condições específicas, as quais podem ser explicitadas da seguinte forma:

- Cada uma de suas faces é composta por polígonos regulares, sendo que todos esses polígonos possuem um número idêntico de arestas.

- Em todos os vértices do poliedro, o número de arestas que se encontram incidentes sobre cada um deles é invariavelmente o mesmo.

Esses poliedros que atendem a tais requisitos são comumente denominados poliedros de Platão. Vale ressaltar que, para qualquer poliedro convexo que seja classificado como regular, sua forma será uma das cinco categorias geométricas clássicas, a saber: o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro ou o icosaedro). Além disso, os vértices que compõem essas figuras geométricas definem as distribuições mais simétricas que podem ser concebidas de quatro, seis, oito, doze e vinte pontos situados sobre a superfície esférica (Carmo, 2023).

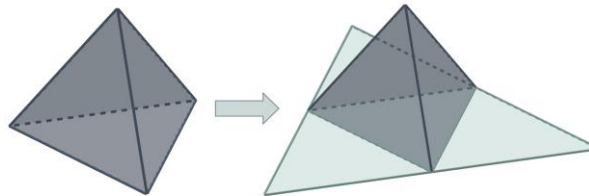
Os poliedros regulares, historicamente, foram associados a algumas características do ser humano devido às suas notáveis propriedades geométricas, que refletem a harmonia e a simetria presentes na natureza e na concepção do universo. O filósofo grego Platão (aproximadamente 428-347 a.C.), em sua obra *Timeu*, estabelece uma conexão entre cinco sólidos regulares – o tetraedro (composto por quatro triângulos equiláteros), o hexaedro (formado por seis quadrados), o octaedro (composto por oito triângulos equiláteros), o icosaedro (constituído por vinte triângulos equiláteros) e o dodecaedro (com doze pentágonos regulares) – e os quatro elementos fundamentais da natureza: fogo, terra, ar e água, associando cada um desses sólidos a um desses elementos e, por extensão, ao próprio universo. Platão propõe que o universo é constituído por um corpo e uma alma, com a matéria sendo segmentada em porções limitadas por triângulos e quadrados regulares, criando elementos que se distinguem pela sua forma periférica. Os poliedros, termo derivado do grego *poli* (muitos) e *edros* (faces), são considerados convexos quando todas as suas faces estão voltadas para o mesmo lado em relação ao plano que contém qualquer uma de suas faces. No campo artístico, os sólidos platônicos, com suas simetrias intrínsecas, foram amplamente valorizados e estudados, especialmente durante o Renascimento, quando, em 1480, o pintor Piero della Francesca (1415-1492) realizou um estudo aprofundado sobre esses sólidos em sua obra *Libellus De Quinque Corporibus Regularibus*. Nessa mesma obra, o autor também descreve outros tipos de poliedros que, embora apresentem faces regulares, não são compostos unicamente pelo mesmo tipo de polígono, sendo conhecidos como sólidos arquimedianos (Melo, 2014).

Os poliedros de Platão são sólidos geométricos regulares, caracterizados por terem faces que são polígonos regulares idênticos e o mesmo número de arestas incidindo sobre cada vértice. Esses poliedros, que possuem simetria e harmonia, foram amplamente estudados e associados aos elementos da natureza por ele, sendo considerados representações perfeitas de

ordem e equilíbrio. Tais sólidos são compostos por cinco figuras: o tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. A seguir, apresentamos as características de cada um desses sólidos.

- **Tetraedro:** O tetraedro possui quatro faces, todas elas triângulos equiláteros, seis arestas e quatro vértices. É o poliedro de Platão com o menor número de faces, sendo também o mais simples em termos de estrutura geométrica. Seus ângulos diedros são relativamente pequenos, o que confere a ele uma forma compacta e equilibrada.

Figura 72 – Tetraedro



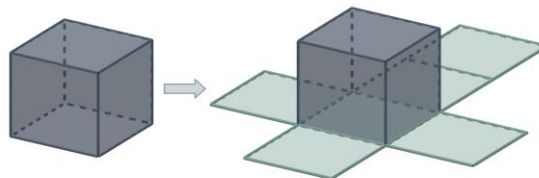
Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em:

https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

- **Hexaedro (Cubo):** O hexaedro, popularmente conhecido como cubo, é formado por seis faces quadradas, doze arestas e oito vértices. É um dos sólidos mais conhecidos devido à sua simetria e à facilidade com que se relaciona com a geometria do espaço tridimensional. Os ângulos entre suas faces são retos (90°), o que resulta em uma estrutura de grande estabilidade e simplicidade.

Figura 73 – Hexaedro



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em:

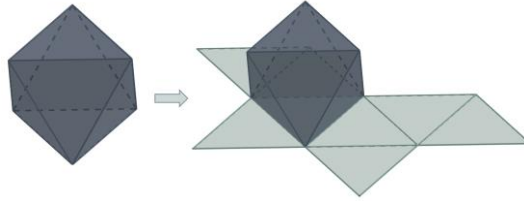
https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

- **Octaedro:** O octaedro é composto por oito faces, todas triângulos equiláteros, doze arestas e seis vértices. Ele pode ser visualizado como dois tetraedros unidos pela

base. Seus ângulos diedros são intermediários entre os do tetraedro e do cubo, conferindo-lhe uma forma bem definida e simétrica.

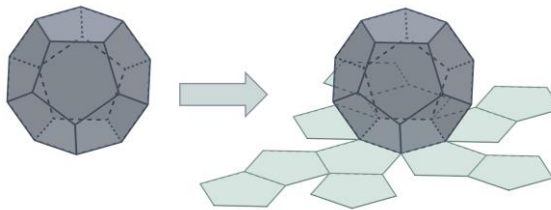
Figura 74 – Octaedro



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em:
https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
 Acesso em: 12 out. 2024.

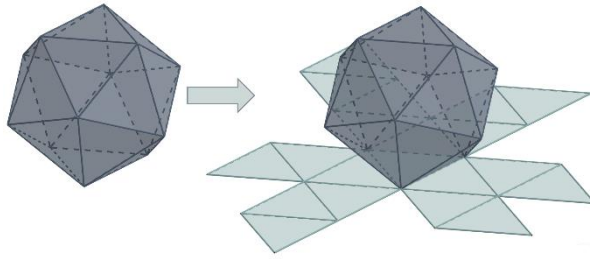
- **Dodecaedro:** O dodecaedro possui doze faces, todas pentágonos regulares, vinte arestas e vinte vértices. É o único poliedro de Platão cujas faces não são triângulos ou quadrados, mas sim pentágonos. Os ângulos entre suas faces são relativamente grandes, resultando em uma estrutura mais complexa e refinada.

Figura 75 – Dodecaedro



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em:
https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
 Acesso em: 12 out. 2024.

- **Icosaedro:** O icosaedro é formado por vinte faces, todas triângulos equiláteros, trinta arestas e doze vértices. É o poliedro com os maiores ângulos diedros entre os sólidos de Platão, o que implica que suas faces se encontram com maior "abertura" nas arestas. Esse sólido é frequentemente associado à perfeição geométrica devido à sua grande quantidade
- de faces e vértices distribuídos de maneira equilibrada.

Figura 76 – Icosaedro

Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em:
https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
 Acesso em: 12 out. 2024.

Cada um desses sólidos de Platão, com sua estrutura geométrica única, é considerado uma representação de perfeição e harmonia, tanto na filosofia quanto na matemática. No quadro a seguir, verifica-se as quantidades de elementos (vértices, faces e arestas), além dos números de vértices por faces e os encontros de faces em cada vértice.

Quadro 5 - Poliedros de Platão

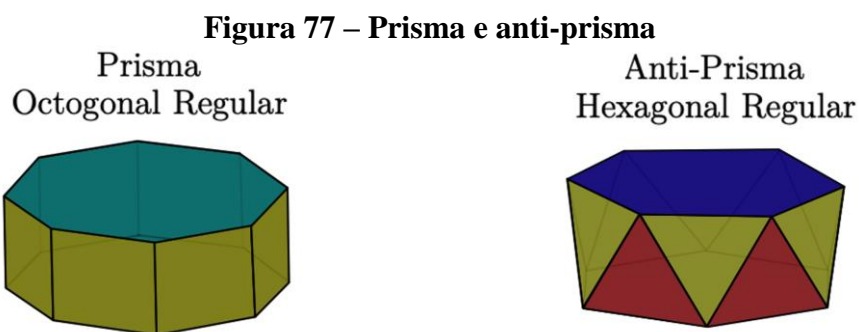
Nome	Imagem	Faces	Arestas	Vértices	Vértices por face	Encontros de faces em cada vértice
tetraedro		4	6	4	3	3
cubo (hexaedro)		6	12	8	4	3
octaedro		8	12	6	3	4
dodecaedro		12	30	20	5	3
icosaedro		20	30	12	3	5

Fonte: Adaptado de Alves, 2019.

3.7.2 Poliedros de Arquimedes

Nesta seção do presente trabalho, serão apresentadas as definições relacionadas aos poliedros arquimedianos, além de abordar a comprovação de que existem exatamente treze desses sólidos geométricos, desconsiderando os prismas e anti-prismas. A nomenclatura "poliedros arquimedianos" foi atribuída pelo renomado astrônomo e matemático alemão Johann Kepler, que também foi responsável por demonstrar a existência e a unicidade dos treze exemplos conhecidos. Esses poliedros possuem a característica de serem convexos, apresentando faces formadas por diferentes tipos de polígonos regulares. Uma peculiaridade relevante é que todos os vértices desses sólidos são congruentes, ou seja, o arranjo de polígonos em torno de cada vértice é idêntico, diferenciando-se apenas por rotações (Neves, 2017).

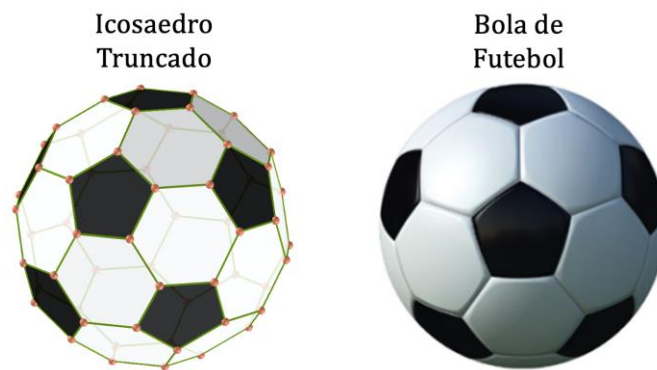
Um prisma é um poliedro que possui duas faces paralelas e congruentes (as bases) e cujas faces laterais são paralelogramos. Um anti-prisma é um poliedro que possui duas faces paralelas e congruentes (as bases) e cujas faces laterais são triângulos. Existem infinitos prismas e anti-prismas. Os prismas regulares cujas faces laterais são quadrados, de acordo com a definição, são poliedros arquimedianos. Do mesmo modo, os anti-prismas regulares cujas faces laterais são triângulos equiláteros também são arquimedianos. No entanto, neste trabalho estamos interessados apenas em descrever os poliedros arquimedianos que não são prismas e nem anti-prismas regulares. Na figura 77, a seguir, encontram-se representados exemplos que ilustram, respectivamente, um prisma arquimediano e um anti-prisma arquimediano. Essas figuras destacam as características peculiares de cada uma dessas categorias de poliedros, evidenciando suas bases paralelas e congruentes, bem como as diferenças entre as faces laterais, que são compostas por quadrados no caso dos prismas e por triângulos equiláteros no caso dos anti-prismas.



Fonte: Neves, 2017.

Na figura 78, ilustra-se um exemplo representativo de poliedro arquimediano: o Icosaedro Truncado. Este sólido geométrico possui 32 faces, distribuídas entre 12 pentágonos e 20 hexágonos. Ademais, na figura, observa-se uma bola de futebol cujo formato se baseia na estrutura geométrica do Icosaedro Truncado. Esse design específico foi introduzido, pela primeira vez, na Copa do Mundo de 1970, e sua construção reflete as características mencionadas, com 32 gomos, igualmente divididos entre 12 pentágonos e 20 hexágonos, tal como ocorre no poliedro geométrico que a inspira. Tal estrutura poliédrica foi utilizada nas bolas das 8 copas do mundo subsequentes, tendo sido utilizada até 2002, (Freire, 2022).

Figura 78 – Icosaedro truncado e bola de futebol



Fonte: Siqueira, adaptado, 2019.

3.7.3 Construindo Poliedros de Arquimedes

De acordo com o dicionário Priberam (2025), o termo "truncar" provém do latim *truncare* e é definido como: 1. Cortar ou separar do tronco. 2. Cortar uma parte qualquer de. 3. No campo da geometria, refere-se à ação de interceptar um sólido geométrico por um plano secante. No que tange às diferentes técnicas de truncamento de poliedros, optou-se por duas abordagens distintas, que serão denominadas truncamento tipo 1 e tipo 2. No truncamento tipo 1, o corte é realizado através dos pontos médios das arestas que se encontram em um mesmo vértice. Já no truncamento tipo 2, a técnica empregada é tal que a face resultante do novo poliedro seja um polígono regular, cuja quantidade de lados seja o dobro da quantidade de lados da face do poliedro original, antes de sofrer o corte (Neves, 2017).

Independentemente do tipo de truncamento adotado, o processo resulta na transformação de cada vértice em uma nova face. Adicionalmente, as porções removidas no processo de truncamento correspondem, invariavelmente, a pirâmides regulares, nas quais o número de lados do polígono da base equivale ao número de arestas que se encontram em um mesmo vértice. O corte é sempre perpendicular ao eixo da pirâmide.

A operação de **snubificação** de um poliedro regular é caracterizada pelo afastamento de todas as suas faces, podendo ser acompanhada ou não de rotação, e o preenchimento dos espaços resultantes com polígonos regulares. Quando ocorre a rotação, normalmente de 45 graus, a operação é denominada snubificação. Caso não haja rotação, a operação é conhecida como expansão. Os poliedros formados por expansão recebem a designação de "**rombos**", enquanto os poliedros oriundos da snubificação são denominados "**snub**".

Na **expansão**, o preenchimento entre as arestas afastadas é feito por um único quadrado, e entre os vértices, o preenchimento é feito por um polígono regular com um número de lados igual é igual a m (número de arestas que concorrem no mesmo vértice). Na snubificação, entre as arestas afastadas, o preenchimento é realizado por dois triângulos equiláteros, e entre os vértices, o preenchimento é feito por polígonos regulares — triângulos, quadrados ou pentágonos (Freitas, 2020).

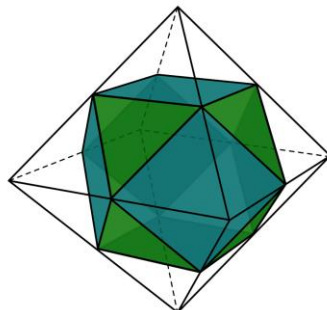
A seguir, serão apresentadas as características dos poliedros arquimedianos obtidos por operações sobre os poliedros de Platão.

Cuboctaedro

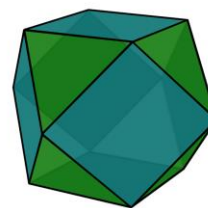
Ao realizar-se o truncamento tipo 1 no cubo ou no octaedro regular, obtém-se o cuboctaedro (Figura 79). O octaedro, composto por 8 faces triangulares equiláteras, 12 arestas e 6 vértices, possui o valor $m = 4$. Após a realização do truncamento, obtêm-se 8 faces triangulares equiláteras (mantendo-se a quantidade de faces do octaedro original) e 6 faces quadradas, formadas pelos 6 vértices do octaedro. Assim, o poliedro resultante, o cuboctaedro, apresenta-se com 14 faces.

Figura 79 – Octaedro (truncando) e cuboctaedro

Truncando o octaedro



Cuboctaedro



Fonte: Neves, 2017.

Considerando-se as fórmulas de Euler para poliedros, tem-se: $2A = 3F_3 + 4F_4 = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 48$, onde A representa a quantidade de arestas, F_3 o número de faces triangulares e F_4 o número de faces quadradas. Assim, $A = 24$ e, aplicando-se a fórmula de Euler para poliedros,

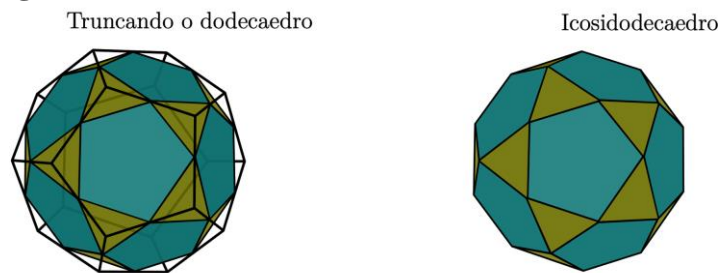
calcula-se o número de vértices V da seguinte maneira: $V = A - F + 2 = 24 - 14 + 2 = 12$, $V = 12$.

Portanto, o cuboctaedro obtido possui 12 vértices, 14 faces e 24 arestas.

Icosidodecaedro

Ao realizar-se o truncamento tipo 1 no dodecaedro regular ou no icosaedro regular, obtêm-se o icosidodecaedro (conforme Figura 80). O dodecaedro regular, composto por 12 faces pentagonais regulares, 30 arestas e 20 vértices, apresenta o valor $m = 3$. Após a aplicação do truncamento, obtêm-se 12 faces pentagonais regulares (mantendo-se a quantidade de faces do dodecaedro original) e 20 faces triangulares equiláteras, formadas pelos 20 vértices do dodecaedro. Dessa forma, o poliedro resultante, o icosidodecaedro, apresenta-se com 32 faces.

Figura 80 – Dodecaedro (truncando) e Icosidodecaedro



Fonte: Neves, 2017.

Considerando-se as fórmulas de Euler para poliedros, tem-se: $2A = 3F_3 + 5F_5 = 3 \cdot 20 + 5 \cdot 12 = 120$, $A = 60$, onde A representa a quantidade de arestas, F_3 o número de faces triangulares e F_5 o número de faces pentagonais. Assim, $A = 60$ e, aplicando-se a fórmula de Euler para poliedros, calcula-se o número de vértices V da seguinte maneira: $V = A - F + 2 = 60 - 32 + 2 = 30$. $V = 30$.

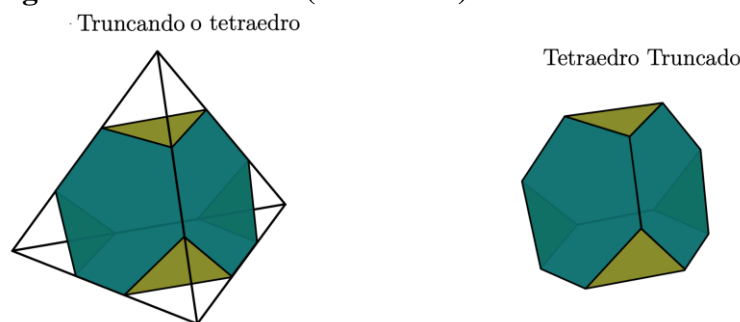
Portanto, o icosidodecaedro obtido possui 30 vértices, 32 faces e 60 arestas.

Agora, proceder-se-á com o truncamento tipo 2 nos 5 poliedros regulares, bem como no cuboctaedro e no icosidodecaedro. No truncamento tipo 2, o corte é realizado de modo que a face do novo poliedro seja um polígono regular cujo número de lados seja o dobro do número de lados da face do poliedro original (antes do corte). Uma observação importante é que, sempre que a palavra "truncado" aparecer no nome de um poliedro, se referirá ao truncamento tipo 2.

Tetraedro Truncado

O Tetraedro Truncado é obtido realizando-se o truncamento tipo 2 no tetraedro regular (conforme ilustrado na Figura 81). O tetraedro regular é composto por 4 faces triangulares, 6 arestas e 4 vértices, apresentando o valor $m = 3$. Ao aplicar-se o truncamento tipo 2 neste poliedro, obtêm-se 4 faces hexagonais (mantendo-se a quantidade de faces do tetraedro) e 4 faces triangulares, formadas pelos 4 vértices do tetraedro. Dessa forma, o poliedro resultante, o tetraedro truncado, possui um total de 8 faces.

Figura 81 – Tetraedro (truncando) e tetraedro truncado



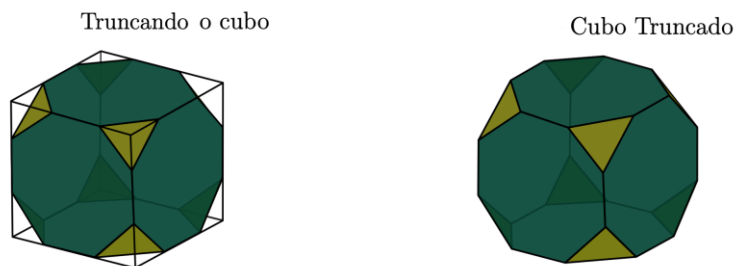
Fonte: Neves, 2017.

Considerando-se as fórmulas de Euler para poliedros, tem-se: $2A = 3F_3 + 6F_6 = 6 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 36$, $A = 36$, onde A representa a área total, F_3 o número de faces triangulares e F_6 o número de faces hexagonais. Assim, $A = 18$, e, aplicando-se a fórmula de Euler para poliedros, calcula-se o número de vértices V da seguinte maneira: $V = A - F + 2 = 18$. $V = 12$.

Portanto, o tetraedro truncado obtido apresenta 12 vértices, 8 faces e 18 arestas.

Cubo Truncado

O Cubo Truncado (Figura 82) é obtido realizando-se o truncamento tipo 2 no cubo. O cubo original, composto por 6 faces quadradas, 12 arestas e 8 vértices, apresenta o valor $m = 3$. Ao aplicar-se o truncamento tipo 2 neste poliedro, obtêm-se 6 faces octogonais (mantendo-se a quantidade de faces do cubo) e 8 faces triangulares, formadas pelos 8 vértices do cubo. Dessa maneira, o poliedro resultante, o cubo truncado, apresenta-se com um total de 14 faces.

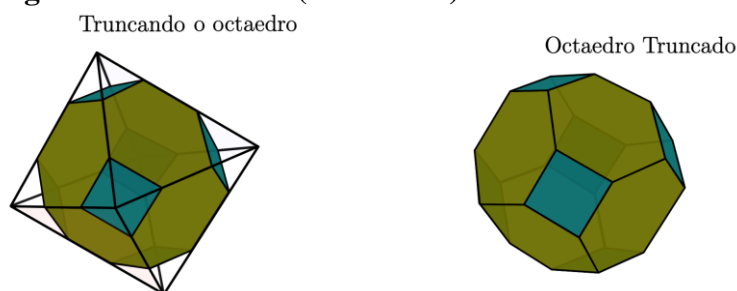
Figura 82 – Cubo (truncando) e cubo truncado

Fonte: Neves, 2017.

Considerando-se as fórmulas de Euler para poliedros, tem-se: $2A = 3F_3 + 8F_8 = 3 \cdot 8 + 8 \cdot 6 = 72$, $A = 72$, onde A representa a quantidade de arestas, F_3 o número de faces triangulares e F_8 o número de faces octogonais. Assim, $A = 36$, e, aplicando-se a fórmula de Euler para poliedros, calcula-se o número de vértices V da seguinte maneira: $V = A - F + 2 = 36 - 14 + 2 = 24$. $V = 24$. Portanto, o cubo truncado obtido possui 24 vértices, 14 faces e 36 arestas.

Octaedro Truncado

O Octaedro Truncado (Figura 83) é obtido realizando-se o truncamento do tipo 2 no octaedro regular. O octaedro regular é composto por 8 faces triangulares, 12 arestas e 6 vértices, apresentando o valor $m = 4$. Ao aplicar-se o truncamento tipo-2 neste poliedro, obtêm-se 8 faces hexagonais (mantendo-se a quantidade de faces do octaedro) e 6 faces quadradas, formadas pelos 6 vértices do octaedro. Dessa maneira, o poliedro resultante, o octaedro truncado, possui um total de 14 faces.

Figura 83 – Octaedro (truncando) e octaedro truncado

Fonte: Neves, 2017.

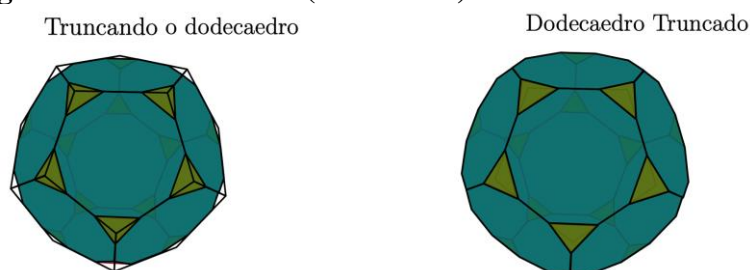
Considerando-se as fórmulas de Euler para poliedros, tem-se: $2A = 4F_4 + 6F_6 = 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 = 72$, $A = 72$, onde A representa o total de arestas, F_4 o número de faces quadradas e F_6 o número de faces hexagonais. Assim, $A = 36$, e, aplicando-se a fórmula de Euler para poliedros, calcula-se o número de vértices V da seguinte maneira: $V = A - F + 2 = 36 - 14 + 2 = 24$. $V = 24$.

Portanto, o octaedro truncado resultante possui 24 vértices, 14 faces e 36 arestas.

Dodecaedro Truncado

O Dodecaedro Truncado (Figura 84) é obtido realizando-se o truncamento tipo 2 no dodecaedro regular. O dodecaedro regular possui 12 faces pentagonais, 30 arestas, 20 vértices e $m = 3$. Após o truncamento tipo 2, obtém-se 12 faces decagonais regulares (mantendo o número de faces do dodecaedro) e 20 faces triangulares equiláteras, formadas pelos 20 vértices do dodecaedro. Isso resulta em um total de 32 faces.

Figura 84 – Dodecaedro (truncando) e dodecaedro truncado



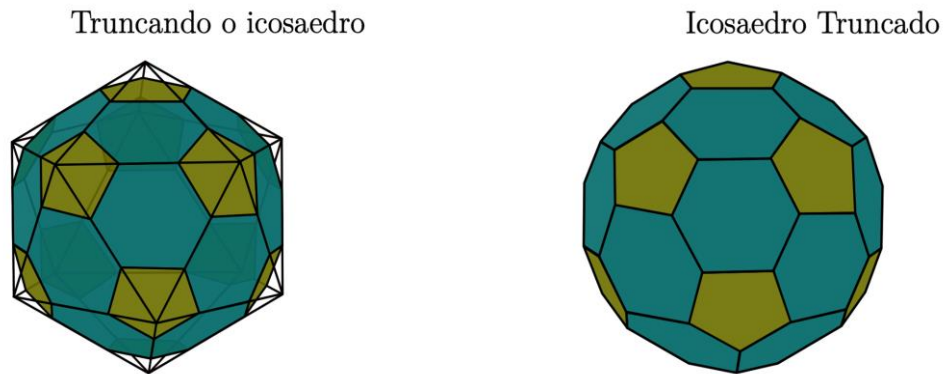
Fonte: Neves, 2017.

A partir dessa configuração, pode-se calcular as arestas e vértices considerando-se as fórmulas de Euler e a relação entre as faces: $2A = 3F_3 + 10F_{10} = 3 \cdot 20 + 10 \cdot 12 = 180$, $A = 90$. Logo, $A = 90$ (total de arestas). Utilizando-se novamente a fórmula de Euler, o número de vértices V é dado por: $V = A - F + 2 = 90 - 32 + 2 = 60$. $V = 60$.

Portanto, o Dodecaedro Truncado tem 60 vértices, 32 faces e 90 arestas.

Icosaedro Truncado

O Icosaedro Truncado (Figura 85) é obtido realizando-se o truncamento do tipo 2 no icosaedro regular. O icosaedro regular possui 20 faces triangulares, 30 arestas, 12 vértices e $m = 5$. Após o truncamento tipo 2, obtém-se 20 faces hexagonais regulares (com a mesma quantidade de faces do icosaedro), além de 12 faces pentagonais regulares, formadas a partir dos 12 vértices do icosaedro, totalizando 32 faces.

Figura 85 – Icosaedro (truncando) e icosaedro truncado

Fonte: Neves, 2017.

A partir dessa configuração, as arestas e os vértices são calculados utilizando as fórmulas de Euler e a relação entre as faces: $2A = 5F_5 + 6F_6 = 5 \cdot 12 + 6 \cdot 20 = 180$, $A = 180$.

Logo, o número de arestas $A = 90$. Utilizando-se a fórmula de Euler, o número de vértices V é dado por: $V = A - F + 2 = 90 - 32 + 2 = 60$. $V = 60$.

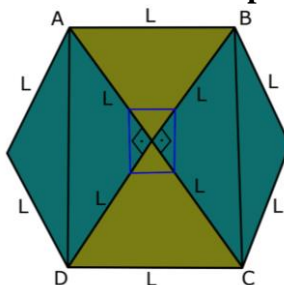
Portanto, o Icosaedro Truncado possui 60 vértices, 32 faces e 90 arestas.

Cuboctaedro truncado

O Cuboctaedro Truncado, ou *grande rombicuboctaedro*, (Figura 87) obtém-se ao realizar-se um truncamento no cuboctaedro original. Esse poliedro possui 6 faces quadradas, 8 faces triangulares equiláteras, 24 arestas, 12 vértices e $m = 3$. Quando se aplica o truncamento tipo 2 nesse poliedro, geram-se 6 faces octogonais, 8 faces hexagonais e 12 faces retangulares, estas últimas provenientes dos 12 vértices originais, totalizando 26 faces no novo poliedro.

Ao trincar-se o cuboctaedro, o poliedro resultante não é considerado arquimediano, pois algumas das faces obtidas não são polígonos regulares, como é o caso dos retângulos. Observa-se que qualquer corte realizado em torno de um vértice, de forma perpendicular ao eixo da pirâmide associada, forma um retângulo. O maior corte possível, representado pelo quadrilátero ABCD (Figura 86), resulta em um retângulo com lados medindo L e $L\sqrt{2}$. Adicionalmente, qualquer outro corte similar produz retângulos com lados proporcionais a L e $L\sqrt{2}$.

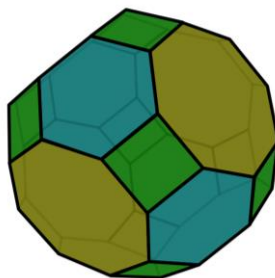
Figura 86 – Vista de um cuboctaedro a partir de um dos vértices



Fonte: Neves, 2017.

Para que o poliedro resultante se torne arquimediano, é necessário realizar um ajuste que transforme as faces retangulares em quadrados. Após essa modificação, o cálculo do número total de arestas e vértices pode ser feito como segue: $2A = 4F_4 + 6F_6 + 8F_8 = 4 \cdot 12 + 6 \cdot 8 + 8 \cdot 6 = 144$, o que implica $A = 72$. A partir disso, o número de vértices é dado por $V = A - F + 2 = 72 - 26 + 2 = 48$.

Figura 87 – Cuboctaedro truncado ou grande rombicuboctaedro



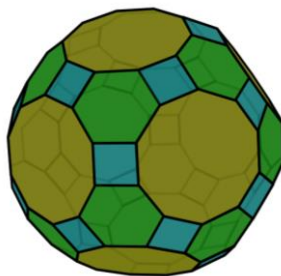
Fonte: Neves, 2017.

Assim, o poliedro ajustado atende às propriedades dos sólidos arquimedianos.

Icosidodecaedro Truncado

O icosidodecaedro apresenta 20 faces triangulares equiláteras, 12 faces pentagonais regulares, 60 arestas, 30 vértices e $m = 4$. Realizando-se o truncamento do tipo 2 neste poliedro, obtém-se o icosidodecaedro truncado, também conhecido como grande rombicoidodecaedro (Figura 88). Esse poliedro resultante possui 20 faces hexagonais regulares, 12 faces decagonais regulares e 30 faces retangulares, totalizando 62 faces. Cabe destacar que o truncamento do icosidodecaedro gera um poliedro que não é arquimediano, visto que algumas de suas faces, sendo retangulares, não são polígonos regulares. Contudo, é possível ajustá-lo para que se transforme em um poliedro arquimediano. Isso pode ser feito convertendo as faces retangulares em quadrados.

Figura 88 – Icosidodecaedro truncado ou grande rombosidodecaedro



Fonte: Neves, 2017.

Após essa modificação, o cálculo do número total de arestas e vértices é dado por: $2A = 4F_4 + 6F_6 + 10F_{10} = 4 \cdot 12 + 6 \cdot 20 + 10 \cdot 12 = 360$, logo, $A = 180$.

Em seguida, o número de vértices pode ser determinado por: $V = A - F + 2 = 180 - 62 + 2 = 120$. $V = 120$.

Assim, o poliedro ajustado passa a satisfazer as características dos sólidos arquimedianos.

Rombicuboctaedro

Ao realizar a expansão no cubo ou no octaedro regular, obtém-se o rombicuboctaedro (Figura 89). Para simplificar a análise, tome-se como referência o cubo, que apresenta 6 faces quadradas, 12 arestas, 8 vértices e $m = 3$. O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao octaedro. Durante a expansão das faces do cubo, as 12 arestas existentes formam mais 12 quadrados adicionais. Assim, obtém-se um total de 18 quadrados ($6 + 12 = 18$) e, além disso, surgem 8 triângulos equiláteros correspondentes aos 8 vértices do cubo. No total, o poliedro passa a possuir 26 faces.

O cálculo do número total de arestas e vértices pode ser realizado da seguinte forma:

$2A = 3F_3 + 4F_4 = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 18 = 96$, logo, $A = 48$. Em seguida, para determinar o número de vértices: $V = A - F + 2 = 48 - 26 + 2 = 24$. $V = 24$.

Figura 89 – Expansão das faces do cubo e rombicuboctaedro



Fonte: Neves 2017.

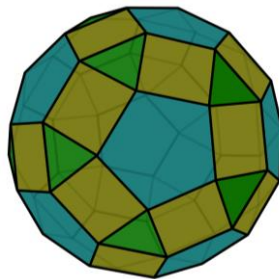
Portanto, o rombicuboctaedro resultante da expansão apresenta 26 faces, 48 arestas e 24 vértices.

