

COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Victória Gentil Andrade

REVISITANDO AS CICLIDES DE DUPIN ATRAVÉS DO GEOGEBRA 3D: UM PASSEIO PELA HISTÓRIA DA GEOMETRIA DAS SUPERFÍCIES.

Rio de Janeiro

2026

Victória Gentil Andrade

**REVISITANDO AS CICLIDES DE DUPIN ATRAVÉS DO GEOGEBRA 3D: UM
PASSEIO PELA HISTÓRIA DA GEOMETRIA DAS SUPERFÍCIES.**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins

Rio de Janeiro

2026

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

An553 Andrade, Victória Gentil

Revisitando as ciclides de dupin através do geogebra 3d : um passeio pela história da geometria das superfícies / Victória Gentil Andrade. - Rio de Janeiro, 2026.

225f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ciclides de Dupin. 3. Matemática - História. 4. Geometria diferencial. 5. Formação de professores. I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Victória Gentil Andrade

**REVISITANDO AS CICLIDES DE DUPIN ATRAVÉS DO GEOGEBRA 3D: UM
PASSEIO PELA HISTÓRIA DA GEOMETRIA DAS SUPERFÍCIES.**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ____/____/____.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins (Orientador)
PROFMAT/CPII

Profa. Dra. Patrícia Erthal de Moraes
PROFMAT/CPII

Prof. Dr. Anderson Reis Vargas
DMAT/CPII

Prof. Dr. Filipe Bellio da Nóbrega
Departamento de Matemática/PUC-Rio

Rio de Janeiro

2026

Dedico esta dissertação à memória de Luzinete Delgado da Silva, que acompanhou, com apoio, incentivo e orgulho, os primeiros passos de minha trajetória acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Criador, por sustentar minha fé e por me carregar nos momentos em que o cansaço, a dúvida e as dificuldades pareciam maiores do que minhas forças. A Ogum, minha força para batalhar, resistir e seguir em frente, mesmo quando pensei em desistir.

Agradeço ao corpo docente do PROFMAT, no Colégio Pedro II, pelas contribuições ao longo deste percurso formativo e pelas experiências compartilhadas durante o curso. Em especial, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins, pela orientação, pela confiança, pelas leituras cuidadosas e pelas contribuições fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos colegas do mestrado, pela convivência, pelas trocas e pelo apoio nos momentos de estudo, dúvidas e desafios. Agradeço especialmente à minha amiga Ana Carolina Paschoal, com quem atravessei esta caminhada de forma muito próxima. Compartilhamos dificuldades, conquistas, inseguranças e incentivos, sempre buscando dar força uma à outra. Sem sua presença, este mestrado certamente não teria sido o mesmo.

Ao Arthur, meu principal incentivador desde a graduação, por acreditar em mim mesmo nos momentos em que eu pensei em desistir. Agradeço pelo apoio constante, pela paciência, pelas palavras de encorajamento e por ter acompanhado de perto tantas etapas importantes da minha trajetória acadêmica.

À minha irmã, Esther, pelo apoio cotidiano, pela presença concreta nos momentos em que precisei e pela compreensão diante da minha rotina intensa. Seu cuidado e sua ajuda foram importantes para que eu pudesse continuar estudando, escrevendo e desenvolvendo este trabalho.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta dissertação. Este trabalho é resultado de estudo, persistência e dedicação, mas também de apoios, incentivos e presenças que tornaram possível chegar até aqui.

“A essência da Matemática está em sua liberdade.”
(Georg Cantor)

RESUMO

ANDRADE, Victória Gentil. **Revisitando as ciclides de Dupin através do GeoGebra 3D: um passeio pela história da geometria das superfícies**. 2026. 224 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2026.

Esta dissertação tem como objetivo elaborar um percurso teórico-didático voltado à ampliação da cultura geométrica do professor de Matemática, tomando as ciclides de Dupin como objeto de estudo. A pesquisa articula História da Matemática, Geometria Diferencial, visualização dinâmica no GeoGebra 3D e divulgação científica, buscando aproximar professores de um objeto geométrico pouco presente na formação inicial. O trabalho possui caráter qualitativo e natureza bibliográfica, documental e exploratória. A investigação parte do estudo histórico das ciclides no contexto da Geometria Diferencial do século XIX, com destaque para as contribuições de Charles Dupin, James Clerk Maxwell, Arthur Cayley e Gaston Darboux, e avança para o estudo de aspectos matemáticos relacionados a superfícies parametrizadas, linhas de curvatura, curvas focais, famílias de esferas e configurações morfológicas das ciclides. O GeoGebra 3D foi utilizado como recurso de investigação, construção e visualização, possibilitando a manipulação de modelos dinâmicos dessas superfícies e a observação das alterações produzidas pela variação de seus parâmetros. A partir desse percurso, foram elaboradas atividades voltadas a professores de Matemática, envolvendo a leitura orientada de um texto histórico, a exploração de superfícies no GeoGebra 3D e o estudo dos parâmetros, das equações, das curvas focais e das diferentes configurações das ciclides de Dupin. Como produto educacional, foi desenvolvida a segunda edição da revista *Trajetórias – História da Matemática e Divulgação Científica*, que reúne textos históricos e matemáticos, imagens, atividades, construções digitais, entrevistas e modelos impressos em 3D. A pesquisa apresenta, assim, uma proposta de aproximação entre textos clássicos e recursos contemporâneos de visualização, oferecendo diferentes caminhos para o contato de professores, licenciandos e estudantes com a Geometria Diferencial e contribuindo para a valorização da Matemática como produção histórica, visual, cultural e investigativa.

Palavras-chave: Ciclides de Dupin; História da Matemática; Geometria Diferencial; GeoGebra 3D; Formação de professores.

ABSTRACT

ANDRADE, Victória Gentil. **Revisiting Dupin cyclides through GeoGebra 3D: a journey through the history of surface geometry**. 2026. 224 f. Dissertation (Professional Master's Degree) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2026.

This dissertation aims to develop a theoretical and didactic pathway designed to broaden the geometric culture of Mathematics teachers, taking Dupin cyclides as its central object of study. The research brings together the History of Mathematics, Differential Geometry, dynamic visualization in GeoGebra 3D, and science communication, seeking to introduce teachers to a geometric object that is rarely addressed in initial teacher education. The study adopts a qualitative approach and is bibliographic, documentary, and exploratory in nature. The investigation begins with a historical study of cyclides within the context of nineteenth-century Differential Geometry, highlighting the contributions of Charles Dupin, James Clerk Maxwell, Arthur Cayley, and Gaston Darboux. It then examines mathematical aspects related to parametrized surfaces, lines of curvature, focal curves, families of spheres, and the different morphological configurations of cyclides. GeoGebra 3D was used as a resource for investigation, construction, and visualization, enabling the manipulation of dynamic models of these surfaces and the observation of changes produced by varying their parameters. Based on this pathway, activities for Mathematics teachers were developed, including the guided reading of a historical text, the exploration of surfaces in GeoGebra 3D, and the study of parameters, equations, focal curves, and different configurations of Dupin cyclides. As an educational product, the second edition of the magazine *Trajetórias – History of Mathematics and Science Communication* was developed, bringing together historical and mathematical texts, images, activities, digital constructions, interviews, and 3D-printed models. The research therefore presents a proposal that connects classical texts with contemporary visualization resources, offering different pathways through which teachers, undergraduate students, and school students may engage with Differential Geometry and contributing to the appreciation of Mathematics as a historical, visual, cultural, and investigative form of knowledge.

Keywords: Dupin cyclides; History of Mathematics; Differential Geometry; GeoGebra 3D; Mathematics teacher education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Charles Dupin (1784–1873)	24
Figura 2 – Formas associadas às ciclides e formas toroidais no design e na arquitetura.	27
Figura 3 – Retrato de Jean-Gaston Darboux	28
Figura 4 – Linha do tempo das ciclides de Dupin	31
Figura 5 – Representação de uma superfície parametrizada no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, com destaque para um ponto P pertencente à superfície.	34
Figura 6 – Representação de um plano parametrizado no espaço $\mathbb{R}^3$, com destaque para as curvas coordenadas e um ponto P pertencente à superfície.	35
Figura 7 – Representação de um parabolóide elíptico parametrizado no espaço $\mathbb{R}^3$, com destaque para as curvas coordenadas e um ponto P pertencente à superfície.	36
Figura 8 – Representação de um parabolóide hiperbólico parametrizado no espaço $\mathbb{R}^3$, com destaque para as curvas coordenadas e um ponto P pertencente à superfície.	37
Figura 9 – Representação de um toro parametrizado gerado pela rotação de um círculo de raio r cujo centro percorre uma circunferência de raio R	37
Figura 10 – Curva coordenada obtida pela fixação do parâmetro $u = u_0$ na parametrização do toro.	38
Figura 11 – Família de curvas meridianas obtidas pela variação do parâmetro u_0	39
Figura 12 – Curva coordenada obtida pela fixação do parâmetro $v = v_0$ na parametrização do toro.	39
Figura 13 – Família de curvas paralelas obtidas pela variação do parâmetro v_0	40
Figura 14 – Rede paramétrica formada pelas duas famílias de curvas coordenadas do toro.	40
Figura 15 – Vetores tangentes associados às curvas coordenadas da parametrização do toro.	41
Figura 16 – Plano tangente à superfície do toro no ponto P	42
Figura 17 – Vetor normal unitário à superfície do toro no ponto P	42
Figura 18 – Páginas da edição impressa de 1828 da obra <i>Disquisitiones generales circa superficies curvas</i> , de Carl Friedrich Gauss.	43
Figura 19 – Variação local dos coeficientes da Primeira Forma Fundamental em diferentes pontos da superfície.	46
Figura 20 – Transformação contínua de uma superfície plana em um cilindro preservando a estrutura métrica.	48
Figura 21 – Representação da aplicação de Gauss associando a cada ponto P da superfície parametrizada o vetor normal unitário $N(P)$. A extremidade desse vetor, considerada na esfera unitária centrada na origem O , determina o ponto Q , ilustrando a aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$	51

Figura 22 – Vetor normal em diferentes pontos do plano parametrizado por $\psi(u, v) = (u, v, 0)$. Observa-se que o vetor normal mantém a direção em todos os pontos da superfície, mostrando que a Segunda Forma Fundamental do plano é identicamente nula.	54
Figura 23 – Comparação da Segunda Forma Fundamental entre o plano e o cilindro. . .	55
Figura 24 – Variação local da Segunda Forma Fundamental na superfície.	56
Figura 25 – Ilustração da curvatura normal ao longo de uma curva $\alpha(t)$ sobre a superfície, mostrando a relação entre a variação do vetor normal e o valor de $k(t)$	59
Figura 26 – Linhas de curvatura no cilindro circular reto. As curvas definidas pela fixação dos parâmetros na parametrização $\phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ geram duas famílias de curvas sobre a superfície, correspondentes às circunferências horizontais e às retas geratrizes. Essas famílias coincidem com as direções principais e formam uma rede ortogonal, caracterizada pela anulação dos coeficientes mistos das formas fundamentais, isto é, $F = 0$ e $f = 0$	60
Figura 27 – Direções principais em uma superfície plana. As curvas ξ_1 e ξ_2 são retas ortogonais, e o vetor normal permanece constante ao longo de ambas, implicando $k_1 = k_2 = 0$	62
Figura 28 – Direções principais em uma esfera de raio $r = 3$. As curvas ξ_1 e ξ_2 correspondem a circunferências máximas, e o vetor normal varia uniformemente em todas as direções, caracterizando um ponto umbílico, com $k_1 = k_2 = \frac{1}{3}$	62
Figura 29 – Direções principais em um cilindro circular reto de raio $r = 1$. A curva ξ_1 corresponde às geratrizes, com curvatura nula ($k_1 = 0$), enquanto ξ_2 corresponde às circunferências transversais, com curvatura constante ($k_2 = 1$).	63
Figura 30 – Formação do cilindro circular reto como envelope de uma família de esferas.	64
Figura 31 – Formação de um tronco de cone como envoltória de uma família de esferas cujos centros percorrem um segmento de reta, com variação do raio ao longo da trajetória.	65
Figura 32 – Formação de um toro como envoltória de uma família de esferas de raio constante, cujos centros percorrem uma circunferência.	66
Figura 33 – Recorte do sumário do periódico <i>The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics</i> (1868), destacando o artigo <i>On the Cyclide</i> , de J. C. Maxwell.	68
Figura 34 – Representação da propriedade de Maxwell. A figura reúne uma visualização bidimensional da família de circunferências cujos centros percorrem uma elipse diretriz, com raio variando em função da distância focal, e uma visualização espacial da família de esferas correspondente.	69
Figura 35 – Representações da ciclidade de Dupin do tipo anel obtidas por meio da parametrização implementada no GeoGebra.	70

Figura 36 – Relação geométrica entre os parâmetros focais da elipse associada à construção da ciclidade de Dupin. As imagens destacam os focos F_1 e F_2 , o centro O , os segmentos a , b e c , e a relação pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$, responsável pela compatibilidade focal utilizada na abordagem de Maxwell e Cayley.	74
Figura 37 – Diferentes configurações da ciclidade parabólica modeladas no GeoGebra. . .	76
Figura 38 – Elipse focal associada à construção da ciclidade de Dupin. As imagens evidenciam os focos F_1 e F_2 , o centro O e os parâmetros a , b e c , que satisfazem a relação $a^2 = b^2 + c^2$. A elipse focal constitui um dos elementos geométricos fundamentais da formulação elíptico-hiperbólica associada aos estudos de Maxwell e Cayley.	78
Figura 39 – Hipérbole focal associada à construção da ciclidade de Dupin. A curva utiliza os parâmetros b e c da formulação elíptico-hiperbólica, e o retângulo auxiliar de dimensões $2b$ e $2c$ auxilia sua construção geométrica. As imagens ilustram a preservação da estrutura focal em diferentes configurações morfológicas da ciclidade.	79
Figura 40 – Curvas focais da ciclidade de Dupin representadas simultaneamente. A elipse focal e a hipérbole focal ocupam planos ortogonais e organizam geometricamente a família de esferas geradoras responsável pela formação da superfície.	80
Figura 41 – Integração entre os parâmetros da parametrização, as curvas focais e a superfície gerada.	82
Figura 42 – Ciclides de Dupin do tipo anel obtidas por diferentes escolhas dos parâmetros focais. Embora ambas satisfaçam a condição morfológica $c < d < a$, a variação dos parâmetros altera a abertura central e a geometria global da superfície.	85
Figura 43 – Representação auxiliar dos parâmetros da construção da ciclidade em anel no plano xy . A figura destaca a elipse focal, os segmentos a , b e c , bem como as esferas auxiliares com raios d , d , $d + c$ e $ d - c $, ilustrando geometricamente a condição $c < d < a$	86
Figura 44 – Ciclides de Dupin do tipo corno obtidas na condição crítica $d = c$. Embora ambas satisfaçam a mesma condição morfológica, diferentes escolhas dos parâmetros focais produzem geometrias distintas, preservando o ponto singular característico dessa classificação.	87
Figura 45 – Representação dos parâmetros geométricos e dos raios das esferas geradoras na configuração da ciclidade em corno. Como $d = c$, a esfera superior tem raio $d + c = 2d$, as esferas laterais têm raio d e a esfera inferior degenera em um ponto, pois $ d - c = 0$	88
Figura 46 – Ciclides de Dupin do tipo fusão obtidas para valores de $d < c$. As imagens ilustram diferentes níveis de autointerseção produzidos pela variação do parâmetro d , preservando a mesma classificação morfológica.	89

Figura 47 – Representação dos parâmetros geométricos e dos raios das esferas geradoras na configuração da ciclidade em fuso. Como $d < c$, o raio da esfera auxiliar menor é dado por $ d - c = c - d$, enquanto as demais esferas destacadas possuem raios d , d e $d + c$	90
Figura 48 – Configurações toroidais obtidas a partir da condição $c = 0$, na qual a elipse focal degenera em uma circunferência. As imagens ilustram diferentes escolhas dos parâmetros b e d , preservando a simetria característica do toro.	91
Figura 49 – Representação dos parâmetros geométricos e dos raios das esferas geradoras no caso toroidal. Quando $c = 0$, tem-se $a = b$, e os raios $d + c$, d , d e $ d - c $ tornam-se todos iguais a d , confirmando a simetria da construção.	92
Figura 50 – Configurações da ciclidade de Dupin obtidas na condição limite $d = a$, aqui denominada anel crítico. As imagens ilustram o caso simétrico com $c = 0$ e uma configuração elíptica com $c \neq 0$, preservando a relação crítica entre o parâmetro d e o semieixo maior a	93
Figura 51 – Representação dos parâmetros geométricos e dos raios das esferas geradoras na configuração do anel crítico. Nessa condição, $d = a$, e os raios destacados são d , d , $d + c$ e $ d - c = a - c$	93
Figura 52 – Configurações da ciclidade de Dupin obtidas para valores de $d > a$, aqui denominadas fuso central. As imagens ilustram superfícies com autointerseção interna, produzidas pela ultrapassagem do valor crítico $d = a$	94
Figura 53 – Representação dos parâmetros geométricos e dos raios das esferas geradoras na configuração do fuso central. Como $d > a$, tem-se também $d > c$, e os raios destacados são d , d , $d + c$ e $ d - c = d - c$	95
Figura 54 – Família de esferas geradoras da ciclidade de anel obtida por construção sintética.	98
Figura 55 – Circunferências iniciais da construção sintética da ciclidade de anel.	98
Figura 56 – Correspondência entre as circunferências iniciais da construção sintética e as curvas obtidas pela interseção da ciclidade com o plano xOy	99
Figura 57 – Curva diretriz e focos da representação sintética da ciclidade de anel.	100
Figura 58 – Representação sintética da ciclidade de chifre obtida a partir da família de esferas tangentes.	100
Figura 59 – Vista frontal da ciclidade de chifre, evidenciando a configuração geométrica que justifica sua denominação.	101
Figura 60 – Circunferências iniciais c_1 e c_2 tangentes internamente em um único ponto.	101
Figura 61 – Curva diretriz e focos da representação sintética da ciclidade de chifre.	102
Figura 62 – Correspondência entre a construção sintética e as linhas de curvatura da representação parametrizada da ciclidade de chifre.	102
Figura 63 – Representação sintética da ciclidade em fuso obtida a partir da família de esferas tangentes.	103

Figura 64 – Circunferências iniciais c_1 e c_2 secantes, com interseções em dois pontos distintos.	104
Figura 65 – Correspondência entre a construção sintética e as linhas de curvatura da representação parametrizada da ciclidade em fuso.	105
Figura 66 – Representação da ciclidade de Dupin na configuração toroidal obtida por meio da construção sintética.	105
Figura 67 – Circunferências iniciais concêntricas utilizadas na construção sintética da ciclidade na configuração toroidal.	106
Figura 68 – Correspondência entre a construção sintética e as linhas de curvatura da representação parametrizada da ciclidade na configuração toroidal.	106
Figura 69 – Linhas de curvatura da representação parametrizada do toro obtidas para $c = 0$.	107
Figura 70 – Curva diretriz circular da representação sintética da ciclidade na configuração toroidal.	108
Figura 71 – Interseção das famílias de curvas coordenadas da ciclidade de Dupin. A curva $u = u_0$, em vermelho, e a curva $v = v_0$, em verde, determinam o ponto $P = \psi(u_0, v_0)$, ilustrando a estrutura da malha paramétrica associada à superfície. Cada ponto regular da ciclidade é obtido pela interseção de uma curva de cada família, estabelecendo uma correspondência entre os parâmetros da parametrização e os pontos da superfície.	111
Figura 72 – Comportamento das curvas coordenadas na configuração de fuso da ciclidade de Dupin. As imagens mostram diferentes posições das curvas $u = u_0$, em vermelho, e $v = v_0$, em verde, sobre a superfície.	113
Figura 73 – Vetores tangentes associados às curvas coordenadas da ciclidade de Dupin. O vetor $\psi_u(u, v)$ é tangente à curva coordenada obtida pela variação do parâmetro u , enquanto o vetor $\psi_v(u, v)$ é tangente à curva gerada pela variação de v . As curvas coordenadas são representadas em linhas pontilhadas, ilustrando a correspondência entre cada família de curvas e seu respectivo vetor tangente.	115
Figura 74 – Plano tangente à ciclidade de Dupin no ponto $P = \psi(u, v)$. O plano tangente $T_P S$ é gerado pelos vetores tangentes $\psi_u(u, v)$ e $\psi_v(u, v)$, associados às curvas coordenadas que se intersectam no ponto considerado.	116
Figura 75 – Vetor normal unitário à ciclidade de Dupin. O vetor $\mathbf{n}(u, v)$ é obtido pela normalização do produto vetorial entre os vetores tangentes $\psi_u(u, v)$ e $\psi_v(u, v)$, sendo perpendicular ao plano tangente $T_P S$ no ponto $P = \psi(u, v)$	117
Figura 76 – Comparação da Primeira Forma Fundamental em duas configurações da ciclidade de Dupin obtidas pela variação do parâmetro c , mantendo fixos os controles u_0 e v_0 , que determinam o ponto $P = \psi(u_0, v_0)$	119
Figura 77 – Configuração da ciclidade de Dupin para análise da Segunda Forma Fundamental.	121
Figura 78 – Influência da alteração dos parâmetros globais sobre a Segunda Forma Fundamental da ciclidade de Dupin, mantendo fixos os controles u_0 e v_0	123

Figura 79 – Influência da posição do ponto parametrizado sobre a Segunda Forma Fundamental.	124
Figura 80 – Avaliação da geometria local da ciclidade de Dupin para o ponto determinado por $u_0 = 180^\circ$ e $v_0 = 180^\circ$	125
Figura 81 – Configuração local da ciclidade de Dupin em uma região exterior da superfície, destacando o plano tangente $T_P S$, os vetores tangentes ψ_u e ψ_v , o vetor normal unitário $\mathbf{n}$ e o valor da curvatura normal k_n	128
Figura 82 – Configuração local da ciclidade de Dupin em uma região interna do anel, destacando o plano tangente $T_P S$, os vetores tangentes ψ_u e ψ_v , o vetor normal unitário $\mathbf{n}$ e o valor da curvatura normal k_n	129
Figura 83 – Região elíptica da ciclidade de Dupin caracterizada por curvatura gaussiana positiva, com $K > 0$ e curvaturas principais de mesmo sinal.	130
Figura 84 – Região hiperbólica da ciclidade de Dupin caracterizada por curvatura gaussiana negativa, com $K < 0$ e curvaturas principais de sinais opostos.	131
Figura 85 – Influência da geometria global na curvatura gaussiana em configurações do tipo fuso.	132
Figura 86 – Curvatura média positiva em uma região da ciclidade de Dupin.	134
Figura 87 – Curvatura média negativa em uma região da ciclidade de Dupin.	135
Figura 88 – Curvatura média aproximadamente nula em uma região da ciclidade de Dupin.	135
Figura 89 – Curvatura média em uma configuração extrema da família de ciclidades de Dupin do tipo fuso.	136
Figura 90 – Deslocamento do ponto P ao longo da primeira linha de curvatura (curva verde), mantendo $v_0 = 210^\circ$, e evidenciando a constância aproximada de uma das curvaturas principais ao longo de sua respectiva linha de curvatura.	138
Figura 91 – Deslocamento do ponto P ao longo da segunda linha de curvatura (curva vermelha), mantendo $u_0 = 240^\circ$, e mostrando a constância aproximada de uma das curvaturas principais ao longo de sua respectiva linha de curvatura.	140
Figura 92 – Recorte 1 da atividade de leitura guiada sobre as superfícies ciclides em Charles Dupin.	146
Figura 93 – Recorte 2 da atividade de leitura guiada sobre as esferas móveis e a geração das superfícies ciclides.	147
Figura 94 – Recorte 3 da atividade de leitura guiada sobre três esferas fixas, pontos de contato e reta diretriz.	148
Figura 95 – Recorte 4 da atividade de leitura guiada sobre linhas de segunda curvatura planas e circulares.	149
Figura 96 – Recorte 5 da atividade de leitura guiada sobre as condições definitivas da geração das ciclides.	150
Figura 97 – Questões orientadoras da leitura dos recortes selecionados da obra de Dupin.	151

Figura 98 – Continuação das questões orientadoras da leitura dos recortes selecionados da obra de Dupin.	152
Figura 99 – Construções dinâmicas no GeoGebra 3D para exploração de superfícies e famílias de curvas.	154
Figura 100 – Questões orientadoras da exploração dinâmica das superfícies no GeoGebra 3D.	155
Figura 101 – Continuação das questões orientadoras da exploração dinâmica das superfícies no GeoGebra 3D.	156
Figura 102 – Atividade 3: variações da ciclidade de Dupin obtidas na construção dinâmica no GeoGebra 3D.	158
Figura 103 – Atividade 3: questões orientadoras da exploração dinâmica das variações da ciclidade de Dupin.	159
Figura 104 – Atividade 3: continuação das questões orientadoras da exploração dinâmica das variações da ciclidade de Dupin.	160
Figura 105 – Atividade 3: continuação das questões orientadoras da exploração dinâmica das variações da ciclidade de Dupin.	161

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
2	ORIGENS E DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DAS CICLIDES DE DUPIN	22
2.1	Contexto da Geometria Diferencial no século XIX	22
2.2	Charles Dupin: formação e contribuições para a Geometria Diferencial	23
2.3	Aspectos geométricos das ciclides	25
2.4	Jean-Gaston Darboux: ampliação da teoria das ciclides	28
2.5	Maxwell, Cayley e as curvas focais na teoria das ciclides	29
2.6	Síntese histórica e linha do tempo das ciclides	30
3	ASPECTOS MATEMÁTICOS DAS CICLIDES DE DUPIN	33
3.1	Elementos fundamentais da Geometria Diferencial de superfícies	33
3.1.1	Superfícies parametrizadas	34
3.1.2	Vetores tangentes, plano tangente e vetor normal	41
3.1.3	Primeira forma fundamental	43
3.1.4	Aplicação normal de Gauss	50
3.1.5	Segunda forma fundamental	52
3.1.6	Curvaturas e direções principais	57
3.1.7	Linhas de curvatura	58
3.2	Superfícies de Dupin	61
3.2.1	Definição de superfície de Dupin	61
3.2.2	Superfícies de canal	63
3.2.3	Interpretação geométrica de Maxwell	67
3.2.4	Ciclides de Dupin	70
3.2.5	Curvas focais	77
3.2.6	Classificação morfológica e exploração dinâmica	80
3.3	Representação sintética da ciclidade de Dupin por objetos dependentes . .	97
4	GEOMETRIA DIFERENCIAL APLICADA ÀS CICLIDES	110
4.1	Estrutura diferencial da parametrização	110
4.2	Vetores tangentes associados às curvas coordenadas	114
4.3	Plano tangente e vetor normal	115
4.4	Primeira Forma Fundamental	117
4.5	Segunda Forma Fundamental	120
4.6	Curvatura normal	127

4.7	Curvatura gaussiana	130
4.8	Curvatura média	133
4.9	Curvaturas principais e linhas de curvatura	137
5	AMPLIANDO A CULTURA GEOMÉTRICA DO PROFESSOR	144
5.1	Leitura guiada de um texto clássico: as superfícies ciclides em Charles Dupin	144
5.2	Visualizando superfícies e linhas de curvatura no GeoGebra	153
5.2.1	Parâmetros, forma canônica e curva focal da ciclidade de Dupin no GeoGebra .	157
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	163
6.1	Síntese do percurso desenvolvido	163
6.2	Contribuições para a formação geométrica do professor	164
6.3	História da Matemática, tecnologia e visualização	165
6.4	Produto educacional e possibilidades de uso	166
6.5	Perspectivas de continuidade	167
	REFERÊNCIAS	169
	APÊNDICES	171
	APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL: REVISTA TRAJETÓRIAS	172

1 INTRODUÇÃO

A História da Matemática permite compreender que os conceitos, os métodos e os objetos matemáticos são produzidos em determinados contextos, por meio de problemas, linguagens e formas de representação próprias de cada época. Ao entrar em contato com textos matemáticos antigos, o leitor contemporâneo frequentemente se depara com desafios de interpretação: a notação pode ser diferente da atual, os argumentos podem pressupor conhecimentos geométricos específicos e as representações visuais, muitas vezes, são escassas ou inexistentes.

No caso da Geometria Diferencial do século XIX, essa dificuldade torna-se especialmente significativa. Textos clássicos sobre curvas e superfícies apresentam descrições densas, com forte presença de argumentos geométricos e analíticos. A compreensão desses documentos exige, além da leitura do texto, a construção de imagens mentais, a interpretação de relações espaciais e a articulação entre equações, curvas, superfícies e propriedades geométricas.

Esta dissertação não se configura como um estudo exclusivamente historiográfico sobre as ciclides de Dupin, tampouco como uma pesquisa destinada ao desenvolvimento especializado da Geometria Diferencial ou à análise das tecnologias digitais como objeto central. O trabalho situa-se na articulação entre esses campos, investigando como a História da Matemática, os conhecimentos geométricos e os recursos contemporâneos de visualização podem ser reunidos na construção de um percurso formativo para professores de Matemática.

Nessa perspectiva, os textos históricos, as propriedades matemáticas das ciclides e as construções no GeoGebra 3D atuam de forma complementar. O interesse principal não está em produzir uma história completa dessas superfícies, desenvolver exaustivamente sua teoria matemática ou avaliar uma tecnologia específica, mas em compreender como esses elementos podem dialogar na elaboração de mediações que ampliem o repertório matemático e cultural do professor.

Diante disso, esta dissertação parte da seguinte questão norteadora: como articular História da Matemática, Geometria Diferencial e tecnologias digitais na construção de um percurso que favoreça a aproximação de professores com objetos geométricos pouco usuais e contribua para a ampliação de sua cultura geométrica?

A pesquisa teve início a partir do interesse no estudo das ciclides de Darboux. No entanto, durante as primeiras leituras, surgiram termos e objetos que exigiram um retorno a resultados anteriores, especialmente às superfícies de canal e às ciclides de Dupin. Esse deslocamento orientou o percurso da investigação. A necessidade de compreender a origem geométrica desses objetos levou ao estudo de Charles Dupin, James Clerk Maxwell, Arthur Cayley e Gaston Darboux, bem como à construção de representações dinâmicas no GeoGebra 3D.

Nesse processo, a tecnologia assumiu um papel investigativo. O GeoGebra 3D foi utili-

zado para construir, manipular e visualizar superfícies descritas em textos históricos, permitindo acompanhar a variação de parâmetros e observar curvas, linhas de curvatura, curvas focais e famílias de esferas. As construções digitais funcionaram como uma forma de mediação visual: aquilo que nos textos clássicos aparece principalmente por meio de descrições geométricas e analíticas pôde ser reconstruído, observado e manipulado em um ambiente dinâmico.

O objeto central deste trabalho são as ciclides de Dupin. Essas superfícies, estudadas por Charles Dupin no século XIX, apresentam propriedades geométricas relevantes, como linhas de curvatura circulares, relação com famílias de esferas e associação a curvas focais. Embora sejam pouco usuais na formação inicial de professores de Matemática, as ciclides oferecem um campo fértil para articular Geometria Diferencial, História da Matemática, visualização geométrica, modelagem dinâmica e divulgação científica.

A escolha desse objeto está relacionada à defesa de uma formação docente que valorize também temas matemáticos menos frequentes nos currículos escolares e nos cursos de licenciatura. A ampliação da cultura geométrica do professor pode ocorrer pelo contato com objetos que mobilizam diferentes representações e permitem revisitar conceitos conhecidos, como cônicas, parametrizações, superfícies, tangência e curvatura, em um contexto mais amplo.

Assim, estudar as ciclides de Dupin não significa propor sua inclusão como um conteúdo obrigatório da Educação Básica. Essas superfícies são tomadas como eixo de investigação, formação e divulgação matemática, permitindo estabelecer conexões entre conteúdos escolares, conhecimentos da Matemática superior, textos históricos e recursos contemporâneos de visualização.

O objetivo geral desta pesquisa é elaborar um percurso teórico-didático voltado à ampliação da cultura geométrica do professor de Matemática, tomando as ciclides de Dupin como objeto de estudo e articulando História da Matemática, Geometria Diferencial, tecnologias digitais e divulgação científica.