Rombicosidodecaedro (ou pequeno rombicosidodecaedro)

Ao realizar-se a expansão no dodecaedro regular ou no icosaedro regular, obtém-se o rombicosidodecaedro (também conhecido como pequeno rombicosidodecaedro) (Figura 90). Para simplificar o raciocínio, considere-se o dodecaedro regular, que apresenta 12 faces pentagonais regulares, 30 arestas, 20 vértices e $m = 3$. O mesmo tipo de análise pode ser aplicado ao icosaedro regular. Durante a expansão das faces do dodecaedro, as suas 30 arestas originam 30 quadrados, e os 20 vértices geram 20 triângulos equiláteros adicionais. Dessa forma, o poliedro resultante passa a apresentar 12 faces pentagonais regulares (correspondentes às do dodecaedro original), 30 faces quadradas e 20 faces triangulares, totalizando 62 faces.

Para determinar-se o número total de arestas e vértices do rombicosidodecaedro, utiliza-se o seguinte cálculo: $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 = 3 \times 20 + 4 \times 30 + 5 \times 12 = 240$, logo, $A = 120$. Em seguida, calculando-se o número de vértices: $V = A - F + 2 = 120 - 62 + 2 = 60$. $V = 60$.

Figura 90 – Rombicosidodecaedro ou rombicosidodecaedro



Fonte: Neves, 2017.

Portanto, o rombicosidodecaedro resultante da expansão apresenta 62 faces, 120 arestas e 60 vértices.

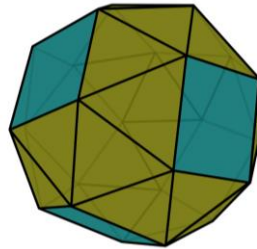
Cubo snub (ou cuboctaedro snub)

Realizando-se a snubificação no cubo ou no octaedro regular, obtém-se o cubo snub (também conhecido como cuboctaedro snub) (Figura 91). Para facilitar o raciocínio, considere-se o cubo, que possui 6 faces quadradas, 12 arestas, 8 vértices e $m=3$. Esse mesmo processo poderia ser realizado utilizando o octaedro regular. Com a snubificação do cubo, surgem 24 triângulos equiláteros, que ocupam os espaços vazios formados entre as arestas afastadas do cubo, e 8 triângulos equiláteros adicionais, que se originam dos vértices (uma vez que $m=3$).

Além disso, as 6 faces quadradas originais permanecem. Como resultado, o poliedro passa a ter um total de 38 faces, sendo 32 triângulos equiláteros e 6 quadrados.

O cálculo do número de arestas (A) e vértices (V) é feito da seguinte maneira: $2A = 3F_3 + 4F_4 = 3 \cdot 32 + 4 \cdot 6 = 120$, logo, $A = 60$. Para o número de vértices, utiliza-se: $V = A - F + 2 = 60 - 38 + 2 = 24$. $V = 24$.

Figura 91 – Cubo snub ou cuboctaedro snub



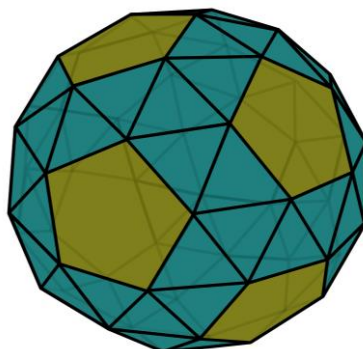
Fonte: Neves, 2017.

Assim, o cubo snub possui 38 faces (32 triângulos equiláteros e 6 quadrados), 60 arestas e 24 vértices.

Dodecaedro snub (ou icosidodecaedro snub)

Realizando-se a snubificação no dodecaedro regular ou no icosaedro regular, obtém-se o dodecaedro snub (também denominado icosidodecaedro snub) (Figura 92). Para simplificar o raciocínio, tome-se o dodecaedro como base, o qual possui 12 faces pentagonais regulares, $m = 3$. O mesmo procedimento pode ser aplicado ao icosaedro. Com a snubificação do dodecaedro, são formados 60 triângulos equiláteros que ocupam os espaços vazios resultantes da separação das arestas do dodecaedro, além de 20 triângulos equiláteros adicionais gerados nos vértices ($m = 3$). As 12 faces pentagonais regulares originais permanecem inalteradas. O poliedro final, portanto, possui um total de 92 faces, sendo 80 triângulos equiláteros e 12 pentágonos regulares.

Os cálculos referentes ao número de arestas (A) e vértices (V) são realizados como segue: $2A = 3F_3 + 5F_5 = 3 \cdot 80 + 5 \cdot 12 = 300$, logo, $A=150$. Para o número de vértices: $V = A - F + 2 = 150 - 92 + 2 = 60$. $V = 60$.

Figura 92 – Dodecaedro snub ou icosidodecaedro snub

Fonte: Neves, 2017.

Assim, o dodecaedro snub apresenta 92 faces (80 triângulos equiláteros e 12 pentágonos regulares), 150 arestas e 60 vértices.

Observação: Ao realizar-se o Truncamento tipo 1 no tetraedro regular, obtém-se o Octaedro Regular. Com a Snubificação do tetraedro regular, obtém-se o Icosaedro Regular. Já com a Expansão do tetraedro regular, resulta o Cuboctaedro.

No quadro seguinte, são apresentadas informações consideradas relevantes sobre os treze poliedros de Arquimedes. O quadro foi organizado da seguinte maneira: Primeiramente, foram listados os poliedros obtidos com o **corte tipo 1** (2 poliedros). Em seguida, os poliedros formados com o **corte tipo 2** (7 poliedros). Após, os poliedros obtidos por **expansão** (2 poliedros). Por fim, os poliedros derivados pela **snubificação** (2 poliedros).

Quadro 6 - Características dos treze poliedros de Arquimedes

<i>n</i>	<i>nome do poliedro</i>	F	V	A	m	As Faces
1	Cuboctaedro	14	12	24	4	8T e 6Q
2	Icosidodecaedro	32	30	60	4	20T e 12P
3	Tetraedro Truncado	8	12	18	3	4T e 4H
4	Cubo Truncado	14	24	36	3	8T e 6O
5	Octaedro Truncado	14	24	36	3	6Q e 8H
6	Dodecaedro Truncado	32	60	90	3	20T e 12D
7	Icosaedro Truncado	32	60	90	3	12P e 20H
8	Cuboctaedro Truncado	26	48	72	3	12Q, 8H e 6O
9	Icosidodecaedro Truncado(ou grande rombicosidodecaedro)	62	120	180	3	30Q, 20H e 12D
10	Rombicuboctaedro	26	24	48	4	8T e 18Q
11	Rombicosidodecaedro(ou pequeno rombicosidodecaedro)	62	60	120	4	20T, 30Q e 12P
12	Cubosnub(ou cuboctaedro snub)	38	24	60	5	32T e 6Q
13	Dodecaedrosnub(ou icosidodecaedro snub)	92	60	150	5	80T e 12P

Fonte: Neves, 2017.

4 CONSTRUÇÃO DE HABILIDADES EM PERCEPÇÃO ESPACIAL

A teoria de van Hiele representa uma contribuição inestimável para a educação matemática, fornecendo um arcabouço robusto que permite a compreensão profunda dos processos de ensino e aprendizagem da geometria. Essa teoria não apenas sistematiza a evolução do raciocínio geométrico, mas também se mostra essencial na formação de práticas pedagógicas que favorecem o desenvolvimento de habilidades críticas nos alunos. Sua adaptabilidade aos diversos contextos de ensino a torna uma ferramenta relevante para educadores que buscam enriquecer suas abordagens na disciplina. Além disso, ao enfatizar a importância dos diferentes níveis de raciocínio, a teoria estimula o pensamento crítico e a capacidade de análise, fundamentais para um aprendizado eficaz. A teoria de van Hiele é crucial para a formação de conceitos geométricos sólidos, permitindo que os alunos desenvolvam uma compreensão integrada e significativa da geometria. Foi desenvolvida em 1957, na dissertação de doutorado do casal holandês Dina van Hiele e Pierre van Hiele (De Oliveira ; Cristovão, 2022). O desenvolvimento do presente Capítulo desta dissertação baseou-se nas abordagens e metodologias propostas por De Oliveira e Cristovão (2022), conforme descrito em *Geometria Espacial nas Questões do Enem: uma análise a partir dos níveis de van Hiele*.

O Modelo de van Hiele é amplamente reconhecido por descrever os estágios de desenvolvimento do pensamento geométrico, sendo baseado em estudos de Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele. Dina trouxe uma valiosa experiência em sala de aula, ao aplicar práticas de ensino voltadas para a Geometria, enquanto Pierre elaborou um modelo teórico com o objetivo de explicar as dificuldades encontradas pelos alunos no aprendizado dessa área. Embora Dina tenha falecido logo após concluir seu doutorado, Pierre continuou a desenvolver e consolidar a teoria que passou a ser conhecida como Modelo de van Hiele (De Villiers, 2010; Silva e Cândido, 2007).

Essa teoria propõe cinco níveis distintos de pensamento geométrico que representam a evolução cognitiva do aluno ao longo de seu aprendizado: visualização (ou reconhecimento), análise, ordenação, dedução e rigor (Mason, 1997):

- **Nível 1 – Visualização ou Reconhecimento:** Os alunos identificam formas geométricas por meio da percepção sensorial, porém, sem compreender suas propriedades ou relações entre as figuras. Descrevem objetos usando vocabulário básico, muitas vezes inadequado do ponto de vista matemático.

- **Nível 2 – Análise:** Nesta fase, os alunos começam a reconhecer algumas propriedades das figuras geométricas, desenvolvendo um vocabulário mais apropriado. Contudo, eles ainda não conseguem estabelecer relações entre as propriedades ou entre diferentes figuras.
- **Nível 3 – Ordenação:** Neste nível, o aluno demonstra habilidades de dedução informal, identificando propriedades e organizando-as de maneira lógica. Ele já é capaz de compreender pequenas demonstrações e de elaborar deduções simples, mas ainda não consegue formular demonstrações rigorosas.
- **Nível 4 – Dedução:** Os estudantes são capazes de distinguir definições, postulados e teoremas, compreendendo o significado de cada um. Eles desenvolvem a habilidade de formular demonstrações formais e utilizar diferentes abordagens para alcançar conclusões, além de utilizar um vocabulário mais preciso.
- **Nível 5 – Rigor:** No estágio mais avançado, o aluno é capaz de entender e trabalhar com diferentes sistemas axiomáticos, incluindo geometrias não euclidianas. Ele também consegue relacionar e comparar sistemas, demonstrando uma compreensão profunda e abstrata das estruturas geométricas.

Esses níveis proporcionam uma visão mais detalhada sobre o processo de aprendizado da Geometria, permitindo que professores reflitam sobre os métodos de ensino e ajustem suas abordagens de acordo com o nível cognitivo de seus alunos. Como apontado por De Villiers (2010) e Silva e Cândido (2007), a teoria de van Hiele revela quatro importantes propriedades sobre o aprendizado geométrico, que podem orientar práticas pedagógicas mais eficazes.

A Teoria de van Hiele estabelece quatro propriedades fundamentais que orientam o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico. A primeira delas é a **ordenação** dos níveis, que determina que cada aluno deve dominar completamente um nível antes de progredir para o próximo. Isso significa que o entendimento de um novo nível só é possível após a assimilação completa do nível anterior. A segunda propriedade destaca a **linguagem própria de cada nível**, ou seja, conforme os alunos avançam nos níveis de pensamento geométrico, a terminologia e os conceitos que utilizam também se tornam mais sofisticados. Assim, é essencial que o professor identifique o nível em que o aluno se encontra para adequar seu discurso e promover o progresso contínuo.

A terceira propriedade, conhecida como **localidade**, indica que o aluno pode exibir níveis diferentes de compreensão em conteúdos variados, mas, ao atingir um nível em determinado conteúdo, terá maior facilidade em alcançá-lo em outros. Por fim, a quarta propriedade refere-se à **continuidade** entre os níveis, evidenciando que o progresso do aluno

ocorre de forma gradual e contínua, com uma fase de transição que marca a passagem entre um nível e outro (Silva; Cândido, 2007; Gutiérrez, 1992).

Entretanto, é importante mencionar que a maior parte das pesquisas baseadas na Teoria de van Hiele concentra-se no estudo da Geometria Plana. Isso cria a necessidade de se recorrer a outros teóricos para estabelecer paralelos com a Geometria Espacial. Nesse contexto, o teórico francês **Parzysz** desenvolveu uma teoria inspirada no modelo de van Hiele, categorizando a Geometria em quatro grupos distintos, conforme exposto por Parzysz (2006) e Oliveira (2016):

- **G0 – Geometria Concreta:** Nesta fase, os aspectos físicos dos objetos, como cor, material e textura, ainda são considerados importantes, embora tecnicamente essa etapa não constitua uma geometria formal.
- **G1 – Geometria Espaço-gráfica:** Os objetos físicos passam a ser representados graficamente, utilizando ferramentas geométricas como régua e compasso. A resolução de problemas se dá principalmente por meio de percepções visuais e representações.
- **G2 – Geometria Protoaxiomática:** Nesta etapa, os alunos já compreendem conceitos teóricos, como teoremas e definições básicas (ponto, reta, segmento etc.). Embora ainda utilizem representações gráficas para apoiar a compreensão, as validações dos conceitos são de natureza teórica.
- **G3 – Geometria Axiomática:** Aqui, os objetos geométricos assumem um caráter puramente teórico, distanciando-se da realidade física. A validação e construção de conhecimento ocorre por meio de deduções rigorosas, fundamentadas em axiomas e teoremas.

A teoria de Parzysz amplia as reflexões sobre o ensino da Geometria Espacial, oferecendo uma perspectiva mais aprofundada sobre como os alunos interagem com diferentes níveis de abstração geométrica ao longo de seu aprendizado.

Essas classificações têm como objetivo facilitar a identificação do tipo de questão e a natureza de suas validações. Ao organizar-se as questões de acordo com esses grupos, é possível compreender o tipo de raciocínio geométrico que está sendo exigido do aluno e como ele deve proceder para justificar suas respostas. No entanto, para realizar a correspondência entre os diferentes grupos propostos por Parzysz e os Níveis de Pensamento Geométrico estabelecidos por van Hiele, utiliza-se um instrumento específico que estrutura essas informações em um quadro comparativo, com tais correspondências. O Quadro 7, a seguir, apresenta um paralelo

entre as duas teorias, permitindo estabelecer conexões claras e identificar em qual nível de van Hiele se encontra cada tipo de questão geométrica.

A inclusão desse quadro possibilita uma análise mais sistemática, ajudando a classificar as tarefas e exercícios de acordo com os estágios de desenvolvimento cognitivo do aluno. Dessa forma, o uso desse instrumento se torna essencial para uma abordagem didática mais precisa, que respeite o processo gradual e hierárquico de aquisição de conhecimentos proposto pela Teoria de van Hiele.

Quadro 7 - Correspondências entre as teorias de van Hiele e Parzysz

Nível	Van Hiele	Parzysz	Grupo Geométrico
1	Visualização	Concreto	0
2	Análise	Espaço-Gráfico	1
3	Ordenação	Protoaxiomático	2
4	Dedução	Axiomático	3

Fonte: O autor, 2025.

Assim, ao analisar-se o conteúdo de cada questão geométrica, torna-se viável identificar a que nível de pensamento geométrico, segundo a Teoria de Van Hiele, ou a qual grupo geométrico, de acordo com a classificação de Parzysz, tal questão se refere. Esse processo de categorização possibilita uma avaliação mais precisa das habilidades cognitivas exigidas em cada tarefa, bem como a adequação das estratégias de ensino para favorecer o desenvolvimento gradual do pensamento geométrico dos alunos. A compreensão dessas relações é relevante para a aplicação pedagógica, permitindo que o professor adapte suas abordagens didáticas de forma a atender melhor às necessidades de aprendizagem dos estudantes, segundo Gutiérrez (1992).

O pesquisador Gutierrez (1992) ampliou os níveis propostos por van Hiele, estendendo-os para além das figuras planas. Segundo Gutierrez, a teoria mantém os níveis e serve como um arcabouço para compreender os processos de aprendizagem da geometria espacial, abrangendo tanto a aquisição de habilidades práticas quanto a compreensão das inter-relações entre conceitos. No nível de visualização, integram-se diversas habilidades, tais como a capacidade de reconhecer um objeto independentemente de suas características visuais — como cor, tamanho, textura ou posição —, a produção de imagens mentais, a comparação e a relação entre objetos, identificando semelhanças e diferenças, além da memorização de um objeto e suas características, mesmo quando este é rotacionado ou parcialmente oculto.

Gutierrez (1996) enfatiza ainda a importância de realizar atividades que possibilitem a observação das conexões entre as dimensões bidimensional e tridimensional. Os níveis

estabelecidos tanto na teoria de van Hiele quanto na adaptação proposta por Gutiérrez (1992) configuram-se como um guia de aprendizagem e um instrumento de avaliação das competências dos alunos nas áreas de geometria plana e espacial.

Neste contexto, o papel do professor é crucial, pois cabe a ele definir tarefas adequadas que possibilitem aos alunos avançar para níveis superiores de raciocínio geométrico.

Para Gutiérrez (1996), a noção de visualização espacial se revela como um fenômeno diversificado e de grande abrangência, cuja interpretação pode variar substancialmente de acordo com a perspectiva adotada. Dentro do âmbito da Educação Matemática, este conceito está intimamente relacionado à formação e à aplicação de representações mentais que dizem respeito a informações matemáticas (Sibemberg, 2019). Nesse contexto, é viável categorizar os diversos componentes que constituem a visualização espacial em quatro elementos fundamentais: imagens mentais, representações externas, o processo de visualização e as habilidades de visualização (Gutiérrez, 1996).

Segundo Gutiérrez (1996), a imagem mental se configura como o elemento primordial que o estudante deve desenvolver para ser capaz de “construir, transformar e analisar objetos geométricos (grifo do autor), visando-se, assim, à aquisição de uma proficiência substancial em visualização espacial” (Gutiérrez, 1996, p. 25, tradução própria).

Presmeg (1986) apresenta diferentes categorias de imagens mentais, destacando que a imagem concreta representa a forma mais simples de representação mental, frequentemente utilizada para ilustrar poliedros. Em contrapartida, a imagem dinâmica envolve a concepção de um movimento mental de um determinado objeto, permitindo-se visualizar esse objeto em diversas orientações. Por outro lado, a imagem cinestésica é caracterizada pelo movimento de um objeto, utilizando partes do corpo, como as mãos ou a cabeça.

A representação externa, por sua vez, é definida como “qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou características, incluindo fotografias, ilustrações, diagramas, entre outros, que contribuem para a formação ou transformação de imagens mentais e para o raciocínio visual” (Gutiérrez, 1996, p.9-10, tradução própria).

O processo de visualização se desdobra em dois processos interconectados: o primeiro consiste na conversão de dados abstratos e não figurativos em imagens visuais, além da transformação de uma imagem mental em outra, o que Gutiérrez denomina como processamento visual (Gutiérrez, 1996, p.26). O segundo envolve a interpretação de informações figurativas, compreendendo “o processo de ler, analisar e compreender representações espaciais, como as representações no plano ou as imagens mentais de poliedros, com o intuito de extrair dados delas” (Gutiérrez, 1996, p.26).

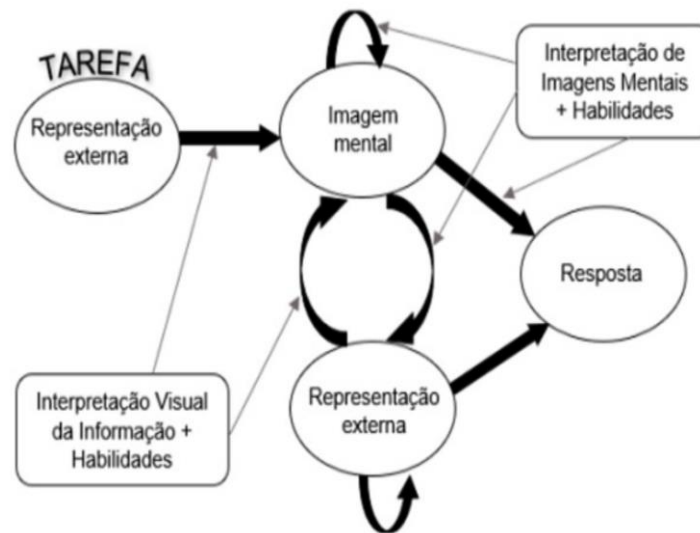
Por fim, a última componente do ato de visualização refere-se às habilidades de visualização, sendo que “a aprendizagem e o aprimoramento dessas habilidades são essenciais para o êxito de todo o processo de visualização espacial” (Gutiérrez, 1996, p.26). Neste contexto, é crucial que o aluno selecione a habilidade de visualização mais apropriada, de acordo com a natureza do desafio que está sendo enfrentado. As habilidades de visualização delineadas por Gutiérrez (1996) são as seguintes:

- **Percepção figura-fundo:** Nesta habilidade, espera-se que o indivíduo tenha a capacidade de distinguir um objeto específico dentro de um contexto visual mais complexo, isolando-o de elementos que possam causar confusão.
- **Constância perceptiva:** Relaciona-se à habilidade de reconhecer que, independentemente de variações em cor, dimensão, textura ou posicionamento, algumas características essenciais de um objeto permanecem inalteradas, demonstrando a capacidade do sujeito de compreender a constância das propriedades dos objetos em diferentes condições de visualização.
- **Rotação mental:** Esta habilidade envolve a capacidade de criar uma imagem mental dinâmica, permitindo que o sujeito visualize mentalmente os movimentos de um objeto em sua mente, facilitando a interpretação de diferentes configurações e orientações desse objeto.
- **Percepção de posições espaciais:** Refere-se à capacidade do indivíduo de estabelecer relações entre um objeto, figura ou imagem mental e a própria posição do sujeito, promovendo uma compreensão mais profunda do espaço em que o objeto está situado.
- **Percepção de relações espaciais:** Esta habilidade diz respeito à capacidade do sujeito de estabelecer conexões e relações entre diferentes objetos, figuras e/ou imagens mentais, promovendo uma compreensão mais ampla das interações espaciais.
- **Discriminação visual:** Relaciona-se à capacidade de comparar objetos, figuras e/ou imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças, permitindo ao sujeito realizar análises mais aprofundadas e detalhadas entre as representações visuais que observa (Gutiérrez, 1996).

O diagrama apresentado na Figura 93, elaborado por Gutiérrez (1996), ilustra o processo ideal para a resolução de uma tarefa que requer a utilização da visualização geométrica. Neste contexto, inicialmente, a tarefa é interpretada por meio de representações externas, o que resulta

na formação da primeira imagem mental. A partir dessa imagem, o aluno engaja-se em um raciocínio visual que, dependendo da natureza da tarefa ou das habilidades do estudante, pode levar à geração de novas imagens mentais e representações externas antes que uma resposta definitiva seja alcançada (Gutiérrez, 1996).

Figura 93 – Principais elementos de visualização na solução de uma tarefa matemática



Fonte: Lemmertz, 2019 *apud* Gutiérrez (1996).

Na seção subsequente, buscar-se-á aprofundar a compreensão acerca de como os recursos tecnológicos, especialmente a geometria dinâmica, podem auxiliar tanto professores quanto alunos no processo de aprendizagem da geometria, enfatizando algumas das potencialidades que tais recursos podem oferecer ao ambiente educacional.

4.1 Geometria Dinâmica

Os recursos tecnológicos desempenham um papel crucial no processo de aprendizagem, proporcionando ao professor oportunidades para interpretar, refletir e criar métodos de ensino inovadores, de acordo com Santos e Moita (2016). Essas ferramentas possibilitam uma prática pedagógica dinâmica e produtiva, permitindo uma reinvenção do próprio ato de educar. Nesse sentido, ao utilizar-se a geometria dinâmica 3D oferecida pelo software GeoGebra, que será detalhada em seção posterior deste capítulo, vislumbra-se uma maior integração entre a tecnologia e o aprendizado. Espera-se que, com esse recurso, os alunos possam desenvolver uma compreensão mais profunda acerca da projeção ortogonal e aprimorem suas habilidades de visualização de diferentes objetos geométricos em uma variedade de situações.

Ainda nesse contexto, verifica-se que,

“O desenvolvimento de sistemas dinâmicos voltados para a aprendizagem de Matemática tem possibilitado novas formas de tratamento para problemas, pela possibilidade de tornar acessíveis e manipuláveis objetos matemáticos que até então precisavam ser tratados de maneira estática e abstrata.” (Notare ; Basso, 2016, p.2)

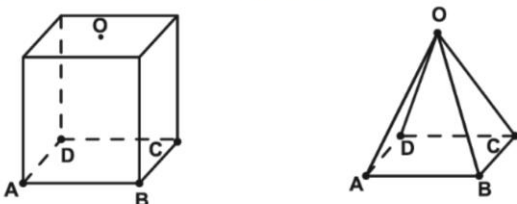
Dessa forma, os recursos oferecidos pela geometria dinâmica 3D podem contribuir significativamente para o desenvolvimento do raciocínio espacial dos alunos, promovendo formas de pensamento que vão além das limitações impostas pelo uso tradicional de papel e lápis. O uso de atividades em ambientes dinâmicos estimula não apenas a participação ativa dos alunos, mas também favorece a autonomia intelectual, permitindo que eles valorizem mais sua própria capacidade de resolução de problemas.

Visando ilustrar essa contribuição, Notare ; Basso (2016) propuseram um problema de geometria espacial (Figura 94) para um grupo de alunos de Mestrado Profissional. Observou-se que, ao tentar resolver o problema utilizando apenas ferramentas tradicionais como papel e lápis, muitos estudantes cometeram erros, uma vez que "construíram uma imagem representativa equivocada dos sólidos destacados" (Notare ; Basso, 2016, p.4).

Figura 94 - Questão do Exame Nacional do Ensino Médio, 2014

1. (ENEM 2011 - Questão 144)

Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original e a pirâmide obtida a partir dele.



Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas \overline{AD} , \overline{BC} , \overline{AB} e \overline{CD} , nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

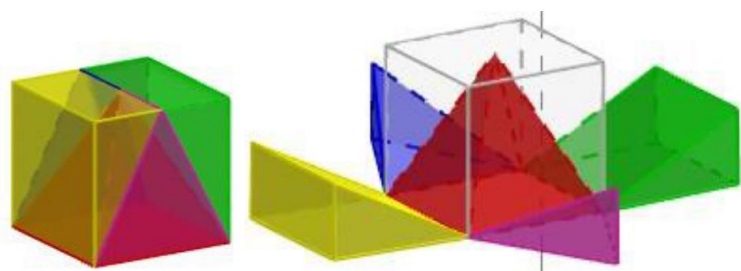
Os formatos dos sólidos descartados são

(A) todos iguais.
 (B) todos diferentes.
 (C) três iguais e um diferente.
 (D) apenas dois iguais.
 (E) iguais dois a dois.

Fonte: Notare ; Basso, 2016.

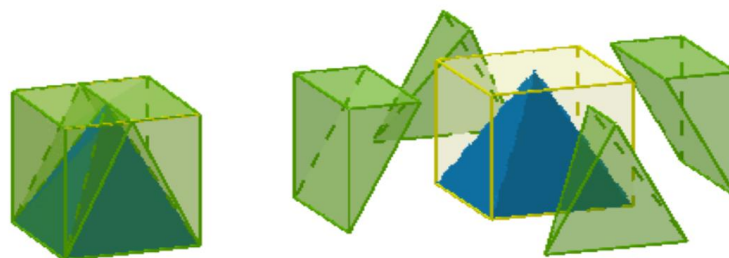
Os estudantes foram incentivados a utilizar o GeoGebra 3D para representar a situação-problema, explorando as suas capacidades dinâmicas, após serem obtidos esses resultados. As Figuras 95 e 96 exemplificam possibilidades de soluções apresentadas por Notare ; Basso (2016) que mostram como o uso do GeoGebra possibilita a construção de objetos dinâmicos análogos (utilizando-se de isomorfismo) à realidade do problema.

Figura 95 – Solução do estudante A, com movimento de rotação



Fonte: Notare ; Basso, 2016.

Figura 96 – Solução do estudante B, com movimento de translação



Fonte: Notare ; Basso, 2016.

Já em 1996, Gutiérrez ressaltava a importância do uso de ferramentas de geometria dinâmica como forma de potencializar o ensino de geometria, prevendo que as salas de aula do futuro seriam equipadas com tecnologia avançada. Gutiérrez afirmava sobre as aulas futuras:

"[...] podemos imaginar salas de aula cheias de computadores, muitos CDs em uma prateleira, e um grande armário contendo muitos aparatos e objetos manipuláveis"
(Gutiérrez, 1996, p.33).

Gutiérrez conjecturava que, ao ensinar sobre sólidos geométricos, como pirâmides ou cubos, os professores deveriam permitir que os alunos manuseassem os objetos por alguns minutos e, em seguida, explorassem suas representações dinâmicas nas telas de seus computadores, promovendo discussões sobre as propriedades que descobrissem.

Tal visão de Gutiérrez já indicava, no século passado, a necessidade de transcender-se a prática educacional centrada exclusivamente em livros didáticos, que, embora importantes, não proporcionam a experiência completa necessária e suficiente para o aprendizado da geometria espacial. Os livros oferecem roteiros organizados dos conteúdos, permitindo que os alunos sigam seu próprio ritmo, mesmo sem a mediação constante do professor. Entretanto, como Gutiérrez (1996) argumenta, o uso exclusivo de livros apresenta limitações, uma vez que as representações de sólidos geométricos, apesar de coloridas e detalhadas, não conseguem captar plenamente as propriedades tridimensionais dos objetos. A estática dessas representações impede que o aluno tenha a experiência de manipular o sólido de forma a compreender suas múltiplas facetas.

Gutiérrez (1996) também salientava que, até aquele momento, o contato dos alunos com abordagens dinâmicas restringia-se ao manuseio de sólidos físicos, o que apresentava limitações. Os alunos frequentemente realizavam movimentos rápidos e superficiais, reduzindo o objeto às representações convencionais, sem explorar todo o potencial da abordagem dinâmica. Ele concluía que essa prática, assim como o uso exclusivo de livros didáticos, tende a gerar imagens estáticas nas mentes dos estudantes. Para reforçar-se a importância dos softwares de geometria dinâmica, Gutiérrez (1996) traz exemplos de representações de pirâmides, frequentemente utilizadas em livros didáticos (Figura 97). Ele argumenta que, com o auxílio de um computador, um aluno poderia reconhecer com mais facilidade que as imagens representadas na Figura 98 também são diferentes perspectivas de uma pirâmide.

Figura 97 – Representações convencionais de uma pirâmide



Fonte: Gutiérrez (1996).

Figura 98 – Representações não convencionais de uma pirâmide



Fonte: Gutiérrez (1996).

Visando aprofundar-se a compreensão sobre como a geometria dinâmica pode auxiliar na análise e interpretação de representações bidimensionais de objetos tridimensionais, a seção seguinte abordará estudos de Gutiérrez que discutem esse tema em detalhes.

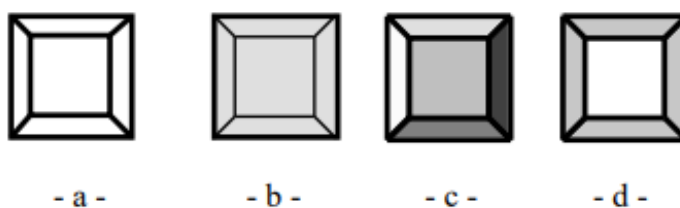
4.2 Representações bidimensionais de objetos tridimensionais

Na seção anterior, foi mencionado como os livros didáticos, embora bastante valiosos, apresentam limitações significativas quando o foco é o aprendizado da geometria espacial, especialmente no que tange à visualização e compreensão de objetos tridimensionais, segundo Gutiérrez (1996). Contrapondo-se a isso, a geometria dinâmica surge como um recurso poderoso para amplificar a compreensão dos alunos em diversos temas da geometria espacial. Uma dessas vantagens é a capacidade de construir, transformar e analisar representações

bidimensionais de objetos tridimensionais. Uma dessas representações é, notadamente, a projeção ortogonal.

Em seu trabalho, Gutiérrez (1996) apresenta um exemplo ilustrativo que evidencia as limitações das representações bidimensionais no contexto da geometria espacial. Ao observar o primeiro desenho da Figura 99-a, a interpretação pode variar de acordo com o observador: a Figura 99-b, por exemplo, pode ser entendida como um quadrado externo representando a face frontal de um cubo; já a Figura 99-c, vista mais de perto, pode sugerir a face de um tronco de pirâmide; enquanto a Figura 99-d pode ser interpretada como uma moldura, onde a parte hachurada constitui o contorno e a área branca o quadro central, dentre outras possibilidades.

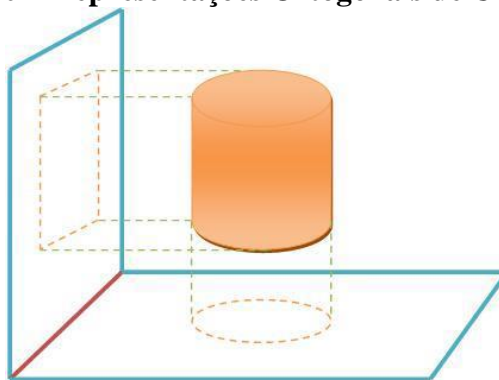
Figura 99 – Possibilidades de representações de um mesmo objeto



Fonte: Gutiérrez (1996).

A partir dessa análise, conforme descrito por Gutiérrez (1996), percebe-se que uma das formas mais frequentes de representar um objeto tridimensional no plano é por meio da projeção ortogonal. No entanto, a partir dessa representação plana, torna-se impossível determinar com precisão qual era o sólido tridimensional original. Como exemplo, pode-se observar a Figura 100, onde se apresentam duas projeções ortogonais de um cilindro: uma delas resulta em um retângulo, enquanto a outra se traduz em um círculo. Essa ambiguidade ilustra a necessidade de ferramentas como a geometria dinâmica para acessar e compreender a totalidade do objeto tridimensional representado.