Para alcançar esse objetivo, foram definidos os seguintes objetivos específicos: investigar o desenvolvimento histórico das ciclides de Dupin no contexto da Geometria Diferencial do século XIX; estudar propriedades matemáticas associadas a essas superfícies, como parametrizações, linhas de curvatura, curvas focais e famílias de esferas; construir representações dinâmicas no GeoGebra 3D; elaborar atividades orientadas para professores de Matemática; e desenvolver um produto educacional em formato de revista de divulgação científica.

A pesquisa possui caráter qualitativo e natureza bibliográfica, documental e exploratória. A dimensão bibliográfica fundamentou o estudo histórico, matemático e didático do tema. A dimensão documental envolveu o contato com textos clássicos, especialmente a obra de Charles Dupin e os trabalhos de Maxwell e Cayley. A dimensão exploratória ocorreu por meio da construção e da análise de modelos dinâmicos no GeoGebra 3D, que auxiliaram na interpretação das propriedades geométricas estudadas e na elaboração das atividades propostas.

O capítulo matemático desta dissertação foi construído como uma síntese orientada dos conceitos necessários ao estudo das ciclides de Dupin. A intenção foi organizar elementos de Geometria Diferencial, como superfícies parametrizadas, vetores tangentes, formas fundamentais, curvaturas, linhas de curvatura, curvas focais e famílias de esferas, de modo articulado às construções dinâmicas realizadas.

Esse percurso reflete também a maneira como a própria investigação foi desenvolvida: pela leitura dos textos, pelas tentativas de modelagem, pela manipulação dos objetos, pela comparação entre diferentes representações e pela revisão constante das interpretações geométricas. Desse modo, o GeoGebra 3D não aparece apenas como recurso destinado à apresentação final das superfícies, mas como parte do processo de estudo e construção do trabalho.

Como produto educacional, foi elaborada a segunda edição da revista *Trajetórias – História da Matemática e Divulgação Científica*, voltada a professores de Matemática, licenciandos, estudantes e leitores interessados. Nesta edição, as ciclides de Dupin constituem o eixo central de um percurso que reúne textos históricos e matemáticos, imagens, atividades, construções no GeoGebra 3D, entrevistas e modelos impressos em 3D.

A revista busca aproximar o leitor de um objeto matemático historicamente relevante por meio de uma linguagem visual, investigativa e acessível. Suas diferentes seções procuram relacionar o desenvolvimento histórico das ciclides, suas propriedades matemáticas, as possibilidades de manipulação dos modelos digitais e os diálogos estabelecidos com pesquisadores e profissionais de diferentes áreas.

A dissertação está organizada em seis capítulos. Este primeiro capítulo apresenta o problema de pesquisa, os objetivos, a caracterização metodológica e o percurso geral do trabalho.

O Capítulo 2 aborda o desenvolvimento histórico das ciclides de Dupin, situando-as no contexto da Geometria Diferencial do século XIX e discutindo contribuições de Monge, Dupin, Gauss, Maxwell, Cayley e Darboux.

O Capítulo 3 apresenta os aspectos matemáticos relacionados às ciclides de Dupin, com ênfase em suas parametrizações, curvas focais, famílias de esferas, configurações morfológicas e formas de representação sintética exploradas com o apoio do GeoGebra 3D.

O Capítulo 4 aprofunda a análise da Geometria Diferencial aplicada às ciclides de Dupin, abordando curvas coordenadas, vetores tangentes, plano tangente, vetor normal, formas fundamentais, curvaturas e linhas de curvatura.

O Capítulo 5 reúne atividades voltadas à ampliação da cultura geométrica do professor, articulando leitura de textos clássicos, visualização dinâmica, exploração de superfícies e investigação das ciclides de Dupin.

O Capítulo 6 apresenta as considerações finais, retomando o percurso desenvolvido, suas contribuições para a formação geométrica do professor, o papel da História da Matemática, da

tecnologia e da visualização, as possibilidades de uso do produto educacional e as perspectivas de continuidade da pesquisa.

Este trabalho propõe, portanto, uma aproximação entre textos matemáticos do século XIX e recursos contemporâneos de visualização. No caso das ciclides de Dupin, a articulação entre História da Matemática, estudo geométrico, GeoGebra 3D, atividades orientadas, entrevistas, modelos tridimensionais e divulgação científica possibilitou a organização de diferentes caminhos de acesso ao objeto.

Espera-se que a dissertação e a segunda edição da revista *Trajetórias – História da Matemática e Divulgação Científica* possam incentivar novas leituras, construções e investigações, contribuindo para uma formação matemática que valorize a curiosidade intelectual, a visualização, a história e o contato com diferentes formas de produção do conhecimento geométrico.

2 ORIGENS E DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DAS CICLIDES DE DUPIN

A presente dissertação investiga de que maneira recursos tecnológicos podem contribuir para a compreensão de documentos matemáticos históricos e de variedades geométricas estudadas ao longo do século XIX. Para isso, torna-se necessário compreender não apenas as propriedades matemáticas das ciclides, mas também o recorte histórico em que esses objetos foram estudados por Dupin.

Este capítulo apresenta uma contextualização histórica das ciclides e dos principais matemáticos envolvidos em sua construção teórica. O objetivo não é realizar uma reconstrução histórica exaustiva, mas identificar elementos que auxiliem na compreensão do objeto matemático investigado e fundamentem as propostas didáticas desenvolvidas posteriormente.

Ao situar as ciclides no desenvolvimento da Geometria Diferencial do século XIX, busca-se compreender as relações entre produção matemática, momento histórico e possibilidades de exploração por meio de tecnologias digitais. Nesse sentido, esta dissertação também pretende incentivar o professor a tomar documentos matemáticos históricos como ponto de partida para estudos, investigações e propostas de ensino, utilizando recursos tecnológicos como apoio à leitura, à visualização e à interpretação desses objetos. Essa perspectiva fundamenta o produto educacional desenvolvido nesta pesquisa, uma revista de divulgação científica que articula trajetória histórica, exploração matemática e uso de tecnologias digitais.

2.1 Contexto da Geometria Diferencial no século XIX

Durante o século XIX, a matemática passou por profundas transformações. Novas teorias surgiram e diversos ramos da disciplina adquiriram maior rigor e autonomia (Boyer, 1996, p. 387). Nesse período, a geometria deixou de se limitar ao estudo das figuras planas e espaciais da tradição euclidiana, ao domínio da geometria de Lagrange e ao ensino da geometria projetiva nas universidades, passando a investigar propriedades mais complexas de curvas e superfícies por meio da geometria diferencial e integral.

Esse movimento foi impulsionado por matemáticos como Gaspard Monge (1746–1818), considerado um dos precursores da Geometria Diferencial (Struik, 1988, p. 53). Seus estudos sobre superfícies, linhas de curvatura e representação espacial contribuíram para o surgimento de novas abordagens geométricas¹. Além disso, a criação da Geometria Descritiva estabeleceu uma importante ligação entre a matemática teórica e problemas práticos de engenharia e representação espacial.

¹ Grande parte desses resultados foi sistematizada por Monge em sua obra *Application de l'analyse à la géométrie*, publicada em 1807. Este trabalho é amplamente considerado um dos primeiros tratados a unir de forma sistemática a análise matemática à geometria, estabelecendo bases metodológicas para a geometria diferencial de superfícies.

Ao longo do século XIX, outros matemáticos ampliaram essas ideias. Carl Friedrich Gauss (1777–1855) desenvolveu resultados fundamentais sobre a curvatura das superfícies, culminando no célebre *Theorema Egregium*², que demonstrou que determinadas propriedades geométricas podem ser estudadas independentemente do espaço ambiente em que a superfície está imersa (Gauss, 1827). Esses avanços permitiram o desenvolvimento sistemático da Geometria Diferencial, área dedicada ao estudo de curvas, superfícies e de suas propriedades locais e globais.

Paralelamente, matemáticos como Jean-Victor Poncelet (1788–1867), Julius Plücker (1801–1868), Sophie Germain (1776–1831), Arthur Cayley (1821–1895) e James Clerk Maxwell (1831–1879) contribuíram para o desenvolvimento das geometrias projetiva, algébrica e analítica, fundamentais para a sistematização da Geometria Diferencial no século XIX, ampliando as ferramentas disponíveis para a investigação de objetos geométricos cada vez mais complexos (Klein, 1928, p. 121–141) (Eves, 2004, p. 519–535). Nesse ambiente de intensa produção matemática, marcado pela interação entre análise, álgebra e geometria, surgiram diversos estudos relacionados às superfícies especiais (Klein, 1928, p. 1–3).

É nesse cenário que se inserem os trabalhos de Charles Dupin e, posteriormente, de Jean-Gaston Darboux. As pesquisas desenvolvidas por esses matemáticos contribuíram para o estudo das linhas de curvatura, das superfícies canal e das ciclides³, objetos geométricos que ocupam posição central nesta dissertação (Dupin, 1822; Darboux, 1873).

2.2 Charles Dupin: formação e contribuições para a Geometria Diferencial

Charles Dupin (1784–1873) foi um matemático, engenheiro e professor francês que desempenhou papel importante no desenvolvimento da geometria no século XIX (O'Connor; Robertson, 2000). Sua trajetória acadêmica esteve diretamente ligada à tradição matemática francesa inaugurada por Gaspard Monge, um dos principais responsáveis pela consolidação da Geometria Descritiva e pelas bases que posteriormente contribuíram para o surgimento da Geometria Diferencial.

Dupin ingressou na École Polytechnique⁴, instituição criada durante o período pós-

² Resultado apresentado por Gauss em sua obra de geometria diferencial *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, publicada em 1827. O termo *Egregium*, do latim, significa “notável” ou “excepcional”. O nome faz jus à demonstração de que a curvatura gaussiana é uma propriedade intrínseca da superfície, isto é, pode ser calculada apenas com medidas tomadas sobre a própria superfície, sem depender do espaço tridimensional no qual ela está mergulhada.

³ Os conceitos de superfícies canal e linhas de curvatura, bem como a definição inicial das ciclides, foram primeiramente desenvolvidos por Charles Dupin em seu texto *Applications de géométrie et de mécanique*, publicado em 1822. Cerca de cinquenta anos depois, Gaston Darboux aprofundou e generalizou esse estudo matemático na obra *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, publicada em 1873, consolidando a teoria em torno dessas superfícies.

⁴ Fundada em 1794, a École Polytechnique foi crucial para a excelência da matemática francesa, tendo Monge como um de seus fundadores. Dupin graduou-se como engenheiro naval por esta instituição, o que justifica sua forte inclinação para as aplicações mecânicas e navais da geometria ao longo de sua carreira.

Figura 1 – Charles Dupin (1784–1873)



Fonte: O'Connor e Robertson (2000).

Revolução Francesa e considerada um dos mais importantes centros de formação científica da Europa. Nesse ambiente, recebeu forte influência das ideias de Monge e do movimento de renovação da matemática francesa, que buscava integrar teoria e aplicação em áreas como engenharia, mecânica e representação espacial (Klein, 1928, p. 72).

Ao longo de sua carreira, Dupin dedicou-se ao estudo das superfícies e de suas propriedades geométricas. Seus trabalhos contribuíram para a compreensão das linhas de curvatura e das relações existentes entre diferentes famílias de superfícies. A relevância de seu trabalho é destacada por Felix Klein ao descrever a riqueza das contribuições do autor para a geometria da época:

Acima de tudo, há a famosa ciclode de Dupin, uma superfície que é o envelope de todas as esferas tangentes a três esferas dadas. Depois, há o chamado teorema de Dupin, estabelecendo que as superfícies de um sistema ortogonal se interceptam ao longo de suas linhas de curvatura. Ambos estão conectados com a teoria das superfícies quádricas confocais. Devo mencionar também a indicatriz de Dupin, que diz respeito às tangentes conjugadas em um ponto de uma superfície. Esta pequena seleção de belas descobertas pode dar uma imagem do enriquecimento abundante que a geometria deve a Dupin (Klein, 1928, p. 72, tradução nossa).⁵

Entre suas principais publicações destaca-se a obra *Applications de géométrie et de mécanique*, publicada em 1822 (Dupin, 1822). Nesse trabalho, Dupin apresentou resultados

⁵ No original: “Above all, there is the famous Dupin cyclide, a surface which is the envelope of all the spheres tangent to three given spheres. Then there is the so-called Dupin theorem, stating that the surfaces of an orthogonal system intersect one another in their lines of curvature. Both these are connected with the theory of confocal quadric surfaces. I should also mention the Dupin indicatrix, which concerns the conjugate tangents at a point on a surface. This small selection of beautiful discoveries may give a picture of the abundant enrichment which geometry owes to Dupin” (Klein, 1928, p. 72).

originais relacionados ao estudo de superfícies canal e introduziu objetos geométricos que mais tarde ficariam conhecidos como ciclides de Dupin. Essas superfícies possuem propriedades notáveis associadas às linhas de curvatura e passaram a ocupar posição relevante na Geometria Diferencial clássica.

Os estudos desenvolvidos por Dupin influenciaram diversos matemáticos ao longo do século XIX e abriram caminho para investigações posteriores sobre superfícies especiais. Cerca de cinco décadas mais tarde, em 1873, Jean-Gaston Darboux retomou e ampliou parte dessas pesquisas na obra *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Darboux, 1873). Posteriormente, no Livro II, Capítulo II, do primeiro volume da coletânea *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Darboux sistematizou aspectos fundamentais da teoria das superfícies. No quarto volume da mesma obra, retomou o estudo das ciclides de Dupin, ampliando a teoria fundamental e apresentando generalizações de propriedades por meio do estudo das congruências e das equações diferenciais parciais (Darboux, 1887; Darboux, 1896).

Dessa forma, a obra de Charles Dupin representa um importante elo entre os trabalhos pioneiros de Monge e os desenvolvimentos posteriores realizados por Darboux. Sua contribuição para o estudo das superfícies e das linhas de curvatura constitui um dos marcos fundamentais da Geometria Diferencial do século XIX e fornece o contexto histórico necessário para compreender o surgimento das ciclides que serão estudadas nas próximas seções.

2.3 Aspectos geométricos das ciclides

As ciclides constituem uma classe importante de superfícies no desenvolvimento da Geometria Diferencial do século XIX, especialmente por suas relações com linhas de curvatura, superfícies canal, famílias de esferas e curvas focais. Introduzidas nos trabalhos de Charles Dupin e posteriormente retomadas por Jean-Gaston Darboux (Dupin, 1822; Darboux, 1873), essas superfícies também despertaram o interesse de pesquisadores como James Clerk Maxwell e Arthur Cayley, em razão de sua estrutura geométrica e de suas relações com curvas e superfícies.

Entre as propriedades mais notáveis das ciclides, destaca-se o comportamento de suas linhas de curvatura⁶. Os estudos realizados por Dupin mostraram que determinadas famílias de superfícies apresentavam relações geométricas especiais, nas quais as linhas de curvatura desempenhavam papel central. No caso das ciclides de Dupin, essa característica torna-se particularmente relevante, pois suas linhas de curvatura são constituídas por circunferências ou retas.

Outro aspecto relevante está associado à estreita relação das ciclides com famílias de esferas e com as chamadas superfícies canal⁷. Hilbert e Cohn-Vossen destacam que as ciclides

⁶ Nas superfícies tridimensionais, as linhas de curvatura são curvas cujas tangentes coincidem com as direções principais de curvatura em cada ponto. Uma das propriedades mais notáveis das ciclides de Dupin é que todas as suas linhas de curvatura são formadas exclusivamente por circunferências ou retas.

⁷ Uma superfície canal é gerada pelo envelope de uma família de esferas cujos centros se movem ao longo de uma

de Dupin podem ser compreendidas como envoltórias de esferas e que apresentam linhas de curvatura circulares, propriedade que as aproxima das superfícies canal e das superfícies focais (Hilbert; Cohn-Vossen, 1944, p. 192–194). Essa conexão contribuiu para que as ciclides fossem compreendidas como superfícies relevantes para o estudo das relações entre curvas, superfícies mais gerais e famílias de esferas.

Ao longo do século XIX, o interesse pelas ciclides ultrapassou os trabalhos originais de Dupin e passou a envolver outros pesquisadores que buscavam compreender suas propriedades sob diferentes perspectivas. As ciclides tornaram-se exemplos importantes para o estudo das transformações geométricas, das superfícies algébricas e das relações entre Geometria Diferencial e Geometria Projetiva.

A relevância de compreender e estudar as ciclides não se restringe ao seu período histórico de origem, tampouco às complementações realizadas por Darboux. A beleza de suas formas, as distintas linhas de curvatura presentes na superfície e a riqueza de suas propriedades geométricas contribuem para aplicações em outros ramos do conhecimento, como a engenharia civil, a arquitetura, o design e a geometria computacional.

Essa presença em campos aplicados pode ser observada também em produções contemporâneas de design e arquitetura. Um exemplo direto é a *Orb Bag*, do Nik Bentel Studio, apresentada pelo próprio estúdio como uma bolsa rígida cuja forma é baseada em uma ciclidade de Dupin (Nik Bentel Studio, 2024). Na arquitetura, o *Museum of the Future*, em Dubai, apresenta uma forma toroidal com vazio central, permitindo uma aproximação visual com superfícies anelares e formas ciclídicas (Killa Design, 2022). Embora não seja apresentado aqui como uma ciclidade de Dupin em sentido estrito, o edifício contribui para discutir como formas geométricas complexas aparecem em projetos arquitetônicos contemporâneos.

A partir da década de 1990, as ciclides ganharam renovado destaque e passaram a ser objeto de investigação em áreas aplicadas, como a geometria computacional, a modelagem geométrica e a visualização matemática⁸ (Pratt, 1990). Essa retomada demonstra a riqueza conceitual desses objetos e justifica o interesse de geômetras e pesquisadores em explorá-las.

A trajetória histórica dessas superfícies revela como a investigação de problemas relacionados às linhas de curvatura, às superfícies canal e às transformações geométricas contribuiu para ampliar a compreensão dessas superfícies e para consolidar conceitos importantes no estudo da Geometria Diferencial.

curva base, chamada diretriz. No caso específico das ciclides de Dupin, essa curva diretriz é uma cônica.

⁸ Devido à propriedade de possuir linhas de curvatura circulares e de admitir representações adequadas à modelagem geométrica, as ciclides tornaram-se relevantes, a partir da década de 1990, para o Design Auxiliado por Computador, conhecido pela sigla CAD. Elas são frequentemente utilizadas como superfícies de transição, ou *blending surfaces*, para conectar suavemente outras formas geométricas, como cilindros, cones e esferas, em projetos de engenharia.

Figura 2 – Formas associadas às ciclides e formas toroidais no design e na arquitetura.



(a) *Orb Bag*, do Nik Bentel Studio, bolsa inspirada em uma forma de ciclidade de Dupin.



(b) *Museum of the Future*, em Dubai, edifício de forma toroidal com vazio central.

Fonte: Nik Bentel Studio; Killa Design/Museum of the Future.

2.4 Jean-Gaston Darboux: ampliação da teoria das ciclides

Jean-Gaston Darboux (1842–1917) foi um matemático francês reconhecido por suas importantes contribuições à Geometria Diferencial e à teoria das superfícies (O'Connor; Robertson, 2020). Formado pela École Normale Supérieure⁹, destacou-se ainda jovem por seus trabalhos em análise e geometria, tornando-se posteriormente professor da Sorbonne e membro da Academia Francesa de Ciências. Sua produção científica exerceu grande influência sobre o desenvolvimento da matemática francesa durante a segunda metade do século XIX.

Além de suas contribuições geométricas, Darboux também se destacou no campo da Análise, especialmente em trabalhos relacionados ao estudo das funções e da integração, como se observa no artigo *Mémoire sur les fonctions discontinues*, publicado em 1875. Seu nome também ficou associado à chamada integral de Darboux, posteriormente incorporada ao estudo da integração em Análise Real (Britannica Editors, 2026).

Figura 3 – Retrato de Jean-Gaston Darboux



Fonte: O'Connor e Robertson (2020).

Os estudos de Darboux concentraram-se, em grande parte, na investigação de curvas, superfícies e transformações geométricas. Em um período de intenso desenvolvimento da Geometria Diferencial, seus trabalhos contribuíram para organizar e aprofundar resultados relacionados à teoria das superfícies, especialmente no que se refere às propriedades locais das curvas sobre superfícies, às linhas de curvatura e às relações entre diferentes classes de superfícies. Dessa forma, Darboux consolidou-se como uma referência importante para os estudos geométricos desenvolvidos na segunda metade do século XIX (Struik, 1988, p. v).

⁹ Ao contrário de Monge e Dupin, cuja formação ocorreu na École Polytechnique, instituição com forte apelo à engenharia militar e naval, Darboux formou-se na École Normale Supérieure. Essa diferença reflete-se no caráter de sua obra, que introduziu um rigor analítico mais profundo e uma abordagem mais algébrica ao estudo da geometria.

Entre suas obras mais importantes destaca-se *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, publicada em quatro volumes entre 1887 e 1896 (Struik, 1988, p. vii).¹⁰ Nessa obra, Darboux reuniu, organizou e ampliou parte significativa do conhecimento produzido sobre superfícies ao longo do século XIX, apresentando uma abordagem marcada pelo uso de métodos analíticos aplicados a problemas geométricos. Trata-se de uma obra fundamental para a consolidação da teoria das superfícies e para a sistematização de técnicas que influenciariam estudos posteriores na Geometria Diferencial (Struik, 1988, p. v).

No que se refere às ciclides, Darboux retomou e aprofundou os estudos iniciados por Charles Dupin. Em *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, publicado em 1873 (Darboux, 1873; Britannica Editors, 2026), Darboux ampliou a compreensão dessas superfícies ao inseri-las em uma classe mais geral de objetos algébricos, posteriormente associados ao nome de ciclides de Darboux. Seus trabalhos permitiram compreender as ciclides para além da formulação inicial de Dupin¹¹, relacionando-as a superfícies quárticas, transformações geométricas e propriedades associadas às linhas de curvatura.

A partir dessas investigações, as ciclides passaram a ocupar posição relevante na literatura da Geometria Diferencial, sendo frequentemente mobilizadas como exemplos de superfícies com propriedades especiais relacionadas às linhas de curvatura e às famílias de esferas. Dessa forma, a obra de Darboux consolidou e ampliou o legado iniciado por Dupin, estabelecendo uma ponte entre a abordagem geométrica clássica das ciclides e estudos posteriores sobre superfícies algébricas, transformações geométricas e modelagem geométrica.

2.5 Maxwell, Cayley e as curvas focais na teoria das ciclides

Além dos trabalhos de Dupin e Darboux, o desenvolvimento histórico das ciclides também foi marcado por interpretações propostas por outros matemáticos do século XIX, entre os quais se destacam James Clerk Maxwell e Arthur Cayley (Maxwell, 1868; Cayley, 1873). Suas contribuições são particularmente relevantes por aproximarem o estudo dessas superfícies de temas como inversão geométrica, curvas focais, famílias de esferas e formulações algébricas (Chandru; Dutta; Hoffmann, 1989, p. 281–282). Desse modo, as ciclides passaram a ser compreendidas não apenas como superfícies especiais da Geometria Diferencial, mas também como objetos associados a diferentes formas de representação e construção geométrica.

No caso de James Clerk Maxwell, o interesse pelas ciclides aparece de modo signifi-

¹⁰ A obra *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal* foi publicada originalmente em quatro volumes. Trata-se de um trabalho amplo, que reuniu e sistematizou parte importante do conhecimento geométrico da época, com forte presença de métodos analíticos aplicados à teoria das superfícies.

¹¹ Enquanto as ciclides de Dupin podem ser descritas geometricamente como envoltórias de uma família de esferas tangentes a três esferas fixas, Darboux ampliou esse conceito ao considerar uma classe mais geral de superfícies. As chamadas ciclides de Darboux correspondem a superfícies algébricas de quarta ordem, ou quárticas, que contêm a cônica imaginária no infinito, também conhecida como círculo absoluto, como curva dupla. Nesse sentido, as ciclides de Dupin podem ser compreendidas como um caso particular dessa classe mais ampla.

cativo no artigo *On the Cyclide*, publicado em 1868. Embora seja amplamente reconhecido por suas contribuições à Física, Maxwell também se dedicou a problemas de geometria pura, especialmente envolvendo curvas, superfícies e transformações geométricas. Nesse trabalho, ele retomou superfícies estudadas por Dupin e explorou sua construção por meio da inversão geométrica¹², relacionando-as a famílias de esferas e a propriedades focais associadas a cônicas (Maxwell, 1868). Essa interpretação forneceu uma leitura geométrica importante das ciclides, ao explicitar relações que posteriormente podem ser exploradas por meio de representações visuais e construções dinâmicas.

Arthur Cayley também desempenhou papel relevante nesse processo de ampliação da teoria das ciclides. Em artigo publicado em 1873, igualmente intitulado *On the Cyclide*, Cayley retomou e aprofundou aspectos da abordagem de Maxwell, conferindo ao estudo dessas superfícies uma formulação mais analítica e algébrica (Cayley, 1873). Sua contribuição permitiu relacionar as ciclides a curvas focais, superfícies quárticas e sistemas de coordenadas curvilíneas, ampliando a compreensão estrutural desses objetos no contexto da Geometria Diferencial e da Geometria Algébrica.

As contribuições de Maxwell e Cayley mostram que o estudo das ciclides, ao longo do século XIX, não se restringiu à sua definição inicial ou à sua classificação como superfícies especiais. Ao contrário, essas superfícies passaram a ser investigadas por meio de diferentes linguagens geométricas, envolvendo inversão, curvas focais¹³, famílias de esferas e formulações algébricas (Chandru; Dutta; Hoffmann, 1989, p. 277–278). Essa diversidade de abordagens fornece uma base importante para a análise matemática desenvolvida no capítulo seguinte, no qual tais relações serão retomadas a partir de construções e visualizações realizadas em ambiente de geometria dinâmica.

2.6 Síntese histórica e linha do tempo das ciclides

A trajetória histórica apresentada neste capítulo indica que as ciclides de Dupin foram constituídas a partir de diferentes contribuições matemáticas ao longo do século XIX. Desde os trabalhos de Gaspard Monge, que contribuíram para a consolidação do estudo geométrico das superfícies, passando por Charles Dupin, Carl Friedrich Gauss, James Clerk Maxwell, Arthur Cayley e Jean-Gaston Darboux, observa-se que o desenvolvimento dessas superfícies esteve associado a temas centrais da Geometria Diferencial, da Geometria Algébrica e da Geometria Projetiva (Struik, 1988; Dupin, 1822; Gauss, 1827; Maxwell, 1868; Cayley, 1873; Darboux, 1873).

A Figura 4 apresenta uma síntese cronológica dos principais marcos discutidos ao

¹² A inversão geométrica é uma transformação que associa pontos do espaço a partir de uma esfera ou círculo de referência, preservando certas relações angulares. No estudo das ciclides, esse tipo de transformação permite relacionar superfícies como toros, cones e cilindros a outras superfícies da mesma classe.

¹³ As curvas focais associadas às ciclides serão retomadas no Capítulo 3, no qual serão exploradas suas relações com cônicas, famílias de esferas e construções em ambiente de geometria dinâmica.

longo do capítulo, destacando autores e contribuições que ajudam a compreender o processo de formação, ampliação e retomada das ciclides no contexto da matemática.

Figura 4 – Linha do tempo das ciclides de Dupin



Fonte: Elaboração própria, com base nas referências discutidas neste capítulo.

A linha do tempo permite visualizar a articulação entre diferentes momentos do desenvolvimento das ciclides. Monge aparece como referência inicial para a geometria das superfícies; Dupin introduz resultados fundamentais relacionados às ciclides, às linhas de curvatura e às superfícies canal; Gauss contribui para o fortalecimento da teoria das superfícies por meio do estudo da curvatura intrínseca; Maxwell e Cayley ampliam as interpretações geométricas dessas superfícies, relacionando-as à inversão, às famílias de esferas, às curvas focais e às formulações algébricas; e Darboux generaliza e consolida parte dessas contribuições, atribuindo às ciclides um lugar importante na teoria das superfícies especiais.

A inclusão da retomada computacional na linha do tempo indica que o interesse pelas ciclides não se restringe ao seu contexto histórico de origem. A partir do desenvolvimento da modelagem geométrica computacional e das possibilidades de visualização matemática (Degen, 2002, p. 575–601) (Pratt, 1990), essas superfícies passaram a ser novamente exploradas em contextos aplicados e tecnológicos, especialmente em áreas relacionadas ao desenho assistido por computador, à modelagem geométrica e à representação visual de superfícies.

Dessa forma, o percurso histórico apresentado neste capítulo mostra que o estudo das ciclides está imerso no contexto da geometria como um processo de construção matemática marcado pelo diálogo entre resultados geométricos diversos, assim como por diferentes abordagens geométricas, todas atuais e criativas para seu tempo. Essa contextualização fornece a

base matemática necessária para discutirmos posteriormente as propriedades geométricas, os conceitos de curvas focais e famílias de esferas, a importância das parametrizações de equações cartesianas de superfícies e as possibilidades de construção e visualização de formas geométricas mais complicadas em ambientes virtuais de aprendizagem através da geometria dinâmica.

3 ASPECTOS MATEMÁTICOS DAS CICLIDES DE DUPIN

A presente pesquisa surgiu a partir de uma orientação que acabou redefinindo todo o percurso do trabalho: para compreender adequadamente as ciclides de Gaston Darboux, seria necessário, antes, aprofundar o estudo das ciclides de Charles Dupin e de sua estrutura geométrica. No entanto, o contato com os textos originais do século XIX revelou uma dificuldade bastante característica da matemática da época: enquanto as descrições analíticas eram densas e detalhadas, as representações visuais eram escassas.

A leitura dos trabalhos de Maxwell e de outros autores do período exigia um elevado nível de abstração, sobretudo pela ausência de construções gráficas que auxiliassem na interpretação geométrica das superfícies descritas. Diante disso, a proposta inicial deste trabalho passou por uma ampliação. O software GeoGebra deixou de ser utilizado apenas como ferramenta de ilustração e passou a integrar efetivamente o processo investigativo, permitindo reconstruir visualmente estruturas geométricas descritas originalmente apenas de forma analítica.

Entretanto, essa reconstrução no ambiente computacional exigiu mais do que a simples representação de curvas e superfícies. Foi necessário traduzir conceitos da geometria diferencial clássica para uma linguagem dinâmica, estabelecendo relações de dependência entre objetos geométricos, parâmetros e propriedades locais da superfície. Por essa razão, antes de abordar diretamente as tipologias das ciclides de Dupin, torna-se necessário desenvolver os conceitos fundamentais que sustentam essas construções, como vetores tangentes, curvaturas principais e formas fundamentais. Esses elementos constituem a base matemática necessária para compreender e modelar dinamicamente as superfícies estudadas.

Ao longo deste capítulo, ficará evidente que a passagem da teoria para o ambiente computacional não ocorre de maneira puramente mecânica. As construções dinâmicas permitiram não apenas visualizar propriedades concebidas originalmente de forma abstrata, mas também testar hipóteses, revisar interpretações geométricas e compreender com maior clareza fenômenos ligados à tangência e à formação das envoltórias de esferas. Dessa forma, a utilização da tecnologia contribuiu para uma compreensão mais intuitiva e dinâmica das propriedades geométricas que regem essas superfícies.

3.1 Elementos fundamentais da Geometria Diferencial de superfícies

Nesta seção, são apresentados os principais conceitos da Geometria Diferencial necessários para o estudo das ciclides de Dupin. Partimos da noção de superfície parametrizada e, em seguida, discutimos vetores tangentes, plano tangente, vetor normal, aplicação normal de Gauss, formas fundamentais, curvaturas principais e linhas de curvatura.