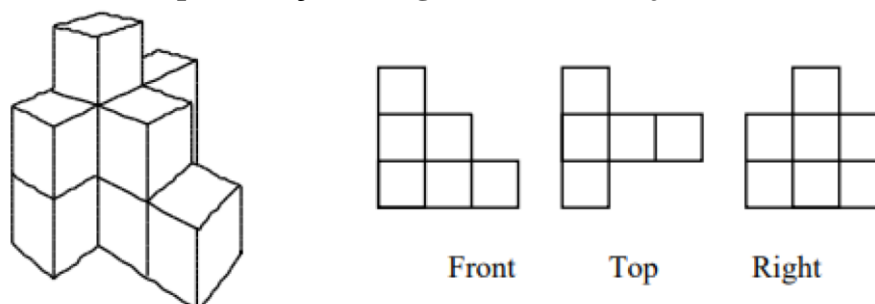
Figura 100 – Representações Ortogonais de Um Cilindro



Fonte: Colégio Web, 2025.

Em suas investigações, Gutiérrez (1996) explora diferentes formas de visualizações espaciais e busca analisar, bem como categorizar, o nível de dificuldade que os alunos enfrentam ao tentar interpretar as projeções de um conjunto de cubos e deduzir como esse conjunto está estruturado no espaço tridimensional. Paralelamente, ele também se preocupa com a capacidade dos alunos de, ao manipular o conjunto tridimensional, identificar e criar suas respectivas projeções ortogonais. Na Figura 101, observa-se um exemplo concreto desse tipo de tarefa apresentado em seu estudo.

Figura 101 – Representações ortogonais de um conjunto de cubos

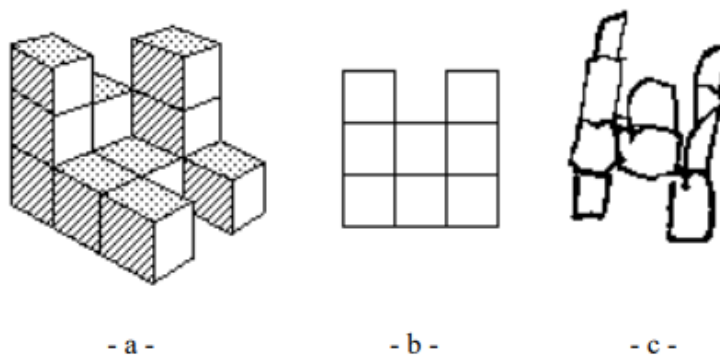


Fonte: Gutiérrez, 1996.

Objetivando avaliar as habilidades dos estudantes, Gutiérrez estava especialmente interessado em dois aspectos fundamentais: "Os estudantes precisam aprender a desenhar as representações de sólidos dados e, igualmente, a construir os sólidos a partir de representações fornecidas (como, por exemplo, projeções ortogonais)" (Gutiérrez, 1996, p.36). As tarefas propostas seguiam em duas direções: oferecer aos alunos diferentes representações planas de um conjunto de cubos e solicitar que eles reconstruíssem os sólidos a partir dessas representações, ou, inversamente, fornecer um conjunto de cubos e pedir que desenhassem suas respectivas projeções no plano.

Nos resultados desse estudo, especificamente em relação às tarefas relacionadas à projeção ortogonal, Gutiérrez (1996) constatou que os alunos que apresentaram maior dificuldade em realizar as projeções ortogonais de um conjunto de cubos tinham problemas em distinguir e isolar as faces visíveis das faces ocultas, localizadas em outros planos. A Figura 102 ilustra bem essa dificuldade. Gutiérrez observou que esses alunos careciam de uma habilidade essencial conhecida como "figure-ground" (figura-fundo), que é descrita como "a capacidade de identificar uma figura específica, isolando-a de um fundo complexo" (Gutiérrez, 1996, p.26), habilidade essa já discutida em seções anteriores.

Figura 102 - O conjunto de cubos (a), a representação desejada (b) e o desenho do estudante (c)



Fonte: Gutiérrez (1996).

Nas próximas seções, serão explorados, além dos conceitos acerca de Visualização Geométrica, a utilização de softwares de visualização tridimensional, em particular o GeoGebra, software escolhido como recurso tecnológico que será utilizado como suporte nas atividades práticas desta pesquisa, abordando como ele contribuirá para o desenvolvimento deste estudo.

5 VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA

A visualização geométrica desempenha um papel fundamental no entendimento dos conceitos de geometria, especialmente no que diz respeito à percepção e manipulação de formas no espaço. Ao longo da educação matemática, o desenvolvimento da capacidade de visualizar objetos tridimensionais, suas relações espaciais e as transformações que podem ocorrer com eles é um aspecto crucial na formação do pensamento geométrico. A habilidade de gerar imagens mentais e de manipulá-las mentalmente é essencial para resolver problemas e compreender as propriedades dos sólidos, das projeções e das figuras geométricas em geral. Esse processo não se limita apenas à observação passiva das formas, mas envolve a capacidade de pensar e operar com essas imagens, muitas vezes em diferentes dimensões.

A visualização geométrica vai além da simples representação visual de objetos; ela envolve um raciocínio espacial que permite ao indivíduo perceber como as figuras se relacionam no espaço, como podem ser transformadas ou manipuladas, e como suas propriedades podem ser exploradas. A habilidade de visualizar geometria de maneira eficaz está ligada ao desenvolvimento de competências cognitivas que, ao longo da trajetória educacional, ajudam o estudante a construir uma compreensão mais profunda e abstrata dos conceitos matemáticos. Assim, a visualização geométrica é uma ferramenta poderosa no ensino de geometria, pois facilita a compreensão de conceitos complexos, promovendo uma aprendizagem mais significativa e duradoura.

5.1 Visualização

Sabendo-se que a Geometria, segundo Ferreira (1999, p.983), é

“a ciência que investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos” ou “um ramo da matemática que estuda as formas, plana e espacial, com as suas propriedades, ou, “ramo da matemática que estuda a extensão e as propriedades das figuras (geometria Plana) e dos sólidos (geometria no espaço)”

Entende-se que a geometria pode proporcionar ao estudante o desenvolvimento de habilidades baseadas na observação e na experiência. Nesse sentido, compartilhando-se o entendimento de Ferreira (2010, p. 26), é

(...) necessário investigar diferentes formas de trabalhar a geometria para atingir um dos principais objetivos educacionais dessa disciplina: a capacidade de abstração espacial a partir de projeções nos espaços unidimensional, bidimensional e tridimensional. Tal competência se incrementa com atividades que possibilitam o desenvolvimento da habilidade de visualização para a formação do pensamento geométrico.

Segundo a teoria de Van Hiele, que propõe cinco níveis distintos de pensamento geométrico representando a evolução cognitiva do aluno ao longo de seu aprendizado [visualização (ou reconhecimento), análise, ordenação, dedução e rigor] (Mason, 1997), no primeiro estágio, denominado nível de visualização, os alunos reconhecem as figuras geométricas pelas suas aparências e não por suas propriedades ou características próprias. Por exemplo, quando o estudante identifica um quadrado ou um retângulo, mas não considera o quadrado como retângulo, tendo em vista que possuem aparências distintas.

A palavra *visualização* é empregada por vários autores baseando-se em semelhanças e diferenças observadas nos diversos significados desta palavra nas obras literárias. Referenciando-se nas definições de visualização pesquisadas neste trabalho, entende-se que esta é uma habilidade que está intimamente atrelada à capacidade de gerar uma imagem mental, provocar transformações com o objeto da imagem, além de conservar alterações e modificações sofridas por ele. Entre algumas das definições encontradas sobre *visualização*, destaca-se a de Frota e Couy (2009, p.4), na qual

“visualizar é um processo de criar e/ou interpretar e registrar ideias e imagens, que por sua vez podem desencadear novas ideias e imagens. Nessa perspectiva, a visualização é parte do conjunto de processos de fazer Matemática, ao lado da intuição, criação, abstração, formalização, comunicação, entre outros, podendo ao mesmo tempo impulsionar o desenvolvimento de tais processos.”

Johann Heinrich Pestalozzi, educador suíço do século XIX, enfatizou que a visualização desempenha um papel fundamental na educação e no desenvolvimento cognitivo. Para ele, o aprendizado deveria ser baseado na observação e no contato direto com os objetos, pois acreditava que o conhecimento começa com a experiência sensorial. Pestalozzi defendia que a **visualização** era essencial para que as crianças desenvolvessem uma compreensão concreta e verdadeira do mundo, antes de serem introduzidas a conceitos abstratos. Ele considerava a **observação visual** como a "base absoluta da cognição", argumentando que os alunos deveriam primeiro aprender através de seus sentidos, especialmente a visão, antes de serem expostos a conceitos teóricos ou abstratos. Dessa forma, a visualização se tornava um método central para promover a compreensão e a internalização de informações (Pestalozzi, 1894). Pestalozzi influenciou profundamente a pedagogia moderna, inspirando métodos de ensino que enfatizam a aprendizagem prática e visual, promovendo um ambiente onde os estudantes podem observar, experimentar e aprender com base em suas percepções sensoriais.

Embora, segundo Gutiérrez (1996), Pestalozzi tenha sobrevalorizado a visualização ao considerá-la a base central da cognição, é inegável que a visualização desempenha um papel essencial nesse processo. Ao adentrar o campo da visualização, surgem de imediato diversos

conceitos, como raciocínio visual, imaginação, pensamento espacial, imagens, imagens mentais, visuais e espaciais, entre outros. Uma busca em bases de dados eletrônicas por artigos com os termos "visualização", "habilidade espacial" ou "imagem mental" revela que a maior parte desses estudos está publicada em periódicos de psicologia, sendo ainda raro encontrá-los em revistas voltadas à educação matemática.

Há, entretanto, uma quantidade significativa de publicações que discutem os diferentes estágios de desenvolvimento cognitivo (da infância à fase adulta), assim como a relação da visualização com atividades como desenho, escrita ou fala, além da manipulação de objetos tridimensionais. Esses temas estão associados a campos como a psicologia, matemática ou educação matemática. Curiosamente, também há trabalhos que relacionam a visualização a áreas inesperadas como engenharia, arte, medicina, economia, química e até mesmo direção de automóveis.

De acordo com Gutiérrez (1996), o campo da visualização é muito vasto, tornando-se tarefa inviável tentar englobá-lo completamente. Profissionais de diferentes áreas podem atribuir significados diversos a termos aparentemente semelhantes. Psicólogos há muito reconhecem a relevância da visualização, tendo elaborado teorias consistentes e ferramentas para observação e teste. Assim sendo, a visualização é fundamental para um leque mais amplo de atividades do que geralmente se imagina, embora cada área se concentre em habilidades e contextos específicos que dialogam com seus respectivos problemas de pesquisa.

Ainda segundo Gutiérrez (1996), não há consenso sobre a terminologia adequada para essa área. Por exemplo, um autor pode utilizar o termo "visualização" enquanto outro prefere "pensamento espacial", ainda que ambos estejam se referindo ao mesmo conceito. Ao mesmo tempo, um termo como "imagem visual" pode ter diferentes interpretações dependendo de quem o utiliza. Essa variedade terminológica reflete, em parte, a amplitude de áreas em que a visualização é relevante e a diversidade de especialistas interessados no tema. A primeira seção deste artigo se dedica a delimitar o campo de estudo e a esclarecer os termos que serão utilizados, baseando-se em um arcabouço teórico que integra contribuições de pesquisadores como Bishop (1983), Hoffer (1977), Presmeg (1986), e Yakimanskaya (1991), os quais delinearão distintos aspectos da visualização.

Embora a afirmação de Pestalozzi tenha sido feita há mais de um século e meio, apenas recentemente a visualização passou a ser amplamente reconhecida por educadores matemáticos. Nos últimos anos, houve uma crescente ênfase na necessidade de incorporar mais elementos visuais no ensino de matemática, em especial nos níveis médio e superior. No campo da pesquisa, há um volume crescente de estudos experimentais que mostram, em sua maioria, que

o uso de representações visuais facilita a compreensão dos conceitos a serem ensinados, ainda que, em alguns casos, também possa gerar obstáculos. Em termos de desenvolvimento curricular, há um aumento no número de professores e autores de livros didáticos que têm se atentado ao uso de ilustrações, diagramas e imagens no ensino de matemática.

A geometria, por ser um domínio em que a visualização é naturalmente presente, pode ser vista como a raiz do uso de elementos visuais na matemática. Contudo, uma análise dos estudos recentes sobre visualização na educação matemática revela que muitos se concentram no ensino de cálculo ou álgebra, enquanto poucos abordam a geometria espacial. Essa distribuição é compreensível, visto que a visualização sempre foi considerada essencial no ensino de geometria, com exceção do período da "matemática moderna". Apenas recentemente a visualização ganhou reconhecimento similar em outras áreas da matemática. A revolução tecnológica da última década, marcada pela popularização dos computadores e de ferramentas multimídia, abriu novas possibilidades para a forma como a geometria espacial pode ser ensinada. Essas oportunidades demandam uma análise cuidadosa para que sejam efetivamente implementadas nas salas de aula, Gutiérrez (1996).

Entre essas novas ferramentas, destacam-se programas de computador que permitem a visualização tridimensional de objetos espaciais, possibilitando a manipulação dinâmica desses objetos, por meio de rotações, translações, ampliações ou seccionamentos. Apesar da dimensão tridimensional dos objetos representados na tela, essas representações continuam sendo imagens planas de objetos espaciais, o que significa que algumas dificuldades típicas enfrentadas pelos alunos ao interpretar desenhos bidimensionais de sólidos também surgem no ambiente computacional.

5.2 Alguns Conceitos acerca de Visualização Geométrica

Um dos significados de "imagem mental", na psicologia cognitiva, é o de uma quase-imagem criada na mente a partir da memória, sem nenhum suporte físico. Tal conceito é apoiado por Kosslyn (1980) e Denis (1989), entre outros.

Segundo Kosslyn (1980), em sua teoria das imagens mentais, a visualização estabelece-se com base em dois componentes principais: uma representação superficial (entidade quase-pictórica) presente na memória ativa, e uma representação profunda (informação armazenada na memória de longo prazo), da qual a representação superficial é derivada. Pylyshyn (2003), além de alguns outros cientistas cognitivos, posiciona-se de maneira contrária a esse conceito de imagem mental devido às muitas falhas observadas por eles na metáfora da imagem na mente e à necessidade que sentem de uma definição mais robusta e formal.

Minsky e Papert (1969) também se posicionam de forma paralela a Pylyshyn, manifestando certo ceticismo em relação ao papel das imagens mentais no raciocínio humano, argumentando que, embora possamos ter a sensação subjetiva de visualizar imagens internamente, o pensamento não depende delas, mas sim de representações simbólicas abstratas. Eles acreditavam que a cognição humana, assim como a inteligência artificial, poderia ser mais bem explicada pela manipulação de símbolos e estruturas lógicas, em vez de imagens mentais vívidas. Criticaram as redes neurais da época, que eram incapazes de resolver problemas complexos, sugerindo que o raciocínio visual não poderia ser representado de maneira eficiente por meio de imagens mentais diretas. Minsky (1988), ampliou essa visão ao propor que a mente funciona como uma sociedade de agentes, onde o pensamento é resultado da colaboração de várias partes da mente, algumas das quais podem estar envolvidas com processos que chamamos de "imagens mentais", mas sem equivalência com as imagens externas que percebemos.

Pesquisadores, independentemente de seu posicionamento em relação à visualização, interessam-se pelas formas com que as imagens mentais são formadas e memorizadas nas mentes das pessoas. Comprovando tais interesses, vários testes são elaborados no intuito de avaliar as habilidades dos alunos na formação de imagens mentais, sem que seja admitido o uso de materiais escreventes ou tecnológicos no desenvolvimento das respostas (Zimmermann, Cunningham 1991, p.3). Um razoável detalhamento de alguns dos principais casos clássicos de testes usados por psicólogos encontra-se em Denis (1989) e Clements (1981).

Os significados atribuídos por Kosslyn ou Pylyshyn aos termos "visualização", "imagens mentais", etc. não são compartilhados por muitos psicólogos educacionais, nem por matemáticos, professores de matemática ou educadores matemáticos. Estes tendem a dar a esses termos um significado mais simples e geral: uma "imagem mental" é uma representação mental de um conceito ou propriedade matemática que contém informações baseadas em elementos pictóricos, gráficos ou diagramáticos. "Visualização", ou pensamento visual, é o tipo de raciocínio baseado no uso de imagens mentais.

Uma das principais razões para tal desacordo é que, em matemática, o uso de desenhos, figuras, diagramas ou representações computacionais faz parte da atividade cotidiana nas salas de aula. Em oposição à abordagem dos psicólogos cognitivos, os educadores matemáticos consideram que as imagens mentais e as representações externas (ou seja, não mentais) devem interagir para alcançar uma melhor compreensão e resolver problemas. A visualização é o contexto em que essa interação acontece (Zimmermann, Cunningham 1991, p. 3). Além disso, muitas imagens mentais usadas em matemática não têm uma base pictórica, uma vez que são

baseadas em diagramas, outras formas visuais de representação de conceitos ou até mesmo informações textuais ou simbólicas.

Dentro da educação matemática, podemos encontrar vários trabalhos teóricos interessantes sobre visualização. Embora tenham elementos em comum, eles não foram expressos como partes de um único corpo teórico. Um dos objetivos da pesquisa que está sendo realizada é definir um arcabouço que integre essas peças e fornecer suporte experimental para a organização teórica geral resultante.

Para Yakimanskaya (1991), uma "imagem espacial" é criada a partir da cognição sensorial das relações espaciais e pode ser expressa em uma variedade de formas verbais ou gráficas, incluindo diagramas, imagens, desenhos, esboços etc., portanto, ela enfatiza a interação mencionada entre imagens espaciais e representações externas. Além disso, as imagens espaciais devem ser dinâmicas, flexíveis e operacionais. Ela descreve o "pensamento espacial" como uma forma de atividade mental que possibilita criar imagens espaciais e manipulá-las durante a resolução de vários problemas práticos e teóricos, incluindo-se operações verbais e conceituais, e vários eventos perceptuais necessários para formar imagens mentais. Yakimanskaya, portanto, considera que as imagens são as unidades operativas básicas do pensamento espacial, e os objetos geométricos são o material básico usado para criar e manipular imagens espaciais.

Já Clements (1982, p. 36) considera que o conceito de "imagem" como uma imagem na mente é válido na educação matemática. Lean e Clements (1981, p. 267-68), seguindo as teorias psicológicas dominantes da época, definem: "Imaginação mental" como a ocorrência de atividade mental correspondente à percepção de um objeto, mas quando o objeto não está apresentado ao órgão dos sentidos. "Imaginação visual" como a imaginação mental que ocorre como uma imagem na "visão interna". "Habilidade espacial" como a capacidade de formular imagens mentais e manipular essas imagens na mente.

Por outro lado, Presmeg (1986, p. 42) propõe definir uma "imagem visual" como um esquema mental que representa informações visuais ou espaciais, com ou sem a presença de um objeto ou outra representação externa. Assim como na definição de Yakimanskaya, Presmeg deseja incluir dentro do conceito de imagem visual todas aquelas imagens que têm um suporte gráfico diferente de uma imagem na mente. Ela reconhece que essa definição é mais ampla do que a maioria das definições anteriores, em particular a proposta por Lean, Clements (1981) e Clements (1982). Na mesma linha, Dreyfus (1995, p. 3) define "imaginação visual" como o uso de imagens mentais com um forte componente visual.

Essas amplas definições de imagens mentais permitem a possibilidade de haver vários tipos de imagens. Presmeg (1986) relata os resultados de uma pesquisa que busca estabelecer diferentes tipos de imagens visuais. Segundo Gutiérrez (1996), Presmeg classifica as definições de imagens observadas em seus alunos são classificadas como:

- Imagens concretas e pictóricas: O tipo de imagens de "imagem na mente" referidas por outros autores.
- Imagens de padrão: Imagens que representam relações matemáticas abstratas de forma visual.
- Imagens de fórmulas: Alguns alunos conseguem “ver” em suas mentes uma fórmula como ela aparecia escrita no quadro-negro ou no livro didático.
- Imagens cinestésicas: Aqueles que são criados, transformados ou comunicados com a ajuda de movimentos físicos.
- Imagens dinâmicas: Aqueles que têm movimento na mente.

Bishop (1983, p. 177), analisando o problema da visualização de um ponto de vista diferente, reconhece duas habilidades na visualização:

- O “processamento visual” de informações (abreviado para VP), incluindo a tradução de relações abstratas e dados não figurativos em termos visuais, a manipulação e extrapolação de imagens visuais e a transformação de uma imagem visual em outra.
- A “interpretação de informações figurativas” (abreviada para IFI), envolvendo conhecimento das convenções visuais e do “vocabulário” espacial usado em trabalhos geométricos, gráficos, tabelas e diagramas de todos os tipos ... e ... a “leitura” e interpretação de imagens visuais, sejam mentais ou físicas, para obter delas quaisquer informações relevantes que possam ajudar a resolver um problema.

Bishop apresenta IFI e VP como habilidades das pessoas, mas, como definidas, elas se encaixam melhor na categoria de processos a serem realizados. A descrição de uma habilidade deve incluir informações sobre a maneira como pode ser realizada ou as competências a serem utilizadas. A descrição de um processo deve incluir informações sobre a ação a ser feita, mas é independente da maneira de realizá-la em um caso específico. Por exemplo, o processo de rotação de uma imagem mental, que é parte do processo IFI, consiste em converter a imagem inicial em outra que apresenta o mesmo objeto visto enquanto a rotação ocorre ou após ela ter sido completada. A maneira como essa rotação mental é realizada, ou seja, a habilidade a ser

usada, depende da dimensão da rotação (no plano ou no espaço), da posição do centro ou eixo de rotação em relação à figura (interior ou exterior), da posição do eixo de rotação em relação ao sujeito (vertical, horizontal ou ortogonal ao plano de visão), e das habilidades adquiridas pelo sujeito. Pode-se observar a presença de uma variedade de habilidades ao propor vários problemas a diferentes alunos.

Yakimanskaya (1991, p. 101) descreve dois níveis de atividade no pensamento espacial: a criação de imagens mentais e sua manipulação ou uso, como dois processos intimamente inter-relacionados. A semelhança desses processos com VP e IFI é evidente. Por outro lado, Kosslyn (1980) identifica quatro processos aplicáveis à visualização e às imagens mentais:

- Gerar uma imagem mental a partir de algumas informações dadas;
- Inspeccionar uma imagem mental para observar sua posição ou a presença de partes ou elementos;
- Transformar uma imagem mental girando, traduzindo, escalonando ou decompondo-a;
- Usar uma imagem mental para responder perguntas.

As transformações investigadas por Kosslyn são apenas parte daquelas realizadas com imagens mentais em matemática. Por exemplo, é bastante comum deformar figuras para resolver problemas de geometria. Como exemplo, quando os alunos estão aprendendo relações entre quadriláteros, eles podem imaginar um retângulo diminuindo para se tornar um quadrado e depois novamente um retângulo. Embora o conceito de imagem mental de Kosslyn seja diferente do dos educadores de matemática mencionados, exceto Clements, o primeiro processo que ele define é equivalente ao processo VP, e os três outros são partes do processo IFI mais geral. Pode-se perceber, então, que Kosslyn, Yakimanskaya e Bishop se referem aos mesmos processos de visualização, com a única diferença sendo que o modelo de Kosslyn é mais detalhado do que os outros dois.

5.3 Potencial dos softwares de Geometria Dinâmica

Segundo Mota, Pinto e Ferreira (2019, p. 192):

Os softwares de Geometria Dinâmica proporcionam novas possibilidades de exploração e experimentação de estratégias didáticas a partir do movimento produzido em construções geométricas. Essa estrutura dinâmica proporciona a visualização das construções, de seus elementos e propriedades, tanto no espaço bidimensional quanto no tridimensional. Os softwares gráficos para ensino e aprendizagem de Matemática possibilitam a visualização das distintas representações de um objeto simultaneamente e, por conseguinte, a transição entre as múltiplas representações.

Dada a quantidade e a qualidade dos produtos tecnológicos disponíveis destinados ao ensino e à aprendizagem de matemática, tanto para computadores (GeoGebra, MATLAB, Wolfram Mathematica, Maple, Desmos), quanto para smartphones ou tablets (Photomath, MalMath, Cymath, Mathway, GeoGebra Graphing Calculator), percebe-se a significativa evolução na utilização de tais recursos. Diversos educadores, estudiosos e especialistas em tecnologia colaboram na criação de softwares de código aberto, bem como no aprimoramento de novas ferramentas que visam torná-los mais atrativos, eficientes e funcionais para aplicação no ambiente educacional.

Conforme destacado por Melo e Fireman (2016, p. 14) em sua prática de ensino:

“a utilização de softwares relacionados ao ensino e aprendizagem deve-se à capacidade de a maioria executar os mais diversos conteúdos matemáticos de forma dinâmica, fazendo com que o aluno enxergue o conteúdo sob diversos ângulos, aguçando seu espírito de observação e de pesquisa. (...) No entanto, é preciso que sua escolha pelo docente seja resultado de um planejamento didático-pedagógico, analisado com cuidado para que se possa atingir aos objetivos de aprendizagem de determinado conteúdo matemático.”

As crianças não se limitam a manusear controles remotos; elas também enviam mensagens, criam diferentes códigos e interagem constantemente com o ambiente digital, realizando ações como buscar, baixar, clicar, arrastar, maximizar e minimizar, segundo observa Bairral (2012, p. 15-16). Diante disso, as escolas precisam se adaptar a esse novo cenário, incorporando tecnologias modernas para aprimorar a relação entre ensino e aprendizagem. A educação matemática em ambientes tecnológicos requer ações que envolvam fazer, experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair e demonstrar o conhecimento adquirido.

Os desafios enfrentados na realização da integração da informática e aplicação de recursos tecnológicos são impulsionados por diversos fatores estruturais e pedagógicos, como a dificuldade de acesso a ferramentas como computadores, calculadoras, internet e softwares, além das barreiras na criação de recursos pedagógicos, como sequências didáticas, desenvolvimento ou adaptação de atividades e adequação curricular. Borba *et al.* (2014) discutem o uso das tecnologias na Educação Matemática no Brasil, propondo tal integração da informática e recursos tecnológicos no ensino de Matemática e ressaltando a complexidade de tal implementação.

Nesse cenário, é essencial que os educadores implementem abordagens metodológicas que integrem as novas tecnologias, visando promover uma interação mais rica e o aproveitamento das diversas oportunidades que essas ferramentas oferecem. Essa estratégia busca a assimilação de novos conhecimentos, habilidades e atitudes em consonância com as

exigências do ambiente digital contemporâneo. O uso de recursos tecnológicos no ensino de Matemática facilita uma visualização mais efetiva dos conceitos por parte dos alunos, contribuindo assim para uma compreensão mais aprofundada dos significados (Godino; Batanero; Font, 2007). Com base nisso, os alunos podem desenvolver a competência de resolver uma variedade de problemas que envolvem tais conceitos, empregando diferentes representações, conforme enfatiza Duval (2012, p. 270):

“é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, linguagem natural etc.) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. [...] O recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações.”

6 O USO DE UMA FERRAMENTA DIGITAL NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL: O GEOGEBRA

O ensino da Geometria no Ensino Médio enfrenta o desafio de conectar conceitos abstratos a aplicações práticas e à realidade dos estudantes. Nesse contexto, o GeoGebra, um software dinâmico e interativo, desempenha um papel fundamental ao enriquecer o processo de ensino-aprendizagem. Essa ferramenta possibilita a exploração visual e a manipulação direta de figuras geométricas, promovendo maior compreensão e engajamento dos estudantes.

Uma das principais contribuições do GeoGebra é sua capacidade de dinamizar a construção de figuras geométricas e a análise de suas propriedades. Ao permitir que os estudantes alterem parâmetros e observem as transformações em tempo real, o software fomenta a experimentação e o raciocínio dedutivo, habilidades essenciais para o aprendizado da Geometria. Por exemplo, a exploração de conceitos como congruência, semelhança e relações métricas em triângulos pode ser realizada de forma interativa, tornando o aprendizado mais acessível e significativo.

Além disso, o GeoGebra viabiliza o estudo de sólidos geométricos em um ambiente tridimensional, superando as limitações de representações estáticas no plano. Os estudantes podem rotacionar e manipular sólidos, visualizar seções transversais e compreender propriedades volumétricas e de área de forma mais concreta. Essa abordagem contribui para a superação de dificuldades comuns no aprendizado da Geometria Espacial, favorecendo a construção de uma visão tridimensional.

Outro ponto de destaque é o potencial do GeoGebra para integrar Geometria com outras áreas da Matemática, como Álgebra e Cálculo. O software permite que funções sejam visualizadas em conjunto com figuras geométricas, facilitando a compreensão de conceitos como áreas delimitadas por curvas ou volumes de sólidos de revolução. Essa interdisciplinaridade reforça a importância da Matemática como um campo unificado de conhecimento.

Além disso, o GeoGebra incentiva o uso de metodologias ativas, como a resolução de problemas e o aprendizado baseado em projetos. Por meio do software, os estudantes podem criar e explorar modelos geométricos relacionados ao cotidiano, promovendo o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia. Professores, por sua vez, podem diversificar suas práticas pedagógicas, utilizando a ferramenta para demonstrar conceitos, propor atividades investigativas e avaliar a compreensão dos alunos.

Em suma, o GeoGebra transforma o ensino da Geometria no Ensino Médio ao proporcionar um ambiente dinâmico, interativo e interdisciplinar. Sua utilização promove não apenas a compreensão dos conceitos geométricos, mas também o desenvolvimento de competências como o pensamento lógico, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Essa ferramenta, portanto, é uma aliada indispensável para a construção de um ensino de Matemática mais atrativo e eficaz.

6.1 Competências e Habilidades do Discente no Contexto Atual

6.1.1 Competências e Habilidades Profissionais

A educação está em um processo contínuo de transformação, o que implica constante reconfiguração do papel do docente. Com o avanço acelerado das tecnologias e a crescente globalização, é oportuno que o educador seja capaz de adquirir competências e habilidades específicas para atender de maneira eficaz às demandas dos alunos e da sociedade.

Inicialmente, a alfabetização digital surge como uma competência fundamental ao desenvolvimento dos educadores, dado que se trata de uma habilidade indispensável para a prática pedagógica no contexto contemporâneo, caracterizado por uma imersão crescente nas tecnologias da informação e comunicação. A evolução tecnológica tem impactado significativamente as formas de aprendizagem, exigindo que os professores compreendam essas transformações. Assim, é apropriado que os docentes possuam proficiência tecnológica e sejam capazes de utilizar as tecnologias da informação e comunicação (TIC) para potencializar o processo de aprendizagem dos alunos. Isso engloba o uso de ferramentas como redes sociais e plataformas de ensino online (Costa Júnior *et al.*, 2023).

Outra competência importante é a capacidade de adaptar-se às mudanças. Com a rápida evolução da tecnologia e as mudanças na sociedade, é conveniente que os professores estejam prontos para mudar e se adaptar. Os professores precisam ser capazes de "mudar de forma constante e contínua" para atender às necessidades dos alunos e da sociedade (Costa Júnior *et al.*, 2023).

Mais uma competência de relevância crucial para os docentes do futuro consiste na capacidade de ensinar habilidades associadas ao pensamento computacional e à programação. Considerando o papel cada vez mais premente da tecnologia na sociedade contemporânea, tais habilidades tornam-se progressivamente indispensáveis. Os educadores devem reconhecer a importância do pensamento computacional e da programação no contexto educacional, além de

estarem devidamente preparados para incorporar essas competências no processo de ensino-aprendizagem em sala de aula (Queiroz, 2018).

Ademais, a capacidade de inovar e ser criativo torna-se cada vez mais essencial para os educadores do futuro. É fundamental que os docentes possuam a habilidade de aplicar a criatividade no desenvolvimento de métodos de ensino inovadores, além de promoverem o aprimoramento das habilidades criativas nos alunos. Isso envolve, por exemplo, a incorporação de tecnologias avançadas, como jogos educacionais, simulações, realidade aumentada e virtual, entre outras (Costa Júnior *et al.*, 2023).

De acordo com Mishra e Koehler (2006), é fundamental que o docente esteja capacitado para utilizar, de maneira eficaz, as tecnologias disponíveis, além de desenvolver habilidades relacionadas ao pensamento crítico e criativo. Ademais, o professor deve ser capaz de lidar com a diversidade cultural presente entre os alunos e estruturar ambientes de aprendizagem colaborativos. Nesse contexto, torna-se indispensável que os educadores aprimorem suas competências digitais, compreendam a tecnologia como um instrumento pedagógico e adotem abordagens inovadoras e flexíveis no processo de ensino.

Com base nessas considerações, evidencia-se a necessidade de o professor contemporâneo dominar um conjunto abrangente de competências e habilidades específicas. Para assegurar uma formação docente alinhada às demandas do cenário atual, é essencial que as instituições de ensino e as políticas públicas invistam em programas de formação inicial e continuada que priorizem o desenvolvimento integral do educador, bem como o fortalecimento de suas competências profissionais.

6.1.2 Competências e Habilidades Pedagógicas

A sociedade contemporânea tem vivenciado transformações profundas, as quais impactam diretamente os processos educativos e impõem a necessidade de novos saberes e competências aos profissionais da área (Castells, 2001). Nesse cenário, torna-se indispensável que os professores desenvolvam competências pedagógicas que viabilizem a adoção de metodologias ativas, fomentando tanto a autonomia no aprendizado quanto a construção colaborativa do conhecimento.

Entre as competências fundamentais do educador, destaca-se a capacidade de planejar, elaborar e implementar projetos pedagógicos inovadores, que estejam em consonância com as demandas e expectativas dos estudantes. É igualmente crucial que os docentes desenvolvam estratégias pedagógicas capazes de promover a compreensão dos conteúdos de maneira

significativa, além de estimular o engajamento dos alunos no processo educativo (Moran, 2012).

Adicionalmente, cabe ao professor criar oportunidades de aprendizagem que favoreçam o desenvolvimento do pensamento crítico e da criatividade nos discentes, assegurando uma experiência educativa relevante e contextualizada. A integração crítica e reflexiva de tecnologias às práticas pedagógicas é outro aspecto imprescindível, uma vez que tais ferramentas têm o potencial de ampliar e qualificar o aprendizado dos alunos (Kenski, 2012).

A capacidade de adaptação às inovações e transformações no campo educacional desponta como uma habilidade indispensável ao profissional da educação, que deve buscar o constante aprimoramento de suas práticas. Paralelamente, é fundamental a habilidade de trabalhar colaborativamente, articulando-se com outros educadores e profissionais de diferentes áreas, de modo a desenvolver projetos e estratégias pedagógicas criativas e eficazes (Costa Júnior *et al.*, 2023).

Compreender que o aprendizado está intrinsecamente relacionado ao significado atribuído pelo aluno aos conteúdos explorados também é essencial. Nesse sentido, a educação significativa, que considera as vivências e o cotidiano do estudante, demonstra-se uma abordagem promissora para tornar o processo de ensino mais dinâmico e relevante. Conforme argumentado por Costa Júnior *et al.* (2022), a educação vai além dos limites físicos das instituições de ensino, envolvendo o desenvolvimento de aprendizagens contextualizadas e significativas.

A teoria da aprendizagem significativa de Ausubel corrobora essa perspectiva, ao destacar que o aprendizado ocorre de maneira mais efetiva quando novos conhecimentos são relacionados aos saberes prévios dos alunos. Essa abordagem valoriza tanto a compreensão quanto as experiências em diversos contextos, integrando o cotidiano à sala de aula como forma de construir significados reais e aplicáveis à vida dos estudantes (Costa Júnior *et al.*, 2023).

Assim, diante do volume crescente de informações a que os estudantes são expostos, cabe à educação criar condições pedagógicas que não apenas acompanhem essa realidade, mas que a utilizem como um aliado no processo de ensino-aprendizagem. É necessário, portanto, que práticas educativas considerem o uso regular das experiências e saberes prévios dos alunos como fundamentos para a aquisição de novos conhecimentos, potencializando o processo de construção e reconstrução de saberes (Costa Júnior *et al.*, 2022).

6.1.3 Competências e Habilidades Técnicas e Tecnológicas

Nos últimos anos, a evolução tecnológica tem transformado de maneira significativa os modos de comunicação, produção e acesso à informação. Nesse cenário, a educação, enquanto campo essencial para o desenvolvimento humano, também deve se adaptar, integrando novas ferramentas que aprimorem o processo de ensino e aprendizagem. A tecnologia, por sua vez, configura-se como um recurso de grande potencial pedagógico, desde que o professor esteja apto a utilizá-la de forma eficiente e alinhada às demandas educacionais contemporâneas.

As competências técnicas, que incluem conhecimentos em informática, software e hardware, apresentam-se como imprescindíveis para que o professor integre a tecnologia ao ambiente educacional. De acordo com Mishra e Koehler (2006), tais competências abrangem desde o domínio básico de ferramentas de edição de textos e apresentações até a habilidade de elaborar projetos educacionais que combinem a utilização de recursos tecnológicos com práticas pedagógicas inovadoras.

A alfabetização digital dos professores também ocupa posição central nesse contexto. Conforme orientações da Unesco (2009), essa habilidade é uma das metas prioritárias nos programas de formação docente, sendo necessária para garantir que os professores estejam aptos a implementar práticas educacionais que utilizem a tecnologia de forma significativa. Dessa forma, com base na proposta de alfabetização em tecnologia e na alfabetização digital, os primeiros passos no desenvolvimento das competências docentes voltadas para a integração tecnológica envolvem o domínio inicial de habilidades digitais. Nesse sentido, é essencial que os professores sejam capazes de selecionar e aplicar recursos tecnológicos como tutoriais educacionais, jogos interativos, atividades práticas e conteúdos disponíveis na web, seja em laboratórios de informática, seja em salas de aula com estrutura mais limitada. Tais ferramentas devem ser utilizadas de maneira a complementar os objetivos estabelecidos no currículo, alinhando-as às estratégias avaliativas, ao planejamento de unidades temáticas e às metodologias de ensino adotadas. Além disso, os professores precisam dominar o uso das tecnologias de informação e comunicação (TIC) para gerenciar dados relacionados ao ambiente escolar e, também, para aprimorar continuamente sua formação e desenvolvimento profissional (Unesco, 2009).

Além dos conhecimentos técnicos, é essencial que os educadores desenvolvam habilidades específicas voltadas ao uso de tecnologias educacionais, como plataformas virtuais de aprendizagem e jogos pedagógicos. A aplicação dessas ferramentas contribui para o engajamento dos estudantes, ao tornar as práticas educativas mais dinâmicas e interativas.

Contudo, como ressalta Castells (2001), a tecnologia não deve ser compreendida como uma solução universal para os desafios educacionais, mas como um instrumento que, quando empregado de forma criativa e inovadora, auxilia na concretização de objetivos pedagógicos específicos.

Ademais, o professor do futuro deve incorporar em sua prática habilidades socioemocionais que o capacitem a enfrentar os desafios de uma sociedade cada vez mais complexa e diversificada. Fullan (2010) destaca que a empatia, a colaboração e a liderança são competências fundamentais para que o docente crie um ambiente educacional inclusivo, que valorize a diversidade e promova a integração de diferentes perspectivas.

A atualização constante do professor, fundamentada em uma formação continuada que contemple tanto aspectos técnicos quanto pedagógicos e socioemocionais, é essencial para que ele atenda às demandas da contemporaneidade. Assim, torna-se necessário que a formação docente inclua não apenas o domínio de novas tecnologias, mas também a promoção de valores como inclusão, diversidade e adaptabilidade.

Portanto, a formação de professores deve ser compreendida como um processo abrangente, que vá além do ensino de conteúdos técnicos e abarque o desenvolvimento de competências que considerem as mudanças culturais, sociais e tecnológicas da sociedade atual. Ao articular tais competências, será possível formar educadores capazes de atuar de maneira eficaz, criativa e ética frente aos desafios impostos pela contemporaneidade.

6.2 O uso do GeoGebra no Ensino de Geometria Espacial

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica, desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2001, que se caracteriza pela integração de álgebra, geometria e cálculo, oferecendo uma plataforma de ensino e aprendizagem que pode ser aplicada a todos os níveis educacionais, do ensino fundamental ao superior. O nome do software resulta da fusão das palavras "geometria" e "álgebra", refletindo a proposta central do programa de interligar essas duas disciplinas, com o intuito de proporcionar uma abordagem mais dinâmica e interativa para o estudo da matemática. A utilização dessa ferramenta no processo de ensino pode contribuir significativamente para a melhoria da aprendizagem dos alunos, pois permite que o ensino da matemática se torne mais fluido e dinâmico, promovendo, dessa forma, a participação ativa dos alunos e estimulando-os a desenvolverem suas próprias estratégias de resolução de problemas geométricos. O uso do GeoGebra, portanto, visa engajar os estudantes, tornando-os mais protagonistas em sua jornada de aprendizagem (Alexandre Júnior, 2022).

Santos e Moita (2016) destacam que os recursos tecnológicos desempenham um papel fundamental no processo educacional, uma vez que possibilitam ao professor uma abordagem mais flexível e interativa, além de oferecerem ferramentas que facilitam a criação e a implementação de novas práticas pedagógicas. Essas práticas, por sua vez, podem tornar o processo de ensino mais produtivo e dinâmico, permitindo que os educadores reformulem e reinvençam o ato de ensinar, com a utilização de tecnologias que promovem o envolvimento dos alunos de maneira mais significativa.

O GeoGebra se destaca por sua capacidade de manipular diversas variáveis matemáticas, como números, pontos e vetores, além de permitir a combinação de funções algébricas e a determinação de raízes e pontos de extremidade de uma função. Uma das grandes vantagens dessa ferramenta reside na possibilidade de demonstrar, de maneira clara e didática, a interação entre a álgebra e a geometria. O software possibilita ao usuário visualizar, criar e animar objetos geométricos em um ambiente tridimensional, proporcionando uma compreensão mais profunda das inter-relações existentes entre os conceitos matemáticos. Esse recurso torna o GeoGebra uma ferramenta poderosa para a construção de um entendimento mais integrado e visual dos conteúdos abordados em sala de aula. Além disso, o GeoGebra permite que o professor crie um ambiente de ensino mais ativo e interativo, no qual os alunos podem manipular figuras geométricas em três dimensões, explorar as propriedades dessas figuras de maneira visual e intuitiva e realizar comparações entre diferentes aspectos geométricos. Esse tipo de interação torna o processo de aprendizagem mais envolvente e facilita a assimilação de conceitos complexos de geometria, que muitas vezes são difíceis de compreender apenas por meio de métodos tradicionais, como o uso de quadros e papel (Alexandre Júnior, 2022).

Outro ponto relevante é o fato de que o GeoGebra é um software gratuito, o que o torna acessível a um público amplo. Ele pode ser utilizado tanto em computadores quanto em dispositivos móveis, o que amplia suas possibilidades de uso e facilita seu acesso. A interface do software, embora rica em funcionalidades, é projetada para ser intuitiva e acessível, permitindo que tanto professores quanto alunos possam utilizá-lo de maneira eficaz, sem necessidade de um treinamento complexo.

Neste trabalho, foi utilizada o “GeoGebra Classic 6”, na versão 6.0.871.0 do GeoGebra para o sistema operacional MacOS (Macintosh). Além da versão clássica, há também disponíveis para MacOS: “GeoGebra CAS Calculator” (calculadora CAS – GeoGebra), GeoGebra Graphing Calculator (Calculadora Gráfica – GeoGebra), GeoGebra Geometry, Gráfico 3D, Geometria e Calculadora Gráfica. Há também disponível no site oficial a versão para o sistema Windows. Para os objetivos deste estudo, foi dada prioridade ao uso da opção

"Calculadora 3D", devido à sua aplicabilidade no contexto da exploração de conceitos geométricos tridimensionais.

Além disso, o GeoGebra oferece uma série de manuais detalhados que explicam o funcionamento de cada uma de suas ferramentas e funcionalidades. Esses manuais estão disponíveis no site oficial do software (<https://www.geogebra.org/>) e servem como um recurso valioso para aqueles que desejam explorar o software de maneira mais aprofundada, seja do ponto de vista técnico, seja no que tange à sua aplicação pedagógica.

7 ATIVIDADES COM O USO DO GEOGEBRA

Este capítulo apresenta as atividades desenvolvidas nesta pesquisa, voltadas para a exploração de conceitos fundamentais da Geometria Espacial, com ênfase em projeção ortogonal, sólidos de revolução e truncamento de sólidos. O produto pedagógico desenvolvido é um *e-book* de atividades criado na plataforma GeoGebra (Figura 103) que tem como objetivo fornecer um conjunto de atividades que auxiliem os professores na ministração dos conteúdos programáticos e, além disso, que permitam aos alunos uma melhor compreensão dos assuntos, favorecendo a visualização tridimensional dos conceitos abordados. Ressalta-se que a pesquisa não foi testada em ambiente escolar. O acesso ao e-book pode ser feito pelo endereço <https://www.geogebra.org/m/twqxutq5>.

Figura 103 - Capa do e-book de atividades no GeoGebra



Fonte: O autor. 2025.

As atividades foram elaboradas considerando as diretrizes curriculares previstas na BNCC e as necessidades dos alunos do Ensino Médio. Foram desenvolvidas e selecionadas atividades que exploram a visualização e compreensão dos sólidos geométricos sob diferentes perspectivas.

Inicialmente, serão trabalhadas as habilidades relacionadas às projeções ortogonais, explorando a representação bidimensional de objetos tridimensionais e a relação entre diferentes vistas ortogonais. O uso do GeoGebra possibilitará a construção e manipulação de sólidos geométricos, permitindo a visualização das projeções em planos distintos e a análise das variações decorrentes da posição e orientação do objeto. Pretende-se que essa abordagem favoreça a compreensão dos princípios fundamentais da projeção ortogonal, auxiliando na interpretação espacial e na transição entre diferentes representações geométricas.

Em seguida, serão explorados os sólidos de revolução, considerando a obtenção de cilindros, cones, troncos de cones e esferas a partir da rotação de figuras planas como retângulos, triângulos e círculos. O uso do GeoGebra possibilitará a visualização do processo de rotação e a análise de como a mudança nos elementos geradores altera a forma final do sólido. Objetiva-se que este estudo proporcione uma abordagem dinâmica, possibilitando o desenvolvimento das habilidades inerentes à revolução de sólidos e de visualização geométrica.

Na terceira etapa, será abordado o truncamento de sólidos, destacando sua aplicação na construção de poliedros arquimedianos e na obtenção de novas formas a partir de sólidos regulares. Os professores poderão utilizar o material para demonstrar cortes em poliedros, analisando a modificação das faces, vértices e arestas e estudando as propriedades resultantes. A atividade permitirá um aprofundamento no conceito de transformação geométrica e na inter-relação entre diferentes tipos de sólidos.

As atividades foram estruturadas com o objetivo de reforçar a compreensão dos conceitos geométricos, explorando propriedades fundamentais como simetria, relações métricas, áreas e volumes. Além disso, a utilização do GeoGebra proporcionará uma experiência interativa, favorecendo a visualização tridimensional e promovendo um aprendizado mais significativo.

A inserção de tecnologias no ensino da Matemática tem demonstrado um impacto positivo na construção do conhecimento, possibilitando aos alunos uma interação mais dinâmica com os conteúdos. O uso do GeoGebra, em particular, permitirá que os estudantes experimentem, manipulem e analisem as propriedades geométricas de forma visual e interativa, facilitando a compreensão de conceitos muitas vezes abstratos.

Nas próximas seções, serão explicitadas cada uma das atividades desenvolvidas, destacando-se os objetivos específicos, a metodologia sugerida para sua aplicação e as principais observações que podem ser obtidas a partir do uso do material.

As atividades desenvolvidas no âmbito desta dissertação têm como propósito central contribuir significativamente para o ensino e a aprendizagem de conceitos fundamentais da

Geometria Espacial, com ênfase nos tópicos de projeção ortogonal, superfícies e sólidos de revolução, bem como truncamento de sólidos. Para alcançar tal finalidade, elaborou-se um material didático estruturado na forma de um livro de atividades disponibilizado na plataforma GeoGebra, contendo construções interativas que fomentam a visualização geométrica. Essas construções incluem tanto modelos elaborados pelo próprio autor quanto outros já existentes na plataforma, além de um conjunto de questões criteriosamente selecionadas, abrangendo tanto problemas de autoria própria quanto questões extraídas de exames vestibulares. A intencionalidade pedagógica subjacente a essa proposta reside na promoção de um suporte efetivo aos docentes, proporcionando-lhes ferramentas que viabilizem uma abordagem didática mais intuitiva e dinâmica desses conceitos espaciais.

Além do suporte oferecido ao professor, o material elaborado busca atender, de maneira igualmente substancial, às necessidades dos alunos, auxiliando-os no desenvolvimento da capacidade de abstração e na construção de uma percepção mais aprofundada acerca das estruturas geométricas envolvidas nos problemas apresentados. O enfoque central do material não se encontra na exploração algébrica das resoluções, mas, sim, na facilitação do processo de compreensão e visualização das configurações espaciais descritas em cada situação proposta. Assim, ao permitir que o estudante explore interativamente os conceitos por meio do GeoGebra, pretende-se minimizar dificuldades inerentes à assimilação de tópicos da Geometria Espacial, promovendo um aprendizado mais acessível, significativo e alinhado ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

7.1 Atividades de Projeção Ortogonal

Nesta seção, serão abordadas as atividades associadas às projeções ortogonais, enfatizando a transposição de formas tridimensionais para representações bidimensionais e a inter-relação entre diferentes vistas ortogonais. Serão apresentadas quinze (15) questões de vestibulares regulamentados e amplamente reconhecidos pelo sistema educacional brasileiro (Fuvest e ENEM), presentes no e-book. Além das questões, estão presentes construções interativas, que possibilitam uma melhor visualização geométrica de projeções ortogonais. A utilização do software GeoGebra nesse processo viabiliza a modelagem, manipulação e exploração de sólidos geométricos, o que possibilitará a observação dinâmica das projeções em distintos planos de referência. Além disso, essa metodologia permitirá a análise minuciosa das transformações visuais resultantes das variações na posição e na orientação do objeto no espaço tridimensional. Objetiva-se que tal abordagem contribua significativamente para a assimilação

dos fundamentos teóricos e práticos inerentes à projeção ortogonal, fomentando o desenvolvimento da capacidade de interpretação espacial e facilitando a transição entre distintas formas de representação geométrica.

7.1.1 Roteiro de Aplicação das Atividades de Projeção Ortogonal para Professores

1. Objetivo Didático

Antes de iniciar, explicitar aos alunos:

- O que é projeção ortogonal;
- Por que ela é importante em geometria espacial;
- Como essa técnica aparece em contextos reais e em vestibulares.

Sugestão: Apresentar imagens ou animações de objetos reais com suas vistas ortogonais (frontal, lateral e superior).

2. Introdução Conceitual

Reserve um momento da aula para:

- O que é projeção ortogonal;
- Revisar os conceitos básicos de projeção ortogonal;
- Apresentar os planos de projeção (horizontal, vertical e lateral);
- Mostrar exemplos de objetos simples e suas respectivas projeções.

Sugestão: Usar alguns sólidos geométricos simples, como caixa de sapato, lata de refrigerante... para demonstrar fisicamente as projeções (com a luz da sala de aula apagada e a lanterna do celular sendo a fonte de iluminação).

3. Apresentação da Atividade

Projetar ou apresentar a(s) questão(ões) selecionada(s) do e-book:

- Leia e interprete o enunciado com os alunos;
- Destaque os elementos importantes (tipo de sólido, pontos de interesse, plano de projeção).

4. Exploração com o GeoGebra

Utilizar a construção interativa associada à atividade:

- Abrir o arquivo correspondente;
- Orientar os alunos a explorar diferentes ângulos, planos e projeções;

- Estimular que façam previsões antes de executar os movimentos com o controle deslizante ou girar o sólido.

Sugestão: Antes de executar os movimentos com o controle deslizante ou girar o sólido, perguntar 'Como você imagina que será a projeção no plano horizontal?'

5. Roteiro de Investigação Guiada (perguntas-chave)

Durante a atividade, propor perguntas como:

- Qual vista está sendo representada? Frontal, superior ou lateral?
- Que partes do objeto são visíveis nessa projeção?
- O que muda na imagem projetada ao alterar o plano projetante?
- Há perda de informações visuais ao projetar? Por quê?
- Se o objeto for rotacionado, a projeção muda? Como?

6. Atividade em Dupla ou Grupos

Dividir os alunos para resolver as atividades juntos nas quais cada grupo pode discutir suas interpretações e comparar as projeções com as dos outros.

7. Sistematização

Após a resolução dos problemas:

- Retomar os conceitos trabalhados;
- Mostrar a solução correta com base na projeção construída no GeoGebra;
- Pedir que os alunos expliquem com palavras o raciocínio por trás da construção da projeção.

8. Ampliação e Avaliação

- Propor uma nova situação-problema semelhante para resolução individual;
- Estimular que os alunos criem seus próprios exemplos de trajetos ou sólidos para serem projetados.

9. Reflexão Final

Finalizar a aula com uma discussão breve:

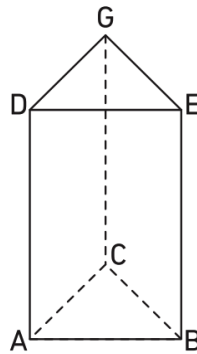
- O que foi mais difícil na projeção ortogonal?
- Em que situações do cotidiano, em outras áreas da matemática ou em outras disciplinas isso pode ser útil?
- O que o uso da ferramenta digital te ajudou a compreender melhor?

10. Estímulo à Produção de Representações Alternativas

Incentivar os alunos a criarem representações ortogonais de sólidos do cotidiano, diferentes dos já explorados. Solicitar que justifiquem suas escolhas com base nas vistas geradas. Essa proposta estimula a autonomia, criatividade e reforça a compreensão das projeções ortogonais.

1. (Fuvest-SP) Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG (Figura 104), seguindo um trajeto especial. Ela partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face ADGC e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a CG. A formiga chegou ao vértice:

Figura 104 - Prisma reto de bases triangulares ABC e DEG

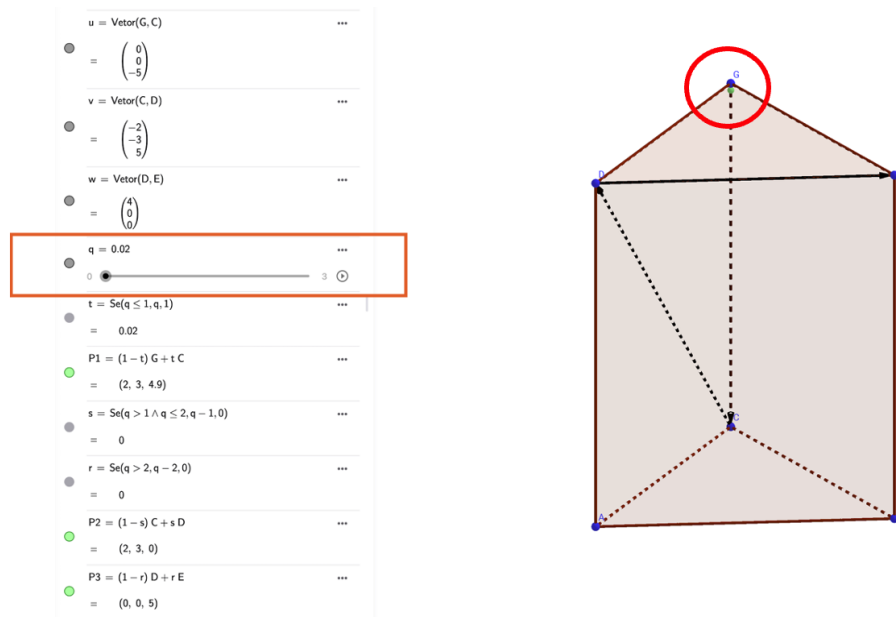


Fonte: Fuvest (1997).

- (A) A
- (B) B
- (C) C
- (D) D
- (E) E

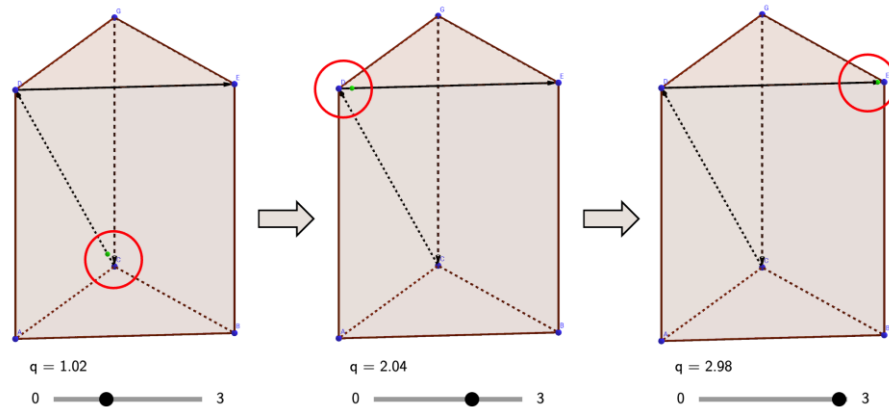
Orientação: Movendo-se o “controle deslizante” destacado na Figura 105, o ponto verde que representa a formiga, desloca-se pelo trajeto descrito no enunciado, conforme ilustra a Figura 106.

Figura 105 - Atividade do GeoGebra (trajetória da formiga)



Fonte: O autor, 2025.

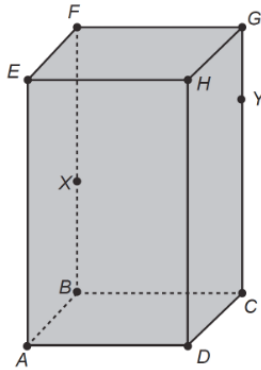
Figura 106 - Deslocamentos da formiga



Fonte: O autor, 2025.

2. (ENEM) Um inseto percorreu sobre a superfície de um objeto, em formato de um prisma reto ABCDEFGH, com base retangular (Figura 107), uma trajetória poligonal, com vértices nos pontos: A-X-Y-G-F-E-X-G-E, na ordem em que foram apresentados.

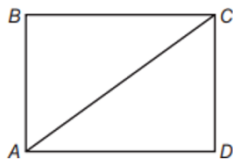
Figura 107 - Objeto em formato de prisma reto



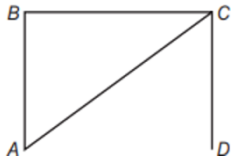
Fonte: INEP, 2021.

É necessário representar a projeção ortogonal do trajeto percorrido pelo inseto sobre o plano determinado pela base do prisma. A representação da projeção ortogonal do trajeto percorrido pelo inseto é

(A)



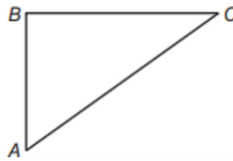
(B)

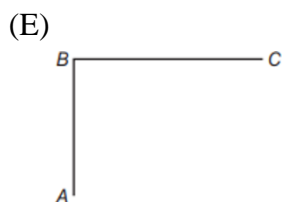


(C)



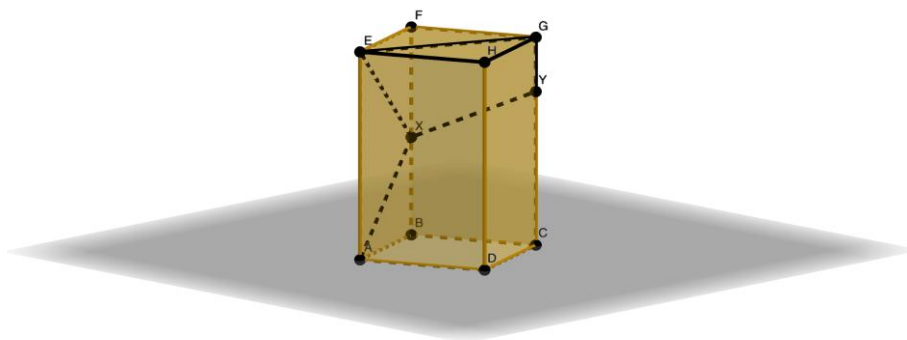
(D)





Orientação: Alterando-se a posição do sólido descrito no enunciado, em relação ao plano horizontal (clicando com o mouse na imagem e movendo para as direções desejadas), percebe-se a representação da projeção ortogonal do trajeto percorrido pelo inseto, conforme ilustram as Figuras 108 e 109.

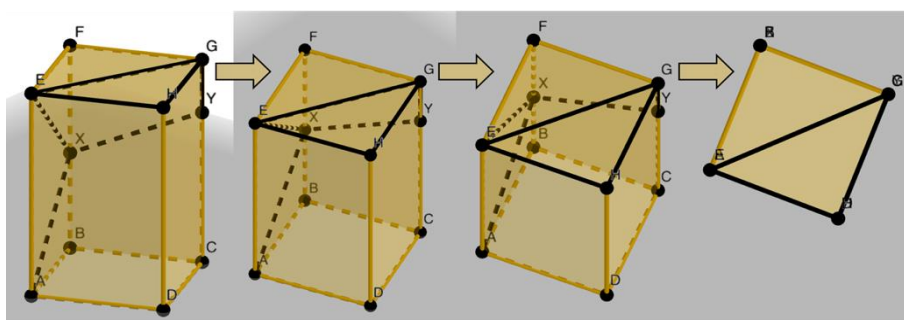
Figura 108 - Trajetória do inseto



Fonte: Mariana Soriano, 2023. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/wvtwptwd>.

Acesso em: 12 ago. 2024.

Figura 109 - Representação da projeção ortogonal do trajeto percorrido pelo inseto

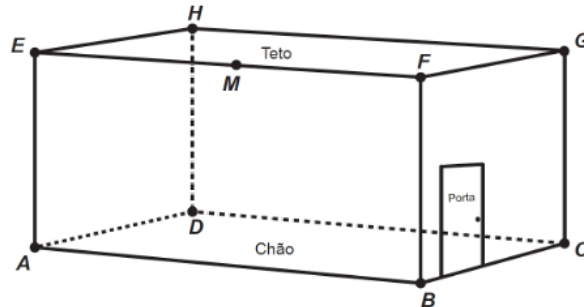


Fonte: Mariana Soriano, adaptado, 2025.

3. (ENEM) Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela Figura 110. A lagartixa parte do ponto B e vai até o ponto A. A seguir, de A ela se desloca, pela parede, até o ponto M, que é o ponto médio do segmento EF. Finalmente, pelo teto, ela vai do

ponto M até o ponto H. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

Figura 110 - quarto no formato de um paralelepípedo retangular



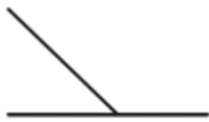
Fonte: INEP, 2017.

A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dada por:

(A)



(B)



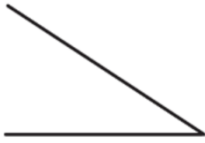
(C)



(D)

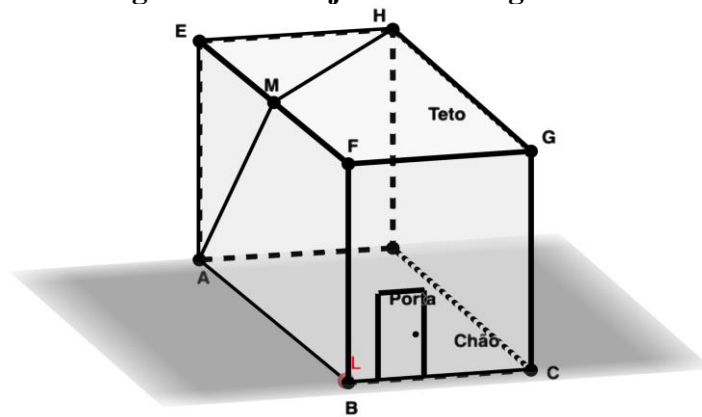


(E)



Orientação: Movendo-se o ponto “L” (Figura 111) pelo deslocamento da lagartixa descrito no enunciado, a projeção ortogonal da trajetória é simultaneamente representada em vermelho no plano horizontal (chão), conforme ilustra a Figura 112.

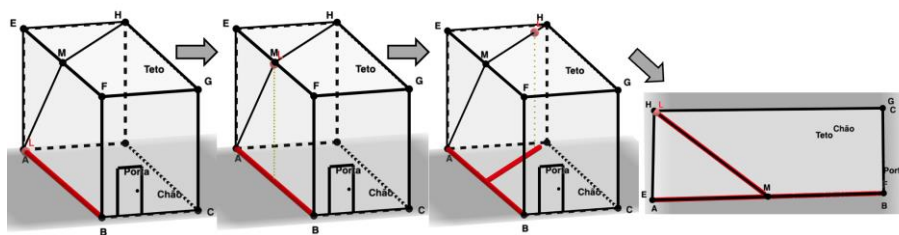
Figura 111 - Trajetória da Lagartixa



Fonte: Francisco Dias, 2019. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/uuhe4j3v>.

Acesso em: 15 ago. 2024.

Figura 112 - Representação da projeção ortogonal do trajeto percorrido pela lagartixa



Fonte: Francisco Dias, adaptado, 2025.

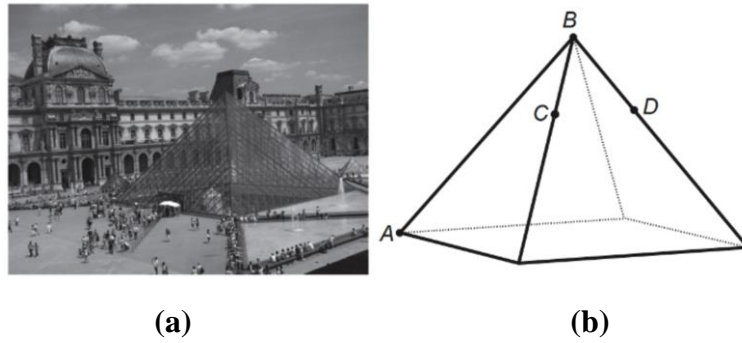
4. (ENEM) O Museu do Louvre, localizado em Paris, na França, é um dos museus mais visitados do mundo. Uma de suas atrações é a Pirâmide de Vidro, construída no final da década de 1980. Tem-se, na Figura 113 (a), uma foto da Pirâmide de Vidro do Louvre e, na Figura 113 (b), uma pirâmide reta de base quadrada que a ilustra.

Considere os pontos A, B, C, D como na Figura 113 (b). Suponha que alguns reparos devem ser efetuados na pirâmide. Para isso, uma pessoa fará o seguinte deslocamento:

- 1) partir do ponto A e ir até o ponto B, deslocando-se pela aresta AB;

- 2) ir de B até C, deslocando-se pela aresta que contém esses dois pontos;
- 3) ir de C até D, pelo caminho de menor comprimento;
- 4) deslocar-se de D até B pela aresta que contém esses dois pontos.

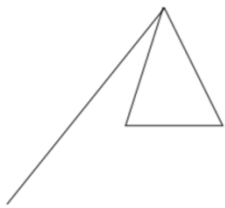
Figura 113 - Pirâmide de Vidro do Louvre e pirâmide reta de base quadrada



Fonte: INEP adaptada, 2017.

A projeção do trajeto da pessoa no plano da base da pirâmide é melhor representada por

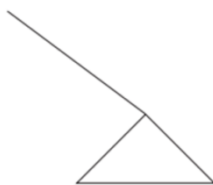
(A)



(B)

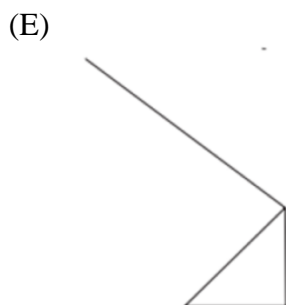


(C)



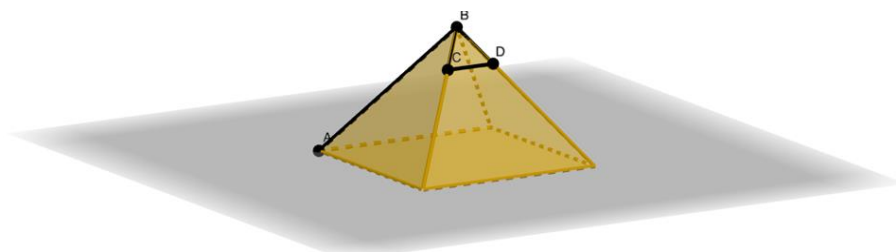
(D)





Orientação: Alterando-se a posição da pirâmide descrita no enunciado (já com os deslocamentos traçados), em relação ao plano horizontal (clicando com o mouse na imagem e movendo para as direções desejadas), percebe-se a representação da projeção ortogonal do trajeto da pessoa no plano da base da pirâmide, conforme ilustram as Figuras 114 e 115 a seguir.