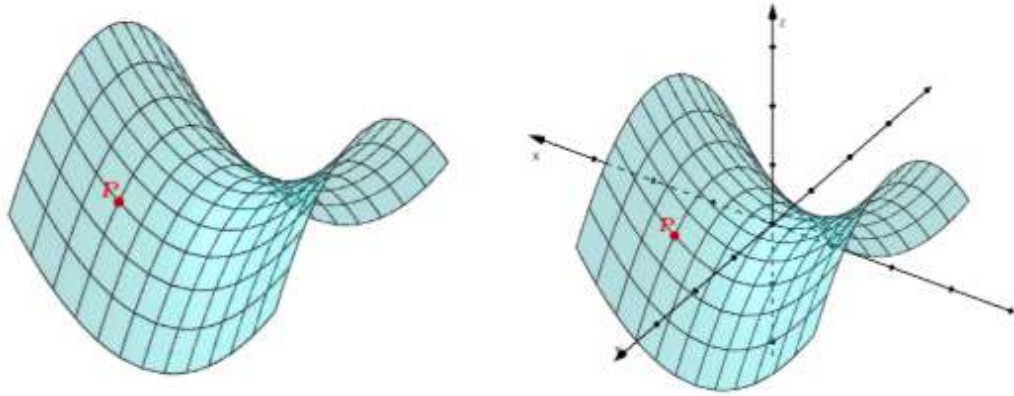
Esses conceitos fornecem a base matemática para compreender como uma superfície é

descrita localmente, como sua métrica é determinada e como sua curvatura pode ser analisada no espaço tridimensional.

3.1.1 Superfícies parametrizadas

No estudo da geometria das superfícies no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, uma abordagem conveniente para a descrição de uma superfície envolve a utilização de uma parametrização dependente de parâmetros reais. Intuitivamente, a superfície pode ser percorrida pela variação contínua destes parâmetros, de modo que cada par de valores corresponde univocamente a um ponto da superfície no espaço.

Figura 5 – Representação de uma superfície parametrizada no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, com destaque para um ponto P pertencente à superfície.



- (a) Visualização sem eixos coordenados, enfatizando a estrutura geométrica local da superfície.
 (b) Visualização com eixos coordenados, mostrando a imersão da superfície no espaço $\mathbb{R}^3$.

Fonte: Elaboração própria.

Uma superfície parametrizada S é o conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$ descritos pela aplicação vetorial:

$$\vec{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Onde (u, v) varia no conjunto D do plano e a função $\vec{r}$ é contínua, de maneira que o vetor normal

$$(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \neq 0,$$

garantindo que a parametrização seja regular. Para cada par de valores (u, v) , a função $\vec{r}$ associa um ponto da superfície no espaço $\mathbb{R}^3$. Dessa forma, a variação dos parâmetros permite percorrer todos os pontos da superfície considerada.

Geometricamente, os parâmetros podem ser entendidos como um sistema de coordenadas definido sobre a superfície. Ao fixar um dos parâmetros e variar o outro, são geradas curvas sobre a superfície, ou seja, a parametrização estabelece de forma natural duas famílias de curvas, correspondentes às variações de u e v . Essas famílias formam uma rede que é útil na análise geométrica local da superfície.

Essa interpretação pode ser explorada de forma dinâmica, permitindo visualizar a variação de parâmetros e as curvas sobre a superfície.¹

A seguir, são apresentados alguns exemplos de superfícies parametrizadas, com o objetivo de ilustrar, de forma concreta, a relação entre os parâmetros e a geometria da superfície.

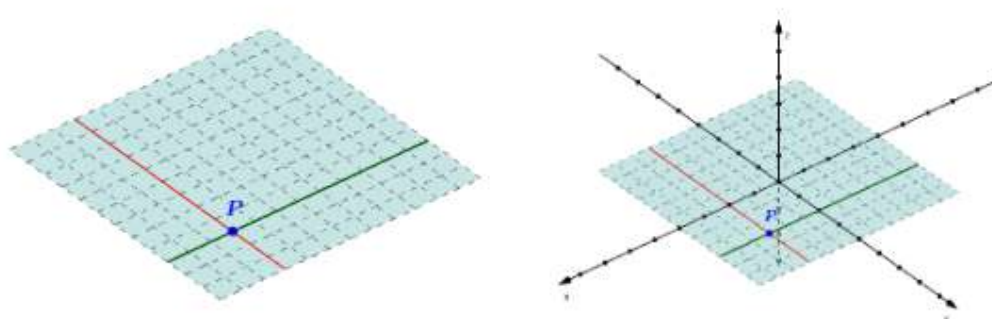
O plano é um exemplo simples de superfície parametrizada, podendo ser descrito pela aplicação

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

definida por:

$$\phi(u, v) = (u, v, 0).$$

Figura 6 – Representação de um plano parametrizado no espaço $\mathbb{R}^3$, com destaque para as curvas coordenadas e um ponto P pertencente à superfície.



- (a) Visualização do plano sem a inclusão dos eixos coordenados, evidenciando a malha associada à parametrização e as duas famílias de curvas coordenadas obtidas pela variação dos parâmetros.
 (b) Mesma representação com a inclusão dos eixos coordenados do espaço tridimensional.

Fonte: Elaboração própria.

Consideremos agora um exemplo não linear de superfície parametrizada, dado pelo parabolóide elíptico. Essa superfície pode ser descrita, de forma geral, pela aplicação

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

definida por

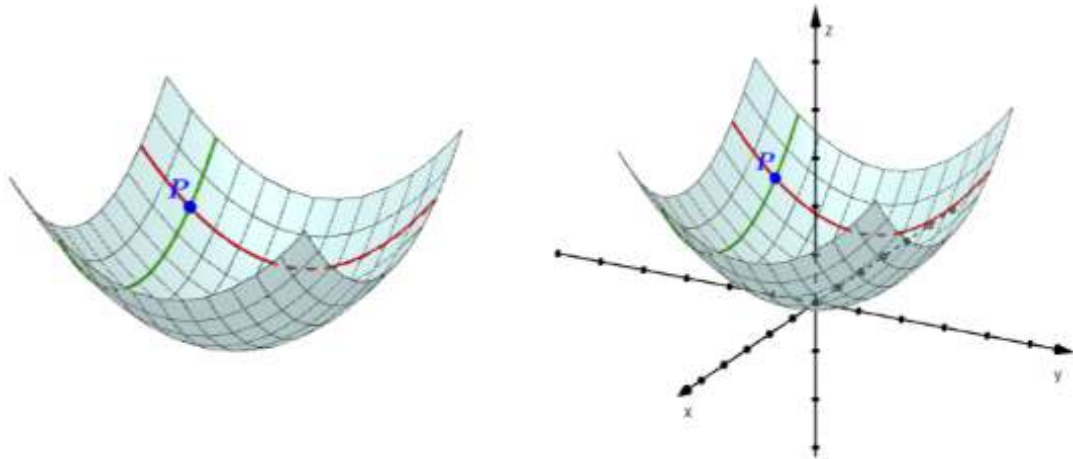
$$\phi(u, v) = (u, v, au^2 + bv^2), \quad a, b > 0.$$

¹ Uma visualização interativa da construção correspondente à Figura 5 pode ser acessada em: <<https://www.geogebra.org/m/tjkhghhe>>.

Para fins de visualização, consideramos o caso particular em que $a = b = 0,2$, obtendo a parametrização

$$\phi(u, v) = (u, v, 0.2u^2 + 0.2v^2).$$

Figura 7 – Representação de um parabolóide elíptico parametrizado no espaço $\mathbb{R}^3$, com destaque para as curvas coordenadas e um ponto P pertencente à superfície.



- (a) Visualização do parabolóide elíptico sem a inclusão dos eixos coordenados, destacando a malha associada à parametrização e as duas famílias de curvas coordenadas obtidas pela variação dos parâmetros.
 (b) Mesma representação com a inclusão dos eixos coordenados do espaço tridimensional.

Fonte: Elaboração própria.

Dando continuidade aos exemplos, retomamos agora o parabolóide hiperbólico, uma superfície já apresentada anteriormente sob uma perspectiva visual. Neste momento, buscamos descrevê-la de forma parametrizada, evidenciando a relação entre os parâmetros e a geometria da superfície.

Essa superfície pode ser descrita, de forma geral, por uma aplicação

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

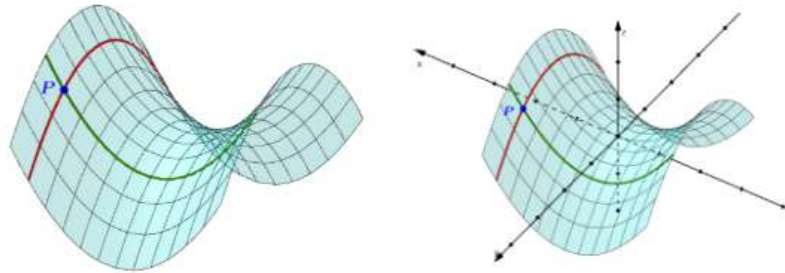
definida por

$$\phi(u, v) = (u, v, au^2 - bv^2), \quad a, b > 0.$$

Para fins de visualização, consideramos o caso particular em que $a = b = 0.2$, obtendo a parametrização

$$\phi(u, v) = (u, v, 0.2u^2 - 0.2v^2).$$

Figura 8 – Representação de um parabolóide hiperbólico parametrizado no espaço $\mathbb{R}^3$, com destaque para as curvas coordenadas e um ponto P pertencente à superfície.



- (a) Visualização do parabolóide hiperbólico sem a inclusão dos eixos coordenados, apresentando a malha associada à parametrização e as duas famílias de curvas coordenadas obtidas pela variação dos parâmetros.
 (b) Mesma representação com a inclusão dos eixos coordenados do espaço tridimensional.

Fonte: Elaboração própria.

Prosseguindo com os exemplos de superfícies parametrizadas, passamos agora a considerar o toro, um caso clássico que será utilizado como referência para as discussões a seguir, cuja parametrização é dada pela função:

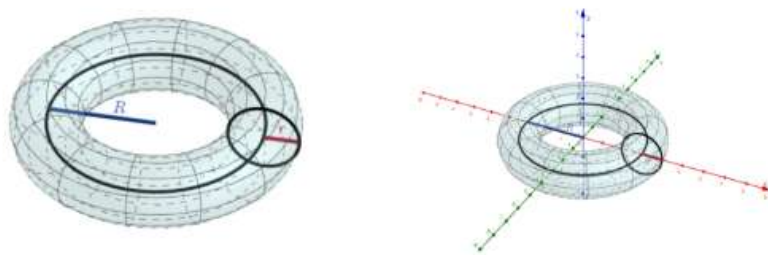
$$\phi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

definida por:

$$\phi(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v),$$

onde $R > r > 0$, R representa o raio do círculo principal do toro e r representa o raio do tubo.

Figura 9 – Representação de um toro parametrizado gerado pela rotação de um círculo de raio r cujo centro percorre uma circunferência de raio R .



- (a) Representação do toro permitindo observar o círculo gerador de raio r e a circunferência de raio R percorrida por seu centro.
 (b) Mesma representação com a inclusão dos eixos coordenados do espaço tridimensional.

Fonte: Elaboração própria.

Para compreender a geometria local de uma superfície parametrizada, é fundamental analisar o comportamento da aplicação quando restringimos um dos parâmetros. Seja $\phi(u, v)$ a

parametrização regular do toro definida anteriormente.

Ao fixarmos o parâmetro u em um valor constante u_0 e permitimos que v varie no intervalo $[0, 2\pi]$, a função resultante descreve uma curva regular $\alpha(v)$ sobre a superfície, denominada curva coordenada do parâmetro v . Considerando todos os valores possíveis para a constante $u_0 \in [0, 2\pi]$, obtemos não apenas uma curva isolada, mas uma família de curvas (neste caso, os meridianos) que cobre toda a superfície.

De maneira análoga, fixando v em uma constante v_0 e variando $u \in [0, 2\pi]$ obtemos uma curva coordenada associada ao parâmetro u denotada por $\beta(u)$. A variação de v_0 em todo o seu domínio gera a segunda família de curvas (os paralelos). O conjunto das duas famílias define uma rede paramétrica sobre a superfície.

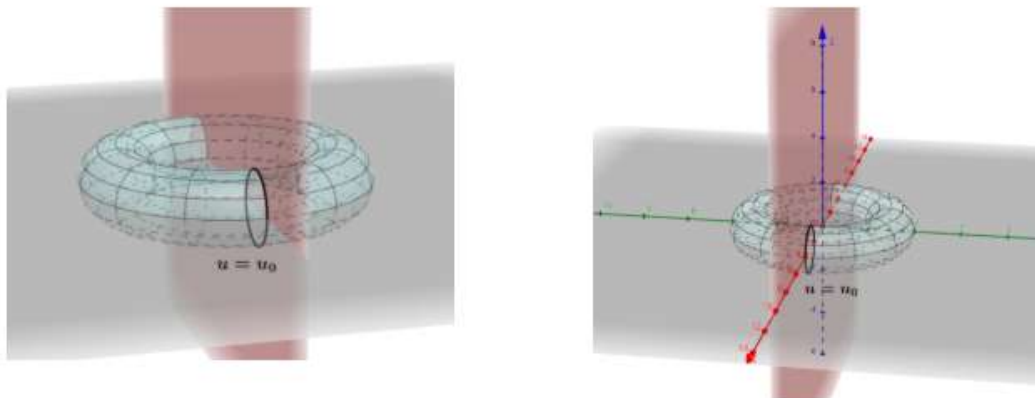
No caso específico do toro, as equações dessas curvas coordenadas e suas propriedades geométricas são dadas por:

Fixando a variável $u = u_0$, obtemos uma curva parametrizada pelo parâmetro $v \in [0, 2\pi]$ dada por:

$$\alpha(v) = \phi(u_0, v) = ((R + r \cos v) \cos u_0, (R + r \cos v) \sin u_0, r \sin v)$$

Essa equação descreve um círculo de raio r contido em um plano vertical que passa pela origem e forma um ângulo u_0 com o eixo x .

Figura 10 – Curva coordenada obtida pela fixação do parâmetro $u = u_0$ na parametrização do toro.

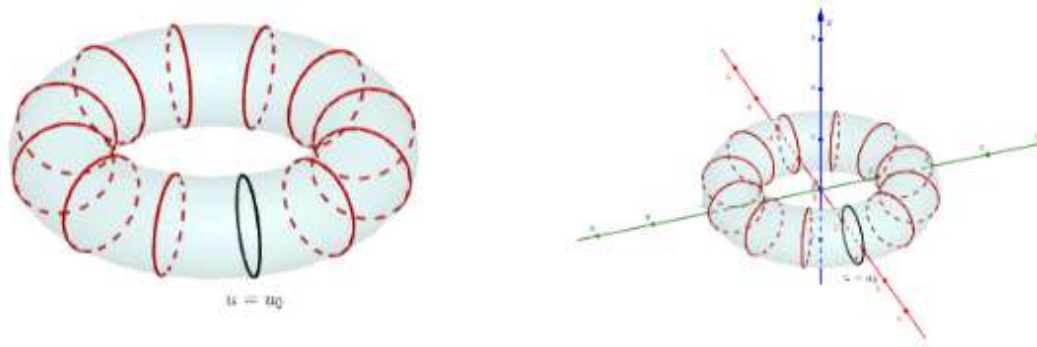


- (a) Curva meridiana gerada pela fixação de $u = u_0$, evidenciando o círculo contido em um plano vertical que intercepta a superfície.
- (b) Mesma curva representada com a inclusão dos eixos coordenados do espaço tridimensional.

Fonte: Elaboração própria.

O vetor tangente a essa curva em cada ponto corresponde à derivada parcial $\phi_v(u_0, v)$. A variação da constante $u_0 \in [0, 2\pi]$ gera a família completa de meridianos da superfície.

Figura 11 – Família de curvas meridianas obtidas pela variação do parâmetro u_0 .



- (a) Conjunto de curvas meridianas geradas pela variação de u_0 , mostrando a família de curvas coordenadas associadas ao parâmetro u .
 (b) Mesma família de meridianos representada com a inclusão dos eixos coordenados do espaço tridimensional.

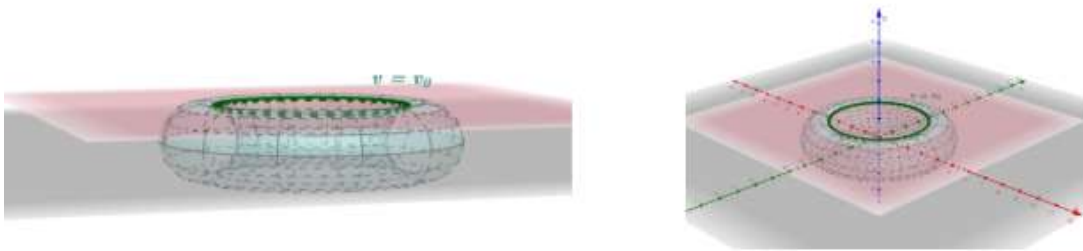
Fonte: Elaboração própria.

Fixando a variável $v = v_0$, obtemos uma curva parametrizada por $u \in [0, 2\pi]$ com a seguinte equação:

$$\beta(u) = \phi(u, v_0) = ((R + r \cos v_0) \cos u, (R + r \cos v_0) \sin u, r \sin v_0)$$

Geometricamente, essa equação descreve um círculo horizontal (paralelo ao plano xy) com raio $R + r \cos v_0$ e cota constante $z = r \sin v_0$.

Figura 12 – Curva coordenada obtida pela fixação do parâmetro $v = v_0$ na parametrização do toro.

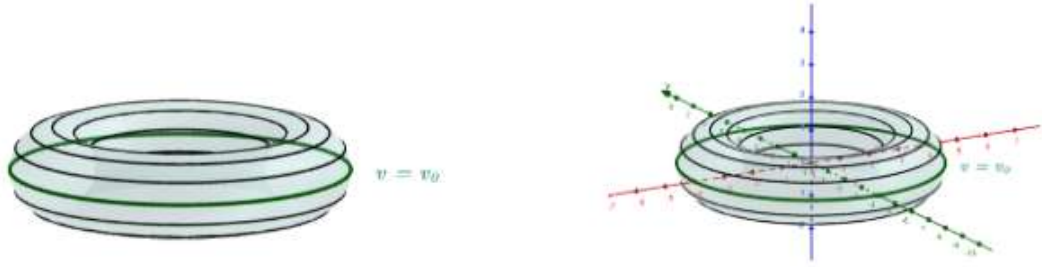


- (a) Curva paralela representando um círculo horizontal contido em um plano paralelo ao plano xy .
 (b) Mesma curva representada com a inclusão dos eixos coordenados do espaço tridimensional.

Fonte: Elaboração própria.

O vetor tangente a essa curva em cada ponto é dado pela derivada parcial $\phi_u(u, v_0)$. A variação da constante $v_0 \in [0, 2\pi]$ gera a família de todos os círculos paralelos do toro.

Figura 13 – Família de curvas paralelas obtidas pela variação do parâmetro v_0 .

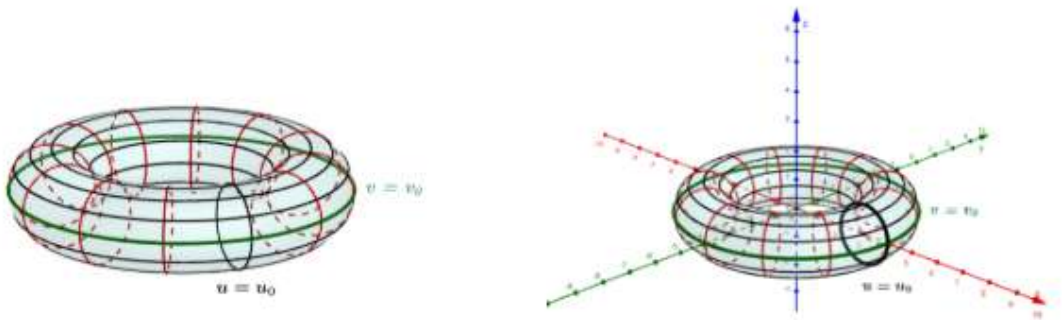


- (a) Conjunto de curvas paralelas geradas pela variação de v_0 , formando círculos horizontais sobre a superfície do toro.
 (b) Mesma família de paralelos representada com a inclusão dos eixos coordenados do espaço tridimensional.

Fonte: Elaboração própria.

A interseção dessas duas famílias de curvas $\alpha(v)$ e $\beta(u)$ em cada ponto estabelece um sistema de coordenadas local sobre a superfície. Como a parametrização é regular os vetores tangentes ϕ_u e ϕ_v são linearmente independentes em cada ponto.

Figura 14 – Rede paramétrica formada pelas duas famílias de curvas coordenadas do toro.



- (a) Interseção das famílias de meridianos e paralelos formando uma malha paramétrica sobre a superfície.
 (b) Mesma rede paramétrica representada com a inclusão dos eixos coordenados do espaço tridimensional.

Fonte: Elaboração própria.

Além disso, nessa parametrização específica do toro, tem-se que o produto interno $\langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0$, que garante que a malha paramétrica forma uma rede ortogonal que recobre toda a superfície.

3.1.2 Vetores tangentes, plano tangente e vetor normal

A rede paramétrica descrita na subseção anterior fornece duas direções tangentes independentes em cada ponto da superfície. Essas direções são determinadas pelos vetores tangentes associados às curvas coordenadas, dados pelas derivadas parciais da parametrização. Seja a parametrização regular da superfície $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, e considere um ponto da superfície dado por $P = \phi(u, v)$. Os vetores associados às curvas coordenadas são obtidos pelas derivadas parciais da parametrização em relação aos parâmetros u e v :

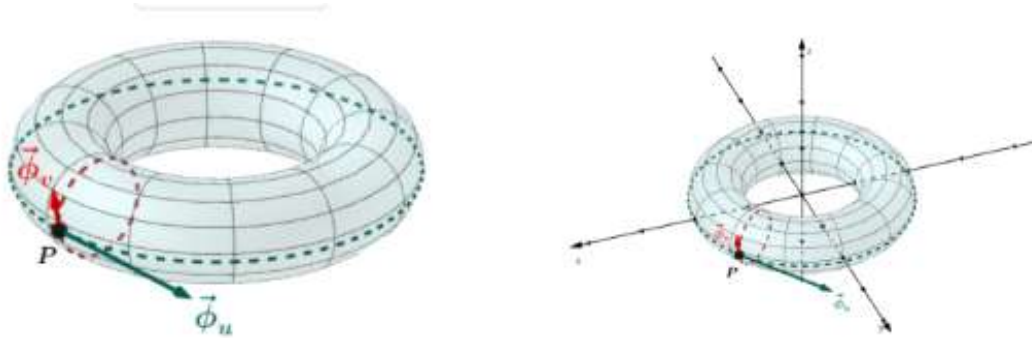
$$\phi_u(u, v) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v)$$

e

$$\phi_v(u, v) = \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v).$$

Geometricamente, o vetor $\phi_u(u, v)$ é tangente à curva obtida ao fixar o parâmetro v e variar u , enquanto o vetor $\phi_v(u, v)$ é tangente à curva obtida ao fixar u e variar v . Estes vetores pertencem ao plano tangente à superfície no ponto considerado.

Figura 15 – Vetores tangentes associados às curvas coordenadas da parametrização do toro.



(a) Vetores tangentes ϕ_u e ϕ_v no ponto P , associados às curvas coordenadas obtidas pela variação dos parâmetros u e v na superfície.

(b) Mesma representação com a inclusão dos eixos coordenados do espaço tridimensional.

Fonte: Elaboração própria.

O plano tangente no ponto P é definido como subespaço gerado por esses vetores, isto é,

$$T_P S = \text{span}\{\phi_u(u, v), \phi_v(u, v)\}.$$

Esse plano pode ser interpretado como a melhor aproximação linear da superfície na vizinhança do ponto P .

Figura 16 – Plano tangente à superfície do toro no ponto P .



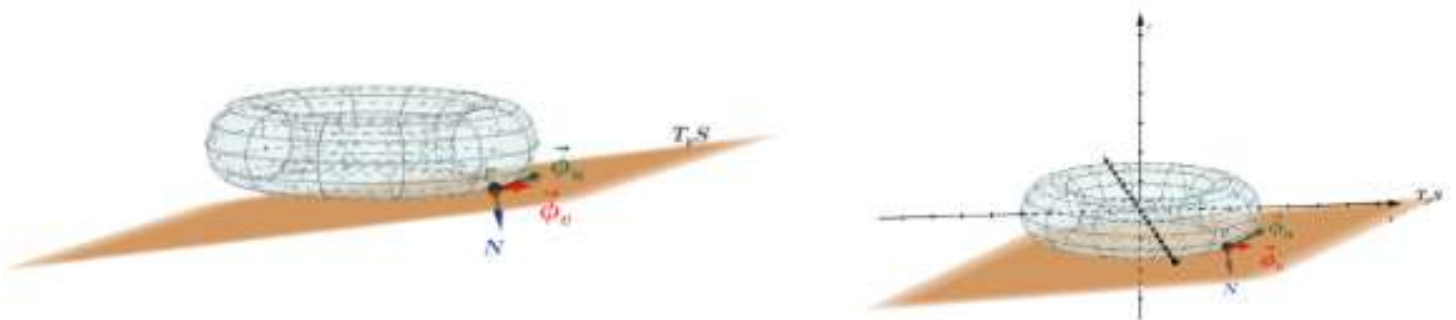
- (a) Plano tangente $T_P S$ gerado pelos vetores tangentes ϕ_u e ϕ_v no ponto P .
 (b) Mesma representação com a inclusão dos eixos coordenados do espaço tridimensional.

Fonte: Elaboração própria.

A partir dos vetores tangentes, define-se também um vetor perpendicular à superfície por meio do produto vetorial $\phi_u(u, v) \times \phi_v(u, v)$. Após a normalização desse vetor, obtém-se o vetor normal unitário à superfície no ponto P dado por:

$$N(u, v) = \frac{\phi_u(u, v) \times \phi_v(u, v)}{\|\phi_u(u, v) \times \phi_v(u, v)\|}.$$

Figura 17 – Vetor normal unitário à superfície do toro no ponto P .



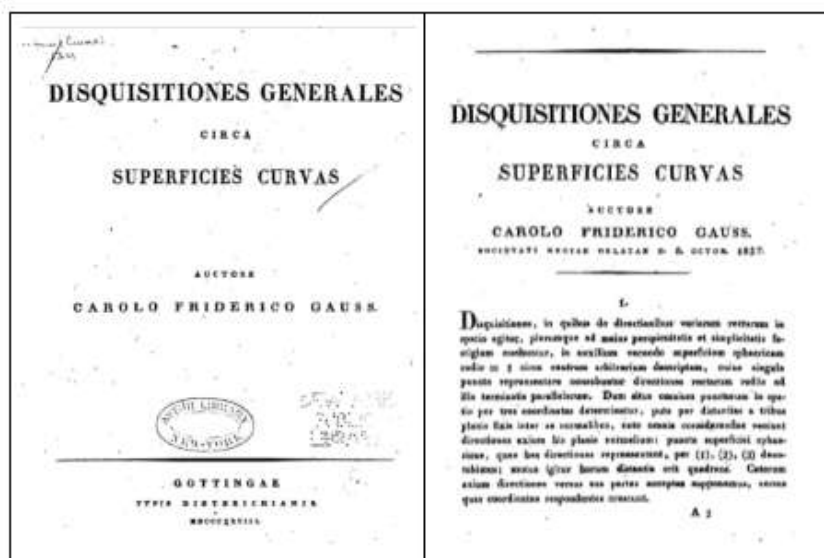
- (a) Vetor normal N obtido a partir do produto vetorial entre os vetores tangentes da parametrização.
 (b) Mesma representação com a inclusão dos eixos coordenados do espaço tridimensional.

Fonte: Elaboração própria.

3.1.3 Primeira forma fundamental

O estudo da geometria diferencial das superfícies tem suas bases estabelecidas nos trabalhos de Carl Friedrich Gauss², em especial na obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827)³. Nesse trabalho, Gauss introduz conceitos fundamentais que permitem compreender a geometria das superfícies a partir de duas perspectivas complementares.

Figura 18 – Páginas da edição impressa de 1828 da obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, de Carl Friedrich Gauss.



(a) Página de rosto da obra.

(b) Página inicial do texto original em latim.

Fonte: Gauss (1828).

A partir dessas ideias, Gauss estabelece uma nova maneira de compreender a geometria das superfícies, distinguindo propriedades que podem ser determinadas internamente daquelas que dependem de sua curvatura no espaço. Essa perspectiva inaugura o estudo intrínseco das superfícies, considerado um dos marcos fundamentais da geometria diferencial (Carmo, 1976).

Tal abordagem está na base da formulação moderna das chamadas Primeira e Segunda Formas Fundamentais. Enquanto a primeira está relacionada à medida de comprimentos, ângulos e áreas sobre a superfície, a segunda descreve como essa superfície se curva no espaço tridimensional.

Com base nessa distinção, passamos agora à formulação matemática da Primeira Forma Fundamental, a partir de uma parametrização regular da superfície.

² Matemático, físico e astrônomo alemão, Gauss é considerado uma das figuras centrais da matemática. Suas contribuições abrangem áreas como teoria dos números, geometria diferencial, estatística e magnetismo.

³ Tradução em inglês disponível em: *General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825*. Translated with notes and a bibliography by James Caddall Morehead.

A Primeira Forma Fundamental é a estrutura que permite medir comprimentos e ângulos diretamente em uma superfície, sendo introduzida a partir de sua parametrização regular e dos vetores tangentes associados.

Considerando uma parametrização regular da superfície $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e um ponto $P = \phi(u, v)$, os coeficientes da Primeira Forma Fundamental são definidos a partir dos vetores tangentes $\phi_u(u, v)$ e $\phi_v(u, v)$:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle \phi_u(u, v), \phi_u(u, v) \rangle \\ F(u, v) &= \langle \phi_u(u, v), \phi_v(u, v) \rangle \\ G(u, v) &= \langle \phi_v(u, v), \phi_v(u, v) \rangle, \end{aligned}$$

Onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$.

Esses coeficientes podem ser organizados na matriz

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

denominada matriz da Primeira Forma Fundamental na base coordenada formada pelos vetores tangentes ϕ_u e ϕ_v . Essa matriz reúne os produtos internos entre esses vetores e permite representar, de forma matricial, a métrica induzida pela parametrização.

Assim, se uma direção tangente à superfície é escrita como

$$w = du \phi_u + dv \phi_v,$$

então a Primeira Forma Fundamental avaliada nessa direção é dada por

$$I(w, w) = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

Ao desenvolver essa expressão matricial, obtém-se

$$I(w, w) = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Portanto, a Primeira Forma Fundamental pode ser expressa por

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Geometricamente, essa forma quadrática permite medir o quadrado do comprimento de uma direção tangente sobre a superfície parametrizada. Além disso, os coeficientes E , F e G registram, respectivamente, os comprimentos dos vetores tangentes coordenados e a relação angular entre eles.

Em particular, se uma curva sobre a superfície é dada por $\alpha(t) = \phi(u(t), v(t))$, então o comprimento dessa curva pode ser calculado pela expressão:

$$L = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2} dt$$

Assim, a Primeira Forma Fundamental descreve as propriedades métricas que são inerentes à superfície, ou seja, aquelas que podem ser determinadas unicamente por meio de medições feitas na própria superfície, sem depender da sua posição no espaço tridimensional.

Além da medição de comprimentos de curvas, a Primeira Forma Fundamental desempenha papel importante na determinação de áreas sobre a superfície. Como os coeficientes E , F e G podem ser organizados na matriz

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

tem-se

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2.$$

Esse determinante corresponde ao quadrado da área do paralelogramo infinitesimal gerado pelos vetores tangentes ϕ_u e ϕ_v , isto é,

$$\|\phi_u \times \phi_v\|^2 = EG - F^2.$$

Assim, o elemento de área sobre a superfície é dado por

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Dessa forma, a quantidade $\sqrt{EG - F^2}$ permite medir como elementos infinitesimais de área do domínio plano são transformados em elementos de área sobre a superfície parametrizada.

A Primeira Forma Fundamental deve ser compreendida como uma forma quadrática, isto é, como uma estrutura métrica definida sobre as direções tangentes da superfície. Ela não é, em si, apenas um número: torna-se um número real quando é avaliada em uma direção tangente específica.