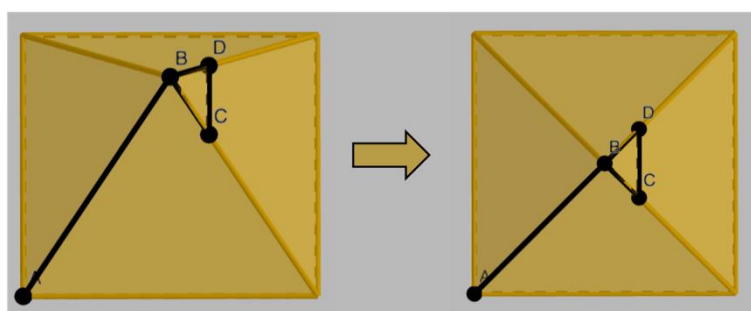
Figura 114 - Trajeto da pessoa



Fonte: Mariana Soriano, 2021. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/tkv7nx4x>.

Acesso em: 12 ago. 2024.

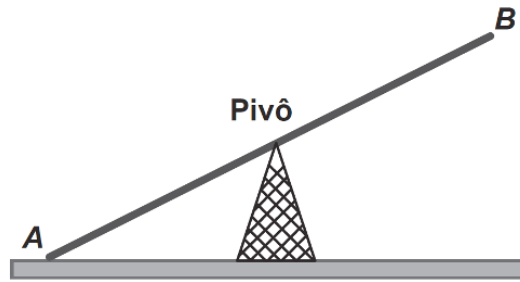
Figura 115 - Projeção ortogonal do trajeto da pessoa no plano da base da pirâmide



Fonte: Mariana Soriano, adaptado, 2024.

5. (ENEM) Gangorra é um brinquedo que consiste em uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra. Considere a gangorra representada na Figura 116, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:

Figura 116 - Gangorra



Fonte: INEP, 2013.

A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

(A)



(B)



(C)



(D)

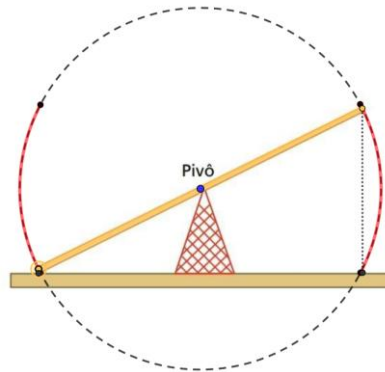


(E)



Orientação: Movendo-se o ponto “amarelo” pelo movimento da gangorra descrito no enunciado, a projeção ortogonal da trajetória é simultaneamente representada em preto no plano horizontal (chão), conforme ilustram as Figuras 117 e 118 a seguir.

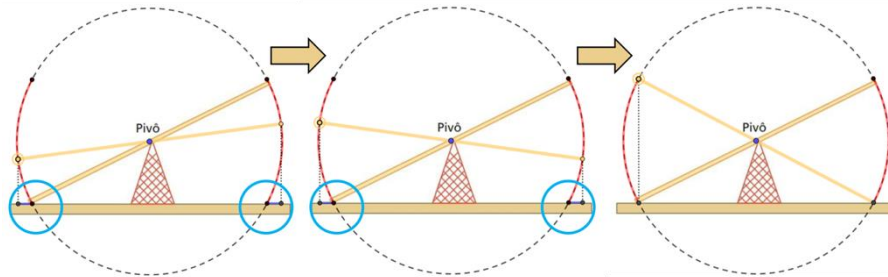
Figura 117 - Gangorra (atividade no GeoGebra)



Fonte: Professor Yudi, 2022. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/g26k3dbz>

Acesso em: 18 ago. 2024.

Figura 118 - Representação da projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B



Fonte: Professor Yudi, adaptado, 2025.

6. (ENEM) O Atomium, representado na imagem (Figura 119), é um dos principais pontos turísticos de Bruxelas. Ele foi construído em 1958 para a primeira grande exposição mundial depois da Segunda Guerra Mundial, a Feira Mundial de Bruxelas. Trata-se de uma estrutura metálica construída no formato de um cubo. Essa estrutura está apoiada por um dos vértices sobre uma base paralela ao plano do solo e a diagonal do cubo, contendo esse vértice, é ortogonal ao plano da base. Centradas nos vértices desse cubo, foram construídas oito esferas metálicas, e uma outra esfera foi construída centrada no ponto de interseção das diagonais do cubo. As oito esferas sobre os vértices são interligadas segundo suas arestas, e a esfera central se conecta a elas pelas diagonais do cubo.

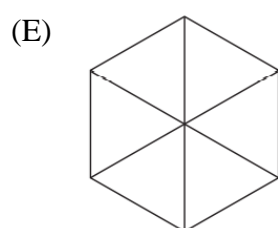
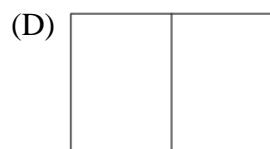
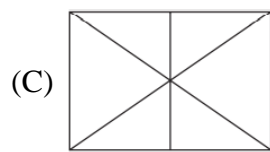
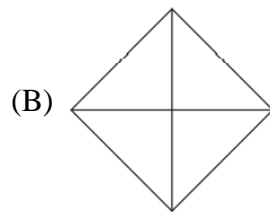
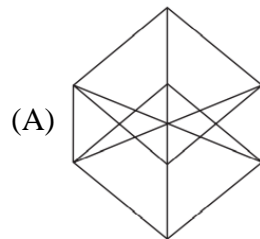
Todas essas interligações são feitas por tubos cilíndricos que possuem escadas em seu interior, permitindo o deslocamento de pessoas pela parte interna da estrutura. Na diagonal ortogonal à base, o deslocamento é feito por um elevador, que permite o deslocamento entre as esferas da base e a esfera do ponto mais alto, passando pela esfera central. Considere um visitante que se deslocou pelo interior do Atomium sempre em linha reta e seguindo o menor trajeto entre dois vértices, passando por todas as arestas e todas as diagonais do cubo.

Figura 119 - Atomium



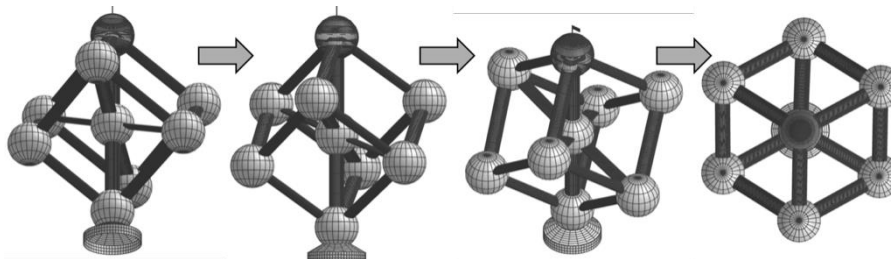
Fonte: INEP, 2021.

A projeção ortogonal sobre o plano do solo do trajeto percorrido por esse visitante é representada por



Orientação: Alterando-se a posição do Atomium, em relação ao plano horizontal (cliqueando com o mouse na imagem e movendo para as direções desejadas), percebe-se a representação da projeção ortogonal sobre o plano do solo do trajeto percorrido por esse visitante, conforme ilustra a Figura 120 a seguir.

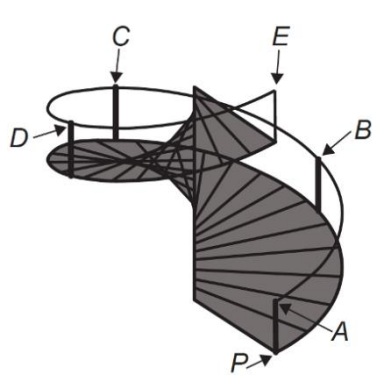
Figura 120 - Representação da projeção ortogonal da trajetória do Atomium



Fonte: Raúl Manuel Falcón Ganfornina, adaptado, 2025. Disponível em:
<https://www.geogebra.org/m/qn98DEbW>. Acesso em: 21 ago. 2024.

7. (ENEM) O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na Figura 121. Os pontos A, B, C, D, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando ponto A até o ponto D.

Figura 121 - Escada caracol

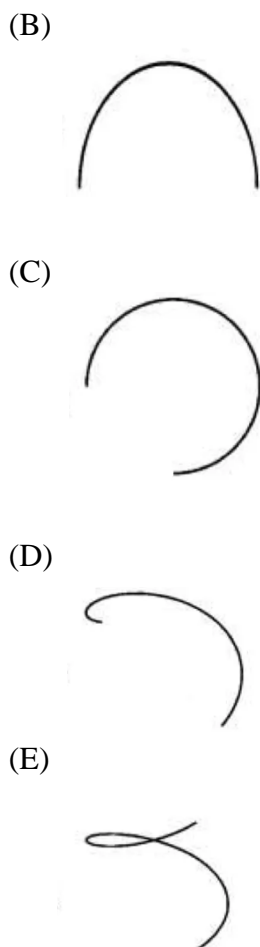


Fonte: INEP, 2014.

A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:

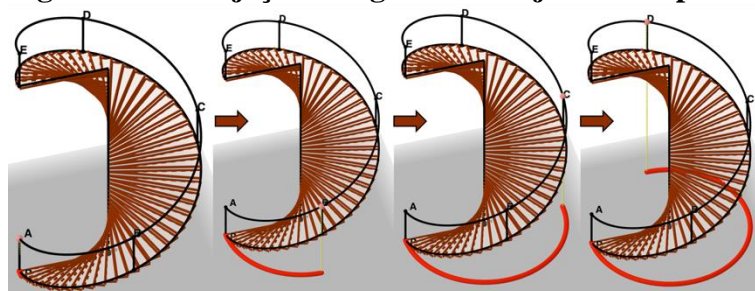
(A)





Orientação: Movendo-se o ponto “A” pelo deslocamento da pessoa descrito no enunciado, a projeção ortogonal da trajetória é simultaneamente representada em vermelho no plano horizontal (chão), conforme ilustra a Figura 122 a seguir.

Figura 122 - Projeção ortogonal da trajetória da pessoa



Fonte: Francisco Dias, adaptado, 2025. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/ud5mw3eb>.

Acesso em: 24 ago. 2024.

8. (ENEM, adaptada) Uma torneira do tipo 1/4 de volta é mais econômica, já que seu registro abre e fecha bem mais rapidamente do que o de uma torneira comum. A Figura 123 ilustra uma torneira do tipo 1/4 de volta a qual tem um ponto preto marcado na extremidade da haste de seu registro, que se encontra na posição fechado e, para abri-lo completamente, é

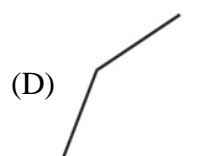
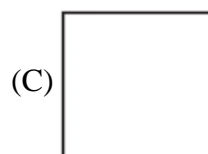
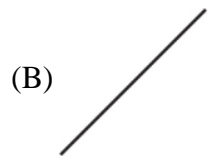
necessário girar a haste 1/4 de volta no sentido anti-horário. Considere que a haste esteja paralela ao plano da parede.

Figura 123 - Torneira do tipo 1/4 de volta



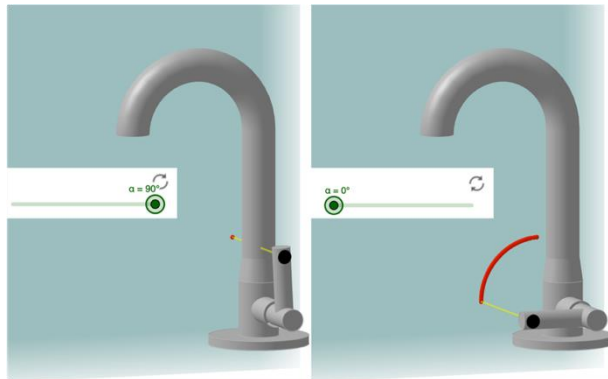
Fonte: INEP, 2018.

Qual das imagens representa a posição ortogonal, na parede, da trajetória traçada pelo ponto preto quando o registro é aberto completamente?



Orientação: Movendo-se o “controle deslizante” destacado na Figura 124, o ponto preto que representa a trajetória traçada pelo registro, tem a representação de sua projeção ortogonal (na parede), sendo esboçada em vermelho, conforme ilustra a Figura 124 a seguir.

Figura 124 - Representação da projeção ortogonal da torneira (na parede)



Fonte: Francisco Dias, adaptado, 2025. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/kwu8nqkd>.

Acesso em: 24 ago. 2024.

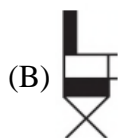
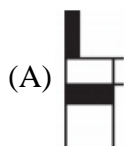
9. (ENEM) Os alunos de uma escola utilizaram cadeiras iguais às da Figura 125 para uma aula ao ar livre. A professora, ao final da aula, solicitou que os alunos fechassem as cadeiras para guardá-las. Depois de guardadas, os alunos fizeram um esboço da vista lateral da cadeira fechada.

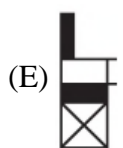
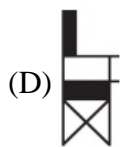
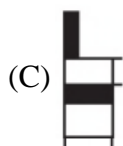
Figura 125 - Cadeira



Fonte: INEP, 2016.

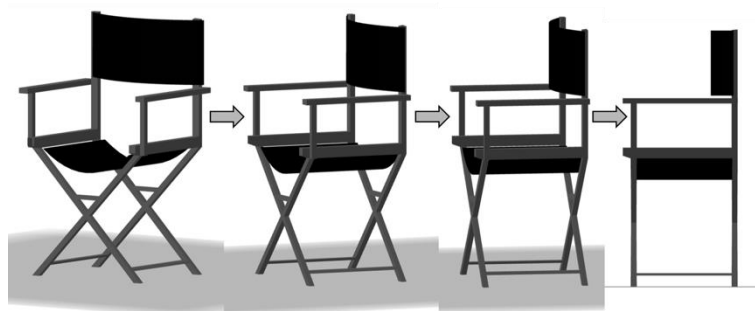
Qual é o esboço obtido pelos alunos?





Orientação: Alterando-se a posição da cadeira, em relação ao plano vertical, (cliqueando com o mouse na imagem e movendo para as direções desejadas), percebe-se a representação do equivalente à projeção ortogonal sobre o plano vertical (parede), relativo ao esboço da vista lateral da cadeira fechada, conforme ilustra a Figura 126 a seguir.

Figura 126 - Vista lateral da cadeira fechada

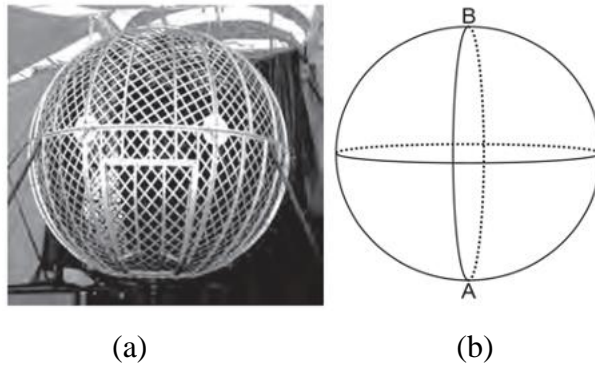


Fonte: Francisco Dias, adaptado, 2025. Disponível em: <https://www.geogebra.org/material/show/id/mzhdjvb6>.

Acesso em: 30 ago. 2024.

10. (ENEM, adaptada) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 127 (a), uma foto de um globo da morte e, na Figura 127 (b), uma esfera que ilustra um globo da morte.

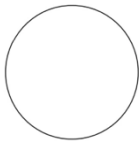
Figura 127 - Globo da morte



Fonte: INEP adaptada, 2012.

Na Figura 127 (b), o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B. A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por

(A)



(B)



(C)



(D)

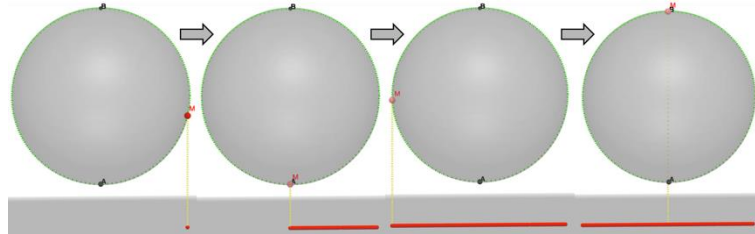


(E)



Orientação: Movendo-se o ponto “M” pelo deslocamento do motoqueiro descrito no enunciado, a projeção ortogonal da trajetória é simultaneamente representada em vermelho no plano horizontal (chão), conforme ilustra a Figura 128 a seguir.

Figura 128 - Projeção ortogonal da trajetória descrita pelo motoqueiro

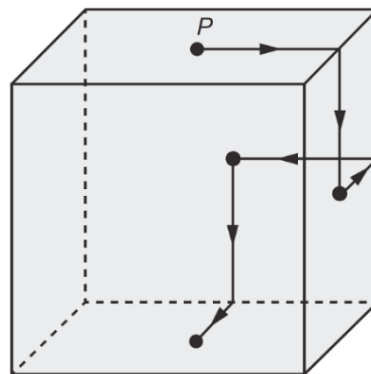


Fonte: Francisco Dias, adaptado, 2025. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/frzsqgw>.

Acesso em: 02 set. 2024.

11. (ENEM) Um robô, que tem um ímã em sua base, se desloca sobre a superfície externa de um cubo metálico, ao longo de segmentos de reta cujas extremidades são pontos médios de arestas e centros de faces. Ele inicia seu deslocamento no ponto P, centro da face superior do cubo, segue para o centro da próxima face, converte à esquerda e segue para o centro da face seguinte, converte à direita e continua sua movimentação, sempre alternando entre conversões à esquerda e à direita quando alcança o centro de uma face. O robô só termina sua movimentação quando retorna ao ponto P. A Figura 129 apresenta os deslocamentos iniciais desse robô.

Figura 129 - Deslocamento do robô

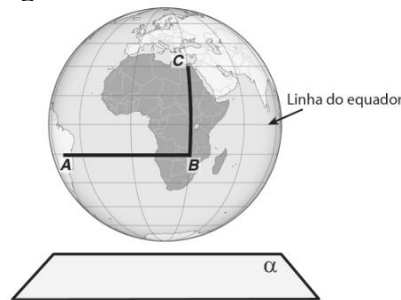


Fonte: INEP, 2022.

A projeção ortogonal do trajeto descrito por esse robô sobre o plano da base, após terminada sua movimentação, visualizada da posição em que se está enxergando esse cubo, é

12. (ENEM) A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na Figura 131.

Figura 131 - Globo terrestre



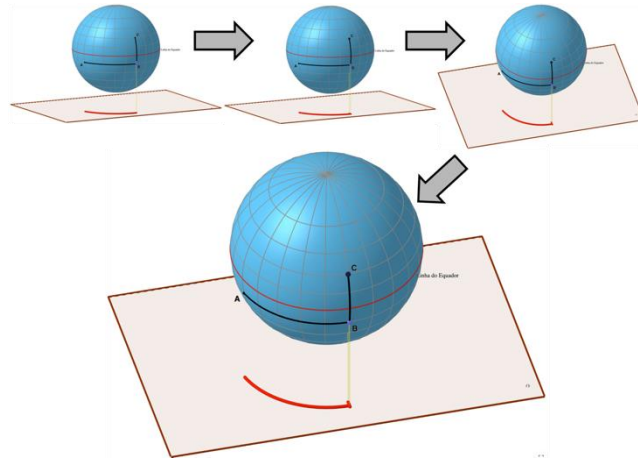
Fonte: INEP, 2016.

A projeção ortogonal, no plano α , do caminho traçado no globo pode ser representada por

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)
- (E)

Orientação: Movendo-se o ponto “S” pelo deslocamento descrito no enunciado, a projeção ortogonal da trajetória é simultaneamente representada em vermelho no plano horizontal (chão), conforme ilustra a Figura 132 a seguir.

Figura 132 - Projeção ortogonal da trajetória descrita



Fonte: Francisco Dias, adaptado, 2025. Disponível em:
<https://www.geogebra.org/m/twqxutq5#material/wrwjnayr>.
 Acesso em: 08 set. 2024.

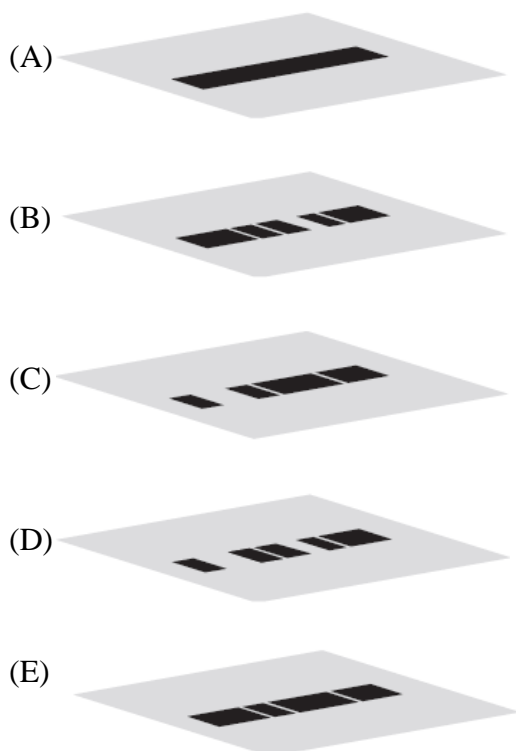
13. (ENEM) Um grupo de países criou uma instituição responsável por organizar o Programa Internacional de Nivelamento de Estudos (PINE) com o objetivo de melhorar os índices mundiais de educação. Em sua sede foi construída uma escultura suspensa, com a logomarca oficial do programa, em três dimensões, que é formada por suas iniciais, conforme mostrada na figura. Essa escultura está suspensa por cabos de aço, de maneira que o espaçamento entre letras adjacentes é o mesmo, todas têm igual espessura e ficam dispostas em posição ortogonal ao solo, como ilustrado na Figura 133 a seguir.

Figura 133 - Escultura (PINE)



Fonte: INEP, 2019.

Ao meio-dia, com o sol a pino, as letras que formam essa escultura projetam ortogonalmente suas sombras sobre o solo. A sombra projetada no solo é



Orientação: Alterando-se a posição de visualização da escultura, em relação ao plano horizontal, de modo a observar A sombra projetada no solo, pela projeção ortogonal das letras que que a compõem, conforme ilustra a Figura 134 a seguir, obtém-se:

Figura 134 - Projeção ortogonal das letras da escultura

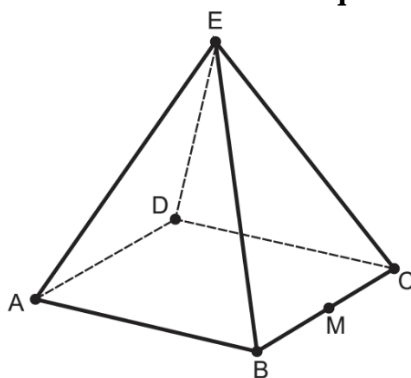


Fonte: Francisco Dias, adaptado, 2025. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/vmj5kmsj>.

Acesso em: 11 set. 2024.

14. (ENEM) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir (Figura 135) e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

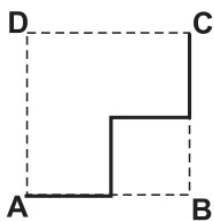
Figura 135 - Pirâmide de base quadrada



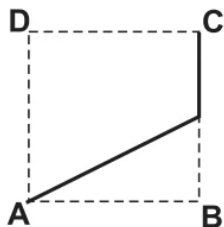
Fonte: INEP, 2019.

O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C. O desenho que Bruno deve fazer é

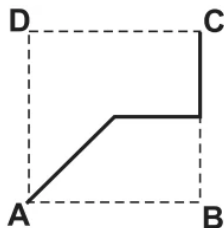
(A)



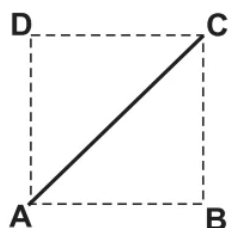
(B)



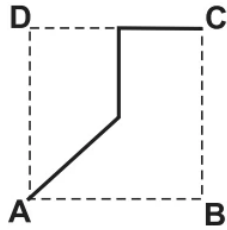
(C)



(D)

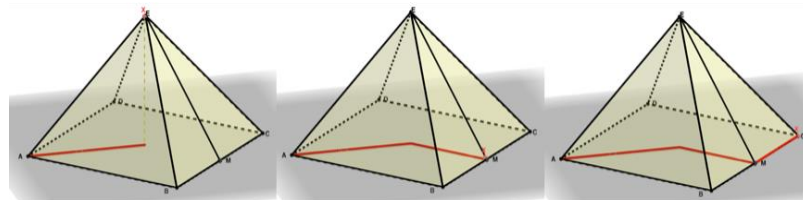


(E)



Orientação: Movendo-se o ponto “X” pelo deslocamento descrito por João no enunciado, a projeção ortogonal da trajetória é simultaneamente representada em vermelho no plano horizontal (chão), conforme ilustra a Figura 136 a seguir.

Figura 136 - Projeção ortogonal da trajetória representada no plano horizontal



Fonte: Francisco Dias, adaptado, 2019. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/geyaf8cj>.

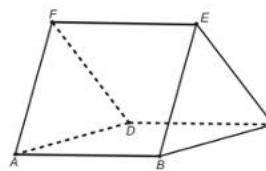
Acesso em: 14 set. 2024.

15. (ENEM adaptada) Um grupo de escoteiros mirins, numa atividade no parque da cidade onde moram, montou uma barraca conforme a foto da Figura 137 (a). A Figura 137 (b) mostra o esquema da estrutura dessa barraca, em forma de um prisma reto, em que foram usadas hastes metálicas.

Figura 137 - Barraca em forma de um prisma reto



(a)

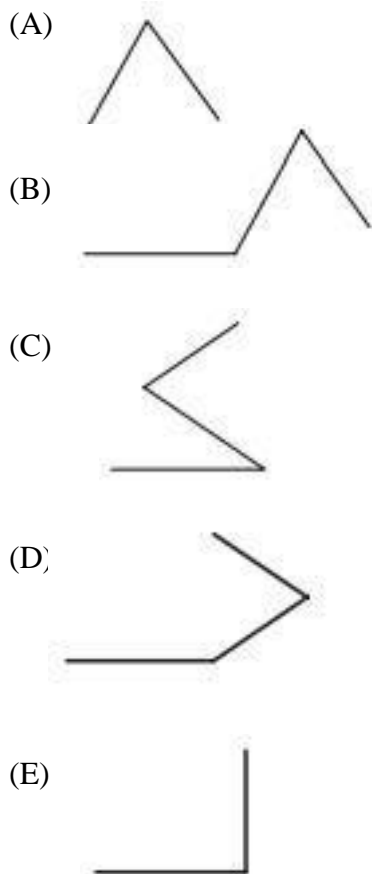


(b)

Fonte: INEP, 2016.

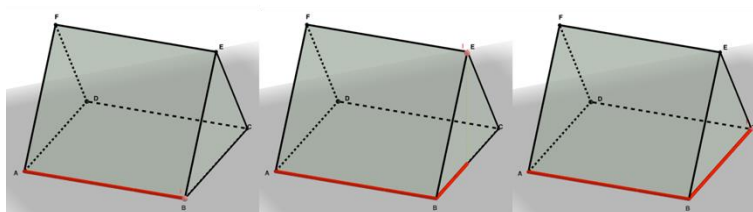
Após a armação das hastes, um dos escoteiros observou um inseto deslocar-se sobre elas, partindo do vértice A em direção ao vértice B, deste em direção ao vértice E e, finalmente, fez o trajeto do vértice E ao C. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo

caminho de menor distância entre os pontos. A projeção do deslocamento do inseto no plano que contém a base ABCD é dada por



Orientação: Movendo-se o ponto “I” pelo deslocamento do inseto, a projeção ortogonal da trajetória é simultaneamente representada em vermelho no plano horizontal (chão), conforme ilustra a Figura 138 a seguir.

Figura 138 - Projeção ortogonal da trajetória no plano horizontal



Fonte: Francisco Dias, adaptado, 2019. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/tdkkywah>.

Acesso em: 20 set. 2024.

7.2 Atividades de Sólidos de Revolução

Esta seção do estudo será dedicada à abordagem dos sólidos de revolução, com ênfase no processo de geração de cilindros, cones, troncos de cone e esferas a partir da rotação de figuras planas, com a utilização do software GeoGebra permitindo a simulação interativa do movimento de rotação e a análise detalhada das transformações geométricas decorrentes da variação dos elementos geradores. Serão apresentadas treze (13) questões de vestibulares regulamentados e amplamente reconhecidos pelo sistema educacional brasileiro (ENEM, PUC-SP, MACKENZIE-SP, UFMG e FATEC-SP), de instituto federal (IFAL), de livros didáticos e também questões autorais, presentes no e-book. A abordagem proposta visa proporcionar uma experiência didática dinâmica e intuitiva, favorecendo não apenas a compreensão dos princípios matemáticos subjacentes à revolução de sólidos, mas também o aprimoramento das habilidades associadas à visualização espacial e à interpretação geométrica de diferentes configurações tridimensionais.

7.2.1 Roteiro Didático – Atividades com Sólidos de Revolução no GeoGebra

1. Objetivo didático

- Compreender o conceito de sólido de revolução a partir da rotação de figuras planas em torno de um eixo fixo.
- Explorar visualmente como a rotação de segmentos, triângulos, retângulos e semicircunferências geram cilindros, cones, troncos de cone e esferas.
- Desenvolver a capacidade de correlacionar representações planas e espaciais, promovendo a visualização geométrica.

2. Contextualização inicial

- Iniciar a aula com uma breve conversa sobre objetos do cotidiano que podem ter sido gerados por rotação (copos, taças, latas, bolas etc.).
- Mostrar imagens reais e modelos físicos, relacionando com as formas geométricas planas que poderiam originar esses sólidos.
- Propor perguntas como: “Qual figura plana você acha que, ao girar, forma um copo?” ou “Como uma meia circunferência vira uma esfera?”

3. Apresentação do software GeoGebra

- Orientar os alunos sobre o uso básico do GeoGebra 3D: movimentação da cena, controle deslizante, rotação da figura e ocultação de objetos.
- Demonstrar, com um projetor ou compartilhamento de tela, como visualizar uma figura plana e sua rotação formando um sólido.

4. Atividades exploratórias com rotação

- Orientar os alunos a iniciarem pelas atividades que tratam da geração do cilindro a partir de um retângulo.
- Em seguida, conduzi-los a explorar as rotações que formam cone, tronco de cone e esfera.
- Pedir que manipulem os controles deslizantes, observem os efeitos e respondam perguntas sobre as transformações.

5. Análise guiada das construções

- Propor que os alunos descrevam o passo a passo da geração do sólido, mencionando a figura plana, o eixo de rotação e o resultado.
- Pedir que façam prints das etapas da construção e escrevam breves descrições.
- Estimulá-los a utilizar o vocabulário técnico: raio, eixo, geratriz, base, altura.

6. Leitura e resolução de questões

- Selecionar de 3 a 5 questões do e-book e projetar uma por vez.
- Orientar os alunos a lerem cuidadosamente os enunciados e identificarem qual sólido de revolução está em jogo.
- Pedir que utilizem as animações para testar hipóteses e compreender o problema tridimensional de forma visual antes de resolvê-lo.

7. Interpretação geométrica

- Orientar os estudantes a descreverem, com palavras próprias, o que ocorre com a figura plana ao girar.
- Estimulá-los a refletirem: “O que aconteceria se girássemos essa figura em torno de outro eixo?”
- Promover discussões orais e breves relatos escritos para consolidar o raciocínio espacial.

8. Atividade de criação autoral

- Propor que os alunos criem, no GeoGebra, uma nova figura plana e explorem sua rotação.
- Orientá-los a justificar: “Por que escolhi essa figura?”, “Qual sólido espero gerar?”, “O que aprendi com essa exploração?”. Essa etapa desenvolve criatividade, autonomia e aplicação prática dos conceitos aprendidos.

9. Avaliação formativa

- Acompanhar as interações dos alunos com as construções e questione-os sobre os conceitos envolvidos.
- Avaliar se eles conseguem descrever o processo de geração de um sólido de revolução, identificar figuras planas geradoras e interpretar variações de altura, raio e eixo.

10. Encerramento e retomada dos conceitos

- Finalizar a sequência com uma retomada das figuras estudadas e suas rotações correspondentes.
- Projetar um quadro resumo com as associações: figura plana \rightarrow eixo de rotação \rightarrow sólido gerado.
- Sugerir uma atividade extra: mencionar objetos do cotidiano real que represente um sólido de revolução e explicar qual figura plana o teria gerado.

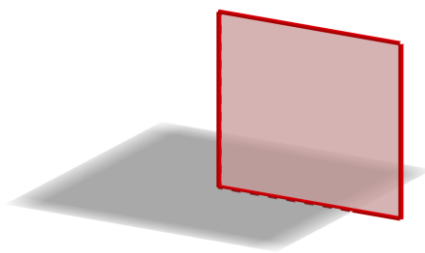
7.2.2 Questões sobre Sólidos de Revolução

1. Calcule, em cm^3 , o volume do sólido de revolução gerado pela rotação completa de um quadrado de lado 4 cm em torno de um de seus lados.