Assim, se uma direção tangente à superfície é escrita como

$$w = du \phi_u + dv \phi_v,$$

então a avaliação da Primeira Forma Fundamental nessa direção é dada por

$$I(w, w) = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Esse resultado é um número real e representa o quadrado do comprimento, ou da norma, do vetor tangente w na métrica induzida pela superfície, isto é,

$$I(w, w) = \|w\|^2.$$

Nas construções dinâmicas apresentadas a seguir, os valores numéricos exibidos para I correspondem a avaliações dessa forma quadrática em direções específicas. Para a realização dos exemplos no GeoGebra, os vetores tangentes foram obtidos numericamente a partir da parametrização da superfície, por meio de aproximações das derivadas parciais. Desse modo, considerando um pequeno incremento h , tem-se, por exemplo,

$$\phi_u(u, v) \approx \frac{\phi(u + h, v) - \phi(u, v)}{h}$$

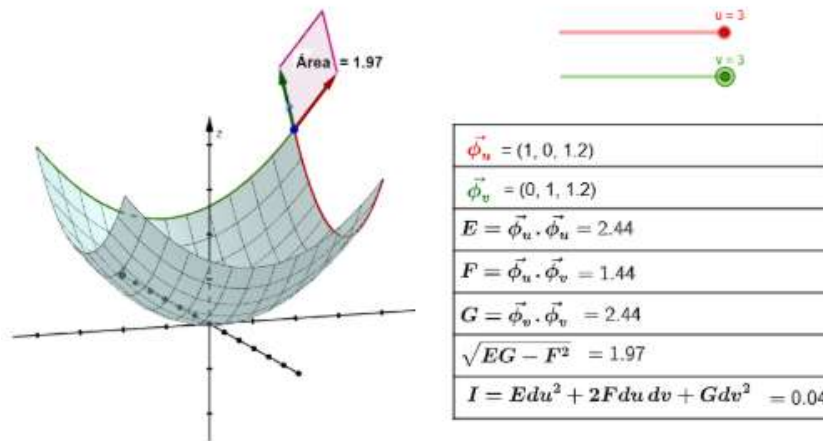
e

$$\phi_v(u, v) \approx \frac{\phi(u, v + h) - \phi(u, v)}{h}.$$

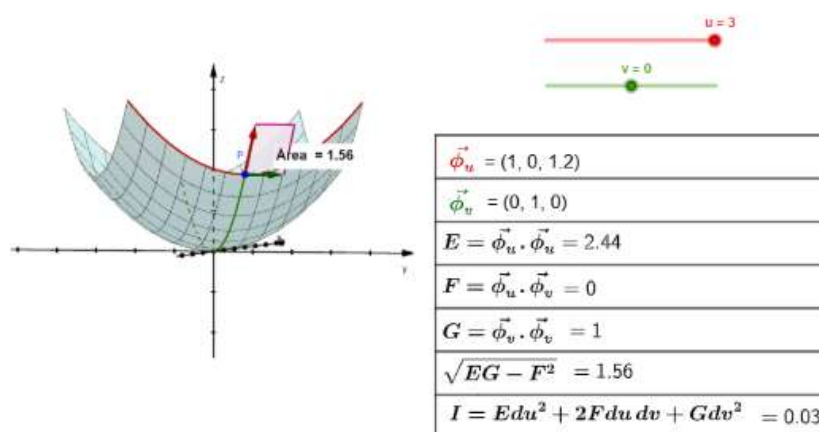
Essas aproximações foram utilizadas apenas na construção dinâmica, com finalidade exploratória e visual, preservando as definições teóricas da Primeira Forma Fundamental apresentadas no texto.

Para compreender de forma mais concreta o papel da Primeira Forma Fundamental, analisamos diferentes posições de um ponto P sobre a superfície. Em cada caso, são considerados os vetores tangentes ϕ_u e ϕ_v , os coeficientes E , F e G , e a avaliação numérica $I(w, w)$ em uma direção tangente específica. Essas visualizações permitem observar como a forma quadrática associada à Primeira Forma Fundamental registra localmente medidas de comprimento, ângulo e área sobre a superfície parametrizada.

Figura 19 – Variação local dos coeficientes da Primeira Forma Fundamental em diferentes pontos da superfície.

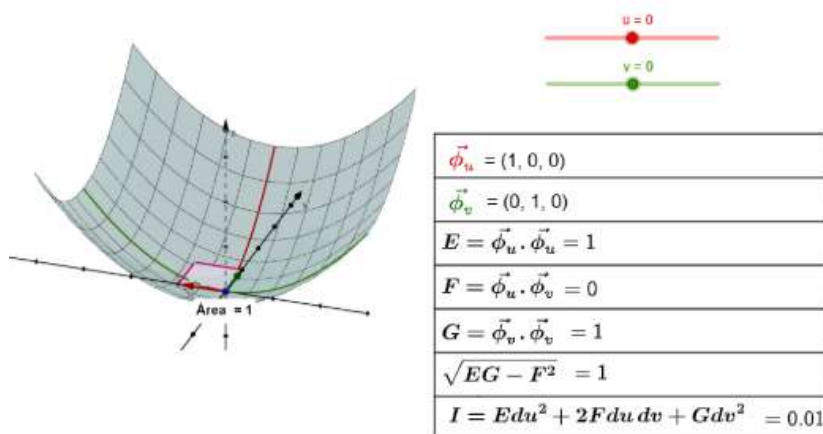


(a) Ponto arbitrário da superfície onde as curvas coordenadas se interceptam de forma oblíqua ($F \neq 0$), a distorção local dos ângulos e da área do paralelogramo gerado pelos vetores tangentes.



(b) Posição em que as curvas coordenadas se cruzam ortogonalmente ($F = 0$), resultando em um paralelogramo tangente com formato retangular, cuja área local depende apenas de E e G .

Figura 19 – Continuação.



(c) Ponto no vértice da superfície ($u = 0, v = 0$), onde os vetores tangentes formam uma base ortonormal ($E = 1, F = 0, G = 1$), caracterizando uma região sem distorção métrica local, na qual o elemento de área é igual a 1.

Fonte: Elaboração própria. Construção interativa disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/wfcz6unb>>.

A partir da observação das figuras, constata-se como a área do paralelogramo tangente varia continuamente em resposta à geometria local da superfície. Nas regiões mais afastadas e inclinadas, onde a malha sofre maior “esticamento”, ocorre uma dilatação local. Esse comportamento se reflete no aumento da magnitude dos vetores tangentes e, consequentemente, dos coeficientes E e G , resultando em valores mais elevados para a quantidade $\sqrt{EG - F^2}$.

Por outro lado, ao nos aproximarmos de regiões mais centrais ou menos inclinadas, observa-se uma atenuação da distorção métrica: os vetores tangentes diminuem de magnitude e tendem à ortogonalidade (com F se aproximando de zero), o que implica uma redução da área

do paralelogramo tangente.

Além da variação do elemento de área, a construção computacional permite observar o comportamento dinâmico da própria Primeira Forma Fundamental, expressa pela forma quadrática

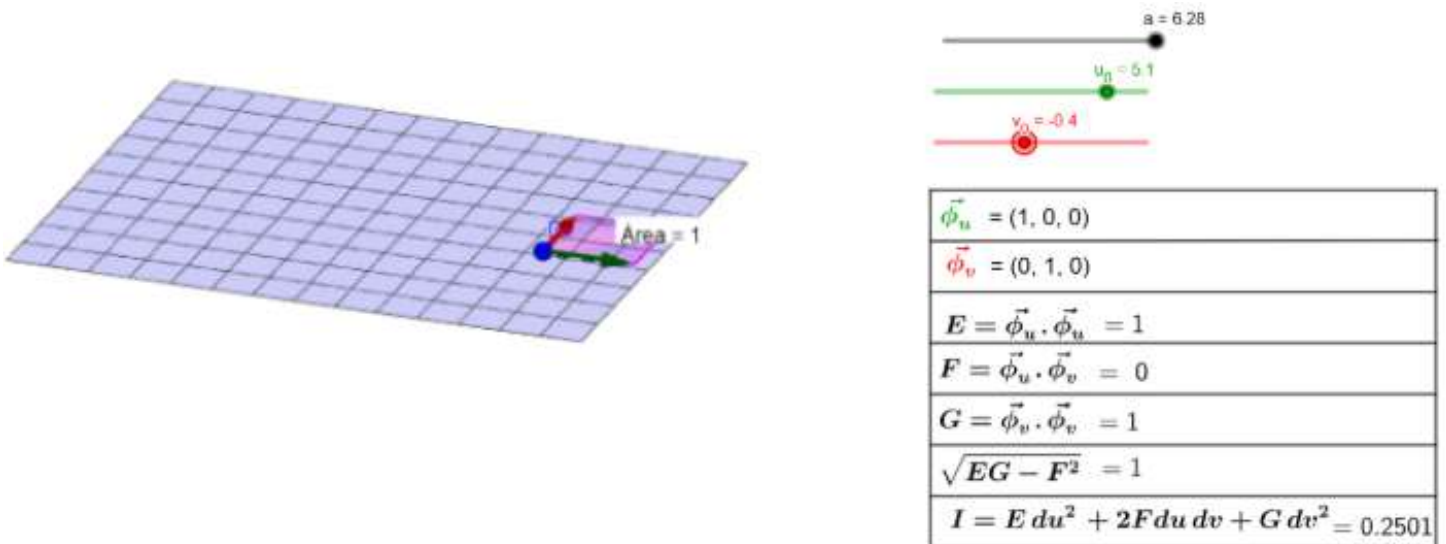
$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Essa expressão, calculada em tempo real a partir dos coeficientes obtidos, fornece o quadrado do elemento de arco infinitesimal. A variação contínua desse valor destaca como a métrica se adapta à geometria da superfície, assumindo valores mais elevados nas regiões onde a malha se encontra mais “esticada” e menores onde a distorção métrica é reduzida.

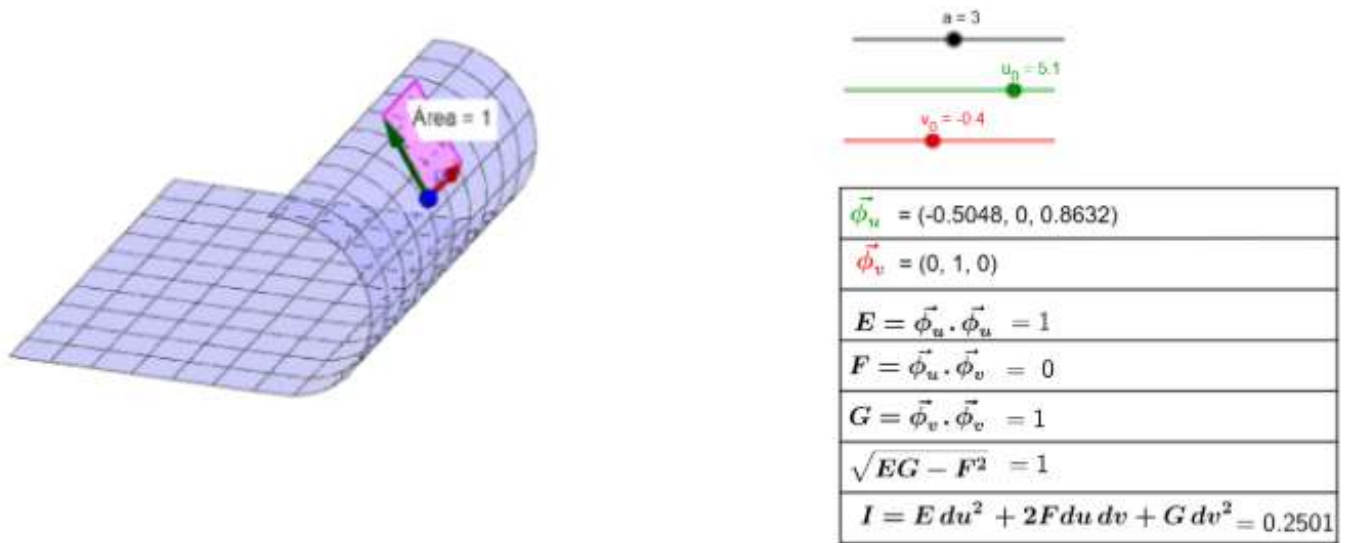
A partir dessa análise, percebe-se que a Primeira Forma Fundamental está diretamente relacionada à estrutura métrica da superfície, isto é, à forma como comprimentos, ângulos e áreas são medidos localmente, independentemente de como a superfície está imersa no espaço.

Essa interpretação permite compreender que superfícies geometricamente distintas podem, ainda assim, compartilhar a mesma estrutura métrica. Se considerarmos, por exemplo, um plano e um cilindro, uma folha de papel plana pode ser enrolada formando um cilindro sem que ocorram alongamentos ou compressões na superfície.

Figura 20 – Transformação contínua de uma superfície plana em um cilindro preservando a estrutura métrica.

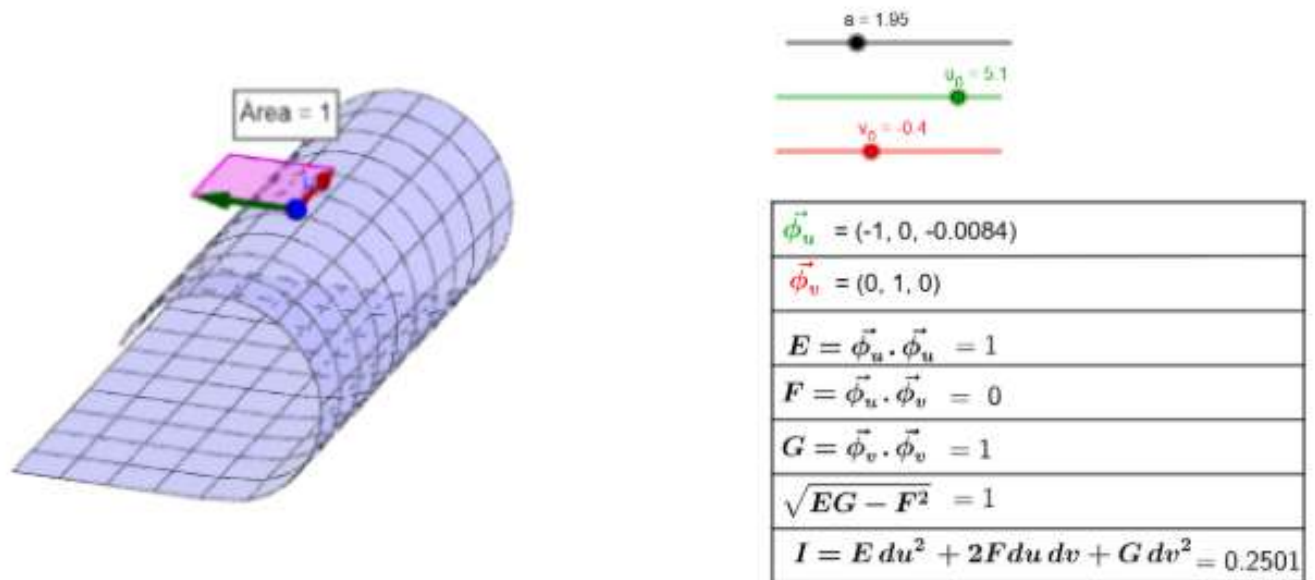


(a) Superfície plana.

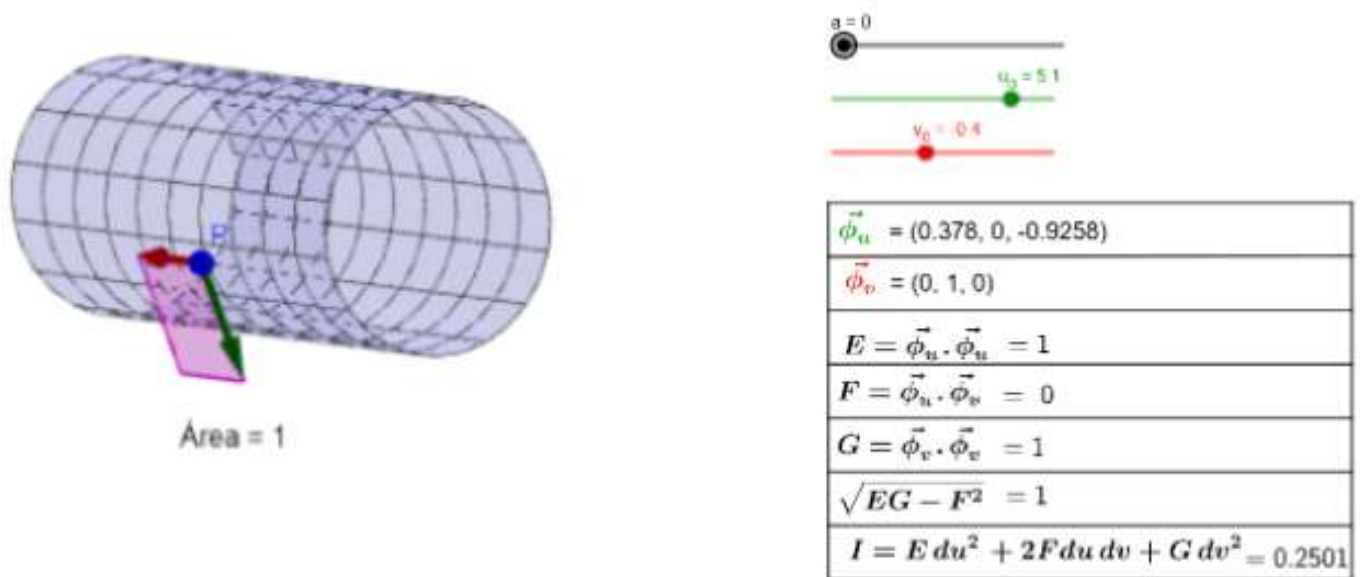


(b) Início da transformação da superfície.

Figura 20 – Continuação.



(c) Superfícies parcialmente enroladas.



(d) Configuração final correspondente ao cilindro.

Fonte: Elaboração própria. Construção interativa disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/fwrmagkc>>.

Em contrapartida, superfícies como a esfera não podem ser criadas a partir de um plano sem causar deformações métricas. Essa impossibilidade explicita que a geometria intrínseca da esfera é, de fato, distinta.

Dessa forma, a Primeira Forma Fundamental descreve completamente a geometria métrica da superfície, permitindo analisar propriedades como comprimento, ângulo e área de maneira intrínseca.

3.1.4 Aplicação normal de Gauss

Associado ao vetor normal unitário definido anteriormente, pode-se considerar uma aplicação que relaciona cada ponto da superfície ao vetor normal correspondente. Essa aplicação é conhecida como Aplicação Normal de Gauss.

Considere uma superfície parametrizada regular

$$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

e seja

$$P = \phi(u, v)$$

um ponto da superfície. O vetor normal unitário $N(u, v)$, definido anteriormente a partir dos vetores tangentes de parametrização, determina uma aplicação que associa a cada ponto da superfície a direção normal correspondente.

Define-se então a Aplicação Normal de Gauss como a função

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$$

tal que $N(P) = N(u, v)$, onde $\mathbb{S}^2$ representa uma esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

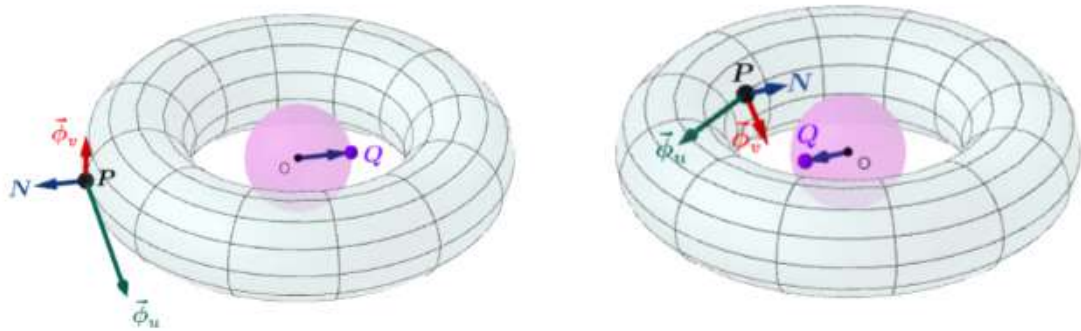
Geometricamente, essa aplicação associa cada ponto da superfície um ponto da esfera unitária que representa a direção do vetor normal naquele ponto. Dessa forma, a variação da orientação da superfície pode ser analisada por meio do comportamento dessa aplicação.

O estudo da aplicação de Gauss desempenha papel central na geometria diferencial das superfícies, pois sua variação está diretamente relacionada às propriedades de curvatura da superfície.

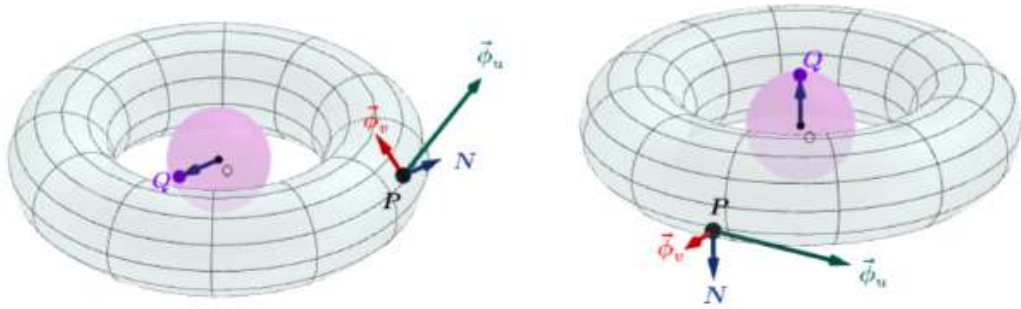
A interpretação geométrica da aplicação de Gauss pode ser aprofundada ao se considerar não apenas um ponto fixo da superfície, mas a variação contínua do vetor normal ao longo de diferentes regiões.

Essa abordagem permite compreender como a orientação local da superfície se traduz em uma distribuição de direções na esfera unitária, destacando a relação entre a geometria intrínseca da superfície e sua representação por meio do campo normal. Representações visuais tornam-se, portanto, particularmente úteis para explicitar essa correspondência, como ilustrado a seguir.

Figura 21 – Representação da aplicação de Gauss associando a cada ponto P da superfície parametrizada o vetor normal unitário $N(P)$. A extremidade desse vetor, considerada na esfera unitária centrada na origem O , determina o ponto Q , ilustrando a aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$.



- (a) Posição do ponto P na superfície e o vetor normal unitário $N(P)$, cuja extremidade determina o ponto Q na esfera unitária.
- (b) Nova posição do ponto P na superfície, apresentando a variação da direção do vetor normal $N(P)$ e a correspondente imagem Q na esfera unitária.



- (c) Outra posição do ponto P na superfície, mostrando a mudança da orientação local da superfície e o deslocamento do ponto Q na esfera.
- (d) Posição adicional do ponto P na superfície, ilustrando novamente a correspondência entre o vetor normal $N(P)$ e o ponto Q na esfera unitária.

Fonte: Elaboração própria. Construção interativa disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/u3wvmtqw>>.

3.1.5 Segunda forma fundamental

A Primeira Forma Fundamental permite descrever métricas da superfície, como comprimentos e ângulos, diretamente sobre a própria superfície. Entretanto, ela não fornece informações sobre como a superfície está curvada no espaço tridimensional.

Para analisar essa curvatura, introduz-se a Segunda Forma Fundamental, que descreve a variação da orientação da superfície no espaço. Essa forma está associada ao comportamento do vetor normal unitário definido anteriormente.

Considere novamente uma superfície parametrizada regular $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e um ponto da superfície dado por $P = \phi(u, v)$. Seja $N(u, v)$ também o vetor normal unitário à superfície nesse ponto. A Segunda Forma Fundamental é definida a partir das segundas derivadas da parametrização projetadas na direção do vetor normal.

Definem-se então os coeficientes

$$e(u, v) = \langle \phi_{uu}(u, v), N(u, v) \rangle,$$

$$f(u, v) = \langle \phi_{uv}(u, v), N(u, v) \rangle,$$

$$g(u, v) = \langle \phi_{vv}(u, v), N(u, v) \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$.

Esses coeficientes podem ser organizados na matriz

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

denominada matriz da Segunda Forma Fundamental na base coordenada formada pelos vetores tangentes ϕ_u e ϕ_v . Essa matriz reúne as componentes normais das derivadas de segunda ordem

da parametrização, permitindo descrever como a superfície se curva em relação ao vetor normal escolhido.

Assim, se uma direção tangente à superfície é escrita como

$$w = du \phi_u + dv \phi_v,$$

então a Segunda Forma Fundamental avaliada nessa direção é dada por

$$II(w, w) = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

Ao desenvolver essa expressão matricial, obtém-se

$$II(w, w) = e du^2 + 2f du dv + g dv^2.$$

Portanto, a Segunda Forma Fundamental pode ser expressa por

$$II = e du^2 + 2f du dv + g dv^2.$$

Geometricamente, a Segunda Forma Fundamental mede como a superfície se curva no espaço em relação à direção normal. Assim, quando II é avaliada em uma direção tangente específica, o resultado $II(w, w)$ é um número real que indica a contribuição da curvatura normal naquela direção. Esse valor pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo da direção considerada e da orientação escolhida para o vetor normal.

Para ilustrar o significado geométrico da Segunda Forma Fundamental, considere o caso de plano no espaço tridimensional. Uma parametrização possível para o plano é dada por $\psi(u, v) = (u, v, 0)$.

Nesse caso, os vetores tangentes à superfície são $\psi_u(u, v) = (1, 0, 0)$ e $\psi_v(u, v) = (0, 1, 0)$. O vetor normal unitário à superfície é constante e pode ser escolhido como $N(u, v) = (0, 0, 1)$. Observa-se que, para essa parametrização, as segundas derivadas são nulas:

$$\psi_{uu}(u, v) = (0, 0, 0),$$

$$\psi_{uv}(u, v) = (0, 0, 0)$$

e

$$\psi_{vv}(u, v) = (0, 0, 0).$$

Consequentemente, os coeficientes da Segunda Forma Fundamental são:

$$e = \langle \psi_{u,u}, N \rangle = 0,$$

$$f = \langle \psi_{u,v}, N \rangle = 0$$

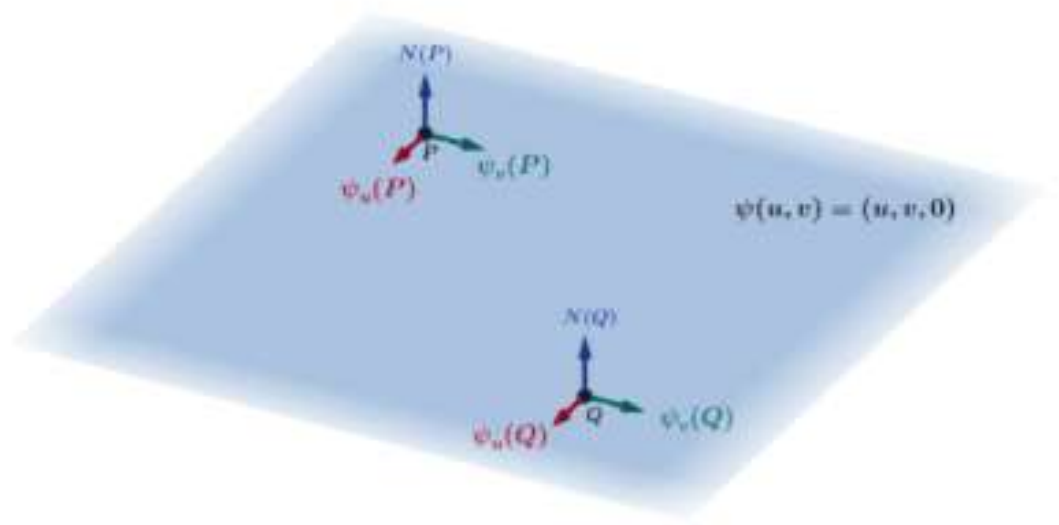
e

$$g = \langle \psi_{v,v}, N \rangle = 0.$$

Assim, a segunda forma fundamental do plano é identicamente nula, $II = 0$. Ou seja, isso reflete o fato de que o plano não apresenta curvatura no espaço tridimensional. Ao deslocar-se sobre o plano, a direção do vetor normal permanece constante, indicando que a superfície não dobra em nenhuma direção.

Embora tenhamos considerado a parametrização específica $\psi(u, v) = (u, v, 0)$, o resultado obtido é válido para qualquer plano no espaço tridimensional. Isso ocorre porque diferentes planos podem ser obtidos por translações e rotações rígidas no espaço, transformações que preservam as propriedades geométricas da superfície.

Figura 22 – Vetor normal em diferentes pontos do plano parametrizado por $\psi(u, v) = (u, v, 0)$. Observa-se que o vetor normal mantém a direção em todos os pontos da superfície, mostrando que a Segunda Forma Fundamental do plano é identicamente nula.

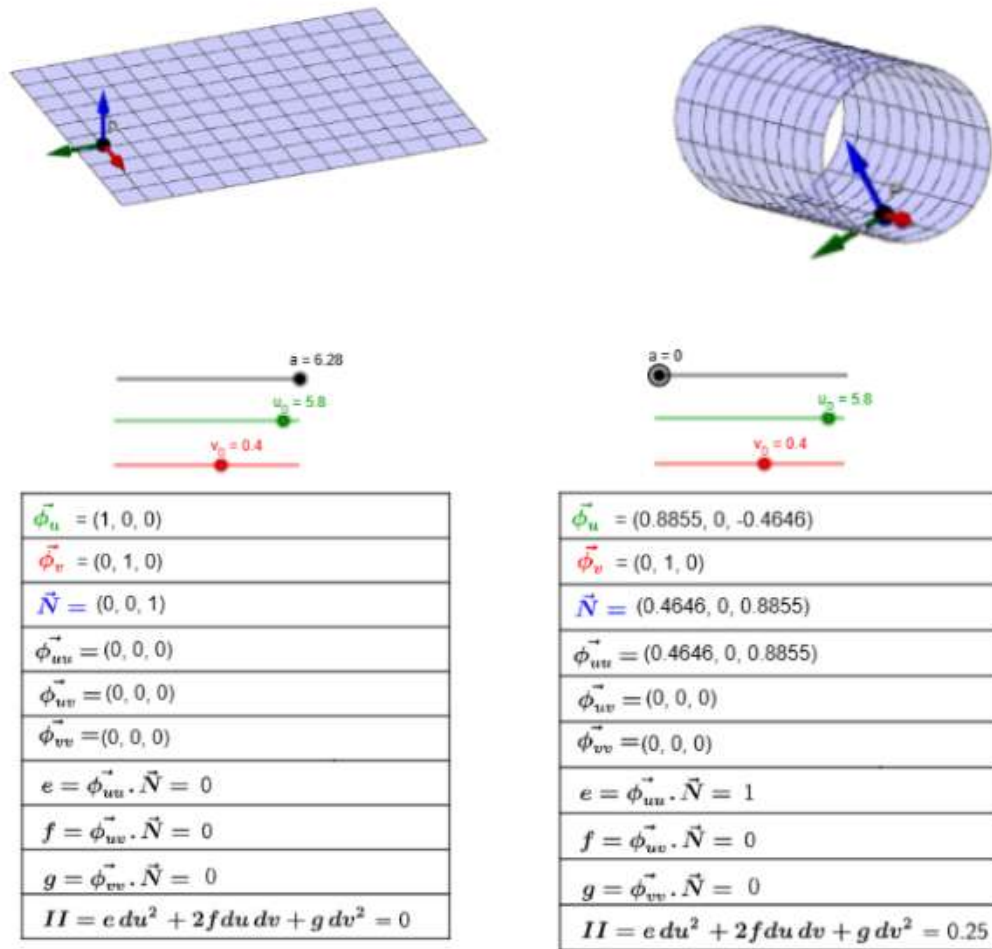


Fonte: Elaboração própria.

Já vimos anteriormente que o plano e o cilindro possuem a mesma geometria intrínseca, ou seja, por mais que curvemos o plano até se transformar em um cilindro sem deformações métricas, a Primeira Forma Fundamental é preservada.

Agora vamos analisar o comportamento da Segunda Forma Fundamental retomando o exemplo da construção dinâmica que apresentamos na subseção 4.4. Na construção representada nas imagens a seguir, temos a inclusão do vetor normal unitário $\vec{N}$ no ponto P .

Figura 23 – Comparação da Segunda Forma Fundamental entre o plano e o cilindro.



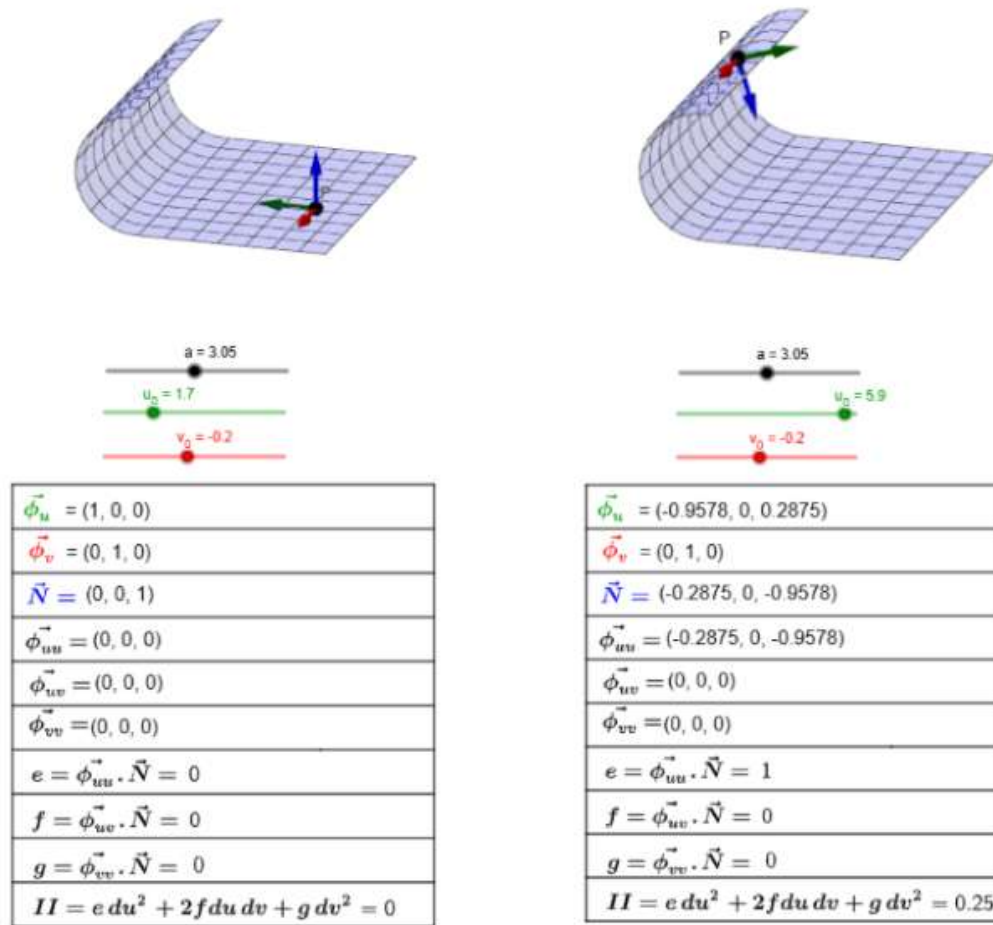
- (a) Superfície plana ($II = 0$).
 (b) Superfície cilíndrica ($II \neq 0$).

Fonte: Elaboração própria.

Perceba a orientação do vetor normal unitário $\vec{N}$ no ponto P na Figura 23-(a), quando a superfície se encontra plana, e na Figura 23-(b), quando há a curvatura até transformar-se em cilindro. É importante ressaltar que as coordenadas do ponto P no domínio paramétrico (u_0, v_0) permanecem fixas, alterando-se apenas a posição no espaço $\mathbb{R}^3$, e não sua posição intrínseca na superfície. Nota-se que, no primeiro momento, a segunda forma fundamental é nula, mas, quando curvamos a superfície, ela sofre alteração e resulta em $II = 0.25$. Isso ocorre pois o cilindro apresenta curvatura no espaço, e a segunda forma fundamental identifica a maneira como essa superfície se curva no ponto P .

Observe, na figura abaixo, a superfície parcialmente curvada com o ponto P assumindo diferentes posições.

Figura 24 – Variação local da Segunda Forma Fundamental na superfície.



(a) Região plana ($II = 0$).

(b) Região curva ($II \neq 0$).

Fonte: Elaboração própria. Construção interativa disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/zsn2endg>>.

Note que, embora se trate da mesma superfície global, os valores da Segunda Forma Fundamental se alteram. Isso permite compreender o caráter estritamente local dessa métrica: como a Segunda Forma Fundamental afere a curvatura da superfície no espaço tridimensional na vizinhança imediata do ponto em questão, regiões planas apresentam resultados nulos, enquanto regiões encurvadas refletirão o encurvamento espacial local da superfície..

Dessa forma, ficam definidos os elementos centrais para a descrição da geometria local de superfícies parametrizadas, a saber: os vetores e o plano tangentes, o vetor normal unitário e as formas fundamentais. Tais componentes são a base para o desenvolvimento do estudo das propriedades de curvatura das superfícies nas próximas subseções.

3.1.6 Curvaturas e direções principais

A Segunda Forma Fundamental permite analisar como a superfície se curva no espaço tridimensional. Diferentemente da Primeira forma fundamental, que descreve propriedades métricas internas, a Segunda Forma Fundamental está relacionada à variação da direção do vetor normal unitário.

Para quantificar essa curvatura considera-se uma direção tangente à superfície. Seja $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização regular e $P = \phi(u, v)$ um ponto da superfície. Seja w um vetor tangente não nulo no plano tangente $T_P S$, que pode ser escrito como $w = a\psi_u(u, v) + b\psi_v(u, v)$.

A curvatura normal da superfície na direção de w é definida por

$$k_n(w) = \frac{II(w, w)}{I(w, w)}$$

Essa quantidade mede a curvatura da superfície na direção especificada pelo vetor tangente w . Como diferentes direções podem produzir diferentes valores de curvatura, surge naturalmente a seguinte questão: existem direções nas quais essa curvatura é extrema?

Para responder essa pergunta, considera-se a função que associa a direção tangente unitária ao valor da curvatura normal. Os valores extremos dessa função são chamados de curvaturas principais no ponto P .

Denotando essas curvaturas por k_1 e k_2 , com $k_1 \leq k_2$ tem-se que:

k_1 é a curvatura normal mínima;

k_2 é a curvatura normal máxima.

As direções tangentes correspondentes a esses valores são chamadas de direções principais.

Geometricamente, as direções principais indicam como a superfície se curva de forma mais acentuada no ponto considerado. Essas direções desempenham papel fundamental na descrição local da geometria da superfície.

Além disso, quando $k_1 = k_2$, diz-se que o ponto é umbílico, o que significa que a curvatura é a mesma em todas as direções tangentes. Um exemplo é a esfera, onde todos os pontos são umbílicos.

Por outro lado, quando k_1 e k_2 possuem sinais opostos, a superfície apresenta comportamento tipo sela, como ocorre em regiões do toro. Assim, as curvaturas principais e direções principais fornecem uma descrição precisa da curvatura local da superfície, permitindo compreender como ela se curva no espaço ao longo de diferentes direções.

3.1.7 Linhas de curvatura

Na subseção anterior, definimos as direções principais como aquelas em que a curvatura normal da superfície atinge seus valores extremos, máximo e mínimo. Com base nesse conceito pontual, podemos definir uma estrutura global sobre a superfície: as linhas de curvatura.

Uma linha de curvatura é uma curva regular

$$\alpha(t)$$

contida em uma superfície, cuja direção tangente em cada ponto coincide com uma direção principal da superfície naquele ponto. Matematicamente, seja

$$\alpha(t) = \psi(u(t), v(t))$$

uma curva sobre a superfície. O vetor tangente a essa curva é dado por:

$$\alpha'(t) = u'(t)\psi_u + v'(t)\psi_v.$$

Para que $\alpha(t)$ seja uma linha de curvatura, o vetor $\alpha'(t)$ deve ser um vetor próprio da aplicação diferencial de Gauss,

$$dN.$$

Utilizando a fórmula de Rodrigues, isso equivale a afirmar que o vetor normal à superfície ao longo da curva obedece à relação:

$$N'(t) = -k(t)\alpha'(t),$$

onde $k(t)$ é a curvatura principal na direção de $\alpha'(t)$.

A partir da fórmula de Rodrigues,

$$N'(t) = -k(t)\alpha'(t),$$

podemos obter uma expressão explícita para $k(t)$. De fato, tomando o produto interno com $\alpha'(t)$ em ambos os lados da equação, obtemos:

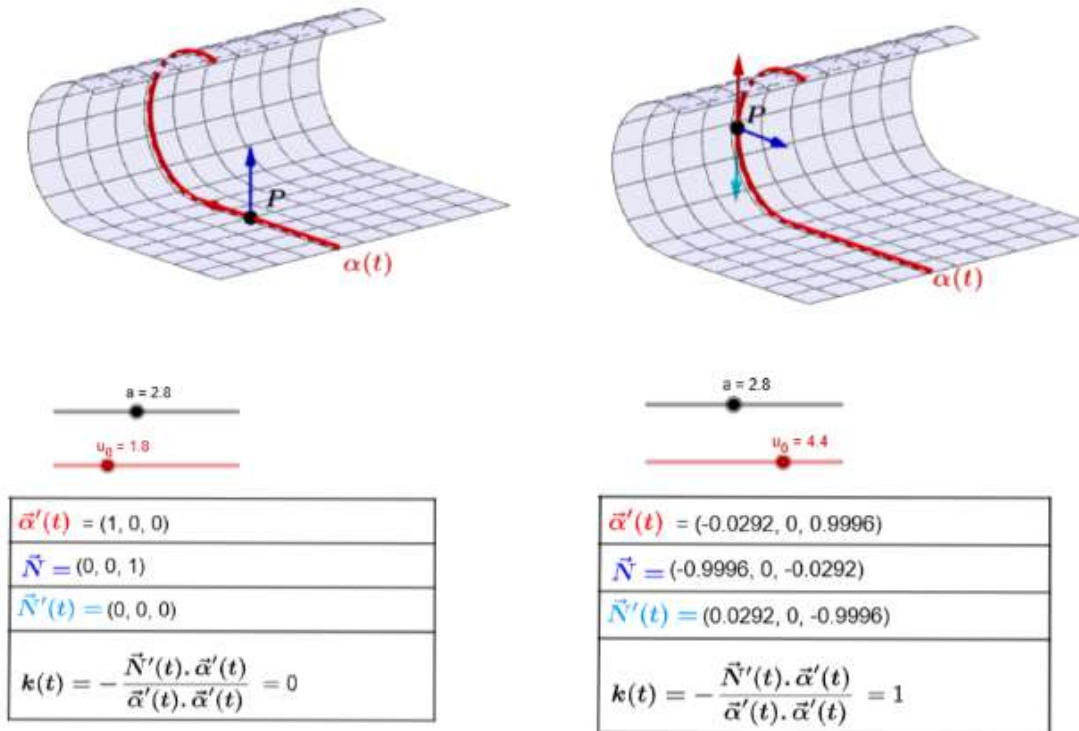
$$k(t) = -\frac{N'(t) \cdot \alpha'(t)}{\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)}.$$

No caso particular em que o vetor normal permanece constante ao longo da curva, tem-se:

$$N'(t) = 0.$$

Essa expressão fornece uma forma direta de calcular a curvatura normal ao longo da curva, mostrando que ela depende da variação do vetor normal na direção considerada. A seguir, apresentamos uma construção que ilustra esse comportamento em diferentes regiões da superfície.

Figura 25 – Ilustração da curvatura normal ao longo de uma curva $\alpha(t)$ sobre a superfície, mostrando a relação entre a variação do vetor normal e o valor de $k(t)$.



(a) Região plana da superfície: o vetor normal permanece constante ao longo da curva, implicando e, consequentemente, curvatura normal nula, $k(t) = 0$.

(b) Região curva da superfície: o vetor normal varia ao longo da curva, resultando em $N'(t) \neq 0$ e em curvatura normal não nula, $k(t) \neq 0$.

Fonte: Elaboração própria. Construção interativa disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/k8fhbk3b>>.

Uma forma prática de encontrar as linhas de curvatura é através da equação diferencial que as define. Utilizando os coeficientes da Primeira Forma Fundamental (E, F, G) e da Segunda Forma Fundamental (e, f, g), uma direção dada por (du, dv) é principal se, e somente se, satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$(Fg - Gf)du^2 + (Eg - Ge)dudv + (Ef - Fe)dv^2 = 0$$

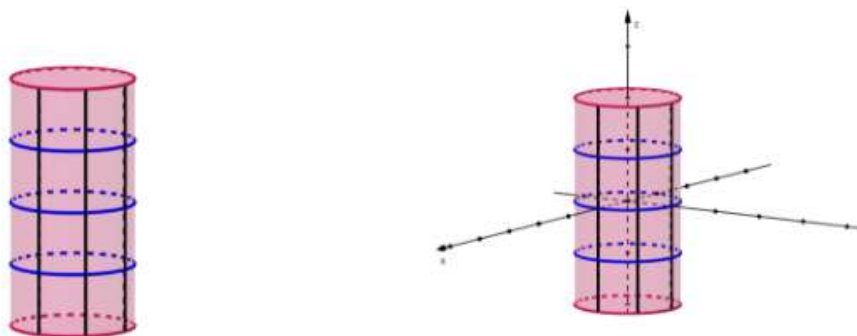
As soluções dessa equação fornecem duas famílias de curvas ortogonais sobre a superfície (exceto nos pontos umbílicos, onde as direções principais não são distintas).

Um resultado fundamental na geometria diferencial de superfícies é que, se as curvas coordenadas de uma parametrização coincidem com as linhas de curvatura, então a rede paramétrica é ortogonal. Nesse caso, os coeficientes mistos das formas fundamentais anulam-se identicamente, ou seja: $F = 0$ e $f = 0$.

Essa propriedade simplifica o estudo analítico da superfície. As famílias de curvas principais já foram representadas anteriormente no contexto do toro, indicando como essas curvas se organizam sobre a superfície e se relacionam com as direções principais em cada ponto. Em situações como essa, a rede de curvas coordenadas coincide com as linhas de curvatura, implicando a ortogonalidade da parametrização e a anulação dos coeficientes mistos das formas fundamentais.

Outro exemplo em que essa estrutura se manifesta é o cilindro circular reto. Considerando sua parametrização usual, as curvas obtidas pela fixação de cada um dos parâmetros correspondem às circunferências horizontais e às retas geratrizes da superfície. Essas duas famílias constituem linhas de curvatura, evidenciando novamente que a rede paramétrica é ortogonal e está alinhada com as direções principais.

Figura 26 – Linhas de curvatura no cilindro circular reto. As curvas definidas pela fixação dos parâmetros na parametrização $\phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ geram duas famílias de curvas sobre a superfície, correspondentes às circunferências horizontais e às retas geratrizes. Essas famílias coincidem com as direções principais e formam uma rede ortogonal, caracterizada pela anulação dos coeficientes mistos das formas fundamentais, isto é, $F = 0$ e $f = 0$.



(a) Curvas $u = t$, correspondentes às circunferências horizontais, e curvas $v = t$, correspondentes às retas geratrizes do cilindro, formando duas famílias ortogonais que constituem as linhas de curvatura da superfície.

(b) Mesma configuração representada com a inclusão dos eixos coordenados do espaço tridimensional, destacando a imersão da superfície no $\mathbb{R}^3$ e a orientação geométrica das famílias de curvas.

Fonte: Elaboração própria.

Dessa forma, os conceitos apresentados nesta seção estabelecem os instrumentos necessários para a análise local de superfícies parametrizadas. As formas fundamentais, as curvaturas principais e as linhas de curvatura permitem descrever tanto a estrutura métrica quanto o comportamento da curvatura de uma superfície no espaço.

A partir dessa base, passamos ao estudo das superfícies de Dupin, nas quais as linhas de curvatura assumem papel central para a compreensão de sua estrutura geométrica.

3.2 Superfícies de Dupin

No decorrer da seção anterior, foram estabelecidos os fundamentos da Geometria Diferencial local das superfícies, com destaque para as formas fundamentais, as curvaturas principais e a definição das linhas de curvatura. A partir desses conceitos estruturais, torna-se possível investigar classes específicas de superfícies que apresentam comportamentos geométricos notáveis.

Neste trabalho, destacamos as superfícies de Dupin, caracterizadas por um comportamento particular das curvaturas principais ao longo das linhas de curvatura. O estudo dessa classe de superfícies estabelece base para a análise das ciclides, que serão exploradas nas subseções seguintes.

3.2.1 Definição de superfície de Dupin

Uma superfície regular S é denominada Superfície de Dupin se possui suas linhas de curvatura bem definidas e satisfaz uma propriedade central: cada uma de suas curvaturas principais permanece constante ao longo de sua respectiva linha de curvatura.

Em termos formais, se ξ_1 e ξ_2 denotam as linhas de curvatura da superfície, então a curvatura principal k_1 permanece constante ao longo da linha associada a ξ_1 , e o mesmo ocorre com k_2 ao longo de sua respectiva linha.

Uma consequência geométrica direta e fundamental dessa definição é a forma equivalente desse conceito. Em uma superfície de Dupin, as linhas de curvatura estão sempre contidas em esferas ou planos. Na prática, isso implica que tais linhas são arcos de círculos ou segmentos de retas, característica que fundamentará as construções geométricas abordadas neste trabalho.

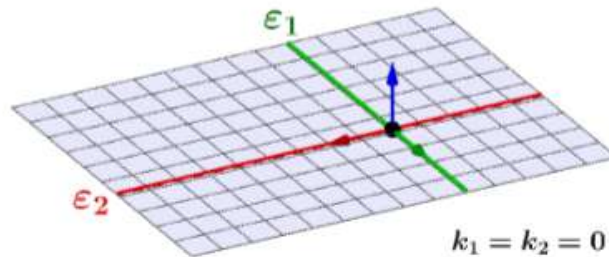
Essa caracterização dialoga diretamente com a formulação apresentada por Dupin em *Applications de géométrie et de mécanique*. Ao introduzir as superfícies que denomina ciclides, Dupin afirma a existência de uma família de superfícies cuja propriedade característica é possuir apenas círculos como linhas de maior e de menor curvatura (DUPIN, 1822, p. 200–201).

Desse modo, ainda que a definição moderna de superfície de Dupin seja formulada em termos da constância das curvaturas principais ao longo de suas respectivas linhas de curvatura, o texto original de Dupin evidencia a importância geométrica dessas linhas e antecipa a relação entre tais superfícies e famílias de circunferências ou retas.

Para consolidar o entendimento dessa definição, é útil observar casos elementares que satisfazem plenamente a condição de Dupin:

Plano: Sendo uma superfície plana, suas curvaturas principais são nulas em qualquer ponto e em qualquer direção ($k_1 = k_2 = 0$), o que satisfaz trivialmente a condição de constância ao longo das linhas de curvatura.

Figura 27 – Direções principais em uma superfície plana. As curvas ξ_1 e ξ_2 são retas ortogonais, e o vetor normal permanece constante ao longo de ambas, implicando $k_1 = k_2 = 0$.



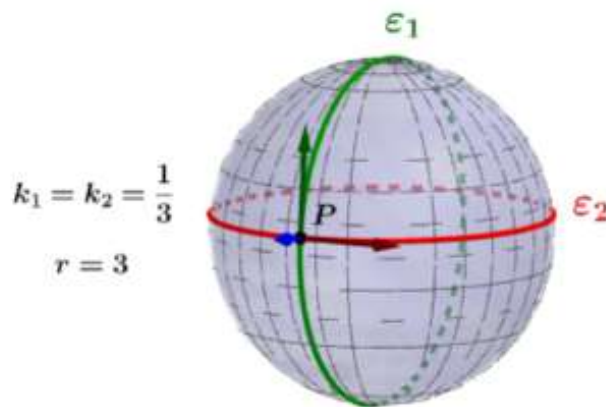
Fonte: Elaboração própria.

Esfera: Em uma esfera de raio r , todos os pontos são umbílicos e a curvatura é a mesma em todas as direções. Portanto,

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{r}.$$

Assim, as curvaturas principais permanecem constantes em qualquer direção, satisfazendo a condição de Dupin.

Figura 28 – Direções principais em uma esfera de raio $r = 3$. As curvas ξ_1 e ξ_2 correspondem a circunferências máximas, e o vetor normal varia uniformemente em todas as direções, caracterizando um ponto umbílico, com $k_1 = k_2 = \frac{1}{3}$.



Fonte: Elaboração própria.

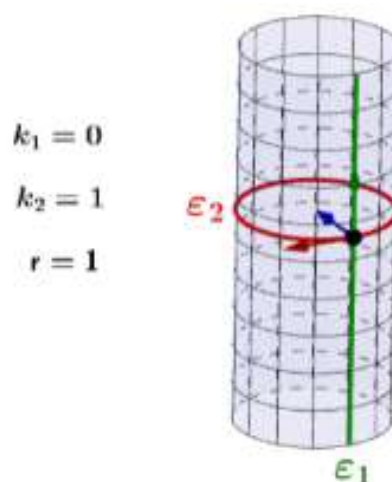
Cilindro circular reto: No cilindro de raio r , identificam-se duas direções principais distintas. Ao longo das geratrizes, a superfície não apresenta curvatura, logo $k_1 = 0$. Já ao longo

das circunferências transversais, tem-se

$$k_2 = \frac{1}{r}.$$

Em ambos os casos, as curvaturas permanecem constantes ao longo de suas respectivas linhas, caracterizando o cilindro circular reto como uma superfície de Dupin.

Figura 29 – Direções principais em um cilindro circular reto de raio $r = 1$. A curva ξ_1 corresponde às geratrizes, com curvatura nula ($k_1 = 0$), enquanto ξ_2 corresponde às circunferências transversais, com curvatura constante ($k_2 = 1$).



Fonte: Elaboração própria.

Embora a definição se aplique a essas superfícies triviais, é importante estabelecer a distinção entre a classe geral e os casos de maior complexidade. A nomenclatura “Superfícies de Dupin” designa uma ampla família geométrica, que inclui, além dos casos apresentados, superfícies como o cone, o toro e as ciclides.

3.2.2 Superfícies de canal

Na Geometria Diferencial, chama-se superfície de canal uma superfície obtida como o envelope de uma família de esferas cujos centros percorrem uma curva regular, denominada curva diretriz da superfície.

Geometricamente, pode-se interpretar uma superfície de canal como uma superfície gerada por uma esfera que se desloca ao longo de uma curva, variando ou não seu raio ao longo desse movimento.

Essa caracterização permite compreender as superfícies de canal como uma classe geométrica bastante flexível, na qual diferentes escolhas da curva diretriz e da variação do raio da esfera geradora conduzem a formas distintas. Em particular, quando o raio se mantém constante, obtêm-se superfícies associadas a deslocamentos rígidos da esfera ao longo da curva.

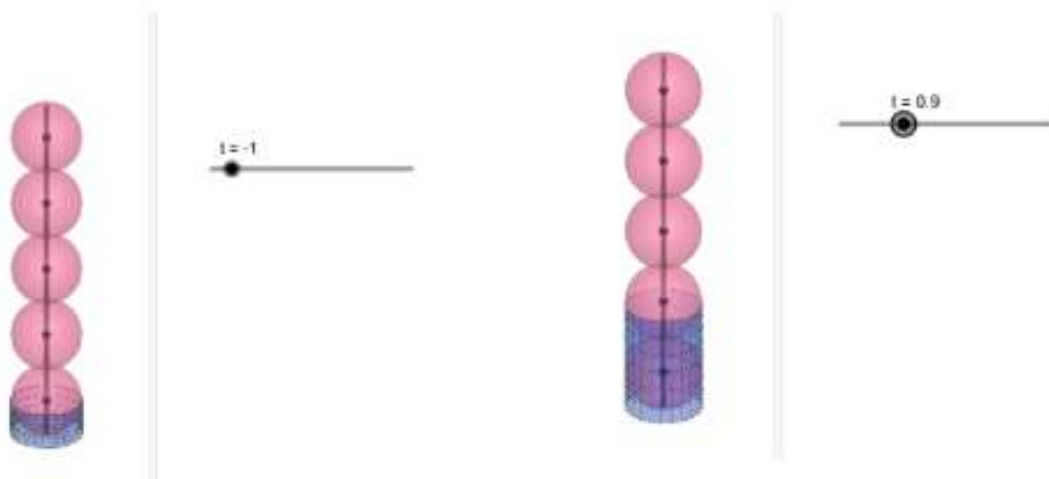
Por outro lado, variações no raio introduzem modificações mais sutis na geometria da superfície, ampliando o conjunto de configurações possíveis. Essa perspectiva aponta que as superfícies de canal constituem um modelo unificado para a construção de diversas superfícies clássicas na Geometria Diferencial.

Como primeiro exemplo de superfície de canal, considera-se o cilindro circular reto. Nesse caso, a curva diretriz é uma reta e a família de esferas possui raio constante. Na construção apresentada, utiliza-se um trecho parametrizado dessa reta, ao longo do qual os centros das esferas se deslocam.

À medida que esses centros percorrem essa trajetória, o envelope formado corresponde a um cilindro. Essa construção demonstra que o cilindro pode ser interpretado como uma superfície gerada pelo movimento de uma esfera de raio fixo ao longo de uma trajetória retilínea, mantendo a tangência com o envelope em cada posição.

A variação do parâmetro permite observar dinamicamente a formação da superfície, destacando o processo contínuo pelo qual o envelope é construído a partir da família de esferas.

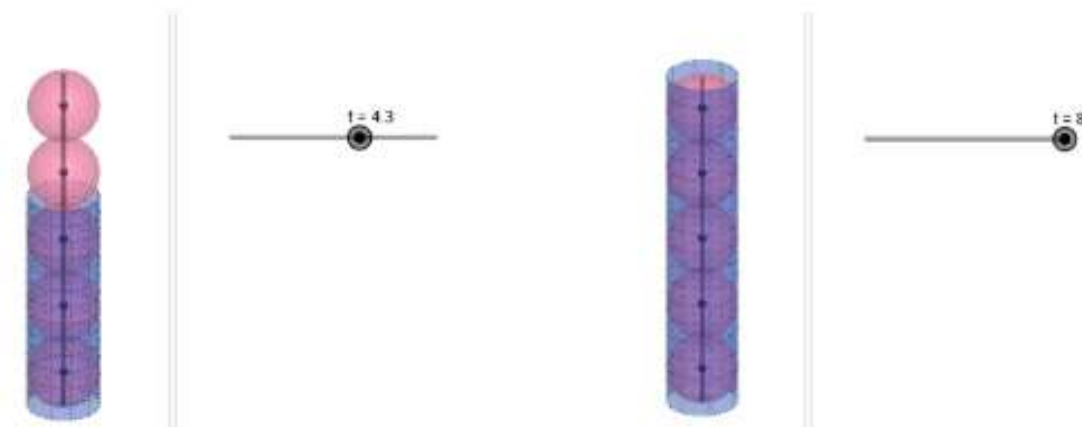
Figura 30 – Formação do cilindro circular reto como envelope de uma família de esferas de raio constante cujos centros percorrem um trecho de reta. As subfiguras (a)–(d) ilustram diferentes estágios da construção, ilustrando o processo contínuo de geração da superfície de canal.



(a) Configuração inicial: posicionamento da família de esferas ao longo de um trecho da reta, sem formação do envelope.

(b) Início da formação: o envelope começa a se delinear à medida que o parâmetro varia.

Figura 30 – Continuação.



(c) Estágio intermediário: o envelope torna-se mais evidente, acompanhando o deslocamento dos centros das esferas.

(d) Configuração final: formação completa do envelope, correspondente ao cilindro circular reto.

Fonte: Elaboração própria. Construção interativa disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/d3ydnh6e>>.

Como outro exemplo de superfície de canal, considera-se o tronco de cone, obtido como envoltória de uma família de esferas cujos centros percorrem um segmento de reta e cujos raios variam ao longo dessa trajetória. A construção revela como a variação do raio influencia diretamente na forma da superfície gerada.

Figura 31 – Formação de um tronco de cone como envoltória de uma família de esferas cujos centros percorrem um segmento de reta, com variação do raio ao longo da trajetória.



(a) Configuração inicial: posicionamento das esferas ao longo do segmento, sem formação visível da superfície.

(b) Estágio inicial: início da formação da envoltória a partir das esferas.

Figura 31 – Continuação.

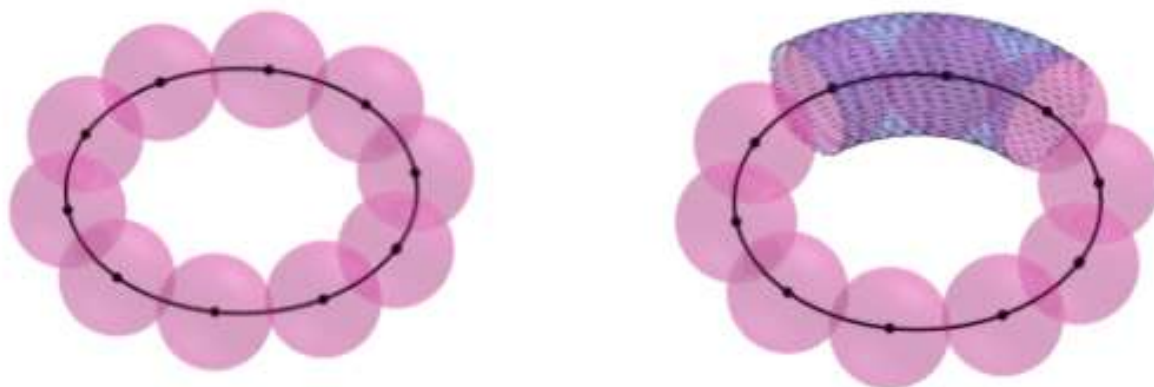
(c) Estágio intermediário: a envoltória torna-se mais evidente, acompanhando o deslocamento dos centros das esferas.

(d) Configuração final: formação completa do envelope, correspondente a um tronco de cone.

Fonte: Elaboração própria. A visualização dinâmica da construção, com variação de parâmetro, está disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/jgmgk6cv>>.

Considerando agora uma curva diretriz circular e raio constante, obtém-se uma superfície de canal correspondente a um toro. Nesse caso, as esferas mantêm raio fixo enquanto seus centros percorrem uma circunferência, gerando uma superfície fechada.

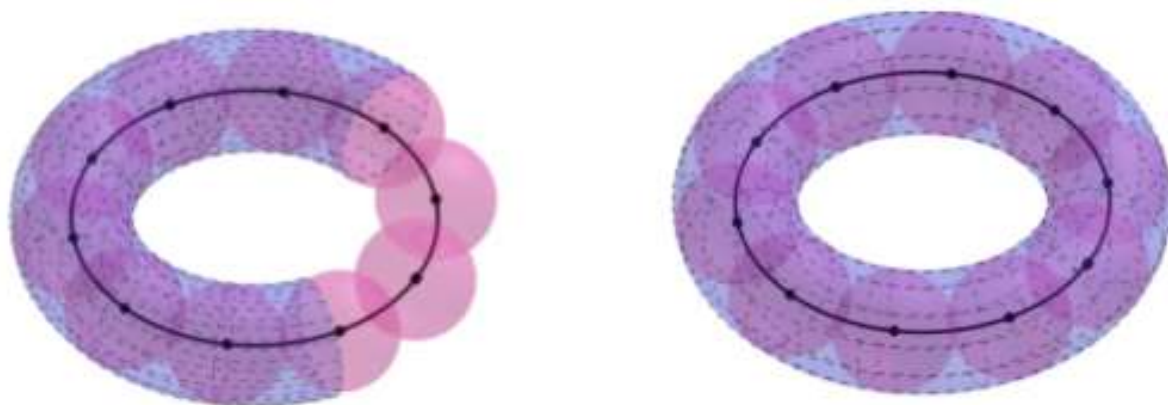
A construção evidencia como a geometria da curva diretriz, aliada à constância do raio, determina diretamente a forma da superfície obtida.

Figura 32 – Formação de um toro como envoltória de uma família de esferas de raio constante, cujos centros percorrem uma circunferência.

(a) Configuração inicial: esferas posicionadas ao longo da curva circular, ainda sem definição clara da envoltória.

(b) Estágio inicial: início da formação da envoltória a partir das esferas ao longo da circunferência.

Figura 32 – Continuação.



(c) Estágio intermediário: a envoltória torna-se mais visível à medida que os centros percorrem a curva circular.

(d) Configuração final: formação completa da envoltória, correspondendo a um toro.

Fonte: Elaboração própria. A visualização dinâmica da construção, com variação de parâmetro, está disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/pfkqbwfz>>.