- (a) 16π
- (b) 32π
- (c) 48π
- (d) 64π
- (e) 128π

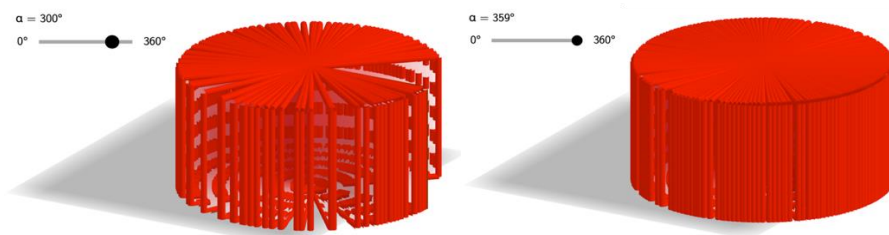
Orientação: Movendo-se o “controle deslizante” destacado na Figura 140, a rotação completa do quadrado em torno de um de seus lados (Figura 139) origina um cilindro, conforme ilustra a Figura 140.

Figura 139 - Quadrado perpendicular ao plano



Fonte: O autor, 2025.

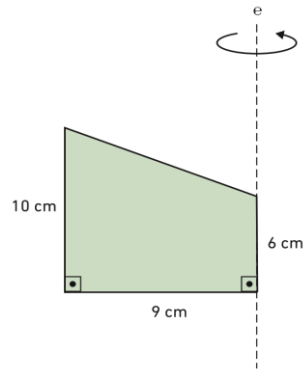
Figura 140 - Rotação do quadrado



Fonte: O autor, 2025.

2. (Dolce; Pompeo, 1993) Na Figura 141 seguinte, as medidas estão em cm.

Figura 141 - Trapézio e eixo de rotação



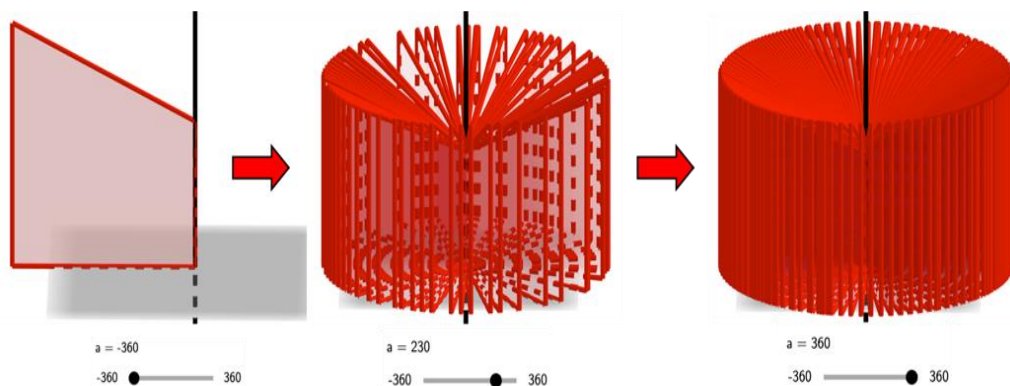
Fonte: Dolce; Pompeo, 1993.

Calcule, em cm^3 , o volume do sólido gerado pela rotação do trapézio em torno do eixo e.

- (a) 810π
- (b) 702π
- (c) 648π
- (d) 522π
- (e) 484π

Orientação: Movendo-se o “controle deslizante” destacado na Figura 142, a rotação do trapézio em torno do lado de medida 6cm origina um cilindro com um cone retirado de uma de suas bases, conforme ilustra a Figura 142 a seguir.

Figura 142 - Trapézio rotacionando gerando sólido de revolução



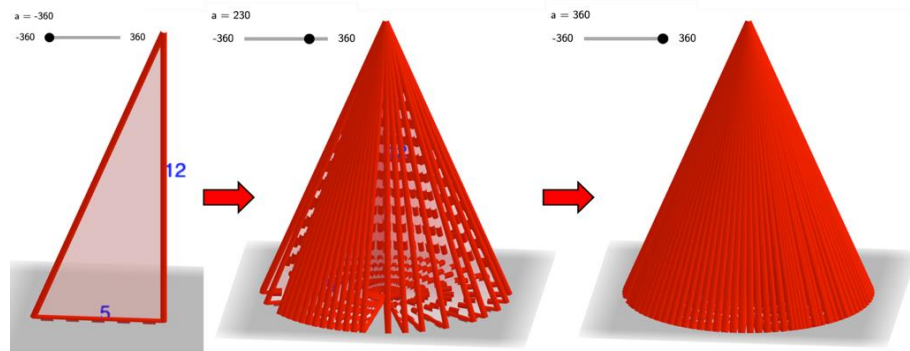
Fonte: O autor, 2025.

3. Um triângulo retângulo tem catetos medindo 5 cm e 12 cm. Esse triângulo é rotacionado em torno do seu maior cateto, gerando um sólido de revolução. Calcule a área total do sólido de revolução gerado, em cm^2 .

- (a) 65π
 (b) 70π
 (c) 80π
 (d) 85π
 (e) 90π

Orientação: Movendo-se o “controle deslizante” destacado na Figura 143, a rotação do triângulo em torno do seu maior cateto origina um cone, conforme ilustrado na mesma figura.

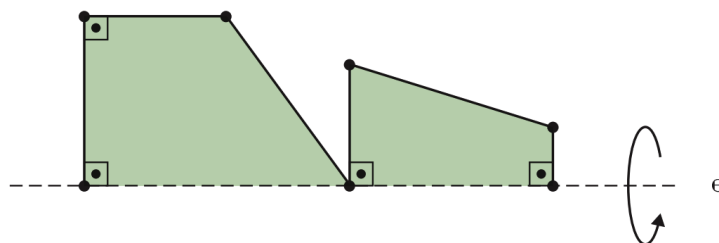
Figura 143 - Triângulo retângulo rotacionando gerando sólido de revolução



Fonte: O autor, 2025.

4. (Dolce; Pompeo, 2024) A figura a seguir (Figura 144) foi rotacionada em torno do eixo e . O sólido de revolução gerado é uma sucessão de três sólidos circulares conhecidos. Assinale a alternativa que indica a sequência dos nomes desses sólidos circulares formados, no sentido da esquerda para a direita.

Figura 144 - Figura plana e eixo de rotação



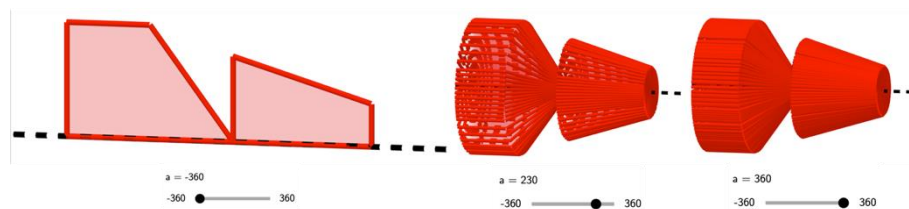
Fonte: Dolce ; Pompeo (1993).

- (a) Tronco de cone reto, cone reto, tronco de cone reto.

- (b) Cilindro reto, cone reto, tronco de cone.
- (c) Cone reto, cilindro reto, cone reto.
- (d) Cilindro reto, cone reto, cone reto.
- (e) Tronco de cone reto, cone reto, cilindro reto.

Orientação: Movendo-se o “controle deslizante” destacado na Figura 145, a rotação da figura em torno do eixo e origina um sólido que é a justaposição de um cilindro, um cone e um tronco de cone, respectivamente, conforme ilustra a Figura 145.

Figura 145 - Figura plana rotacionando gerando sólido de revolução

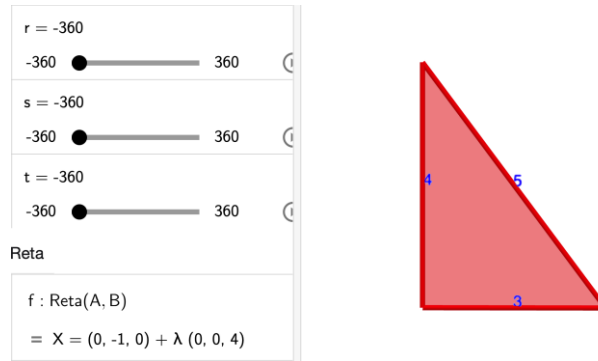


Fonte: O autor, 2025.

5. (IFAL) Girando, em uma volta completa, um triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm, em torno de seu cateto maior, teremos o sólido a seguir com suas características:
- (a) pirâmide com área lateral 30 cm^2 e volume 10 cm^3 .
 - (b) cone com área lateral $15\pi \text{ cm}^2$ e volume $12\pi \text{ cm}^3$.
 - (c) cone com área da base $16\pi \text{ cm}^2$ e volume $12\pi \text{ cm}^3$.
 - (d) pirâmide com área da base e área lateral iguais a $12\pi \text{ cm}^3$.
 - (e) cone com área da base e área lateral iguais a $15\pi \text{ cm}^3$.

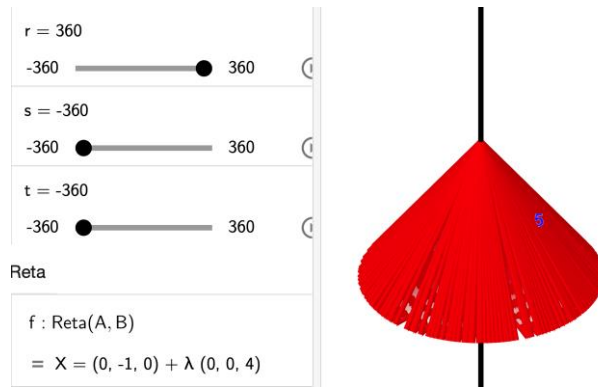
Orientação: Movendo-se cada “controle deslizante” destacado na Figura 146 (r , s , ou t), a rotação do triângulo retângulo origina um sólido distinto, a depender do lado do triângulo situado no eixo de rotação estabelecido, conforme ilustram as quatro próximas figuras a seguir (Figuras 146 a 149).

Figura 146 - Triângulo retângulo e controles deslizantes



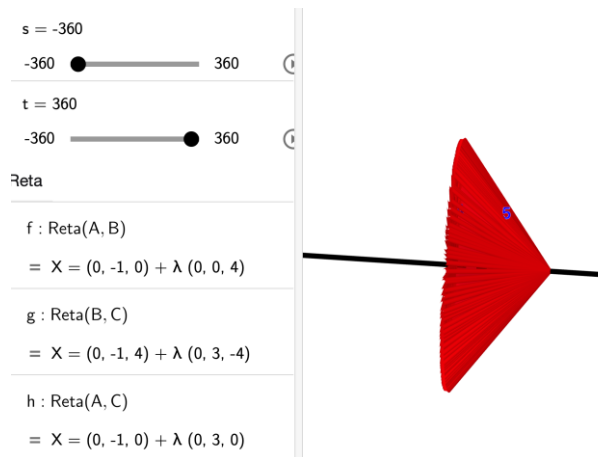
Fonte: O autor, 2025.

Figura 147 - Triângulo rotacionando em torno do cateto maior



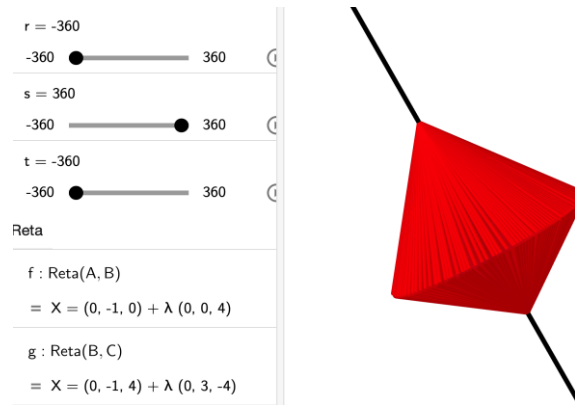
Fonte: O autor, 2025.

Figura 148 - Triângulo rotacionando em torno do cateto menor



Fonte: O autor, 2025.

Figura 149 - Triângulo rotacionando em torno da hipotenusa

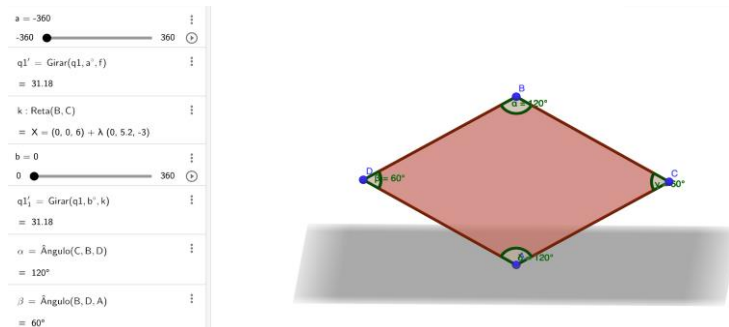


Fonte: O autor, 2025.

6. (Fatec – SP) Considere o losango cujos lados medem 6 cm e um dos ângulos internos mede 60° . A rotação desse losango em torno de um de seus lados gera um sólido cujo volume, em centímetros cúbicos, é:
- (a) $146\pi\sqrt{3}$
 - (b) 162π
 - (c) $162\pi\sqrt{3}$
 - (d) 178π
 - (e) $178\pi\sqrt{3}$

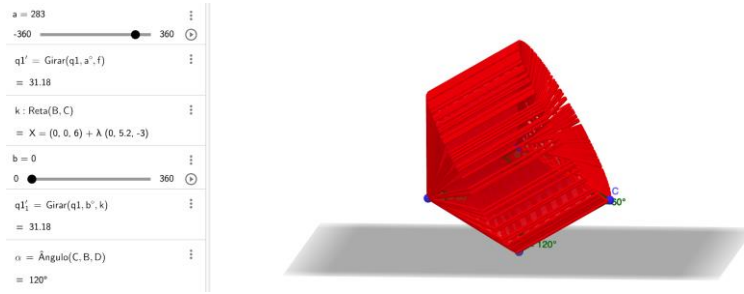
Orientação: Movendo-se cada “controle deslizante” (a e b) destacado nas Figuras 151 ou Figura152, a rotação da figura **em torno de qualquer um de seus lados**, gera um sólido que será sempre o **mesmo** em termos de volume. Isso ocorre porque o losango é uma figura **simétrica**, e independentemente de qual lado seja tomado como eixo de rotação, o sólido obtido será sempre um sólido equivalente (de mesmo volume) a um **cilindro**, conforme ilustram as três figuras a seguir (Figuras 150 a 152).

Figura 150 - Losango perpendicular ao plano



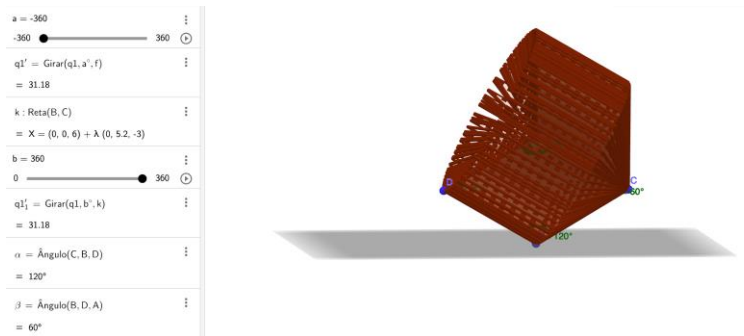
Fonte: O autor, 2025.

Figura 151 - Losango rotacionando (I)



Fonte: O autor, 2025.

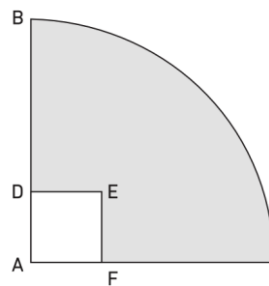
Figura 152 - Losango rotacionando (II)



Fonte: O autor, 2025.

7. (UFMG) Observe a figura a seguir (Figura 153):

Figura 153 - Quadrado interno ao quadrante de círculo



Fonte: Soares, 2025.

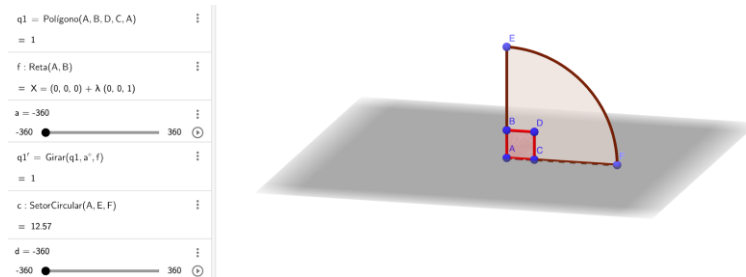
Nessa figura (Fig. 153), ABC é um quadrante de círculo de raio 3 cm e ADEF é um quadrado cujo lado mede 1 cm. Considere o sólido gerado pela rotação de 360° , em torno da reta AB, da região hachurada na figura. Sabe-se que o volume de uma esfera de raio r é igual a $\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)$. Dessa forma, esse sólido tem um volume de

- (a) 14π
- (b) 15π

- (c) 16π
- (d) 17π

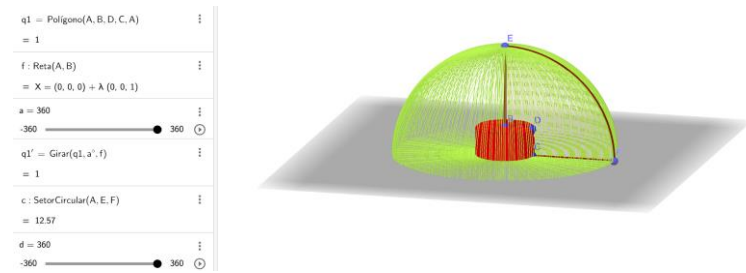
Orientação: Movendo-se os “controles deslizantes” (a e d) destacados nas Figuras 154 e 155, a rotação da região hachurada, na Figura 154, em torno da reta AB, origina uma semiesfera com um “furo” cilíndrico em seu centro, conforme ilustra a Figura 155.

Figura 154 - Quadrante de círculo perpendicular ao plano



Fonte: O autor, 2025.

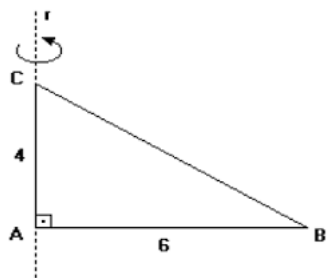
Figura 155 - Quadrante de círculo rotacionando



Fonte: O autor, 2025.

8. (Mackenzie – SP) Na rotação do triângulo ABC da figura a seguir, em torno da reta r, o lado AB descreve um ângulo de 270° . Qual o volume do sólido obtido?

Figura 156 - Triângulo ABC

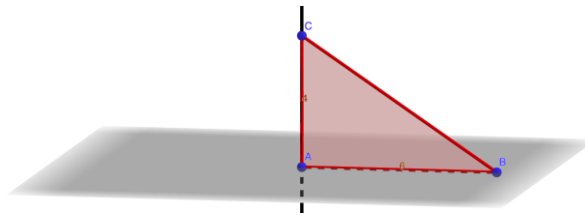


Fonte: Dudow, 2025.

- (A) 48π
- (B) 144π
- (C) 108π
- (D) 72π

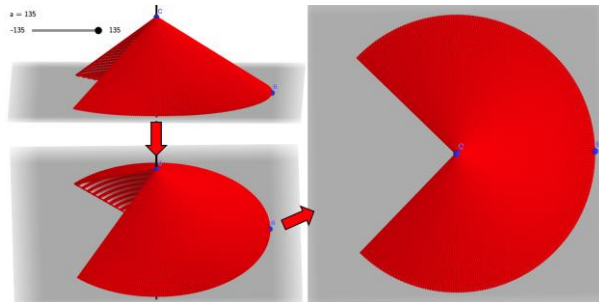
Orientação: Movendo-se os “controles deslizantes”, a rotação do triângulo em torno do eixo origina um cone cuja base é um setor circular de 270° , conforme ilustram as Figuras 157 e 158:

Figura 157 - Triângulo perpendicular ao plano



Fonte: O autor, 2025.

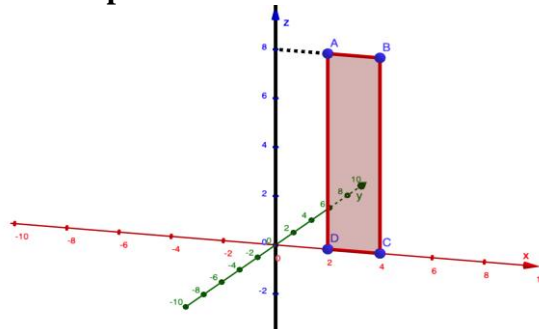
Figura 158 - Triângulo ABC rotacionando 270° e gerando sólido



Fonte: O autor, 2025.

9. [PUC – SP (adaptada)] O retângulo ABCD seguinte, representado num sistema de coordenadas cartesianas tridimensionais, é tal que $A = (2, 0, 8)$, $B = (4, 0, 8)$, $C = (4, 0, 0)$ e $D = (2, 0, 0)$.

Figura 159 - Retângulo ABCD representado no sistema de coordenadas tridimensionais



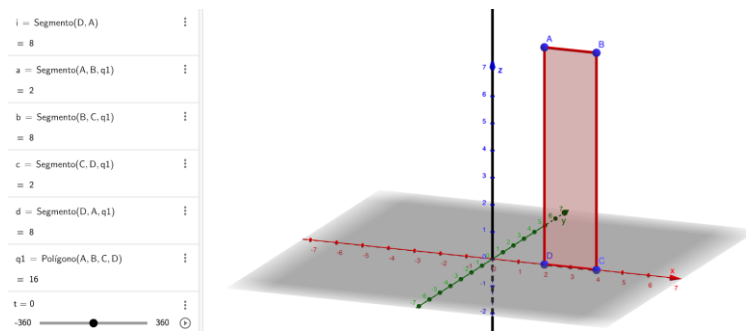
Fonte: O autor, 2025.

Girando-se esse retângulo em torno do eixo das cotas (eixo z), obtém-se um sólido de revolução cujo volume é:

- (A) 24π
- (B) 32π
- (C) 36π
- (D) 42π
- (E) 48π

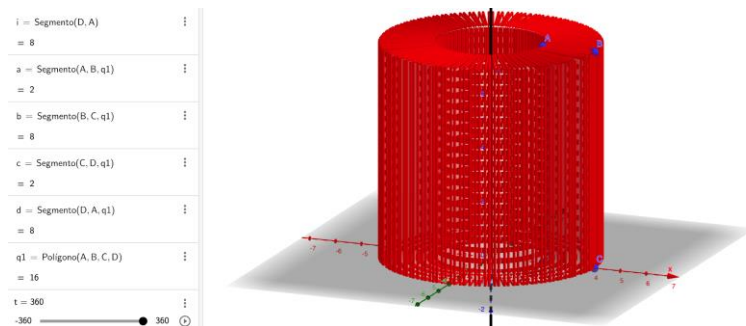
Orientação: Movendo-se o “controle deslizante” destacado, é possível visualizar a formação da região compreendida entre dois cilindros concêntricos, chamada de "**casca cilíndrica**" ou "**anel cilíndrico**", conforme ilustram as Figuras 160 e 161.

Figura 160 - Retângulo perpendicular ao plano



Fonte: O autor, 2025.

Figura 161 - Retângulo rotacionando e gerando um sólido



Fonte: O autor, 2025.

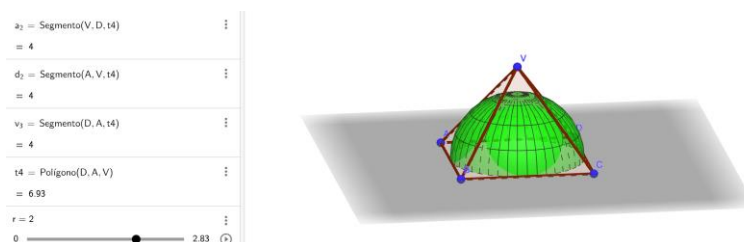
10. (Autor, 2024) Em uma pirâmide de base quadrada, as faces laterais são triângulos equiláteros e todas as oito arestas são iguais a 4.
- a) Calcule a altura e o volume da pirâmide.

- b) Mostre que a semiesfera centrada no centro da base da pirâmide, que tangencia as arestas da base, também tangencia as laterais.
- c) Calcule o raio do círculo intersecção da esfera com cada face lateral da pirâmide.

Orientação: É possível visualizar, manipulando-se os “controles deslizantes”, nas Figuras 162 a 165 a seguir, que:

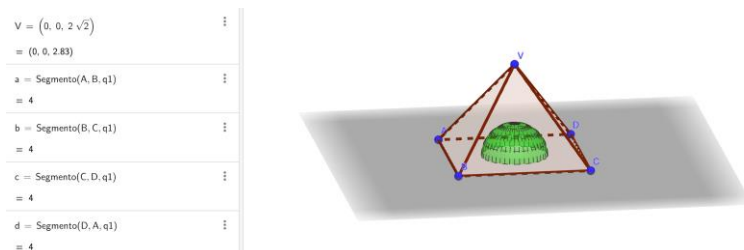
- A semiesfera de raio igual à metade da medida de cada aresta, tangencia a pirâmide;
- A semiesfera de raio menor que metade da medida de cada aresta, é interior à pirâmide;
- A semiesfera de raio maior que metade da medida de cada aresta, intersecta cada aresta lateral da pirâmide em dois pontos.

Figura 162 - Semiesfera tangenciando a pirâmide



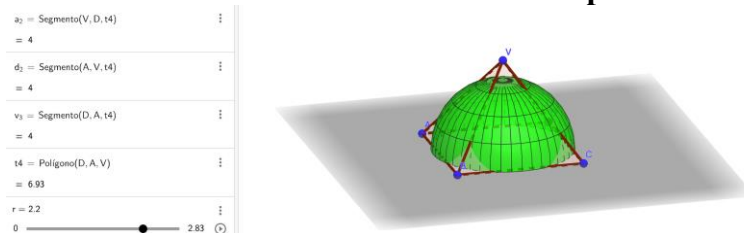
Fonte: O autor, 2025.

Figura 163 - Semiesfera interior à pirâmide



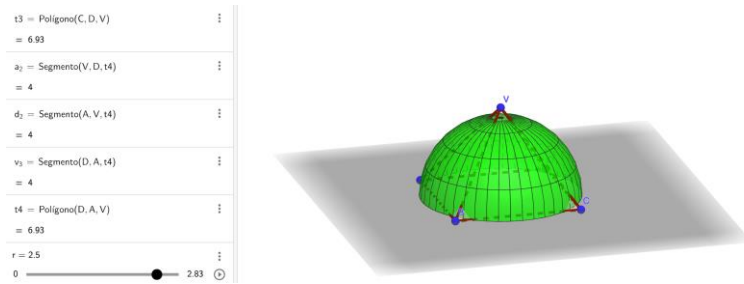
Fonte: O autor, 2025.

Figura 164 – semiesfera intersectando arestas laterais da pirâmide em dois pontos (I)



Fonte: O autor, 2025.

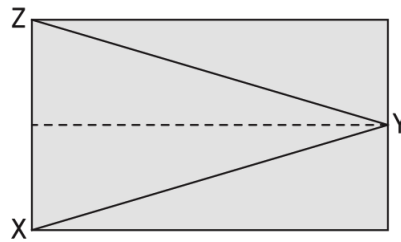
Figura 165 - semiesfera intersectando arestas laterais da pirâmide em dois pontos (II)



Fonte: O autor, 2025.

11. (ENEM) Na reforma e estilização de um instrumento de percussão, em formato cilíndrico (bumbo), será colada uma faixa decorativa retangular, como a indicada na Figura 166, suficiente para cobrir integralmente, e sem sobra, toda a superfície lateral do instrumento.

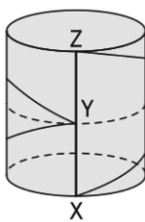
Figura 166 - Faixa decorativa retangular



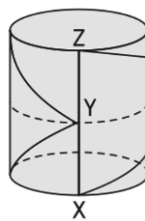
Fonte: INEP, 2016.

Como ficará o instrumento após a colagem?

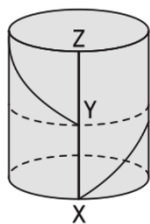
(A)



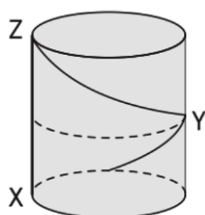
(B)



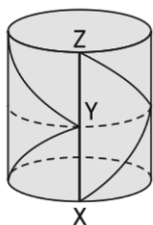
(C)



(D)

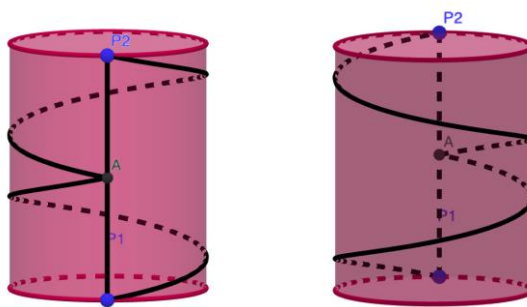


(E)



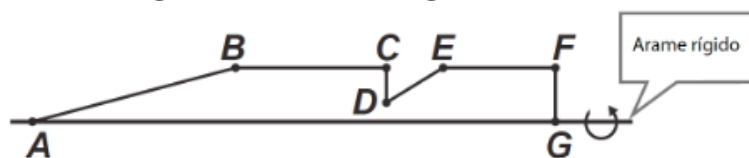
Orientação: Girando-se a construção, é possível visualizar perfeitamente como ficará o instrumento após a colagem, conforme ilustra a Figura 167 a seguir.

Figura 167 - Faixa decorativa colada em instrumento de formato cilíndrico (bumbo)



Fonte: O autor, 2025.

12. (ENEM) Numa feira de artesanato, uma pessoa constrói formas geométricas de aviões, bicicletas, carros e outros engenhos com arame inextensível. Em certo momento, ele construiu uma forma tendo como eixo de apoio outro arame retilíneo e rígido, cuja aparência é mostrada na figura seguinte (Fig. 168).

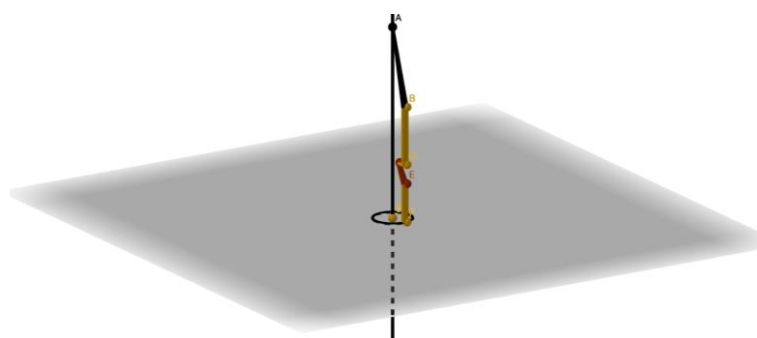
Figura 168 - Arame rígido (forma)

Fonte: INEP, 2010.

Ao girar tal forma em torno do eixo, formou-se a imagem de um foguete, que pode ser pensado como composição, por justaposição, de diversos sólidos básicos de revolução. Sabendo que, na figura, os pontos B, C, E e F são colineares, $AB = 4FG$, $BC = 3FG$, $EF = 2FG$, e utilizando-se daquela forma de pensar o foguete, a decomposição deste, no sentido da ponta para a cauda, é formada pela seguinte sequência de sólidos:

- (A) pirâmide, cilindro reto, cone reto, cilindro reto.
- (B) cilindro reto, tronco de cone, cilindro reto, cone equilátero
- (C) cone reto, cilindro reto, tronco de cone e cilindro equilátero.
- (D) cone equilátero, cilindro reto, pirâmide, cilindro.
- (E) cone, cilindro equilátero, tronco de pirâmide, cilindro.

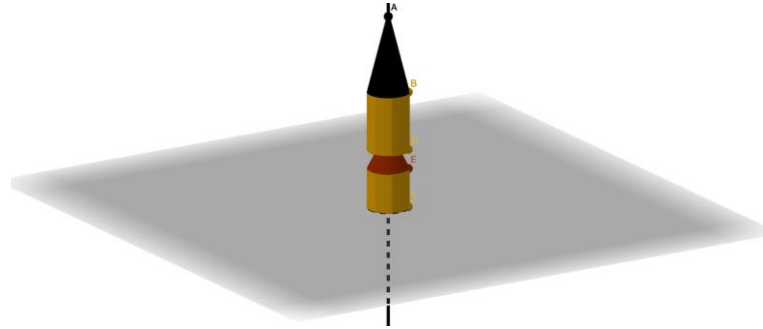
Orientação: Ao visualizar a figura formada pela rotação da forma em torno do eixo, observa-se a construção do foguete, conforme o enunciado, justapondo-se, da ponta para a cauda, respectivamente, um cone reto, um cilindro reto, um tronco de cone e um cilindro equilátero, conforme ilustrado nas Figuras 169 e 170.

Figura 169 - Visualização do foguete (I)

Fonte: Mariana Soriano, 2023. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/mtccgyrg>.

Acesso em: 23 set. 2024.

Figura 170 - Visualização do foguete (II)

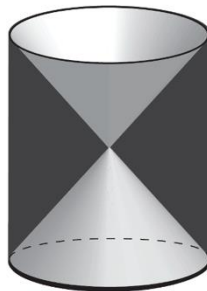


Fonte: Mariana Soriano, 2023. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/mtccgyrg>.

Acesso em: 23 set. 2024.

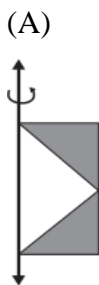
13. (ENEM) A figura mostra uma anticlepsidra, que é um sólido geométrico obtido ao se retirar dois cones opostos pelos vértices de um cilindro equilátero, cujas bases coincidam com as bases desse cilindro. A anticlepsidra pode ser considerada, também, como o sólido resultante da rotação de uma figura plana em torno de um eixo.

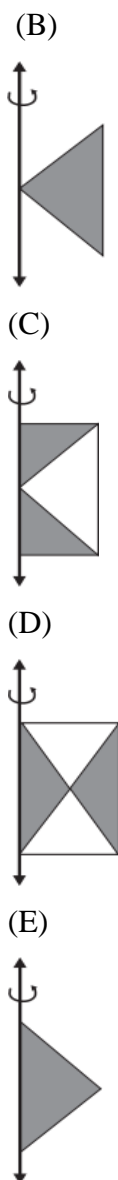
Figura 171 – Anticlepsidra



Fonte: INEP, 2018.