Os exemplos apresentados mostram como diferentes escolhas da curva diretriz e da variação do raio conduzem a distintas superfícies de canal, permitindo compreender de forma unificada a geometria dessas construções.

3.2.3 Interpretação geométrica de Maxwell

Em 1868, o físico e matemático escocês James Clerk Maxwell⁴ publicou o artigo *On the Cyclide*⁵ no periódico *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*. Embora seja amplamente reconhecido por suas contribuições à física, Maxwell também demonstrava profundo interesse pela geometria pura, especialmente no estudo de curvas e transformações geométricas. Nesse trabalho, ele revisitou superfícies estudadas por Dupin anos antes, aplicando o método da inversão geométrica. Com isso, estabeleceu uma base estrutural rigorosa para a construção dessas superfícies.

⁴ James Clerk Maxwell (1831–1879) é amplamente reconhecido por unificar os fenômenos elétricos e magnéticos. Contudo, sua contribuição à geometria também é significativa: desde a juventude, investigou métodos de traçado de curvas ovais e problemas de geometria óptica. Seu artigo de 1868 constitui um marco ao empregar a inversão geométrica para simplificar e reinterpretar as propriedades das superfícies de canal, estabelecendo uma conexão entre o rigor analítico e os processos de construção geométrica associados às ciclides.

⁵ MAXWELL, J. C. *On the Cyclide*. In: *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. IX, London: Longmans, Green and Co., 1868, p. 111–126. Disponível em: <[https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uc1.\\$b417531&seq=10](https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uc1.$b417531&seq=10)>. Acesso em: 27 abr. 2026.

Figura 33 – Recorte do sumário do periódico *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* (1868), destacando o artigo *On the Cyclide*, de J. C. Maxwell.

vi	CONTENTS.	
		PAGE
	On Conics, Plane and Spherical, referred to Three-point Tangential Coordinates. By <i>Henry M. Jeffery</i> . (Concluded from p. 14)	97
	On an Equation in Finite Differences. By <i>William Walton</i>	108 —
	On the Cyclide. By <i>J. Clerk Maxwell</i>	111
	Note on the Lunar Theory. By <i>Hugh Godfray</i>	120
	On a Certain Sextic Developable. By <i>Professor Cayley</i>	129
	On a Certain Envelope. By <i>William Walton</i>	142
	On the Envelope of the Straight Line, joining the Feet of the Perpendiculars let fall on the sides of a Triangle from a Point in the Circumference of the Circumscribed Circle. By <i>N. M. Ferrers</i>	147
/	On the Properties of the $\Delta^{\infty 0}$ Class of Numbers. By the Rev. <i>J. Blissard</i> . (Continued from p. 94)	154 —
	Theorem with regard to the Three Axes of invariable direction in a Strained Elastic Body. By <i>James Warren</i>	171
	An Analytical Demonstration of the Rectangle of Forces. By <i>J. J. Walker</i>	173

Fonte: HathiTrust Digital Library. Disponível em: <[https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uc1.\\$b417531&seq=10](https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uc1.$b417531&seq=10)>.

A base estrutural rigorosa estabelecida por Maxwell manifesta-se, sobretudo, no tratamento dado às superfícies de canal. Embora estas sejam caracterizadas, de forma geral, como envoltórias de famílias de esferas, fazia-se necessário determinar quais condições geométricas específicas relacionam os centros dessas esferas aos seus respectivos raios. É para responder a essa necessidade que emerge a propriedade introduzida por Maxwell (1868).

Em sua essência, a propriedade de Maxwell estabelece uma restrição precisa: a constância da soma ou da diferença entre o raio da esfera geradora e a distância do seu centro a pontos fixos predeterminados, denominados focos. Essa relação de dependência impõe um comportamento geométrico rígido à família de esferas, eliminando a arbitrariedade na formação da superfície envoltória.

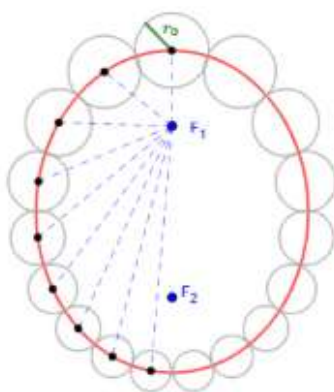
Geometricamente, tal condição implica que os centros das esferas devem pertencer a uma cônica, como, por exemplo, uma elipse. Dessa forma, o raio da esfera deixa de ser uma variável independente e passa a ajustar-se de acordo com a posição do centro sobre a curva, mantendo sempre a restrição imposta pela propriedade de Maxwell em relação aos focos.

A interpretação dessa propriedade torna-se particularmente clara por meio de construções dinâmicas: à medida que o centro da esfera percorre a curva diretriz, isto é, a cônica, o raio se altera continuamente para preservar a relação focal. Assim, evidencia-se que a família de esferas é inteiramente determinada por uma condição geométrica bem definida.

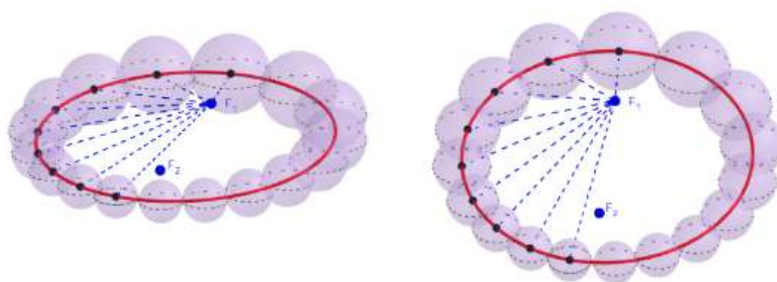
Neste trabalho, privilegia-se o cenário em que os centros das esferas descrevem uma elipse. Essa escolha permite uma interpretação geométrica mais direta e adequada às modelagens visuais e dinâmicas que serão apresentadas. Outros cenários, como o caso em que os centros descrevem uma hipérbole, conduzem a geometrias com características distintas e não serão explorados nesta análise.

Essa estrutura pode ser interpretada de forma mais intuitiva por meio de construções dinâmicas, nas quais o raio da esfera se ajusta continuamente à medida que seu centro percorre a curva diretriz, como ilustrado na Figura 34.

Figura 34 – Representação da propriedade de Maxwell. A figura reúne uma visualização bi-dimensional da família de circunferências cujos centros percorrem uma elipse diretriz, com raio variando em função da distância focal, e uma visualização espacial da família de esferas correspondente.



(a) Representação bidimensional da propriedade de Maxwell, destacando uma família de circunferências cujos centros percorrem uma elipse diretriz, com o raio variando continuamente em função da distância do centro ao foco F_1 .



(b) Representação espacial da família de esferas regida pela propriedade de Maxwell: à esquerda, perspectiva oblíqua evidenciando o alinhamento dos centros sobre a elipse e as linhas de controle focal no plano equatorial; à direita, vista superior destacando o volume e a variação contínua dos raios das esferas ao longo da trajetória.

Fonte: Elaboração própria.

Essa estrutura delineada por Maxwell conduz de forma natural à construção de superfícies

muito particulares obtidas como envoltórias de famílias de esferas guiadas por cônicas. Tais construções estão diretamente ligadas à essência das Ciclides de Dupin, que passam a ser o objeto central de estudo na seção a seguir.

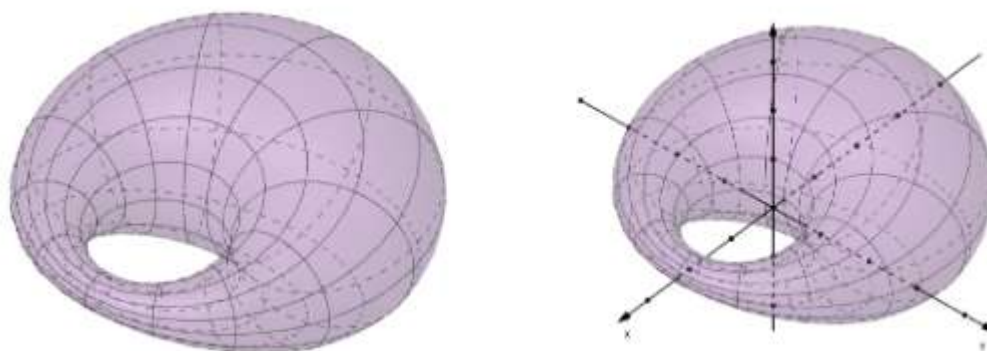
3.2.4 Ciclides de Dupin

Conforme estabelecido nas subseções anteriores, as superfícies de Dupin formam uma classe caracterizada pela constância de suas curvaturas principais ao longo de suas respectivas linhas de curvatura. Dentro dessa ampla família, destaca-se uma subcategoria de particular interesse, tanto por sua riqueza estrutural quanto por admitir descrições analíticas explícitas: as **ciclides de Dupin**.

Geometricamente, em sua gênese apresentada por Charles Pierre Dupin (1822), uma ciclidade pode ser compreendida como a envoltória de uma família variável de esferas que tangenciam simultaneamente três esferas fixas. Uma propriedade notável que emerge dessa construção clássica, sob a ótica da Geometria Diferencial, é que suas linhas de curvatura são circulares, sendo compostas por arcos de circunferência ou segmentos de reta em ambas as direções principais.

Até o momento, foram investigados casos elementares e propriedades gerais com o intuito de consolidar essa definição. Sob essa perspectiva, as ciclides representam um aprofundamento natural da teoria, constituindo o objeto central que conecta a geometria clássica a construções espaciais de maior complexidade.

Figura 35 – Representações da ciclidade de Dupin do tipo anel obtidas por meio da parametrização implementada no GeoGebra.



(a) Ciclidade de Dupin do tipo anel em configuração com abertura interna reduzida.

(b) Ciclidade de Dupin do tipo anel em configuração com abertura interna ampliada, revelando a influência dos parâmetros da parametrização sobre a geometria da superfície.

Fonte: Elaboração própria.

Essa dupla caracterização, por envoltórias e por linhas de curvatura circulares, fornece uma primeira interpretação geométrica antes da formulação algébrica, permitindo interpretar as ciclides não como superfícies abstratas e isoladas, mas como superfícies relacionadas a objetos

geométricos já familiares. O toro, em particular, oferece uma intuição geométrica importante para compreender o comportamento geral dessa classe, podendo ser visto, de forma intuitiva, como um modelo base cuja forma global se modifica por meio de transformações geométricas.

Para avançar na compreensão da estrutura teórica que fundamenta as ciclides na Geometria Diferencial, é natural introduzir a interpretação geométrica por meio da inversão esférica. Essa abordagem, sistematizada no final do século XIX nos trabalhos de Gaston Darboux⁶, descreve as ciclides como imagens, por inversão, de superfícies mais simples, como o toro e, em casos particulares ou degenerados, o cilindro circular reto e o cone.

No contexto da geometria, a inversão esférica é uma transformação do espaço tridimensional definida em relação a uma esfera de centro O e raio R , que associa a cada ponto P , com $P \neq O$, um ponto P' segundo a relação

$$P' = O + \frac{R^2}{\|P - O\|^2}(P - O).$$

A relevância dessa transformação decorre de duas propriedades fundamentais: a preservação dos ângulos de interseção, caracterizando-a como uma transformação conforme, e a capacidade de transformar esferas e planos em outras esferas ou planos. Quando aplicada a um toro a partir de um centro de inversão convenientemente escolhido, essa transformação altera a simetria original da superfície, gerando variações na espessura do tubo e assimetrias características das ciclides de Dupin, ao mesmo tempo em que preserva a propriedade fundamental de suas linhas de curvatura.

Do ponto de vista algébrico, uma ciclidade de Dupin pode ser descrita, em termos gerais, por uma equação cartesiana implícita da forma

$$(x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D)^2 = R^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Essa expressão sublinha o caráter algébrico da ciclidade, que se apresenta como uma superfície de grau quatro. Mais do que uma forma isolada, essa equação descreve uma família de superfícies cuja geometria é determinada pelos parâmetros reais A , B , C , D e R . Os coeficientes lineares A , B e C estão associados a deslocamentos e assimetrias na posição da superfície no espaço, enquanto o termo constante d e o parâmetro R influenciam sua escala e sua conformação global.

⁶ Gaston Darboux desenvolveu uma ampla sistematização da teoria das superfícies em sua obra *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, publicada entre 1887 e 1896. Nesse contexto, as ciclides de Dupin aparecem associadas à teoria das linhas de curvatura, às transformações conformes e à interpretação das superfícies por meio de inversões geométricas.

Uma parametrização frequentemente associada à interpretação por inversão esférica, em função das variáveis u e v , pode ser escrita na forma

$$x(u, v) = \frac{(A + B \cos v) \cos u}{C + D \cos v},$$

$$y(u, v) = \frac{(A + B \cos v) \sin u}{C + D \cos v},$$

$$z(u, v) = \frac{B \sin v}{C + D \cos v}.$$

Observa-se que a estrutura dos numeradores é análoga à parametrização de um toro. A diferença essencial reside no denominador $C + D \cos v$, responsável por introduzir a transformação geométrica associada à inversão esférica. Desse modo, essa formulação explicita a relação entre a ciclidade e o toro, oferecendo uma descrição analítica importante para compreender sua origem geométrica.

Nesta dissertação, essa parametrização é apresentada apenas para ilustrar a relação entre as ciclides e a inversão de superfícies mais simples. Para a construção dinâmica desenvolvida no GeoGebra 3D, será adotada, a seguir, uma formulação baseada nas curvas focais da ciclidade, na qual os parâmetros a , b , c e d terão significado geométrico específico.

Embora essa parametrização seja adequada do ponto de vista analítico e útil para explicitar a relação entre a ciclidade e a inversão de um toro, sua transposição direta para uma construção dinâmica no GeoGebra não foi a mais conveniente para os objetivos deste trabalho. Ao manipular diretamente os coeficientes A , B , C e D por meio de controles deslizantes, as alterações produzidas na superfície nem sempre se relacionam de forma imediata com as configurações geométricas que se deseja investigar.

Diante disso, optou-se por adotar, para a construção dinâmica, uma formulação baseada nas curvas focais da ciclidade. Essa escolha permite relacionar de modo mais direto os parâmetros da construção à elipse focal, à hipérbole focal e às diferentes configurações morfológicas obtidas no GeoGebra 3D.

A abordagem por curvas focais aparece nos estudos de James Clerk Maxwell e Arthur Cayley. Em seu artigo *On the Cyclide*, publicado em 1868 no *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, Maxwell analisou as ciclides por meio de famílias de esferas geradoras e de suas curvas focais diretrizes, relacionando a superfície a uma elipse e a uma hipérbole situadas em planos ortogonais (Maxwell, 1868).

Poucos anos depois, Cayley aprofundou a descrição algébrica dessas superfícies em seu artigo *On the Cyclide*, apresentando-as como superfícies quárticas e discutindo suas relações com círculos, cônicas e famílias de esferas (Cayley, 1873). Assim, Maxwell e Cayley fornecem uma base histórica e matemática importante para a interpretação focal das ciclides.

Para a implementação desenvolvida neste trabalho, foi utilizada a formulação elíptico-hiperbólica apresentada em MathCurve (MathCurve, s.d.), por apresentar diretamente as curvas focais, a equação cartesiana e uma parametrização adequada à construção dinâmica da superfície.

Nessa formulação, as curvas focais são dadas por uma elipse e uma hipérbole situadas em planos ortogonais:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad y = 0.$$

Os parâmetros satisfazem

$$0 < b \leq a \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{e} \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Desse modo, na construção adotada neste trabalho, o parâmetro a não é tratado como livre. Ele é calculado a partir dos parâmetros b e c , preservando a relação métrica da elipse focal.

A equação cartesiana correspondente a essa formulação pode ser escrita como

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - d^2)^2 = 4((ax - cd)^2 + b^2 y^2).$$

Equivalentemente,

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - d^2)^2 - 4(ax - cd)^2 - 4b^2 y^2 = 0.$$

Para fins de visualização dinâmica, utiliza-se a parametrização

$$x(u, v) = \frac{d(c - a \cos u \cos v) + b^2 \cos u}{a - c \cos u \cos v},$$

$$y(u, v) = \frac{b \sin u(a - d \cos v)}{a - c \cos u \cos v},$$

$$z(u, v) = \frac{b \sin v(c \cos u - d)}{a - c \cos u \cos v},$$

com

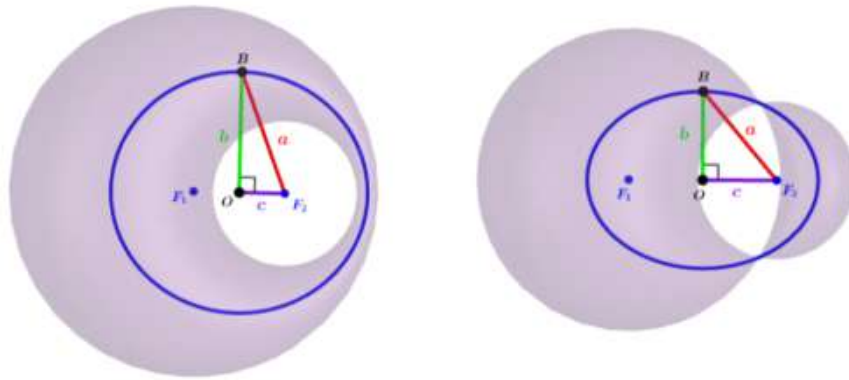
$$0 \leq u, v < 2\pi.$$

Essa parametrização permite representar a ciclide no GeoGebra 3D por meio de controles deslizantes associados aos parâmetros b , c e d , enquanto a é recalculado automaticamente pela relação

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Assim, a construção dinâmica mantém a relação com a estrutura focal da ciclidade e, ao mesmo tempo, permite observar como a variação dos parâmetros interfere na forma da superfície. A descrição algébrica clássica de Maxwell e Cayley fornece o contexto histórico e matemático da abordagem; a formulação elíptico-hiperbólica adotada a partir de MathCurve fornece a parametrização utilizada na modelagem no GeoGebra.

Figura 36 – Relação geométrica entre os parâmetros focais da elipse associada à construção da ciclidade de Dupin. As imagens destacam os focos F_1 e F_2 , o centro O , os segmentos a , b e c , e a relação pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$, responsável pela compatibilidade focal utilizada na abordagem de Maxwell e Cayley.



- (a) Configuração em que a distância focal c é reduzida em relação ao semieixo maior a , produzindo uma elipse de menor excentricidade.
- (b) Configuração em que a distância focal c é ampliada, aumentando a excentricidade da elipse e alterando a disposição geométrica das esferas geradoras associadas.

Fonte: Elaboração própria.

Desse modo, a condição

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

não é apenas uma restrição algébrica imposta ao software, mas expressa uma relação geométrica da elipse focal. Ao delegar ao GeoGebra o recálculo automático de a , torna-se possível manipular b , c e d de forma mais controlada, preservando a coerência geométrica da construção.

Antes de concluir esta subseção, cabe mencionar que a teoria das ciclides de Dupin também contempla outros casos além da configuração elíptico-hiperbólica adotada neste trabalho. Em situações limites, o sistema de curvas focais pode ser formado por duas parábolas situadas em planos ortogonais e compartilhando um mesmo foco.

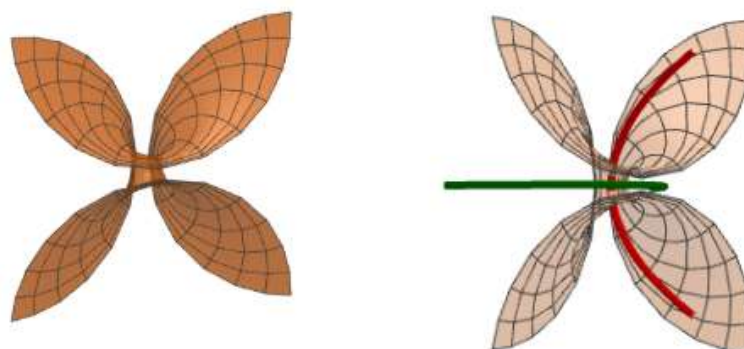
Essa configuração dá origem à chamada **ciclidade parabólica**. Diferentemente das ciclides elípticas, que constituem o foco desta dissertação, a ciclidade parabólica apresenta uma estrutura geométrica distinta e pode ser descrita por uma equação cúbica da forma

$$z(z - \beta)(z - \gamma) + (z - \gamma)y^2 + (z - \beta)x^2 = 0,$$

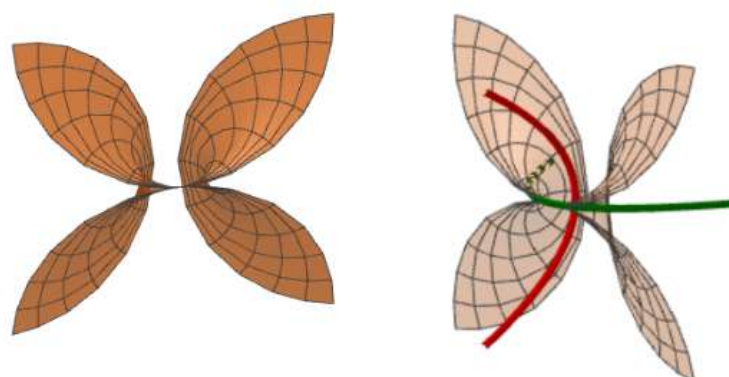
em que β e γ são constantes associadas à configuração focal considerada.

Do ponto de vista da modelagem, a ciclode parabólica também pode ser construída em ambiente de geometria dinâmica e apresenta diferentes configurações morfológicas, dependendo da relação entre seus parâmetros. A Figura 37 ilustra algumas dessas possibilidades.

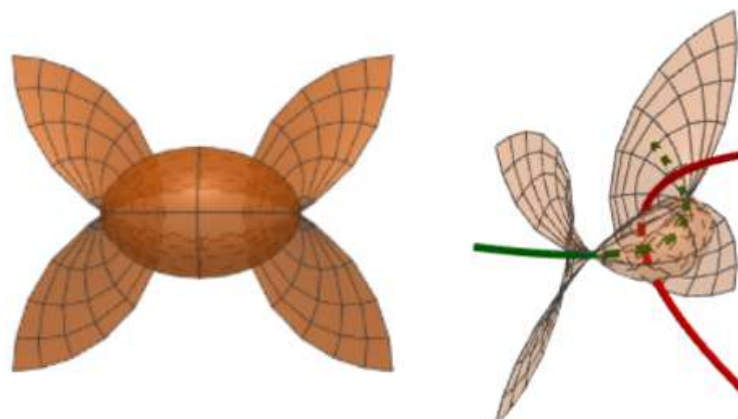
Figura 37 – Diferentes configurações da ciclode parabólica modeladas no GeoGebra.



(a) Configuração com lóbulos secantes, indicando a estrutura aberta da superfície.



(b) Configuração de transição, destacando a presença das curvas focais parabólicas.



(c) Configuração com lóbulo interno ovalado, obtida pela variação dos parâmetros da construção.

Fonte: Elaboração própria.

Apesar de sua relevância matemática, a ciclidade parabólica não será explorada em profundidade nesta dissertação. Sua menção tem o objetivo de situar esse caso dentro da teoria geral das ciclides de Dupin e indicar que ele também pode ser tratado por meio de modelagem dinâmica.

Neste trabalho, as análises, as construções no GeoGebra, as atividades propostas e o produto educacional concentram-se na **ciclidade elíptico-hiperbólica**. Essa delimitação se justifica pelo objetivo didático da pesquisa, pois essa configuração permite relacionar de modo mais direto os parâmetros da construção à elipse focal, à hipérbole focal, à distância focal e às famílias de esferas geradoras. Além disso, sua parametrização favorece uma exploração mais controlada no GeoGebra 3D, tornando-a adequada ao uso pedagógico com professores de Matemática.

3.2.5 Curvas focais

Conforme discutido anteriormente, Maxwell propôs uma interpretação geométrica das ciclides baseada em famílias de esferas geradoras controladas por relações focais. Posteriormente, Cayley aprofundou essa abordagem ao relacionar a estrutura geométrica dessas superfícies a curvas especiais associadas à sua construção algébrica e geométrica.

Essas curvas constituem um elemento importante para a compreensão das ciclides de Dupin, pois permitem descrever a organização da superfície a partir de diretrizes focais, antes mesmo de recorrer diretamente à sua equação implícita.

No caso da ciclidade elíptico-hiperbólica adotada neste trabalho, as curvas focais são formadas por uma elipse e uma hipérbole situadas em planos ortogonais. Essa configuração estabelece a estrutura geométrica responsável pela formação da superfície e pelas diferentes configurações morfológicas que ela pode assumir.

A elipse focal pode ser descrita pela equação

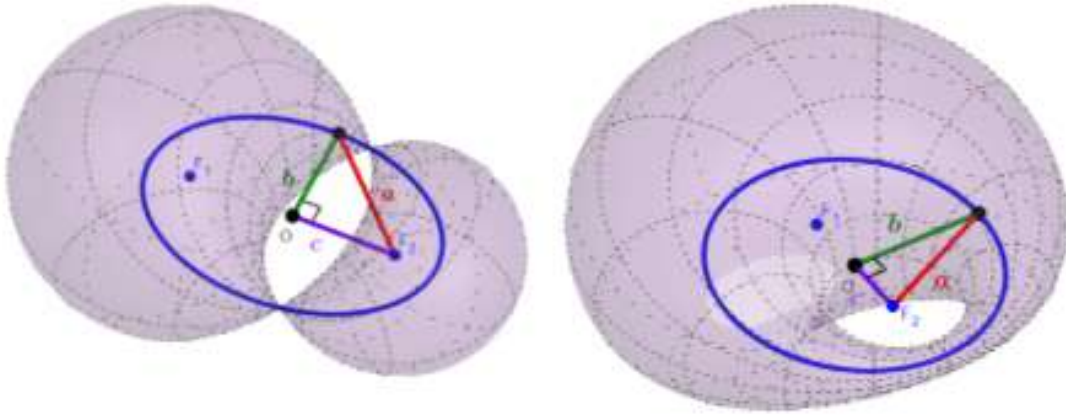
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

em que a representa o semieixo maior, b representa o semieixo menor e c representa a distância do centro da elipse a cada um de seus focos. Esses parâmetros satisfazem a relação

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

obtida diretamente do Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo formado pelo semieixo menor, pela distância focal e pelo semieixo maior da elipse.

Figura 38 – Elipse focal associada à construção da ciclode de Dupin. As imagens evidenciam os focos F_1 e F_2 , o centro O e os parâmetros a , b e c , que satisfazem a relação $a^2 = b^2 + c^2$. A elipse focal constitui um dos elementos geométricos fundamentais da formulação elíptico-hiperbólica associada aos estudos de Maxwell e Cayley.



(a) Elipse focal associada a uma configuração do tipo fuso, destacando os focos da elipse e o triângulo relacionado à expressão $a^2 = b^2 + c^2$.

(b) Elipse focal associada a uma configuração do tipo anel, demonstrando a preservação da estrutura focal mesmo diante da alteração da morfologia da ciclode.

Fonte: Elaboração própria.

De modo complementar, considera-se a hipérbole focal situada em um plano ortogonal ao plano da elipse. Na modelagem adotada, essa hipérbole é descrita pela equação

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

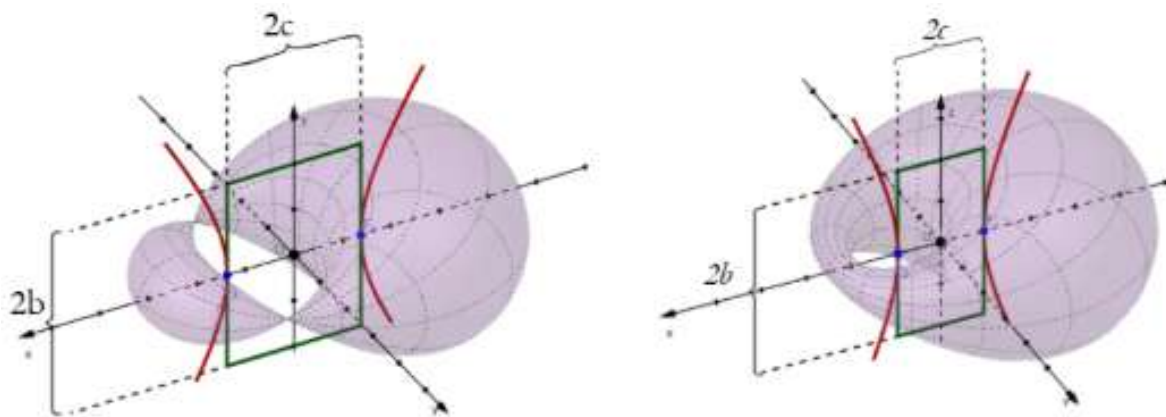
Nessa expressão, os parâmetros b e c são os mesmos que aparecem na descrição da elipse focal. O parâmetro c , que na elipse representa a distância do centro a cada foco, passa a atuar como semieixo real da hipérbole. Como

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

os focos da hipérbole localizam-se a uma distância a de seu centro.

Desse modo, a elipse e a hipérbole não são curvas independentes: ambas estão vinculadas pela mesma relação métrica entre os parâmetros a , b e c . Essa compatibilidade entre as cônicas focais é fundamental para a formulação elíptico-hiperbólica adotada na construção da ciclode de Dupin.

Figura 39 – Hipérbole focal associada à construção da ciclidade de Dupin. A curva utiliza os parâmetros b e c da formulação elíptico-hiperbólica, e o retângulo auxiliar de dimensões $2b$ e $2c$ auxilia sua construção geométrica. As imagens ilustram a preservação da estrutura focal em diferentes configurações morfológicas da ciclidade.



- (a) Hipérbole focal associada a uma configuração do tipo fusão, destacando o retângulo auxiliar de dimensões $2b$ e $2c$ utilizado em sua construção geométrica.
- (b) Hipérbole focal associada a uma configuração do tipo anel, indicando a manutenção da estrutura focal apesar da alteração morfológica da superfície.

Fonte: Elaboração própria.

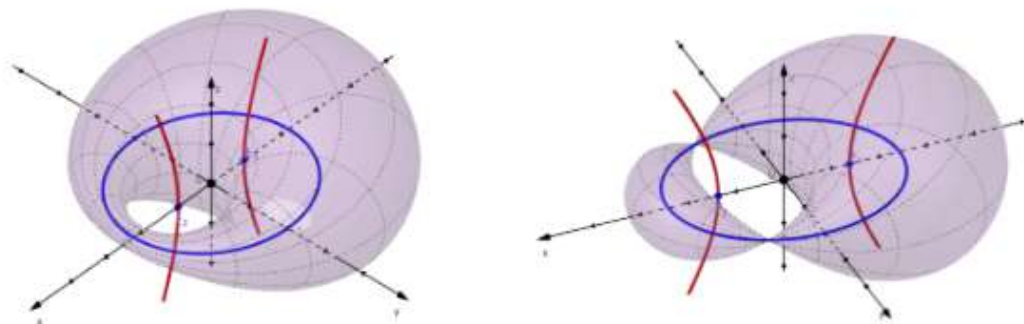
Embora pertençam a planos distintos, a elipse e a hipérbole permanecem conectadas pela mesma relação métrica entre os parâmetros a , b e c . Quando representadas simultaneamente, essas curvas revelam a organização espacial subjacente à ciclidade: a elipse está contida em um plano, enquanto a hipérbole ocupa um plano ortogonal, formando o sistema focal que orienta a construção da superfície.

Na construção dinâmica utilizada para gerar as imagens, os segmentos indicados nas figuras correspondem diretamente aos parâmetros empregados nas equações da superfície.⁷

Desse modo, a forma da ciclidade resulta da compatibilidade entre as duas cônicas focais e da organização das famílias de esferas geradoras em torno dessas diretrizes.

⁷ Na modelagem realizada no GeoGebra, os comprimentos dos segmentos representados por a , b , c , $2b$ e $2c$ foram definidos com as mesmas medidas dos parâmetros utilizados nas equações da ciclidade. Assim, as figuras não têm apenas função ilustrativa, mas expressam a correspondência geométrica adotada na construção dinâmica da superfície.

Figura 40 – Curvas focais da ciclidade de Dupin representadas simultaneamente. A elipse focal e a hipérbole focal ocupam planos ortogonais e organizam geometricamente a família de esferas geradoras responsável pela formação da superfície.



- (a) Configuração do tipo anel, destacando a disposição ortogonal entre a elipse focal e a hipérbole focal no interior da ciclidade.
- (b) Configuração do tipo fusão, ilustrando a preservação da estrutura focal mesmo sob alteração da morfologia da superfície.

Fonte: Elaboração própria.

Sob a perspectiva de Maxwell, as curvas focais podem ser compreendidas como uma espécie de esqueleto geométrico da superfície. As relações métricas estabelecidas entre a elipse e a hipérbole organizam a construção da ciclidade e condicionam sua forma global. Dessa maneira, modificações nos parâmetros a , b e c produzem alterações na geometria da superfície, influenciando suas diferentes configurações morfológicas.

A interpretação das ciclides por meio das curvas focais apresenta uma vantagem conceitual importante: permite compreender uma superfície de maior complexidade a partir de objetos clássicos da Geometria Analítica, como a elipse e a hipérbole. Essa abordagem estabelece uma ponte entre os estudos históricos desenvolvidos por Maxwell e Cayley e as representações dinâmicas contemporâneas implementadas em softwares de geometria dinâmica.

A partir dessa estrutura focal, torna-se possível compreender como as variações dos parâmetros geométricos interferem na forma da superfície, conduzindo às diferentes classificações morfológicas das ciclides de Dupin, que serão analisadas na subseção seguinte.

3.2.6 Classificação morfológica e exploração dinâmica

A partir da parametrização adotada neste trabalho, a ciclidade de Dupin pode ser analisada dinamicamente por meio da variação dos parâmetros b , c e d , mantendo-se o parâmetro a vinculado à relação

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Como visto anteriormente, a superfície pode ser descrita pela equação cartesiana

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - d^2)^2 = 4((ax - cd)^2 + b^2 y^2),$$

ou, equivalentemente,

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - d^2)^2 - 4(ax - cd)^2 - 4b^2 y^2 = 0.$$

Para fins de construção dinâmica no GeoGebra 3D, utiliza-se a parametrização

$$x(u, v) = \frac{d(c - a \cos u \cos v) + b^2 \cos u}{a - c \cos u \cos v},$$

$$y(u, v) = \frac{b \sin u(a - d \cos v)}{a - c \cos u \cos v},$$

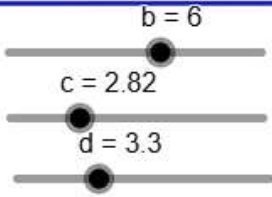
$$z(u, v) = \frac{b \sin v(c \cos u - d)}{a - c \cos u \cos v}.$$

Nessa formulação, os parâmetros b e c estão diretamente associados à estrutura focal da superfície, pois determinam a geometria da elipse e da hipérbole focais. O parâmetro d , por sua vez, atua sobre a configuração espacial da ciclidade, influenciando sua morfologia global.

Como a depende de b e c , a alteração desses parâmetros modifica simultaneamente a elipse focal, a hipérbole focal e a superfície gerada. Essa dependência torna a construção dinâmica significativa do ponto de vista didático, pois permite observar, em tempo real, como mudanças em elementos geométricos fundamentais produzem diferentes configurações da ciclidade de Dupin.

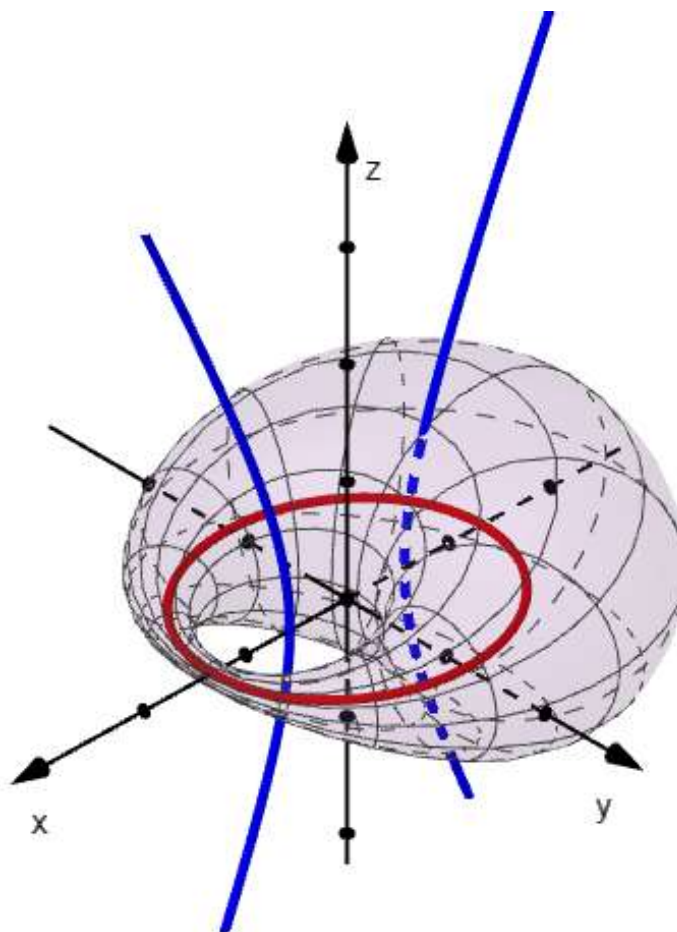
Essa integração entre parâmetros, curvas focais e superfície pode ser observada na construção dinâmica desenvolvida no GeoGebra. No painel da Figura 41, os controles deslizantes permitem modificar os parâmetros b , c e d , enquanto o parâmetro a é recalculado automaticamente pela relação $a = \sqrt{b^2 + c^2}$. A mesma construção apresenta, de forma articulada, as equações das curvas focais, a equação implícita e a parametrização da superfície.

Figura 41 – Integração entre os parâmetros da parametrização, as curvas focais e a superfície gerada.

Parâmetros	Curvas focais	
 $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 6.63$	Hipérbole	Elipse
	$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	$\frac{x^2}{2.82^2} - \frac{z^2}{6^2} = 1$	$\frac{x^2}{6.63^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$
Equação implícita da superfície		
$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - d^2)^2 = 4(a \cdot x - c \cdot d)^2 + 4 \cdot b^2 \cdot y^2$		
$(x^2 + y^2 + z^2 + 6^2 - 3.3^2)^2 = 4(6.63 \cdot x - 2.82 \cdot 3.3)^2 + 4 \cdot 6^2 \cdot y^2$		
Equação paramétrica da superfície		
$x(u, v) = \frac{d(c - a \cos u \cos v) + b^2 \cos u}{a - c \cos u \cos v}$ $y(u, v) = \frac{b \sin u(a - d \cos v)}{a - c \cos u \cos v}$ $z(u, v) = \frac{b \sin v(c \cos u - d)}{a - c \cos u \cos v}$	$x(u, v) = \frac{3.3(2.82 - 6.63 \cos u \cos v) + 6^2 \cos u}{6.63 - 2.82 \cos u \cos v}$ $y(u, v) = \frac{6 \sin u(6.63 - 3.3 \cos v)}{6.63 - 2.82 \cos u \cos v}$ $z(u, v) = \frac{6 \sin v(2.82 \cos u - 3.3)}{6.63 - 2.82 \cos u \cos v}$	

(a) Painel de integração entre os parâmetros da parametrização, as curvas focais e as equações associadas à construção da ciclode de Dupin.

Figura 41 – Continuação.



(b) Visualização tridimensional da ciclidade de Dupin com suas curvas focais associadas. A elipse focal e a hipérbole focal orientam a construção geométrica da superfície e permitem observar a influência dos parâmetros sobre sua configuração espacial.

Fonte: Elaboração própria. Construção interativa disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/a3anahnb>>.

A partir da parametrização adotada e da manipulação dos parâmetros no GeoGebra 3D, torna-se possível observar diferentes configurações morfológicas da ciclidade de Dupin. A variação dos valores de b , c e d , mantendo-se $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, modifica simultaneamente a estrutura focal e a forma global da superfície, permitindo acompanhar visualmente as transições entre essas configurações.

As denominações adotadas para as configurações morfológicas das ciclides de Dupin possuem caráter descritivo e didático, sendo utilizadas para organizar visualmente as formas obtidas nas construções dinâmicas. Neste trabalho, serão consideradas as seguintes configurações: ciclidade em anel, ciclidade em chifre, ciclidade em fuso, toro, ciclidade em anel crítico e ciclidade em fuso interno.

Ciclidade em anel

A ciclidade em anel ocorre quando

$$c < d < a.$$

Nessa configuração, a superfície não apresenta autointerseção e preserva uma abertura central característica. A condição $c < d$ garante que a construção permaneça fora do regime de autointerseção, enquanto a condição $d < a$ assegura que a abertura central não se feche. Como consequência, obtém-se uma superfície fechada, semelhante a uma variação do toro, mas ainda com topologia de anel.

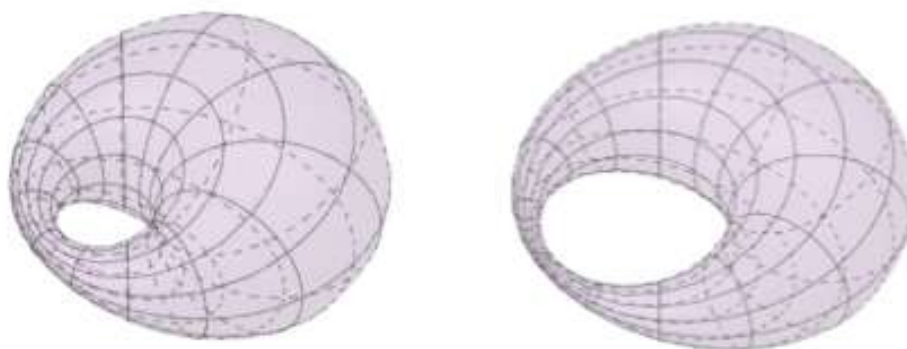
Na construção dinâmica, essa configuração pode ser reconhecida pela presença de uma região vazada central e pela ausência de cruzamentos da superfície sobre si mesma. Embora alterações nos parâmetros b , c e d modifiquem a espessura visual da superfície, a abertura central e a distribuição espacial da ciclidade, a relação

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

permanece responsável por preservar a compatibilidade focal da construção.

A Figura 45 apresenta duas configurações da ciclidade em anel obtidas por diferentes escolhas dos parâmetros da construção. Em ambas, verifica-se a condição morfológica $c < d < a$, garantindo a ausência de autointerseção e a manutenção da abertura central característica dessa classificação.

Figura 42 – Ciclides de Dupin do tipo anel obtidas por diferentes escolhas dos parâmetros focais. Embora ambas satisfaçam a condição morfológica $c < d < a$, a variação dos parâmetros altera a abertura central e a geometria global da superfície.



- (a) Configuração de anel associada a uma elipse focal de menor excentricidade.
- (b) Configuração de anel obtida pelo aumento do semieixo menor b , produzindo uma abertura central mais extensa e modificando a geometria global da superfície.

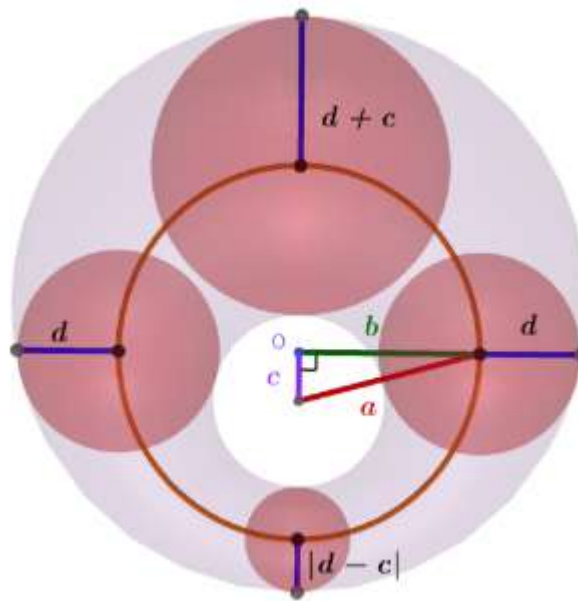
Fonte: Elaboração própria.

Para explicitar de forma mais direta a relação entre os parâmetros da construção e a morfologia da ciclidade, considera-se também uma representação auxiliar no plano xy , na qual são

destacadas a elipse focal, os segmentos a , b e c , e quatro esferas auxiliares associadas a pontos específicos da elipse.

Nessa representação, os centros das esferas são tomados nos pontos de interseção da elipse com os eixos coordenados. As duas esferas laterais possuem raio d , a esfera superior possui raio $d + c$ e a esfera inferior possui raio $|d - c|$. Essa escolha permite visualizar, de maneira imediata, como a variação do parâmetro d interfere na configuração da superfície. No caso da ciclidade em anel, como $c < d < a$, tem-se $|d - c| = d - c > 0$, de modo que todas as esferas auxiliares permanecem bem definidas e compatíveis com a abertura central observada na superfície.

Figura 43 – Representação auxiliar dos parâmetros da construção da ciclidade em anel no plano xy . A figura destaca a elipse focal, os segmentos a , b e c , bem como as esferas auxiliares com raios d , d , $d + c$ e $|d - c|$, ilustrando geometricamente a condição $c < d < a$.



Fonte: Elaboração própria.

Ciclidade em corno

A ciclidade em corno corresponde ao caso crítico em que

$$d = c.$$

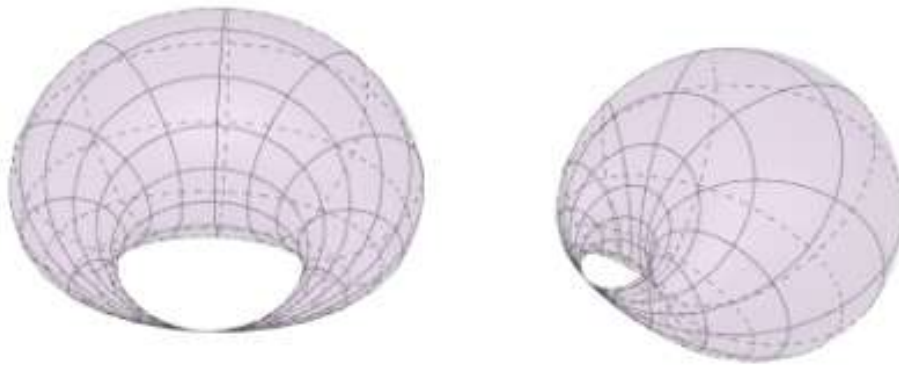
Nessa configuração, a superfície atinge uma situação limite entre a ciclidade em anel e a ciclidade com auto-interseção. Geometricamente, a abertura característica do tipo anel se reduz a um único ponto de tangência, produzindo a singularidade que caracteriza a ciclidade em corno.

Essa configuração representa, portanto, uma transição entre os regimes sem auto-interseção ($c < d$) e com auto-interseção ($d < c$). Na construção dinâmica, essa condição pode ser ob-

servada quando o controle deslizante associado ao parâmetro d assume exatamente o valor de c .

A Figura 44 ilustra duas configurações da ciclidade em corno obtidas por diferentes escolhas dos parâmetros da construção. Em ambas, a condição $d = c$ é preservada, mantendo a mesma classificação morfológica.

Figura 44 – Ciclides de Dupin do tipo corno obtidas na condição crítica $d = c$. Embora ambas satisfaçam a mesma condição morfológica, diferentes escolhas dos parâmetros focais produzem geometrias distintas, preservando o ponto singular característico dessa classificação.



- (a) Configuração de corno associada a uma elipse focal de maior semieixo menor b , produzindo uma abertura singular mais ampla na região de tangência.
 (b) Configuração de corno obtida pela redução do semieixo menor b , resultando em uma superfície mais compacta, mantendo a condição crítica $d = c$.

Fonte: Elaboração própria.

Para explicitar a relação entre a classificação morfológica e os parâmetros da construção, considera-se agora a disposição das esferas geradoras no plano da elipse focal. Como nesta situação vale $d = c$, a relação

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

implica automaticamente que $c < a$, e portanto $d < a$. Assim, a ciclidade permanece no caso crítico sem ultrapassar a condição geométrica que caracteriza o tipo corno.

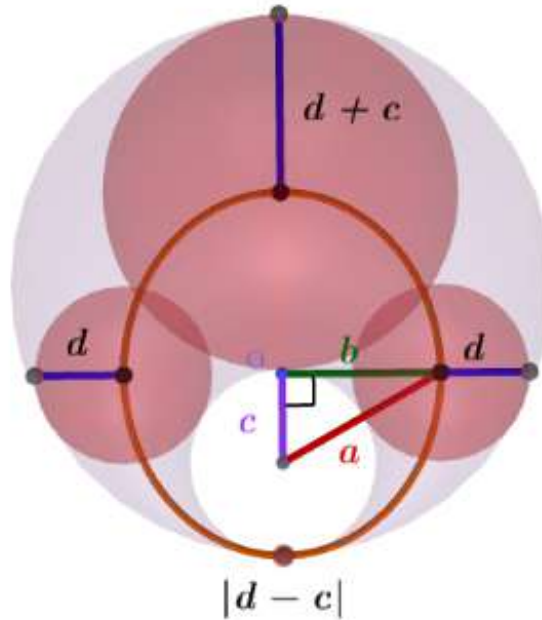
Na construção adotada, os raios das esferas destacadas podem ser interpretados diretamente a partir dos parâmetros. As duas esferas laterais possuem raio d , a esfera superior possui raio $d + c = 2d$, e a esfera inferior possui raio

$$|d - c| = 0.$$

Por essa razão, a esfera inferior degenera em um único ponto, o que fornece uma interpretação geométrica clara para o aparecimento da singularidade da ciclidade em corno.

A Figura 45 apresenta essa organização geométrica, evidenciando simultaneamente os parâmetros a , b , c e os raios associados às esferas geradoras relevantes nessa configuração.

Figura 45 – Representação dos parâmetros geométricos e dos raios das esferas geradoras na configuração da ciclidade em corno. Como $d = c$, a esfera superior tem raio $d + c = 2d$, as esferas laterais têm raio d e a esfera inferior degenera em um ponto, pois $|d - c| = 0$.



Fonte: Elaboração própria.

Ciclidade em fuso

A **ciclidade em fuso** ocorre quando

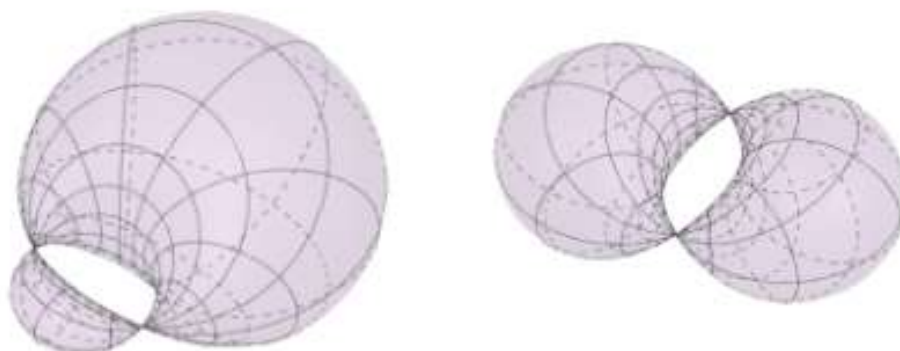
$$d < c.$$

Nessa configuração, a superfície apresenta autointerseção. Geometricamente, essa condição indica que o parâmetro d ultrapassa o caso crítico $d = c$, no qual uma das esferas auxiliares degenera em um ponto. Ao passar para o regime $d < c$, a superfície deixa de preservar a abertura anelar e passa a apresentar uma região de cruzamento, característica da morfologia em fuso.

Na construção dinâmica, essa classificação pode ser reconhecida pela interseção da superfície consigo mesma. À medida que o valor de d diminui em relação a c , a autointerseção torna-se mais pronunciada, modificando a distribuição espacial da ciclidade. No caso limite em que d se aproxima de zero, o deslocamento associado a esse parâmetro diminui, produzindo uma configuração mais simétrica em relação à estrutura focal.

A Figura 46 ilustra duas configurações da ciclidade em fuso obtidas por diferentes escolhas dos parâmetros da construção. Em ambas, verifica-se a condição morfológica $d < c$, responsável pela presença de autointerseção.

Figura 46 – Ciclides de Dupin do tipo fuso obtidas para valores de $d < c$. As imagens ilustram diferentes níveis de autointerseção produzidos pela variação do parâmetro d , preservando a mesma classificação morfológica.



- (a) Configuração de fuso obtida para um valor de d próximo de c , apresentando autointerseção moderada e assimetria ainda perceptível entre as regiões da superfície.
- (b) Configuração de fuso obtida para d próximo de zero, mostrando uma distribuição mais simétrica da superfície e autointerseção mais pronunciada.

Fonte: Elaboração própria.

Para explicitar a relação entre essa classificação e os parâmetros da construção, considera-se novamente a representação auxiliar no plano xy . No caso da ciclidade em fuso, como $d < c$, o raio associado à esfera auxiliar menor é dado por

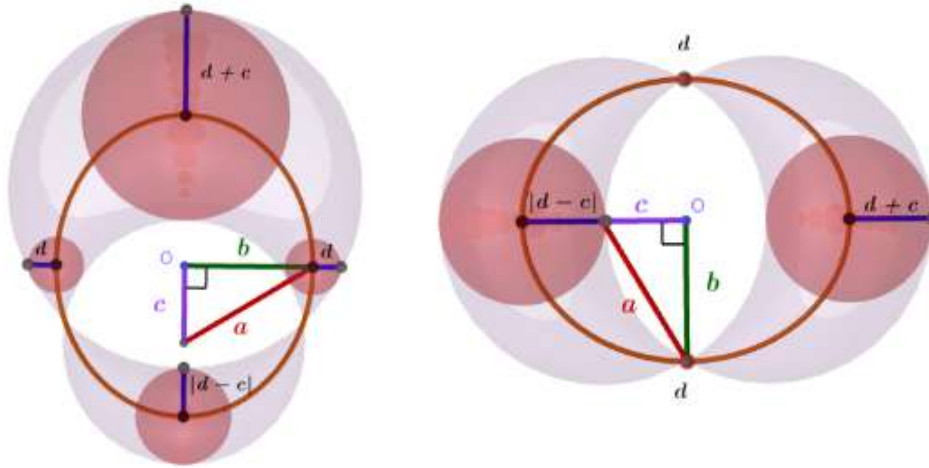
$$|d - c| = c - d.$$

Essa escrita em módulo é importante na construção dinâmica, pois impede que o raio seja tratado como negativo quando o parâmetro d se torna menor que c . Assim, a esfera auxiliar permanece representada no GeoGebra, permitindo visualizar a passagem para o regime de autointerseção.

Nessa configuração, as duas esferas laterais possuem raio d , a esfera maior possui raio $d + c$ e a esfera menor possui raio $|d - c|$. A variação desses raios indica, de forma geométrica, a mudança da morfologia da ciclidade quando se passa do caso crítico $d = c$ para o regime $d < c$.

A Figura 47 apresenta essa organização paramétrica para o caso do fuso, destacando os segmentos a , b e c , bem como os raios das esferas auxiliares.

Figura 47 – Representação dos parâmetros geométricos e dos raios das esferas geradoras na configuração da ciclode em fuso. Como $d < c$, o raio da esfera auxiliar menor é dado por $|d - c| = c - d$, enquanto as demais esferas destacadas possuem raios d , d e $d + c$.



- (a) Vista auxiliar evidenciando os raios d , $d + c$ e $|d - c|$ associados às esferas destacadas.
 (b) Vista auxiliar em configuração mais simétrica, destacando a permanência da relação métrica entre os parâmetros da construção.

Fonte: Elaboração própria.

Toro

O **toro** aparece como um caso particular da construção quando

$$c = 0.$$

Nessa situação, a relação

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

reduz-se a

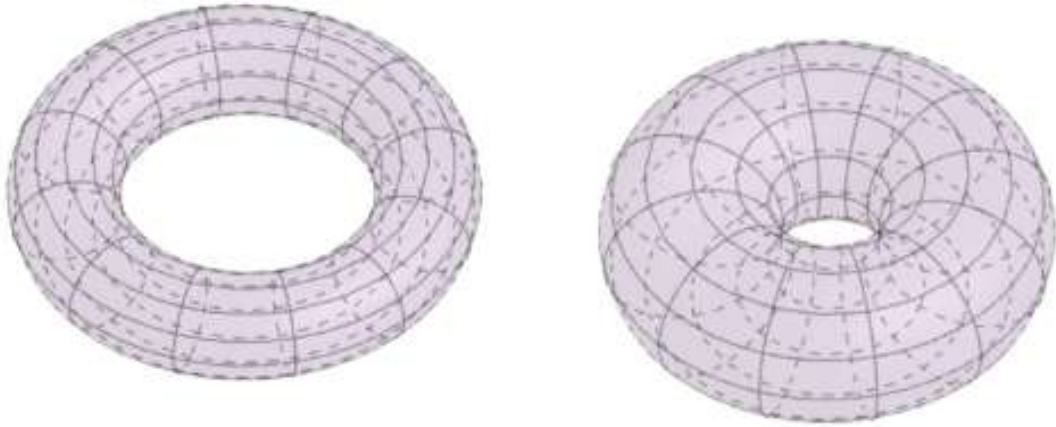
$$a = b.$$

Como consequência, a elipse focal perde sua excentricidade e passa a ser uma circunferência. A estrutura focal torna-se simétrica, e a ciclode recupera a geometria clássica do toro.

Do ponto de vista da parametrização adotada, a condição $c = 0$ elimina a assimetria associada à distância focal. Assim, as características morfológicas das ciclides elípticas deixam de aparecer, e a superfície passa a apresentar simetria em torno de seu eixo central. Os parâmetros b e d continuam influenciando, respectivamente, as dimensões principais da superfície e a espessura do tubo, mas a ausência de excentricidade focal caracteriza o caso toroidal.

A Figura 48 apresenta duas configurações toroidais obtidas a partir da condição $c = 0$. Em ambas, a elipse focal degenera em uma circunferência, preservando a simetria característica do toro.

Figura 48 – Configurações toroidais obtidas a partir da condição $c = 0$, na qual a elipse focal degenera em uma circunferência. As imagens ilustram diferentes escolhas dos parâmetros b e d , preservando a simetria característica do toro.



- (a) Configuração toroidal com abertura central mais ampla, obtida pela variação dos parâmetros da construção.
 (b) Configuração toroidal com abertura central menor, indicando a influência do parâmetro d sobre a espessura do tubo.

Fonte: Elaboração própria.

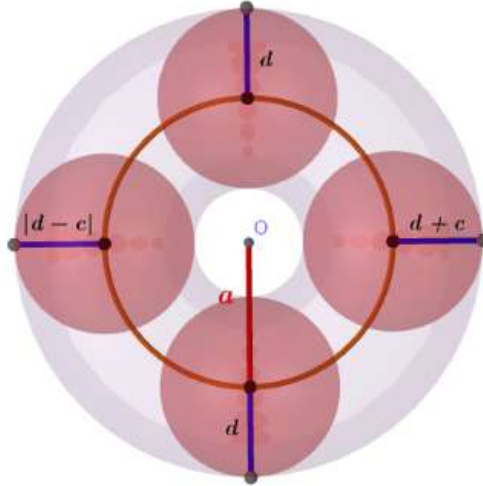
Na representação auxiliar dos parâmetros, a condição $c = 0$ produz uma simplificação importante nos raios das esferas destacadas. Como

$$d + c = d \quad \text{e} \quad |d - c| = d,$$

as quatro esferas auxiliares passam a ter o mesmo raio d . Essa igualdade expressa geometricamente a perda da assimetria focal e ajuda a compreender por que a superfície resultante assume a forma toroidal.

A Figura 49 destaca essa configuração simétrica, destacando a circunferência focal, o parâmetro $a = b$ e as esferas auxiliares de mesmo raio.

Figura 49 – Representação dos parâmetros geométricos e dos raios das esferas geradoras no caso toroidal. Quando $c = 0$, tem-se $a = b$, e os raios $d + c$, d , d e $|d - c|$ tornam-se todos iguais a d , confirmando a simetria da construção.



Fonte: Elaboração própria.

Anel crítico

O **anel crítico** corresponde ao caso limite em que

$$d = a.$$

Nessa configuração, o parâmetro d atinge exatamente o valor do semieixo maior a da elipse focal. Como

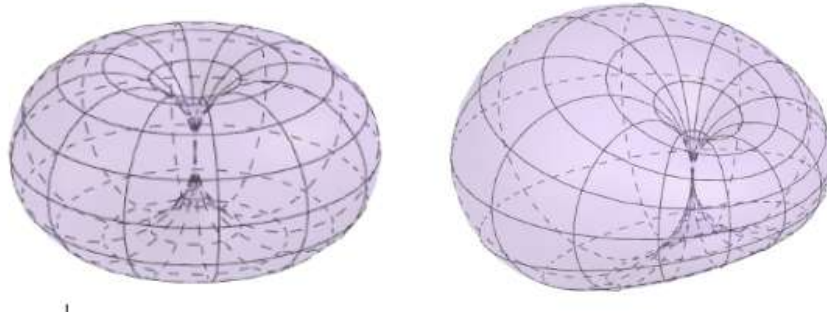
$$a = \sqrt{b^2 + c^2},$$

tem-se $a > c$ sempre que $b > 0$, de modo que essa condição ocorre após o regime regular da ciclidade em anel, caracterizado por $c < d < a$.

Do ponto de vista morfológico, essa configuração marca uma situação limite da abertura central da superfície. A ciclidade ainda preserva uma organização próxima à forma anelar, mas a região interna atinge uma condição crítica, associada ao fechamento central da estrutura.

A Figura 50 apresenta duas configurações obtidas na condição $d = a$. Na primeira, tem-se o caso particular $c = 0$, no qual a elipse focal degenera em uma circunferência, produzindo uma configuração mais simétrica. Na segunda, considera-se $c \neq 0$, preservando a mesma condição crítica em uma estrutura focal elíptica.

Figura 50 – Configurações da ciclidade de Dupin obtidas na condição limite $d = a$, aqui denominada anel crítico. As imagens ilustram o caso simétrico com $c = 0$ e uma configuração elíptica com $c \neq 0$, preservando a relação crítica entre o parâmetro d e o semieixo maior a .



- (a) Configuração simétrica obtida para $c = 0$, na qual a elipse focal degenera em uma circunferência.
 (b) Configuração obtida para $c \neq 0$, mantendo a condição crítica $d = a$ em uma estrutura focal elíptica.

Fonte: Elaboração própria.

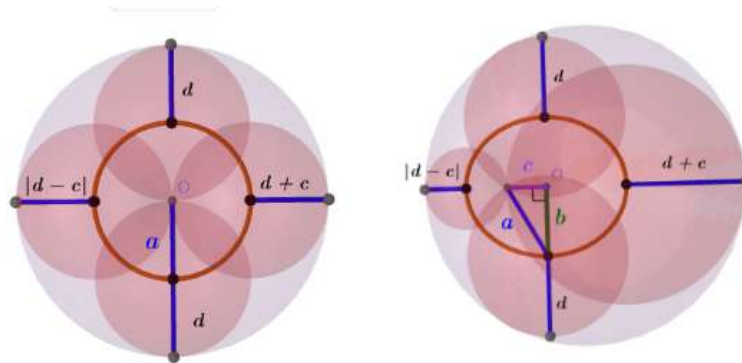
Na representação auxiliar dos parâmetros, quando $d = a$, os raios destacados são

$$d, \quad d, \quad d + c \quad \text{e} \quad |d - c| = a - c.$$

Como $a > c$, o raio $|d - c|$ permanece positivo. No caso particular em que $c = 0$, tem-se $a = b$ e todos os raios destacados se reduzem a d , mostrando a simetria da configuração.

A Figura 51 apresenta essa organização paramétrica, destacando os segmentos a , b e c , bem como os raios associados às esferas auxiliares.

Figura 51 – Representação dos parâmetros geométricos e dos raios das esferas geradoras na configuração do anel crítico. Nessa condição, $d = a$, e os raios destacados são d , d , $d + c$ e $|d - c| = a - c$.



- (a) Vista auxiliar do caso simétrico $c = 0$, no qual $a = b$ e todos os raios destacados coincidem com d .
 (b) Vista auxiliar em configuração elíptica, preservando a condição crítica $d = a$.