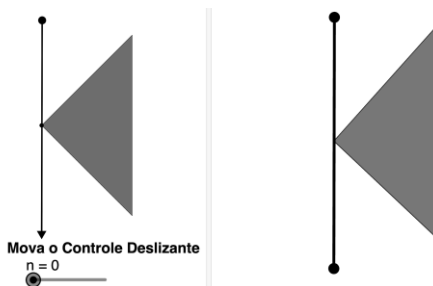
A figura plana cuja rotação em torno do eixo indicado gera uma anticlepsidra como a da figura acima é





Orientação: Movendo-se o “controle deslizante” destacado na Figura 172, visualiza-se qual figura plana, ao ser rotacionada em torno de um eixo, dando uma volta completa, origina a referida anticlépsidra, conforme ilustram as Figuras 172 e 173 a seguir.

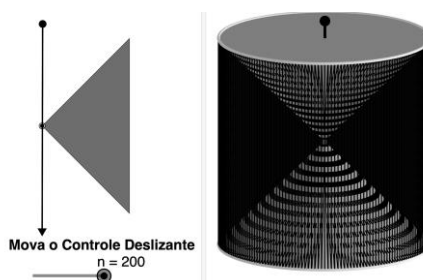
Figura 172 - Triângulo isósceles e eixo de rotação paralelo à base, tocando o vértice



Fonte: Francisco Daniel Souza de Lima, 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/rv5sv3ds>.

Acesso em: 26 set. 2024.

Figura 173 - Triângulo isósceles gerando a Anticlepsidra



Fonte: Francisco Daniel Souza de Lima, 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/rv5sv3ds>.

Acesso em: 26 set. 2024.

7.3 Atividades de truncamento de sólidos

Neste conjunto de atividades, o objetivo é desenvolver as habilidades de truncamento de sólidos, para isto, tais atividades do GeoGebra foram dispostas da seguinte maneira:

- Atividades de **1 a 5** → Questões da Fuvest e do ENEM sobre truncamento de sólidos (as orientações quanto à manipulação de cada uma das construções, encontram-se nas próprias atividades).
- Atividades de **6 a 10** → Poliedros de Platão (composição; quantidade de arestas, faces e vértices; planificação), clicando-se em cada uma das “caixinhas” **exibir planificação**, **exibir detalhes** ou **exibir poliedro**, é possível visualizar cada um destes componentes;
- Atividades **11 e 12** → Prisma e Antiprisma, movendo-se os “controles deslizantes” de cada uma das figuras, é possível ajustar, da maneira que julgar conveniente, medidas dos lados da base, quantidade de lados do polígono da base e alturas dos sólidos;
- Atividades **13 a 25** → Poliedros de Arquimedes, clicando-se em cada uma das “caixinhas” **exibir faces**, **exibir poliedros** ou **exibir detalhes**, é possível visualizar cada um destes componentes (tipos de faces, poliedros que originam os poliedros truncados e poliedros truncados).

7.3.1 Roteiro Didático – Conjunto de Atividades sobre Truncamento de Sólidos (GeoGebra)

1. Objetivo Didático

- Desenvolver a capacidade de visualizar e compreender transformações espaciais por meio do truncamento de sólidos.

- Explorar relações entre sólidos regulares e seus truncamentos, reconhecendo propriedades geométricas envolvidas.
- Estimular o raciocínio geométrico, a criatividade e a modelagem tridimensional.

2. Apresentação do Tema

- Apresentar aos alunos o conceito de truncamento de sólidos, destacando sua definição e aplicações práticas (ex.: arquitetura, design e natureza).
- Exibir modelos físicos ou digitais que exemplifiquem sólidos truncados, comparando-os aos sólidos originais.
- Contextualizar o tema com questões do ENEM e vestibulares, destacando sua relevância educacional.

3. Questões da FUVEST e ENEM (Atividades 1 a 5)

- Orientar os alunos na resolução das atividades propostas, enfatizando o raciocínio espacial.
- Mostrar como manipular as construções no GeoGebra (com base nas orientações contidas nas próprias atividades).
- Estimular a análise das alterações causadas pelos cortes, identificando novos vértices, arestas e faces.

4. Estudo dos Poliedros de Platão (Atividades 6 a 10)

- Pedir que explorem cada poliedro utilizando os botões interativos "exibir planificação", "exibir detalhes" e "exibir poliedro".
- Orientar a identificação da quantidade de vértices, arestas e faces em cada figura.
- Propor reflexões sobre a regularidade e a simetria desses sólidos e como se relacionam com os truncamentos.

5. Manipulação de Prismas e Antiprismas (Atividades 11 e 12)

- Instruir os alunos a usar os "controles deslizantes" para alterar lados da base e altura dos sólidos.
- Promover a análise da influência dessas alterações na forma tridimensional dos prismas e antiprismas.
- Relacionar as mudanças com as possibilidades de truncamentos futuros e a complexidade gerada.

6. Exploração dos Poliedros de Arquimedes (Atividades 13 a 25)

- Promover a análise da influência dessas alterações na forma tridimensional dos prismas e antiprismas.
- Orientar a utilização das opções "exibir faces", "exibir detalhes" e "exibir poliedros" para aprofundar a análise visual.
- Solicitar que observem os tipos de polígonos resultantes após o truncamento dos poliedros regulares.
- Estimular a comparação entre as estruturas originais e suas versões truncadas.

7. Conexões entre Poliedros Regulares e Truncados

- Estimular a comparação entre as estruturas originais e suas versões truncadas.
- Propor uma investigação sobre qual poliedro regular originou cada poliedro de Arquimedes.
- Refletir com os alunos sobre o impacto dos cortes nas propriedades dos sólidos (simetria, número de faces etc.).
- Discutir os critérios para a obtenção de truncamentos regulares e as diferentes formas possíveis.

8. Construção e Modelagem de Sólidos Truncados

- Incentivar os alunos a construir modelos físicos com papel, cartolina ou materiais alternativos.
- Sugerir, aos mais interessados, a criação digital de sólidos truncados por meio de softwares de geometria dinâmica (como o próprio GeoGebra ou sugerir que pesquisem alguns outros).
- Propor a representação das planificações e das vistas ortogonais desses modelos construídos.

9. Socialização das Produções e Discussão Coletiva

- Promover a apresentação das construções realizadas pelos alunos (individuais ou em grupo).
- Estimular o compartilhamento de estratégias utilizadas, dificuldades enfrentadas e soluções encontradas.
- Valorizar a criatividade, a clareza das representações e o domínio dos conceitos de truncamento.

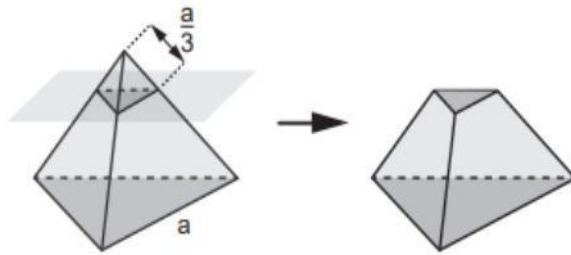
10. Avaliação Criativa e Reflexiva

- **Proposta de Aplicação Criativa:** Solicitar que os alunos mencionem algum objeto do cotidiano (pode ser um móvel, uma estrutura arquitetônica ou um utensílio) e imaginar como ele ficaria se não fosse truncado.
- **Reflexão sobre o Processo de Criação:** Após a execução da atividade, propor que os alunos escrevam uma breve reflexão sobre o que aprenderam durante a construção do modelo truncado, respondendo a perguntas do tipo “Como a escolha do objeto influenciou as decisões sobre os cortes e truncamentos?”, “Quais foram os desafios encontrados ao representar a projeção ortogonal do objeto truncado?”, “De que maneira a atividade os ajudou a visualizar melhor os conceitos de truncamento e projeção ortogonal?”
- **Conexão com o Mundo Real:** Incentivar os alunos a conectar o exercício com aplicações reais do conceito de truncamento, como no design de objetos ou em construções arquitetônicas. Isso pode incluir, por exemplo, pensar sobre como os truncamentos são usados em design industrial ou em arte tridimensional.
- **Avaliação Formativa:** A avaliação dessa atividade deve ser formativa, focando no entendimento do processo de truncamento e na capacidade de aplicação dos conceitos geométricos em contextos reais. Reforçar que o objetivo é avaliar a evolução no entendimento da geometria espacial e a habilidade de pensar criticamente sobre formas geométricas.

7.3.2 Questões sobre Truncamento de Sólidos

1. (ENEM) As luminárias para um laboratório de matemática serão fabricadas em forma de sólidos geométricos. Uma delas terá a forma de um tetraedro truncado. Esse sólido é gerado a partir de secções paralelas a cada uma das faces de um tetraedro regular. Para essa luminária, as secções serão feitas de maneira que, em cada corte, um terço das arestas seccionadas serão removidas. Uma dessas secções está indicada na Figura 174.

Figura 174 - Luminária em forma de tetraedro truncado



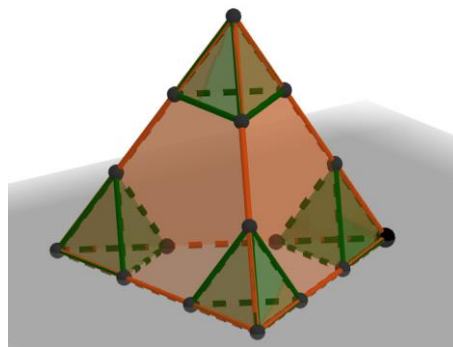
Fonte: INEP, 2019.

Essa luminária terá por faces

- (A) 4 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.
- (B) 2 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.
- (C) 4 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.
- (D) 3 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.
- (E) 3 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

Orientação: Movendo-se a construção geométrica, visualiza-se, no lugar das faces que eram inicialmente triângulos equiláteros, o formato de cada uma das novas faces formadas (hexágonos) e a formação, no lugar dos vértices iniciais, de faces triangulares regulares, conforme ilustra a Figura 175 a seguir.

Figura 175 - Visualização do tetraedro truncado



Fonte: O autor, 2025.

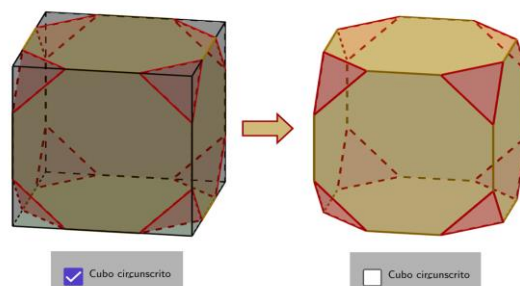
2. (ENEM) Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces. Com base nas

informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

- (A) 6.
- (B) 8
- (C) 14.
- (D) 24.
- (E) 30.

Orientação: Clicando-se no ícone “cubo circunscrito” da construção geométrica (Figura 176), de modo a deixá-lo marcado, visualiza-se o cubo sem os truncamentos, clicando-se outra vez, visualiza-se o cubo truncado. Movendo-se a posição de visualização da construção é possível contar a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu (faces hexagonais e triangulares).

Figura 176 - Modelo de troféu obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo

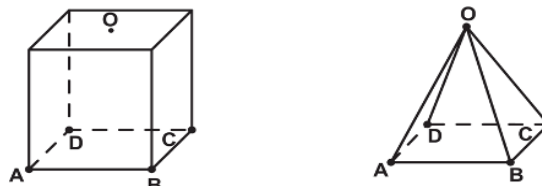


Fonte: Mariana Soriano, 2023. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/y77wesyb>.

Acesso em: 29 set. 2024.

3. (ENEM) Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema (Figura 177), estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.

Figura 177 - Brindes promocionais em forma de pirâmide



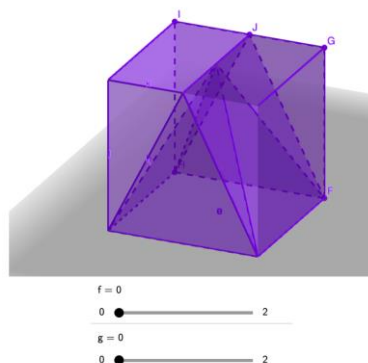
Fonte: INEP, 2011.

Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas AD, BC, AB e CD, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos

- (A) todos iguais.
- (B) todos diferentes.
- (C) três iguais e um diferente.
- (D) apenas dois iguais.
- (E) iguais dois a dois.

Orientação: Movendo-se o “controle deslizante” da construção geométrica (Figura 178), os sólidos geométricos correspondentes aos cortes feitos (Figura 179) afastam-se do sólido a ser formado, uma pirâmide (Figura 180), de modo a deixá-la visível.

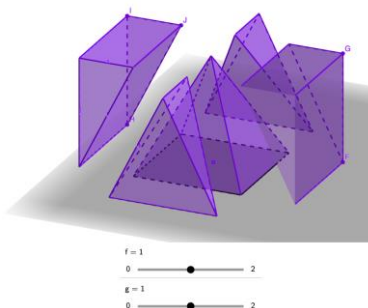
Figura 178 - Sólido em formato de cubo



Fonte: Diego Monteiro, adaptado, 2025. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/q6fgxufm>.

Acesso em: 29 set. 2024.

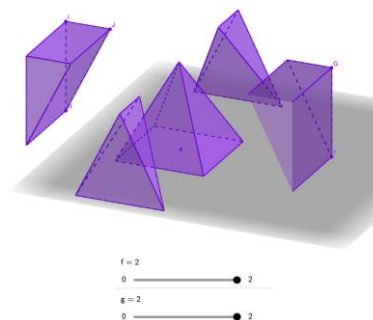
Figura 179 - Sólidos formados a partir dos cortes feitos (I)



Fonte: Diego Monteiro, adaptado, 2025. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/q6fgxufm>.

Acesso em: 29 set. 2024.

Figura 180 - Sólidos formados a partir dos cortes feitos (II)



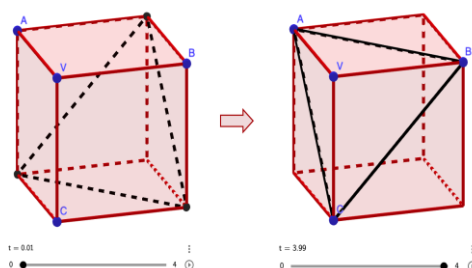
Fonte: Diego Monteiro, adaptado, 2025. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/q6fgxufm>.

Acesso em: 29 set. 2024.

4. (Fuvest) Os segmentos VA , VB e VC são arestas de um cubo. Um plano α , paralelo ao plano ABC , divide esse cubo em duas partes iguais. A intersecção do plano α com o cubo é um:
- (A) triângulo.
 (B) quadrado.
 (C) retângulo.
 (D) pentágono.
 (E) hexágono.

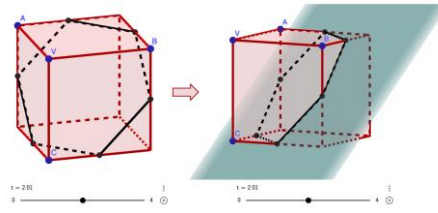
Orientação: Movendo-se o “controle deslizante” da construção geométrica (Figura 181), o plano se move do vértice V ao vértice oposto, formando figuras geométricas planas a depender do afastamento (triângulos ou hexágonos). Quando o “controle deslizante” encontra-se exatamente ao centro, são formados dois sólidos geométricos congruentes e opostos, ambos compartilhando uma face hexagonal (Figura 182).

Figura 181 - Cubos de arestas VA , VB e VC



Fonte: O autor, 2025.

Figura 182 - Cubo dividido, por um plano mediador, em duas partes iguais

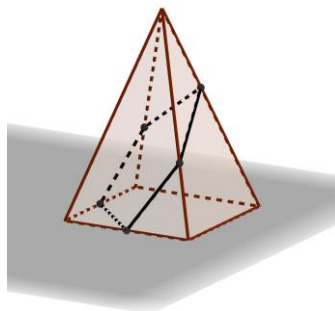


Fonte: O autor, 2025.

5. (ENEM) Um artesão construiu peças de artesanato interceptando uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal. Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?
- (A) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a interseção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.
- (B) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.
- (C) Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a interseção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados.
- (D) O número de lados de qualquer polígono obtido como interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.
- (E) O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

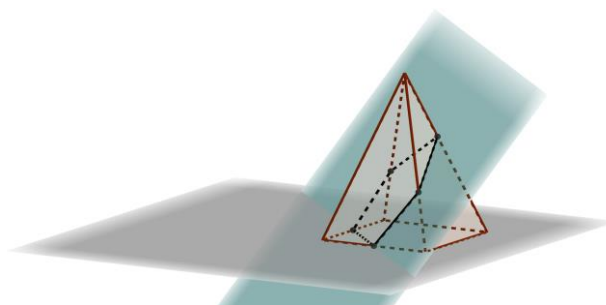
Orientação: Movendo-se a construção geométrica em diferentes direções, verifica-se que é possível haver um plano que intercepte todas as faces, e que o polígono obtido nessa interseção é um pentágono, Figuras 183 e 184. Este plano pode ficar oculto ou aparente, clicando-se no botão referente a ele.

Figura 183 - Pirâmide de base quadrada com plano intersectando todas as faces



Fonte: O autor, 2025.

Figura 184 - Plano intersectando todas as faces da pirâmide de base quadrada



Fonte: O autor, 2025.

6. Tetraedro Regular – Nessa construção, clicando-se em cada um dos botões disponíveis (Figuras 185 e 186) é possível exibir:

- Planificação;
- O tetraedro;
- As quantidades de elementos (detalhes) como: composição (tipos de polígonos que dão forma às faces), sequência (ordem e ao tipo das faces que se encontram em torno de um vértice), além de arestas, faces e vértices.

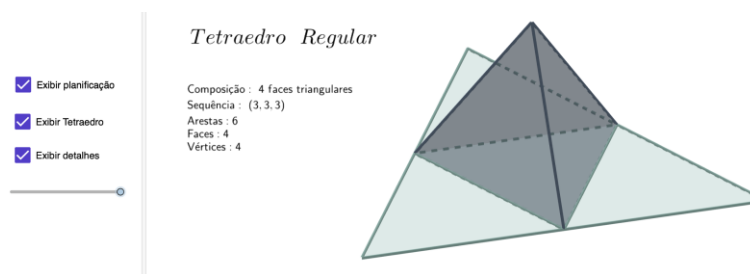
Figura 185 - Visualização do Tetraedro regular (I)



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

Figura 186 – Visualização do Tetraedro regular (II)



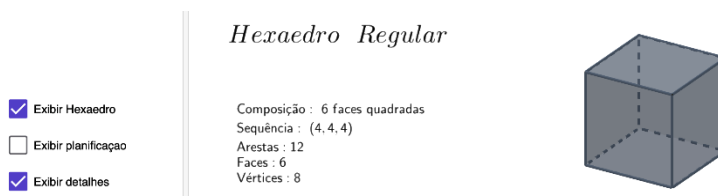
Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

7. Hexaedro Regular – Nessa construção, clicando-se em cada um dos botões disponíveis (Figuras 187 e 188) é possível exibir:

- Planificação;
- O hexaedro;
- As quantidades de elementos (detalhes) como: composição (tipos de polígonos que dão forma às faces), sequência (ordem e ao tipo das faces que se encontram em torno de um vértice), além de arestas, faces e vértices.

Figura 187 - Visualização do Hexaedro regular (I)



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

Figura 188 - Visualização do Hexaedro regular (II)



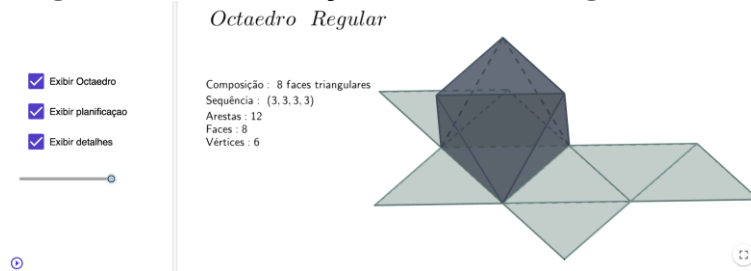
Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

8. Octaedro Regular – Nessa construção (Figuras 189 e 190), clicando-se em cada um dos botões disponíveis é possível exibir:

- Planificação;
- O octaedro;
- As quantidades de elementos (detalhes) como: composição (tipos de polígonos que dão forma às faces), sequência (ordem e ao tipo das faces que se encontram em torno de um vértice), além de arestas, faces e vértices.

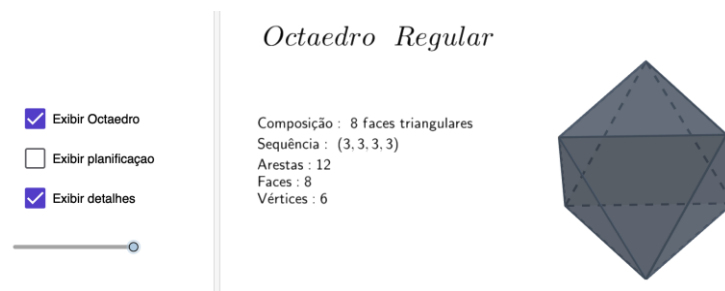
Figura 189 - Visualização do Octaedro regular (I)



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

Figura 190 - Visualização do Octaedro regular (II)



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

9. Dodecaedro Regular – Nessa construção, clicando-se em cada um dos botões disponíveis é possível exibir:
- Planificação;
 - O dodecaedro;
 - As quantidades de elementos (detalhes) como: composição (tipos de polígonos que dão forma às faces), sequência (ordem e ao tipo das faces que se encontram em torno de um vértice), além de arestas, faces e vértices.

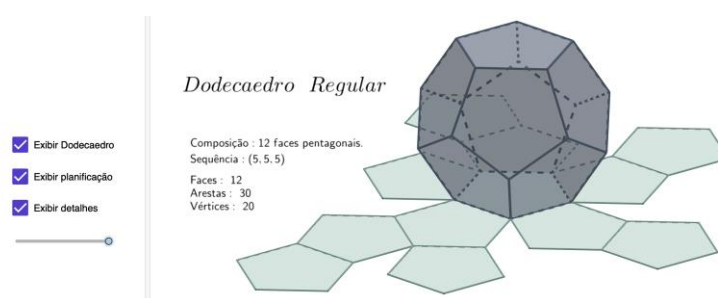
Figura 191 - Visualização do dodecaedro regular (I)



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em:

https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática. Acesso em: 12 out. 2024.

Figura 192 - Visualização do dodecaedro regular (II)



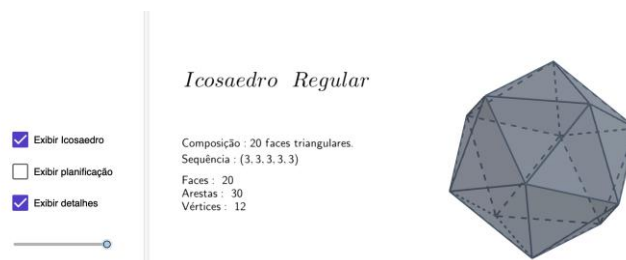
Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

10. Icosaedro Regular – Nessa construção (Figuras 193 e 194), clicando-se em cada um dos botões disponíveis é possível exibir:

- Planificação;
- O icosaedro;
- As quantidades de elementos (detalhes) como: composição (tipos de polígonos que dão forma às faces), seqüência (ordem e ao tipo das faces que se encontram em torno de um vértice), além de arestas, faces e vértices.

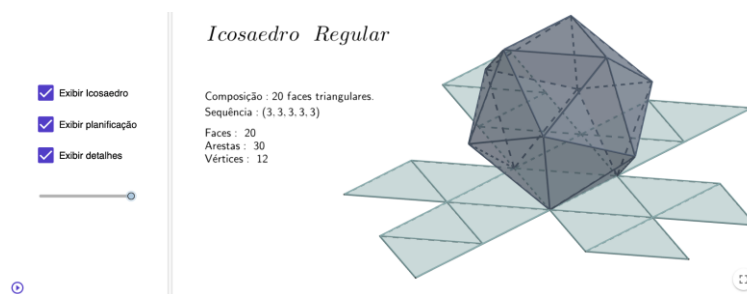
Figura 193 - Visualização do icosaedro regular (I)



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

Figura 194 - Visualização do icosaedro regular (II)



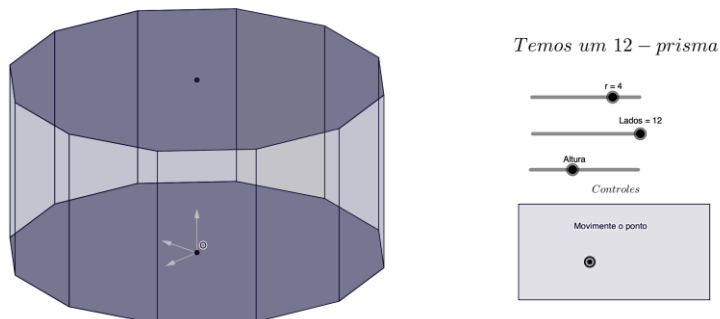
Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

11. Prisma – Nessa construção, movendo-se cada um dos controles deslizantes (Figura 195), é possível alterar as seguintes características dos prismas a serem gerados:

- Medidas dos lados das bases;
- Quantidade de lados das bases;
- Altura do prisma.

Figura 195 – Visualização do prisma



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

12. Antiprisma – Nessa construção, movendo-se cada um dos controles deslizantes (Figura 196), é possível alterar as seguintes características dos prismas a serem gerados:

- Medidas dos lados das bases;
- Quantidade de lados das bases;
- Altura do antiprisma.

Figura 196 - Visualização do antiprisma



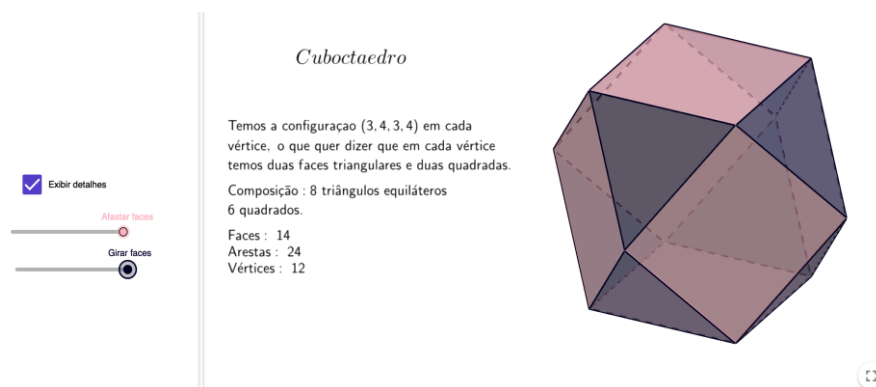
Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
Acesso em: 12 out. 2024.

13. Cuboctaedro – Nessa construção (Figura 197), clicando-se no botão “exibir detalhes” é possível exibir as quantidades de cada um dos componentes a seguir:

- Configuração (tipos de faces que se encontram nos vértices);
- Composição (formas das faces que compõem o cuboctaedro);
- Arestas;
- Faces;
- Vértices.

Além disso, movendo-se os controles deslizantes (Figura 197), é possível afastar ou girar faces;

Figura 197 - Visualização do cuboctaedro



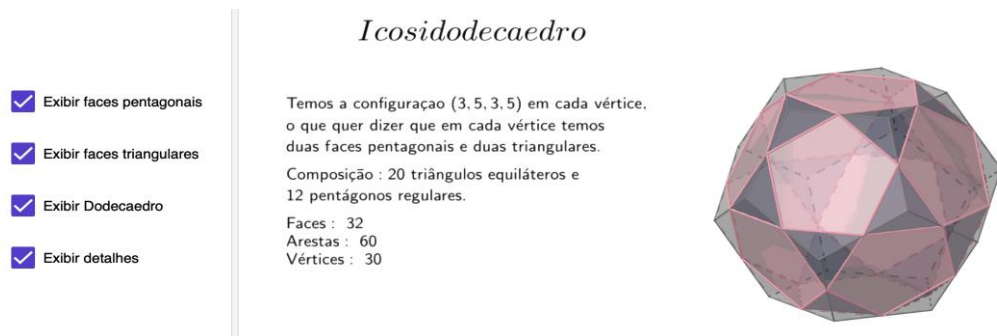
Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
Acesso em: 12 out. 2024.

14. Icosidodecaedro – Nessa construção (Figuras 198 e 199), clicando-se em cada um dos botões “exibir” é possível visualizar:

- Faces pentagonais;
- Faces triangulares;

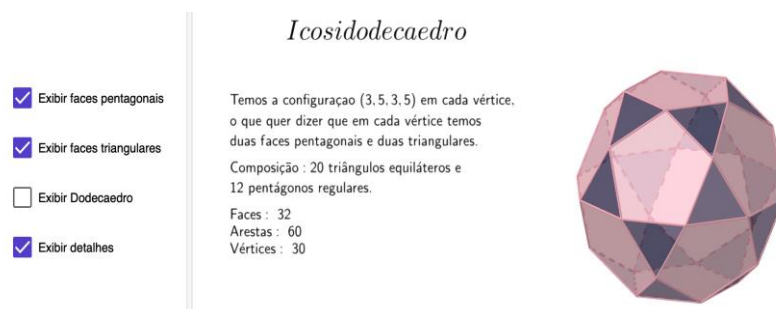
- O dodecaedro que, efetuando-se os devidos truncamentos, dá forma ao icosidodecaedro;
- Detalhes (configuração e composição, além das quantidades de faces, arestas e vértices).

Figura 198 - Visualização do icosidodecaedro (I)



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
 Acesso em: 12 out. 2024.

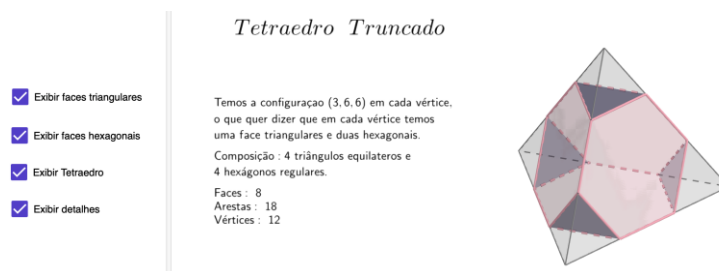
Figura 199 - Visualização do icosidodecaedro (II)



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
 Acesso em: 12 out. 2024.

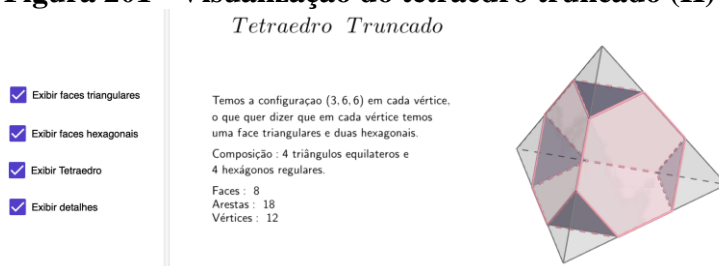
15. Tetraedro truncado – Nessa construção (Figuras 200 e 201), clicando-se em cada um dos botões “exibir” é possível visualizar:

- Faces triangulares;
- Faces hexagonais;
- O tetraedro que, efetuando-se os devidos truncamentos, dá forma ao tetraedro truncado;
- Detalhes (configuração e composição, além das quantidades de faces, arestas e vértices).

Figura 200 - Visualização do tetraedro truncado (I)

Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

Figura 201 - Visualização do tetraedro truncado (II)

Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

16. Cubo truncado – Nessa construção, clicando-se em cada um dos botões “exibir” (Figuras 202 e 203), é possível visualizar:

- Faces triangulares;
- Faces octogonais;
- O cubo que, efetuando-se os devidos truncamentos, dá forma ao cubo truncado;
- Detalhes (configuração e composição, além das quantidades de faces, arestas e vértices).

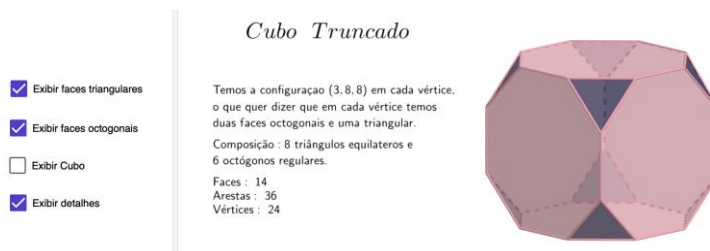
Figura 202 - Visualização do cubo truncado (I)

Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em:

https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

Figura 203 - Visualização do cubo truncado (II)

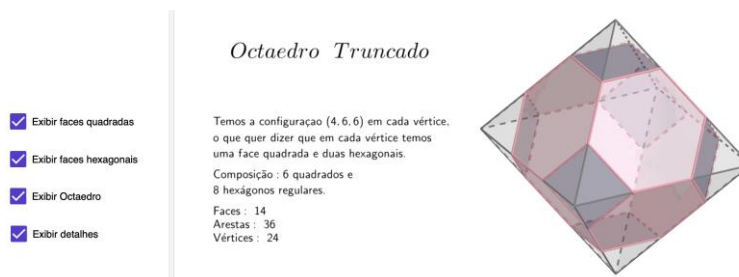


Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
 Acesso em: 12 out. 2024.

17. Octaedro truncado – Nessa construção (Figuras 204 e 205), clicando-se em cada um dos botões “exibir” é possível visualizar:

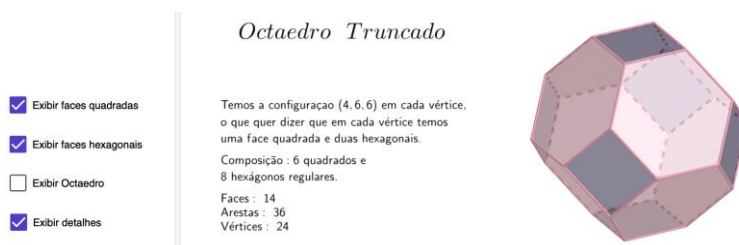
- Faces quadradas;
- Faces hexagonais;
- O octaedro que, efetuando-se os devidos truncamentos, dá forma ao octaedro truncado;
- Detalhes (configuração e composição, além das quantidades de faces, arestas e vértices).

Figura 204 - Visualização do Octaedro truncado (I)



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
 Acesso em: 12 out. 2024.

Figura 205 - Visualização do Octaedro truncado (II)



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
 Acesso em: 12 out. 2024.

18. Dodecaedro truncado – Nessa construção (Figuras 206 e 207), clicando-se em cada um dos botões “exibir” é possível visualizar:

- Faces triangulares;
- Faces decagonais;
- O dodecaedro que, efetuando-se os devidos truncamentos, dá forma ao dodecaedro truncado;
- Detalhes (configuração e composição, além das quantidades de faces, arestas e vértices).

Figura 206 - Dodecaedro truncado (I)



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

Figura 207 - Dodecaedro truncado (II)



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

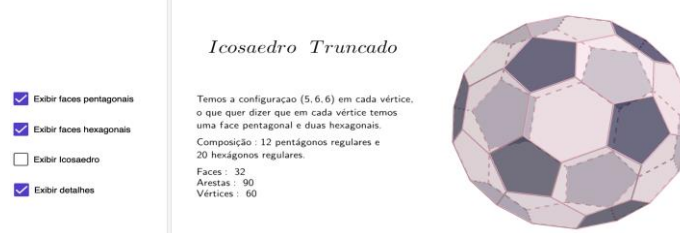
Acesso em: 12 out. 2024.

19. Icosaedro truncado – Nessa construção (Figuras 208 e 209), clicando-se em cada um dos botões “exibir” é possível visualizar:

- Faces pentagonais;
- Faces hexagonais;
- Detalhes (configuração e composição, além das quantidades de faces, arestas e vértices).

Figura 208 - Icosaedro truncado (I)

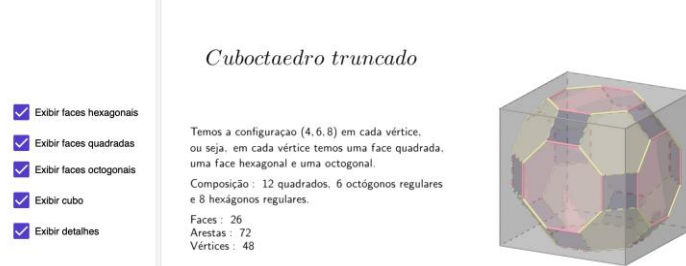
Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
Acesso em: 12 out. 2024.

Figura 209 - Icosaedro truncado (II)

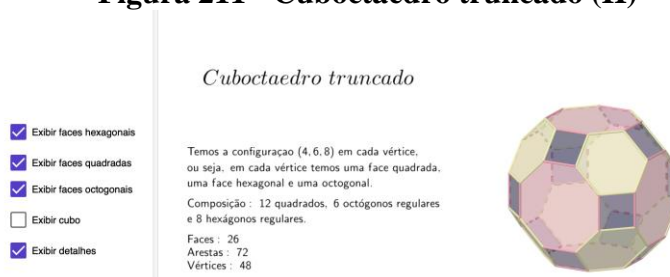
Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
Acesso em: 12 out. 2024.

20. Cuboctaedro truncado – Nessa construção (Figuras 210 e 211), clicando-se em cada um dos botões “exibir” é possível visualizar:

- Faces hexagonais;
- Faces quadradas;
- Faces octogonais;
- O cubo que, efetuando-se os devidos truncamentos, dá forma ao cuboctaedro truncado;
- Detalhes (configuração e composição, além das quantidades de faces, arestas e vértices).

Figura 210 - Cuboctaedro truncado (I)

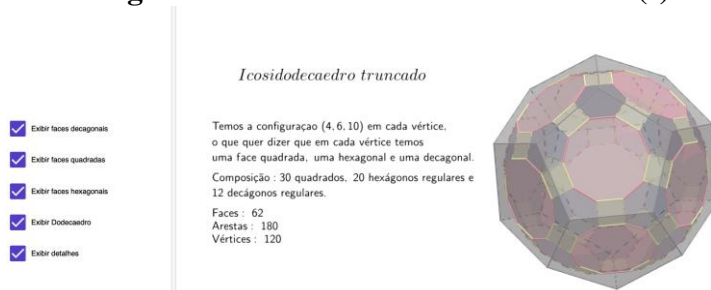
Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
Acesso em: 12 out. 2024.

Figura 211 - Cuboctaedro truncado (II)

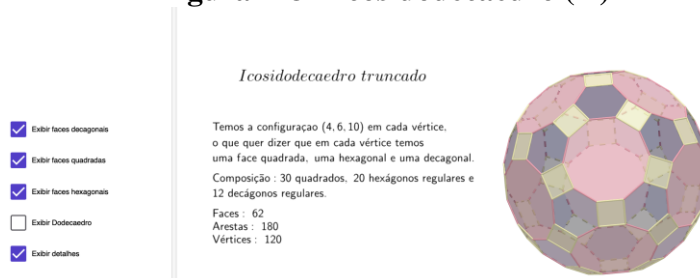
Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
Acesso em: 12 out. 2024.

21. Icosidodecaedro truncado – Nessa construção (Figuras 212 e 213), clicando-se em cada um dos botões “exibir” é possível visualizar:

- Faces decagonais;
- Faces quadradas;
- Faces hexagonais;
- O dodecaedro que, efetuando-se os devidos truncamentos, dá forma ao icosidodecaedro truncado;
- Detalhes (configuração e composição, além das quantidades de faces, arestas e vértices).

Figura 212 - Icosidodecaedro truncado (I)

Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
Acesso em: 12 out. 2024.

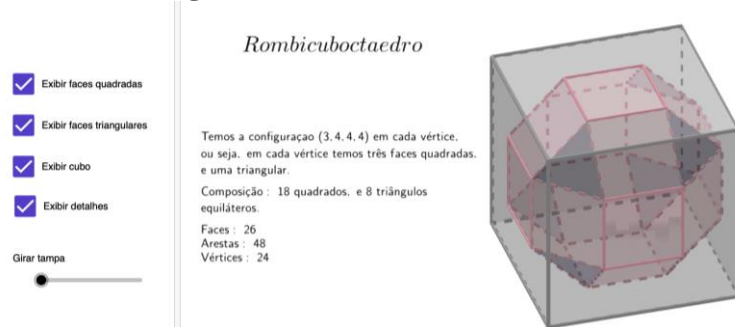
Figura 213 - Icosidodecaedro (II)

Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.
Acesso em: 12 out. 2024.

22. Rombicuboctaedro – Nessa construção (Figuras 214 e 215), clicando-se em cada um dos botões “exibir” é possível visualizar:

- Faces quadradas;
- Faces triangulares;
- O cubo que, efetuando-se os devidos truncamentos, dá forma ao rombicuboctaedro;
- Detalhes (configuração e composição, além das quantidades de faces, arestas e vértices).

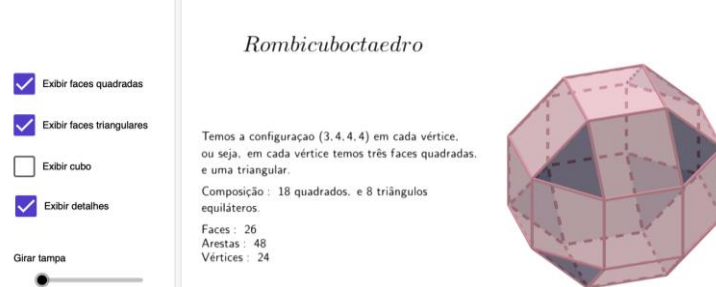
Figura 214 - Rombicuboctaedro



Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

Figura 215 - Rombicuboctaedro

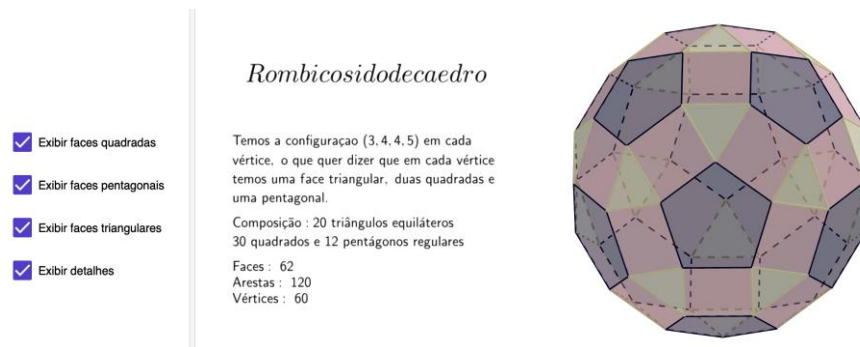


Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

23. Rombicosidodecaedro – Nessa construção (Figura 216), clicando-se em cada um dos botões “exibir” é possível visualizar:

- Faces quadradas;
- Faces pentagonais;
- Faces triangulares;
- O cubo que, efetuando-se os devidos truncamentos, dá forma ao cubo truncado;
- Detalhes (configuração e composição, além das quantidades de faces, arestas e vértices).

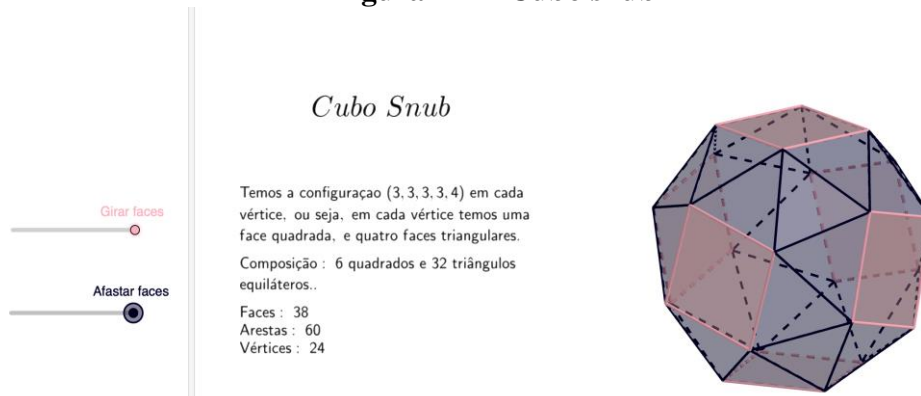
Figura 216 - Rombicosidodecaedro

Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

24. Cubo snub – Nessa construção (Figura 217), movendo-se em cada um dos “controles deslizantes” é possível:

- Girar faces;
- Afastar faces.

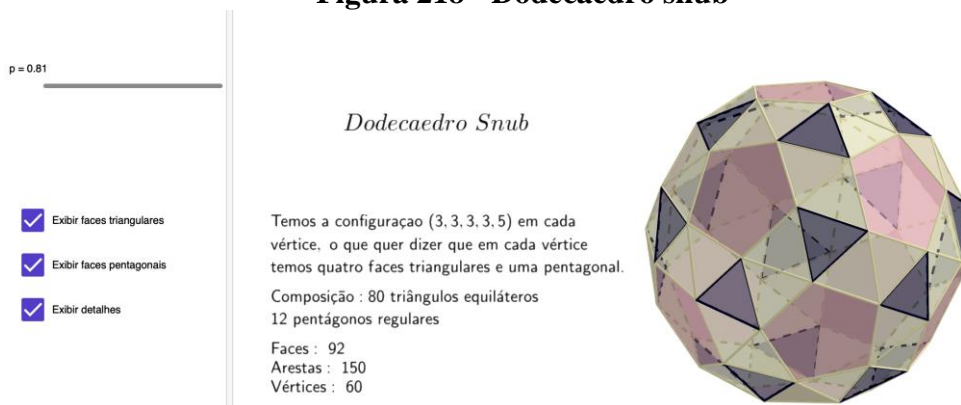
Figura 217 - Cubo snub

Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

25. Dodecaedro snub – Nessa construção (Figura 218), clicando-se em cada um dos botões “exibir” é possível visualizar:

- Faces triangulares;
- Faces pentagonais;
- Detalhes (configuração e composição, além das quantidades de faces, arestas e vértices).

Figura 218 - Dodecaedro snub

Fonte: Derivando a Matemática, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matemática.

Acesso em: 12 out. 2024.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como propósito explorar de maneira profunda e detalhada as diversas possibilidades que o GeoGebra oferece para o ensino da Geometria Espacial, com foco específico na visualização tridimensional de sólidos geométricos, projeções ortogonais, truncamento de sólidos e sólidos de revolução. A partir de uma abordagem teórica robusta, que incluiu a análise de legislações educacionais, diretrizes curriculares e os parâmetros educacionais vigentes no Brasil, foi possível fundamentar e justificar a relevância da integração das tecnologias de ensino no processo pedagógico, particularmente no que tange ao ensino da Matemática e, mais especificamente, da Geometria Espacial.

A revisão das normativas educacionais brasileiras, incluindo a **Lei de Diretrizes e Bases**, os **Parâmetros Curriculares Nacionais** e a **Base Nacional Comum Curricular**, demonstrou que o ensino da Matemática, e da Geometria em particular, exige a adoção de práticas pedagógicas inovadoras, que favoreçam a compreensão dos conteúdos por meio de uma abordagem mais visual e interativa. Nesse contexto, a utilização de ferramentas de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, revela-se de suma importância, pois permite aos alunos uma experiência ativa e imersiva na construção de conceitos geométricos, favorecendo o desenvolvimento de habilidades cognitivas essenciais, como o pensamento espacial e a capacidade de abstração.

No que diz respeito ao desenvolvimento das atividades e propostas pedagógicas, ficou evidente que o uso do GeoGebra como ferramenta no ensino de Geometria Espacial oferece inúmeras possibilidades para a visualização e a exploração de conceitos tridimensionais. Embora a pesquisa tenha proporcionado uma base teórica sólida e tenha elaborado atividades práticas que exploram essas potencialidades, é importante destacar que essas atividades ainda não foram validadas por meio de testes práticos em contextos reais de sala de aula. Portanto, a avaliação da eficácia dessas atividades requer a implementação em ambiente educacional, o que permitirá uma análise mais precisa de seu impacto no processo de ensino e aprendizagem.

A principal contribuição deste trabalho reside na elaboração de um material didático inovador e acessível, que não apenas oferece uma visão teórica aprofundada sobre os conceitos de Geometria Espacial, mas também disponibiliza atividades práticas que facilitam a compreensão dos alunos por meio da visualização dinâmica e da interação com o conteúdo. Essa proposta pedagógica, ao integrar tecnologias digitais no processo de ensino, permite que os professores disponham de um recurso avançado e contemporâneo, que favoreça uma

aprendizagem mais eficaz, dinâmica e envolvente, ao mesmo tempo que possibilita aos alunos uma experiência mais rica e concreta no domínio da Geometria Espacial.

Além disso, o uso de programas de Geometria Dinâmica como o GeoGebra contribui substancialmente para a superação das limitações das representações tradicionais, oferecendo uma alternativa que não apenas enriquece o ensino, mas também amplia as possibilidades de abordagem de temas complexos, como os sólidos de revolução e o truncamento de sólidos. Dessa maneira, o trabalho não só se alinha com as necessidades contemporâneas de inovação pedagógica, mas também proporciona uma base sólida para o desenvolvimento de futuras práticas de ensino que possam ser aplicadas em diferentes contextos educacionais.

Em conclusão, espera-se que as contribuições deste estudo possam servir como ponto de partida para futuras investigações e experimentações no campo do ensino da Geometria, estimulando a adoção de práticas pedagógicas que utilizem a tecnologia como um meio de aprimorar a compreensão dos conceitos geométricos pelos estudantes. Ao integrar as novas tecnologias no currículo de Matemática, este trabalho não apenas contribui para a formação de uma geração de discentes mais apta a enfrentar as demandas complexas e multifacetadas do contexto contemporâneo, tanto nas dimensões pedagógicas curriculares quanto nas circunstâncias cotidianas, mas também abre caminho para um ensino de Geometria mais acessível, eficaz e, acima de tudo, visual e intuitivo.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDRE JÚNIOR, Sebastião Felix. **GeoGebra e ensino de matemática: estudo de projeções ortogonais em questões do ENEM. 2022.** Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal da Paraíba, Campus Cajazeiras. Disponível em: <https://repositorio.ifpb.edu.br/handle/177683/2517>. Acesso em: 12 fev. 2024.
- ALVES, Adalberto Francisco. **Estudando os Sólidos Geométricos por Meio de Materiais Manipuláveis.** 2016. Monografia (Graduação) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016. Disponível em: <https://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/14263>. Acesso em: 20 abr. 2024.
- ALVES, Nuno. Sólidos Platônicos. **Nota Positiva. com.** 2019. Disponível em: <https://notapositiva.com/solidos-platonicos/>. Acesso em: 14 fev. 2025.
- BAIRRAL, Marcelo de Almeida. **Tecnologias da Informação e Comunicação na formação e Educação Matemática.** 2. ed. Rio de Janeiro: Editora da UFRRJ, 2012.
- BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: Integração e Tecnologia,** [volume] 2. 2. ed. São Paulo: Editora Leya, 2016.
- BISHOP, Alan J. Spatial abilities and mathematical thinking. *In: Proceedings of the fourth international congress on mathematical education.* Boston, MA: Birkhäuser, 1983. p. 176-178.
- BONJORNO, José Ruy; GIOVANNI JÚNIOR, José Roberto; DE SOUZA, Roberto Câmara **Matemática completa: 2º ano.** 4. ed. São Paulo: FTD, 2016.
- BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR; José Ruy; DE SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma Matemática: Geometria, Ensino Médio.** 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.
- BORBA, Marcelo de C. *et al.* **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento.** 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.
- BRASIL. **Lei nº 4.026, de 20 de dezembro de 1961.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 20 dez. 1961. Portal da Câmara dos Deputados. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-4024-20-dezembro-1961-353722-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em: 2 mai. 2024.
- BRASIL. **Constituição de 1967.** Constituição da República Federativa do Brasil. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 24 jan. 1967. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao67.htm. Acesso em: 2 mai. 2024.
- BRASIL. **Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971.** Estabelece diretrizes e bases para o ensino de 1º e 2º graus. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 11 ago. 1971. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em: 2 mai. 2024.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Art. 210. Dispõe sobre a obrigatoriedade do ensino fundamental. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 5 out. 1988. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 25 abr. 2024.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 20 dez. 1996. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm. Acesso em: 25 abr. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em 16 mar. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998. Disponível: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em: 20 abr. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)**. Parte I. Bases Legais. Brasília, DF: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/setec/arquivos/pdf/BasesLegais.pdf>. Acesso em: 20 abr. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)**. Parte III. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 22 abr. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, DF: MEC, 2002. Disponível: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CiênciasNatureza.pdf>. Acesso em: 22 abr. 2024.

BRASIL. **Lei nº 11.274, de 6 de fevereiro de 2006**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, para estabelecer a ampliação do Ensino Fundamental de oito para nove anos. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 06 fev. 2006. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2006/lei/111274.htm. Acesso em: 22 abr. 2024.

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, e dispõe sobre a reforma do ensino médio. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 16 fev. 2017. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/ato2015-2018/2017/lei/113415.htm. Acesso em: 22 abr. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Brasília, DF: MEC/SEB, 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 5 fev.2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Resolução nº 4, de 17 de dezembro de 2018**. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais e institui a Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 18 dez. 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2018-pdf/104101-rcp004-18/file>. Acesso em: 5 fev.2024.

CARNEIRO, Moaci Alves. **LDB Fácil: Leitura crítico-compreensiva artigo a artigo**. Petrópolis: Vozes, 1998.

CARVALHO, Paulo César Pinto. **Introdução à Geometria Espacial**. Rio de Janeiro: SOLGRAF Publicações Ltda, 1999.

CASTELLS, Manuel. **A Era da Informação: Economia, Sociedade e Cultura**. São Paulo: Paz e Terra, 2001.

CASTELLS, Manuel. **A sociedade em rede**. São Paulo: Paz e Terra, 2001.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante: Matemática**. [volume] 2. São Paulo: SM, 2016.

CLEMENTS, Ken. Visual imagery and school mathematics, **For the Learning of Mathematics**. v. 2, n. 3, p. 33–39, 1982. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/40247750>. Acesso em 24 mar. 2024.

COLÉGIO WEB, Redação. **Projeções ortogonais - Colégio Web**. Disponível em: <https://www.colegioweb.com.br/retas-e-planos-no-espaco/projecoes-ortogonais.html>. Acesso em: 06 fev. 2025.

COSTA JÚNIOR, J. F. *et al.* As Metodologias Ativas no processo de Ensino/Aprendizagem e a autonomia docente: um breve estudo sob a ótica de John Dewey. *In: SILVEIRA, Resiane Paula de (org.). Traços e Reflexões: Educação e Ensino*, v 5, p.43-63. Formiga: Editora Uniesmero, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7490522>. Acesso em: 08 jan. 2025.

COSTA JÚNIOR, João Fernando *et al.* O professor do futuro: habilidades e competências necessárias para atuar em uma sociedade em mudança. **Revista Educação, Humanidades e Ciências Sociais**, p. e00072-e00072, 2023.

COSTA JÚNIOR, J. F. *et al.* Um olhar pedagógico sobre a Aprendizagem Significativa de David Ausubel. **Rebena -Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem**, [S.l.], v 5, p. 51–68, 2023. Disponível em: <https://rebena.emnuvens.com.br/revista/article/view/70>. Acesso em 08 jan. 2025.

CRUZ, Dennis Coelho; AMARAL, Luís Gustavo Henriques do. **Apostila de Geometria Descritiva**. 2012. Apostila – Universidade Federal da Bahia. Barreiras, BA. Novembro de 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto e Aplicações**, [volume] 2. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DE ALMEIDA, Wilson Ricardo Antoniassi. **A educação jesuítica no Brasil e o seu legado para a educação da atualidade**. Grifos, v. 23, n. 36/37, 2014. p. 117-126.

DE LEONARDO, Fabio Martins; SILVA, Willian Raphael. **Conexões com a Matemática**. [volume] 2, São Paulo: Moderna, 2016.

DE LEONARDO, Fabio Martins. **Conexões: Matemática e suas tecnologias**. Geometria plana e espacial. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2020.

DE OLIVEIRA, Wellington Fabiano Santos; CRISTOVÃO, Eliane Matesco. Geometria Espacial nas Questões do Enem: uma análise a partir dos níveis de van Hiele. **Educação Matemática em Revista**, v. 27, n. 74, p. 104-116, 2022. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/2731> Acesso em: 7 ago. 2024.

DE OLIVEIRA JÚNIOR, José Aluísio. **Projeções, revoluções e truncamentos**. GeoGebra 2024. Ebook. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/twkxutq5>. Acesso em: 13 dez. 2024.

DE VILLIERS, Michael. **Some reflections on the Van Hiele Theory**. Invited plenary from 4th Congress of teachers of mathematics, Zagreb, 2010.

DENIS, Michel. **Image et cognition**. Paris: Presses Univesité de France. 1989.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial, posição e métrica**, [volume] 10. São Paulo: Atual Editora, 1993.

DUDOW. Base dudow 035 2000. Disponível em: <https://dudow.com.br/q/Base-dudow-035/2000/41>. Acesso em: 16 fev. 2025.

DUVAL, Raymound. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Tadeu Moretti. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

FERREIRA, Antônio Carlos; GOMES, Cristiane Ruiz; DA SILVA, Paulo Vilhena. **Ensino de geometria espacial utilizando material manipulável à luz da BNCC**, 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Pará, Belém – Pará, 2020.

FERREIRA, Lúcia Helena da Cunha. **Desenvolvimento do pensamento geométrico com visualização de figuras espaciais por meio da metodologia de oficinas**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2010.

FRANCA, Leonel. **O método pedagógico dos jesuítas**. Rio de Janeiro: Agir, 1952.

FULLAN, Michael. **The six secrets of change: What the best leaders do to help their organizations survive and thrive**. San Francisco: Jossey-Bass, 2010.

FUVEST. **Fundação Universitária para o Vestibular**. 1997. Disponível em: https://acervo.fuvest.br/fuvest/1997/fuv1997_1fase_prova_T.pdf. Acesso em: 04 nov. 2024.

GEOGEBRA. **Ferramentas e recursos do GeoGebra**: ensine e aprenda matemática de uma maneira mais inteligente. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 04 nov. 2024.

GEOGEBRA. **Perfil de Derivando a Matemática**. Disponível em: https://www.geogebra.org/u/derivando_a_matem%C3%A1tica. Acesso em: 15 nov. 2024.

GODINO, Juan Dias; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v. 39, n. 1-2, p. 127-135, mar. 2007.

GUTIÉRREZ, Angel. **Exploring the links between van Hiele levels and 3-dimensional Geometry**. University of Valence, Spain, 1992. Disponível em: <http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut92a.pdf>. Acesso em: 09 ago. 2024.

GUTIERREZ, Angel. **Visualization in 3-dimensional geometry**: in search of a framework. University of Valence, Spain, 1996. Disponível em: <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf>. Acesso em: 08 ago. 2024.

HOFFER, Alan R. *et al.* Mathematics resource project. **Geometry and visualization**, 1977.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David e *et al.* **Matemática**: ciência e aplicações - Conecte. 2.ed. [volume] 2, São Paulo: Saraiva, 2014.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David e *et al.* **Matemática**: ciência e aplicações. 9.ed. [volume] 2, São Paulo: Saraiva, 2016.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENEM 2010 – Provas e Gabaritos** (Reaplicação PPL – Dia 2, Caderno 6). Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/2010_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD6.pdf. Acesso em: 13 dez. 2024.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENEM 2012 – Provas e Gabaritos** (Reaplicação PPL – Dia 2, Caderno 6). Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2012/2012_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD6.pdf. Acesso em: 13 dez. 2024.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENEM 2013 – Provas e Gabaritos** (Aplicação Regular – Dia 2, Caderno 6). Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/dia2_caderno6_cinza.pdf. Acesso em: 13 dez. 2024.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENEM 2014 – Provas e Gabaritos** (Aplicação Regular – Dia 2, Caderno 6). Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2014/2014_PV_impreso_D2_CD6.pdf. Acesso em: 13 dez. 2024.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENEM 2016 – Provas e Gabaritos** (Aplicação Regular – Dia 2, Caderno 6). Disponível em:

https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impreso_D2_CD6.pdf. Acesso em: 13 dez. 2024.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENEM 2016 – Provas e Gabaritos** (Aplicação Regular – Dia 2, Caderno 6). Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD13.pdf. Acesso em: 13 dez. 2024.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENEM 2017 – Provas e Gabaritos** (Reaplicação PPL – Dia 2, Caderno 6). Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impreso_D2_CD6.pdf. Acesso em: 13 dez. 2024.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENEM 2017 – Provas e Gabaritos** (Reaplicação PPL – Dia 2, Caderno 6). Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/ppl/2017/provas/P2_06_CINZA.pdf. Acesso em: 13 dez. 2024.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENEM 2018 – Provas e Gabaritos** (Reaplicação PPL – Dia 2, Caderno 6). Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2018_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD18.pdf. Acesso em: 13 dez. 2024.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENEM 2019 – Provas e Gabaritos** (Aplicação Regular – Dia 2, Caderno 6). Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2019/2019_PV_impreso_D2_CD6.pdf. Acesso em: 13 dez. 2024.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENEM 2021 – Provas e Gabaritos** (Aplicação Regular – Dia 2, Caderno 6). Disponível em: https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2021_PV_impreso_D2_CD6.pdf. Acesso em: 13 dez. 2024.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENEM 2021 – Provas e Gabaritos** (Reaplicação PPL – Dia 2, Caderno 6). Disponível em: https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2021_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD6.pdf. Acesso em: 13 dez. 2024.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENEM 2022 – Provas e Gabaritos** (Aplicação Regular – Dia 2, Caderno 6). Disponível em: https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2022_PV_impreso_D2_CD6.pdf. Acesso em: 13 dez. 2024.

KENSKI, Vani Moreira. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. Campinas, SP: Papirus, 2012.

KOSSLYN, Stephen Michael. **Image and Mind**. Cambridge: Harvard University Press, 1980.

MACEDO, Elizabeth Fernandes de *et al.* Parâmetros Curriculares Nacionais: a falácia de seus temas transversais. *In: Currículo: políticas e práticas*. Campinas: Papirus, 1999. p. 43-58.

MASON, Marguerite M. The van Hiele model of geometric understanding and mathematically talented students. **Journal for the Education of the Gifted** 21: 38-53, Out, 1997. Disponível em: <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/016235329702100103>. Acesso em: 27 ago. 2024.

MELO, Enaldo Vieira de; FIREMAN, Elton Casado. Ensino e aprendizagem de funções trigonométricas por meio do software GeoGebra aliado à modelagem matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática - REnCiMa**, v.7, n.5, p. 12-30, 2016.

MINSKY, Marvin; PAPERT, Seymour. An introduction to computational geometry. **Cambridge tiass., HIT**, v. 479, n. 480, p. 104, 1969.

MINSKY, Marvin. **The Society of mind**. New York: Simon and Schuster, 1988. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=bLDDLlfRpdkC&oi=fnd&pg=PA17&dq=minsky+the+society+of+mind&ots=JGVHagUSXs&sig=zTJVSNsCX_j54dTpqYAzfP61Qb8#v=onepage&q=minsky%20the%20society%20of%20mind&f=false. Acesso em: 13 out 2024.

MISHRA, Punya; Koehler, Matthew J. Technological pedagogical content knowledge: A new framework for teacher knowledge. **Teachers College Record**, 108(6), p. 1017-1054. 2006.

MORAN, José Manuel. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. Campinas: Papirus, 2012.

MOTA, Janine Freitas; LOPES, Rieuse; FERREIRA, Ronaldo Dias. Visualização e pensamento geométrico na Geometria em movimento. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 2, p. 188-203, 2019.

MOREIRA, Antônio Flávio Barbosa. Os parâmetros curriculares nacionais em questão. **Educação & Realidade**, v. 21, n. 1, 1996.

NEVES, José Ribamar de Souza. **Poliedros arquimedianos**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2017.

NEVES JUNIOR, Cesário Antônio; SANTOS, José Jefferson Aguiar dos. Dificuldades de Visualização Espacial em Alunos do Ensino Fundamental I e II. *In: XXI Simpósio Nacional de Geometria Descritiva: Desenho Técnico*, Florianópolis, 2013.

NOTARE Márcia Rodrigues.; BASSO Marcus Vinicius de Azevedo. Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial. **Renote**, V. 14 N° 2, dezembro, 2016. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/70683>. Acesso em 26 ago. 2024.

PESTALOZZI, Johann Heinrich. **How Gertrude Teaches Her Children**. 1894. Disponível em: <https://jscholarship.library.jhu.edu/items/eb5cacc3-3538-408d-9fb0-c2256ed362cd>. Acesso em: 12 out. 2024.

PYLYSHYN, Zenon W. **Seeing and visualizing: It's not what you think**. MIT press, 2003. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=Ih3R-KrfHZgC&oi=fnd&pg=PR11&dq=Pylyshyn&ots=XoHO19z_gk&sig=rdEK2IK5W_JYgZ9omsQU_z8Uptg&redir_esc=y#v=onepage&q=Pylyshyn&f=false. Acesso em: 12 out. 2024.

PRESMEG, Norma C. Visualisation in high school mathematics. **For the learning of mathematics**, v. 6, n. 3, p. 42-46, 1986. Disponível em: <https://flm-journal.org/Articles/1917B083BE4534511A32616EED75A8.pdf>. Acesso em: 10 fev.2024.

RIBEIRO, Paulo Rennes Marçal. **História da educação escolar no Brasil**: notas para uma reflexão. Paidéia, Ribeirão Preto, n. 4, 1993, p. 15-30. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0103-863X1993000100003>. Acesso em: 5 de fev. 2024.

RICARDO, Elio Carlos; ZYLBERSZTAJN, Arden. Os Parâmetros Curriculares Nacionais na formação inicial dos professores das Ciências da Natureza e Matemática do Ensino Médio. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 12, n. 3, p.339-355, 2016.

ROCHA, Maria Aparecida dos Santos. **A educação pública antes da independência**. In: Universidade Estadual Paulista. Pró-Reitoria de Graduação. Caderno de Formação: Formação de Professores. Educação, Cultura e Desenvolvimento. História da Educação Brasileira. São Paulo: Cultura Acadêmica, v. 1, 210. p. 32-47.

SAVIANI, Dermeval. **História das ideias pedagógicas no Brasil**. Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

SANTOS, Jário. dos.; MOITA, Filomena Maria Gonçalves da Silva Cordeiro. **Objetos de Aprendizagem e o Ensino de Matemática análise de sua importância na aprendizagem de conceitos de probabilidade**. 2009. Disponível em: https://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/objetos/comunica13.pdf. Acesso em 26 ago. 2024.

SIBEMBERG, Lucas Siviero. **GeoGebra 3D no Ensino Médio**: uma possibilidade para a aprendizagem de projeção ortogonal. 2019. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/212899>. Acesso em: 10 ago. 2024.

SILVA, Luciana; CANDIDO, Cláudia Cueva. **Modelo de aprendizagem de geometria do casal Van Hiele**. Relatório de Iniciação Científica. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2007.

SIQUEIRA, Paulo Henrique. Archimedean polyhedra - Visualização de poliedros com Realidade Aumentada (RA) e Realidade Virtual (RV) em A-frame. **Polyhedra**. 2019. Disponível em: <https://paulohscwb.github.io/polyhedra/archimedes/pt-br/>. Acesso em: 04 nov. 2024.

SOARES, J. C. **Downloads de provas e gabaritos da UFMG**. Disponível em: <https://vestibular.brasilecola.uol.com.br/downloads/universidade-federal-minas-gerais.htm>. Acesso em: 16 fev. 2025.

SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. **Contato: Matemática**. [volume] 2, São Paulo: FTD, 2016.

UNESCO. **Padrões de competência em TIC para professores**. Trad. Cláudia Bentes David. Brasília, DF: UNESCO / Microsoft Brasil, 2009.

YAKIMANSKAYA, I. Sarry. **The Development of Spatial Thinking in Schoolchildren.** Soviet Studies in Mathematics Education. Volume 3. National Council of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, VA 22091, 1991.

ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steve. **Visualization in teaching and learning mathematics.** MAA Notes n. 19. Mathematical Association of America: Washington, USA. 1991.