Fonte: Elaboração própria.

Fuso central

O **fuso central** ocorre quando

$$d > a.$$

Nessa configuração, o parâmetro d ultrapassa o valor do semieixo maior a da elipse focal. Como

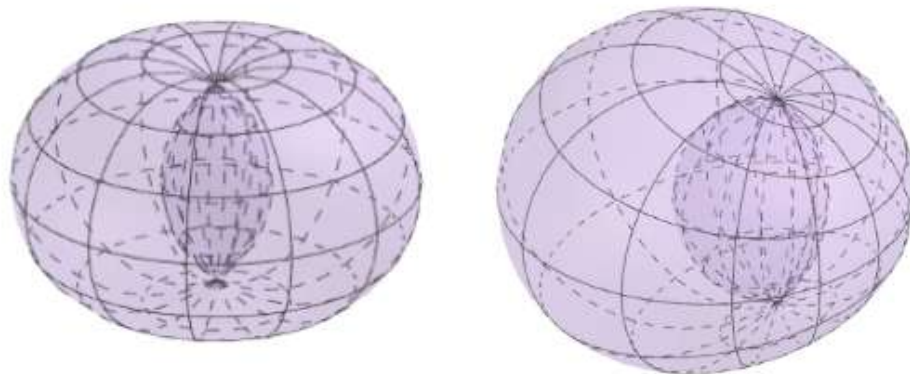
$$a = \sqrt{b^2 + c^2},$$

essa condição implica que d excede também a distância focal c , isto é, $d > c$.

Do ponto de vista morfológico, a superfície ultrapassa o regime crítico $d = a$ e passa a apresentar uma autointerseção interna mais acentuada. A abertura central, característica das configurações em anel, deixa de se comportar como uma região vazada regular, e a superfície passa a atravessar a si mesma na região interna.

A Figura 52 apresenta duas configurações obtidas sob a condição $d > a$. Na primeira, considera-se o caso particular $c = 0$, produzindo uma configuração central mais simétrica. Na segunda, considera-se $c \neq 0$, confirmando a mesma classificação em uma estrutura focal elíptica.

Figura 52 – Configurações da ciclode de Dupin obtidas para valores de $d > a$, aqui denominadas fuso central. As imagens ilustram superfícies com autointerseção interna, produzidas pela ultrapassagem do valor crítico $d = a$.



- (a) Configuração simétrica obtida para $c = 0$, indicando a autointerseção interna em torno do eixo central.
 (b) Configuração obtida para $c \neq 0$, preservando a condição $d > a$ em uma estrutura focal elíptica.

Fonte: Elaboração própria.

Para interpretar essa configuração por meio das esferas auxiliares, observa-se que, como $d > a$ e $a > c$, tem-se

$$d > c.$$

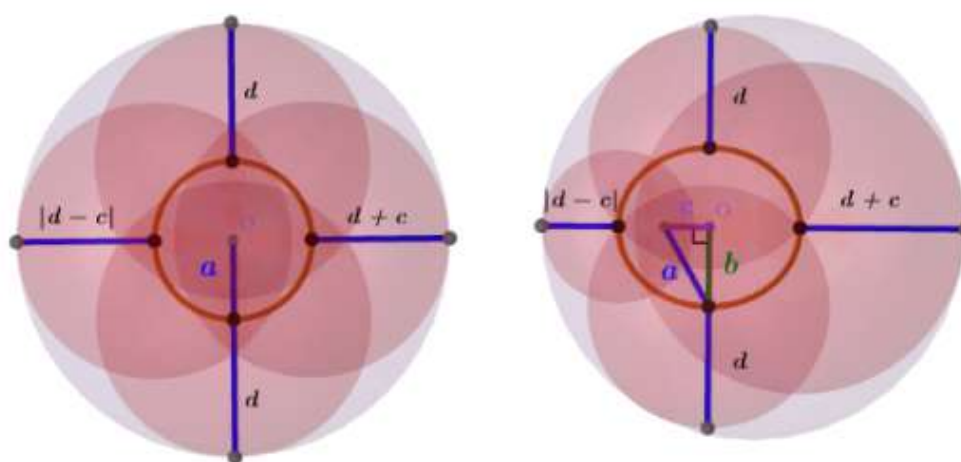
Assim, os raios destacados são

$$d, \quad d, \quad d + c \quad \text{e} \quad |d - c| = d - c.$$

Nessa situação, todas as esferas auxiliares possuem raio positivo, e a esfera de raio $d - c$ volta a crescer após o regime crítico anterior, contribuindo para a visualização da autointerseção interna da superfície.

A Figura 53 apresenta essa organização geométrica no plano da elipse focal, destacando os segmentos a , b e c , bem como os raios associados às esferas auxiliares.

Figura 53 – Representação dos parâmetros geométricos e dos raios das esferas geradoras na configuração do fuso central. Como $d > a$, tem-se também $d > c$, e os raios destacados são d , d , $d + c$ e $|d - c| = d - c$.



- (a) Vista auxiliar do caso simétrico $c = 0$, no qual a configuração apresenta autointerseção central.
 (b) Vista auxiliar em configuração elíptica, preservando a condição $d > a$.

Fonte: Elaboração própria.

A exploração dinâmica realizada nesta subseção evidencia que as diferentes classificações morfológicas das ciclides de Dupin não constituem objetos geométricos isolados, mas diferentes manifestações de uma mesma estrutura focal. Embora as superfícies apresentem aparências distintas, suas formas podem ser compreendidas a partir das relações estabelecidas entre os parâmetros a , b , c e d , responsáveis pela definição das curvas focais e pela organização da família de esferas geradoras.

As construções desenvolvidas no GeoGebra permitem observar que alterações nos parâmetros podem produzir modificações significativas na geometria da superfície sem necessariamente alterar sua classificação morfológica. Em particular, verificou-se que os parâmetros associados à estrutura focal controlam características globais da superfície, enquanto o parâmetro d atua no controle da variação dos raios das esferas geradoras, desempenhando papel fundamental nas transições entre as configurações em anel, corno, anel crítico e fuso central.

Sob essa perspectiva, a abordagem dinâmica complementa a descrição analítica tradicional ao tornar visíveis processos geométricos que, muitas vezes, permanecem pouco evidentes

apenas pelas equações. Em vez de observar apenas superfícies finalizadas, o usuário acompanha continuamente a evolução de suas formas, identificando condições críticas, transições morfológicas e relações entre os elementos focais da construção.

Essa interpretação geométrica fornece uma base intuitiva para a análise diferencial apresentada na seção seguinte, na qual as propriedades locais da superfície serão investigadas por meio de seus elementos fundamentais e de suas curvaturas.

3.3 Representação sintética da ciclidade de Dupin por objetos dependentes

A construção apresentada nesta seção tem como objetivo reproduzir geometricamente a ciclidade de Dupin por meio de objetos dependentes no ambiente GeoGebra. Diferentemente da representação parametrizada desenvolvida anteriormente, nesta abordagem a superfície é obtida a partir de relações geométricas entre circunferências, esferas e uma curva diretriz, permitindo explorar visualmente propriedades fundamentais da ciclidade.

A construção foi elaborada de modo que todas as suas partes permaneçam vinculadas entre si. Dessa forma, alterações em determinados elementos produzem automaticamente modificações na superfície gerada, preservando as relações geométricas estabelecidas. Essa característica torna a representação adequada tanto para fins de investigação quanto para a análise das diferentes configurações da família de ciclides de Dupin.

Inicialmente, definem-se os objetos geométricos fundamentais utilizados na construção. Sejam:

- c_1 circunferência inicial maior;
- c_2 circunferência inicial menor;
- C_1 centro de c_1 ;
- C_2 centro de c_2 ;
- R raio de c_1 ;
- r raio de c_2 .

Os centros de c_1 e c_2 estão vinculados a um mesmo segmento de reta, garantindo a simetria da ciclidade representada pela construção. Ou seja, ao traçar uma reta perpendicular a esse segmento, essa reta intersecta duas esferas de mesmo raio, tangentes às circunferências iniciais em pontos diametralmente opostos.

1. Ciclidade do tipo anel.

Nesse caso, a circunferência inicial menor é interna à circunferência inicial maior. Ou seja,

$$d(C_1, C_2) + r < R,$$

ou, equivalentemente,

$$d(C_1, C_2) < R - r.$$

Na representação parametrizada da ciclidade, a configuração anelar ocorre quando os parâmetros satisfazem

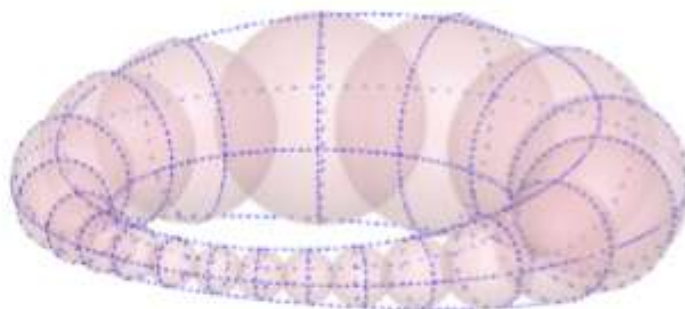
$$c < d < a.$$

Essa desigualdade explicita que o parâmetro d deve ser maior que c , mas ainda menor que a . Na construção considerada, o parâmetro d está diretamente ligado aos raios das esferas, enquanto o parâmetro c controla a distância focal da elipse, isto é, da curva diretriz utilizada na construção sintética.

Assim, o paralelo geométrico de movimentar o controle deslizante associado ao parâmetro c , na construção parametrizada apresentada anteriormente, corresponde, nesta construção sintética, a movimentar o centro C_2 ao longo do segmento de reta ao qual ele está vinculado.

A Figura 54 apresenta a família de esferas geradoras da ciclode de Dupin do tipo anel, obtida por meio da construção sintética.

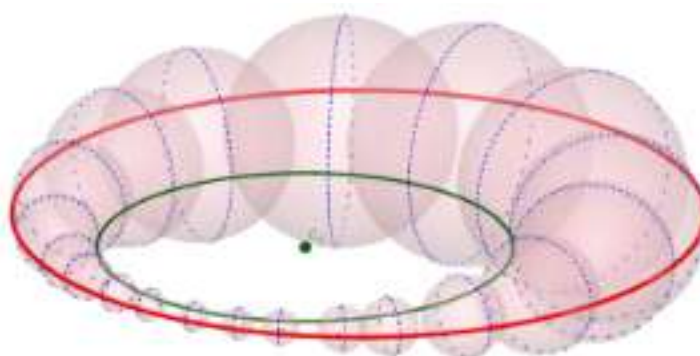
Figura 54 – Família de esferas geradoras da ciclode de anel obtida por construção sintética.



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 55, observa-se a circunferência c_1 , destacada em vermelho, e a circunferência c_2 , destacada em verde. Também é indicado o ponto C_2 , correspondente ao centro da circunferência menor.

Figura 55 – Circunferências iniciais da construção sintética da ciclode de anel.

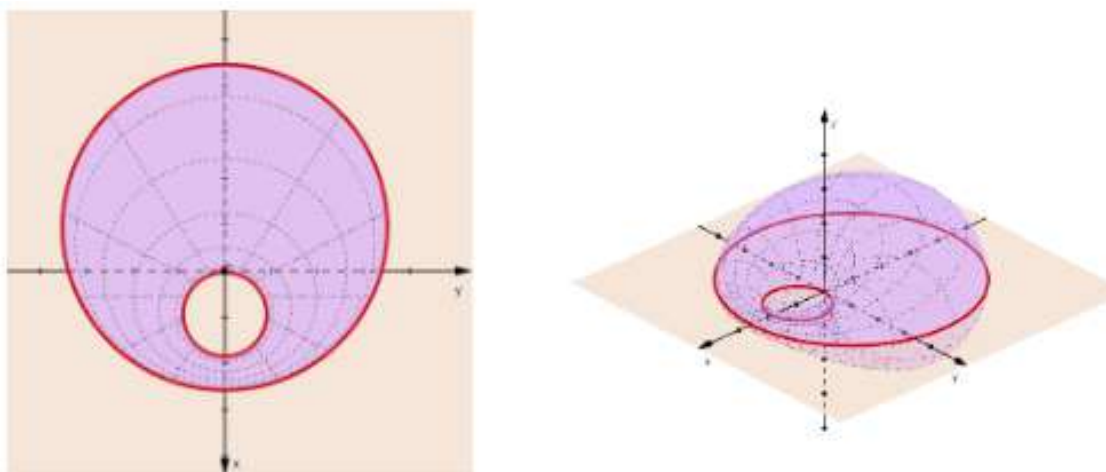


Fonte: Elaboração própria.

Embora a construção tenha sido desenvolvida por meio de objetos dependentes da geometria sintética, a representação parametrizada permite interpretar geometricamente os elementos utilizados ao longo do processo de construção. As imagens apresentadas estabelecem um paralelo entre as duas abordagens, mostrando que as circunferências iniciais c_1 e c_2 , utilizadas como elementos fundamentais da construção sintética, correspondem às linhas de curvatura pertencentes ao plano xOy .

Assim, as curvas que servem de base para a geração da família de esferas podem ser identificadas, na representação parametrizada, como curvas características da própria superfície, mostrando a coerência entre a construção geométrica desenvolvida e a estrutura analítica da ciclode.

Figura 56 – Correspondência entre as circunferências iniciais da construção sintética e as curvas obtidas pela interseção da ciclode com o plano xOy .

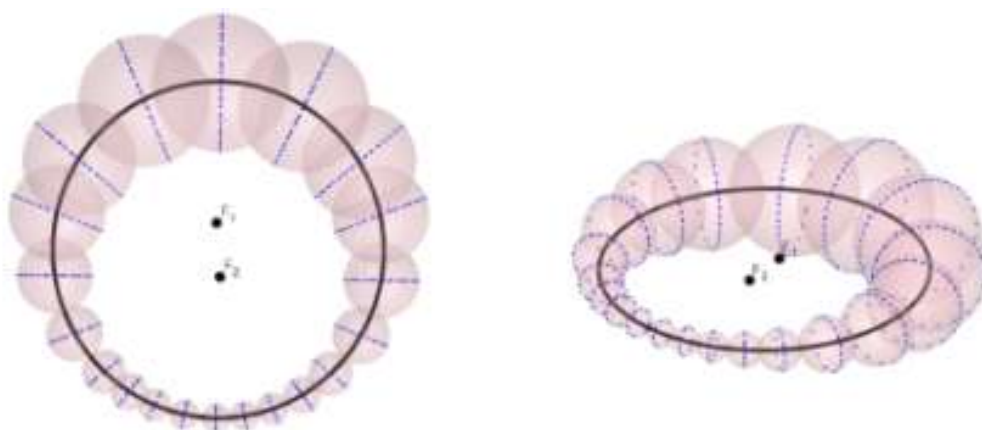


- (a) Interseção da ciclode com o plano xOy .
- (b) Visualização espacial da interseção da ciclode com o plano xOy .

Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 57, destaca-se a curva diretriz da representação sintética da ciclode. Essa curva é construída por meio da ferramenta cônica por cinco pontos, sendo esses pontos os centros de cinco esferas geradoras da ciclode. Na imagem, também são indicados os pontos F_1 e F_2 , que correspondem aos focos da curva diretriz, evidenciando a distância focal nessa configuração.

Figura 57 – Curva diretriz e focos da representação sintética da ciclidade de anel.



- (a) Vista superior da curva diretriz, destacando os focos F_1 e F_2 .
 (b) Vista em perspectiva da curva diretriz e dos focos F_1 e F_2 .

Fonte: Elaboração própria.

2. Ciclidade do tipo chifre (corno).

Nesta configuração, as circunferências iniciais mencionadas se tangenciam internamente em um único ponto, ou seja,

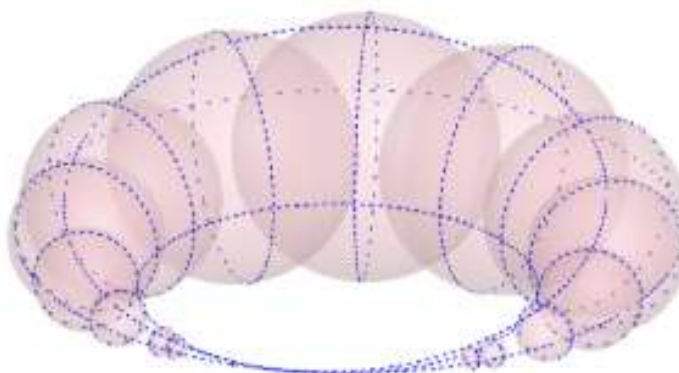
$$d(C_1, C_2) = R - r.$$

Na construção parametrizada, a mesma configuração ocorre no caso limite em que os parâmetros c e d se igualam,

$$c = d.$$

Essa situação representa a transição entre configurações distintas da família de ciclides de Dupin.

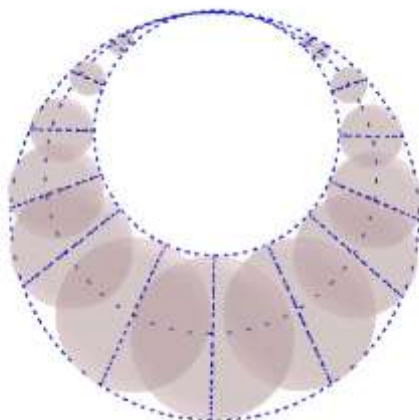
Figura 58 – Representação sintética da ciclidade de chifre obtida a partir da família de esferas tangentes.



Fonte: Elaboração própria.

A Figura 59 apresenta a ciclidade em uma vista frontal, destacando a configuração geométrica que justifica a denominação chifre, ou corno.

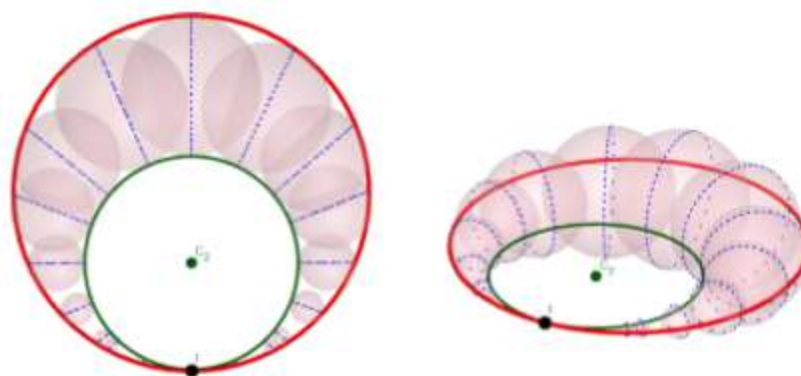
Figura 59 – Vista frontal da ciclidade de chifre, evidenciando a configuração geométrica que justifica sua denominação.



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 60, destacam-se as circunferências c_1 e c_2 , bem como o ponto de tangência entre elas. Nessa configuração, as circunferências iniciais se tangenciam internamente em um único ponto.

Figura 60 – Circunferências iniciais c_1 e c_2 tangentes internamente em um único ponto.

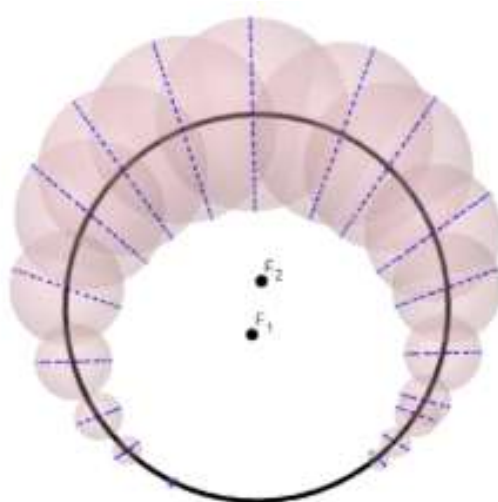


- (a) Vista superior das circunferências iniciais e do ponto de tangência.
- (b) Vista em perspectiva das circunferências iniciais e do ponto de tangência.

Fonte: Elaboração própria.

A curva diretriz da representação sintética também pode ser observada nessa configuração. Na Figura 61, destacam-se a curva utilizada na construção, bem como seus focos F_1 e F_2 , permitindo observar a redução da distância focal quando comparada à configuração anterior.

Figura 61 – Curva diretriz e focos da representação sintética da ciclidade de chifre.

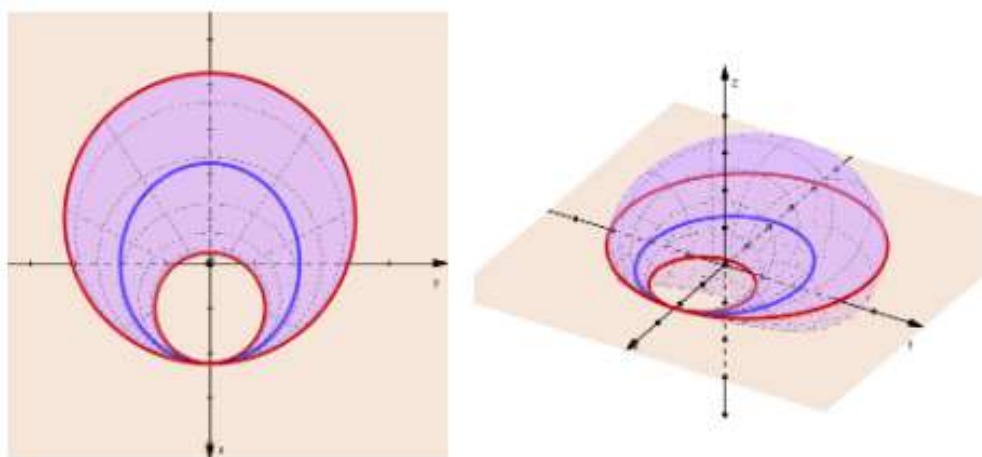


Fonte: Elaboração própria.

Assim como realizado na configuração da ciclidade de anel, é possível estabelecer um paralelo entre a construção sintética e a representação parametrizada. Na Figura 62, destacam-se as linhas de curvatura pertencentes ao plano xOy , evidenciando que, nesta configuração, elas também se tangenciam em um único ponto.

Esse comportamento reproduz geometricamente a tangência observada entre as circunferências iniciais da construção sintética, reforçando a correspondência entre as duas abordagens.

Figura 62 – Correspondência entre a construção sintética e as linhas de curvatura da representação parametrizada da ciclidade de chifre.



- (a) Interseção da ciclidade com o plano xOy , destacando as linhas de curvatura tangentes.
- (b) Visualização espacial da interseção da ciclidade com o plano xOy .

Fonte: Elaboração própria.

3. Ciclide em fuso.

Nesta configuração, as circunferências iniciais c_1 e c_2 são secantes, ou seja, tangenciam-se em dois pontos distintos. Logo, a distância entre seus centros satisfaz

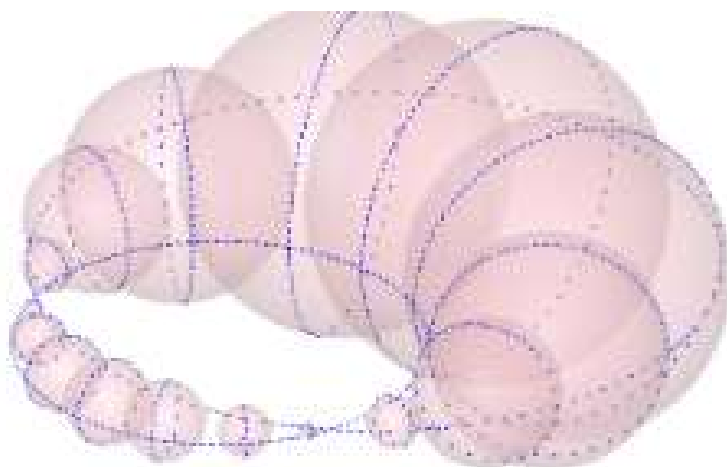
$$R - r < d(C_1, C_2) < R + r.$$

Na construção parametrizada, essa configuração ocorre quando o parâmetro d é menor que c , isto é,

$$d < c.$$

Como $c < a$, essa condição já garante que $d < a$, não sendo necessário explicitar novamente essa desigualdade.

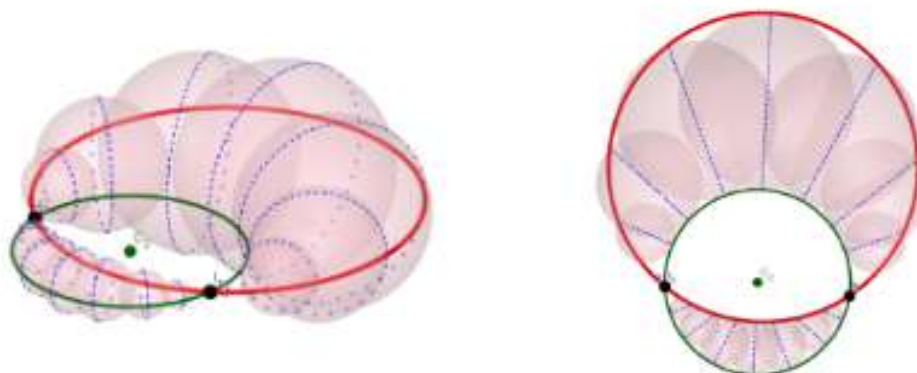
Figura 63 – Representação sintética da ciclide em fuso obtida a partir da família de esferas tangentes.



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 64, destacam-se as circunferências c_1 e c_2 , que se intersectam em dois pontos distintos. Esse comportamento caracteriza a configuração em fuso na construção sintética.

Figura 64 – Circunferências iniciais c_1 e c_2 secantes, com interseções em dois pontos distintos.



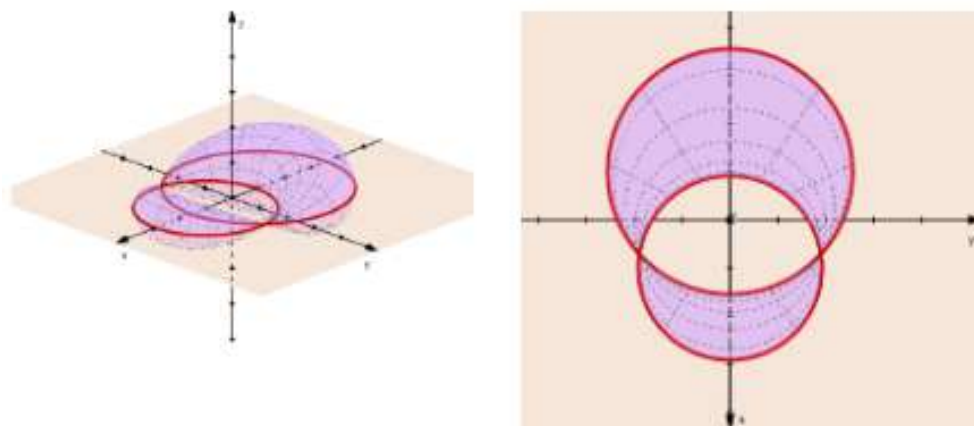
- (a) Vista em perspectiva das circunferências iniciais e dos pontos de interseção.
 (b) Vista frontal das circunferências iniciais e dos pontos de interseção.

Fonte: Elaboração própria.

Assim como nas configurações anteriores, é possível estabelecer um paralelo entre a construção sintética e a representação parametrizada. Na Figura 65, destacam-se as linhas de curvatura pertencentes ao plano xOy , observando que elas se intersectam em dois pontos distintos.

Esse comportamento reproduz geometricamente a interseção observada entre as circunferências iniciais c_1 e c_2 da construção sintética, confirmando a correspondência entre as duas representações da ciclode em fuso.

Figura 65 – Correspondência entre a construção sintética e as linhas de curvatura da representação parametrizada da ciclidade em fuso.



- (a) Visualização espacial da interseção da ciclidade com o plano xOy .
 (b) Interseção da ciclidade com o plano xOy , destacando as linhas de curvatura secantes.

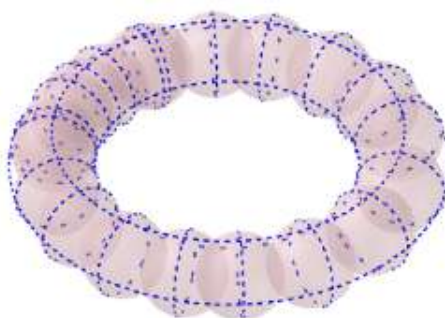
Fonte: Elaboração própria.

4. Toro.

O toro é um caso particular de ciclidade de Dupin. Na construção com geometria sintética, obtém-se a configuração toroidal quando as circunferências iniciais são concêntricas, isto é, quando a distância entre seus centros é igual a zero:

$$d(C_1, C_2) = 0.$$

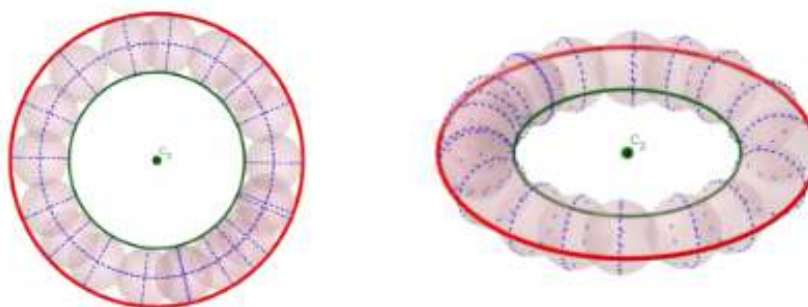
Figura 66 – Representação da ciclidade de Dupin na configuração toroidal obtida por meio da construção sintética.



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 67, destacam-se as circunferências iniciais concêntricas utilizadas na construção sintética da ciclidade na configuração toroidal.

Figura 67 – Circunferências iniciais concêntricas utilizadas na construção sintética da ciclode na configuração toroidal.

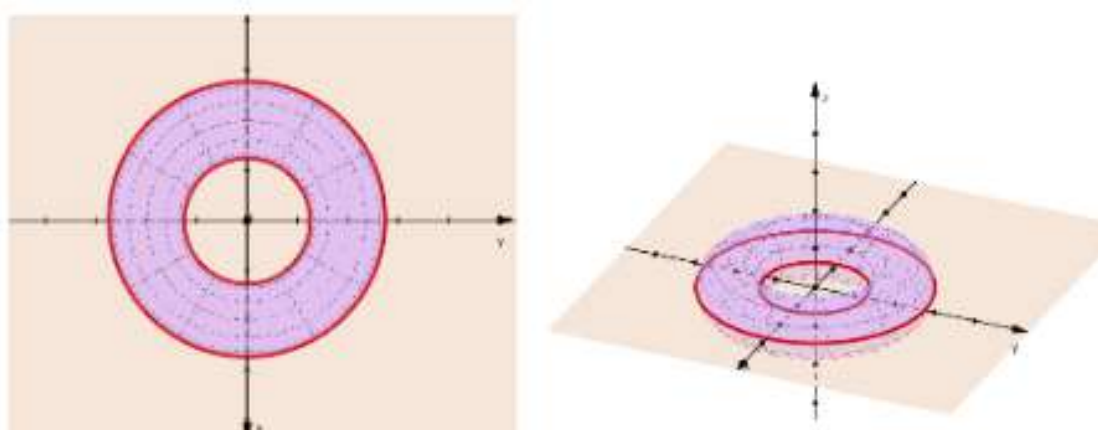


- (a) Vista superior das circunferências iniciais concêntricas.
 (b) Vista em perspectiva das circunferências iniciais concêntricas.

Fonte: Elaboração própria.

De modo análogo aos casos anteriores, as circunferências iniciais da construção sintética correspondem, na representação parametrizada, às linhas de curvatura pertencentes ao plano xOy . Nessa configuração, a concentricidade observada entre as circunferências iniciais reflete-se diretamente nas linhas de curvatura da representação parametrizada, evidenciando a correspondência geométrica entre as duas abordagens.

Figura 68 – Correspondência entre a construção sintética e as linhas de curvatura da representação parametrizada da ciclode na configuração toroidal.



- (a) Linhas de curvatura pertencentes ao plano xOy .
 (b) Vista em perspectiva das linhas de curvatura pertencentes ao plano xOy .

Fonte: Elaboração própria.

Na construção parametrizada, obtém-se o toro quando o parâmetro c é nulo. De fato, se $c = 0$, tem-se

$$a = \sqrt{b^2 + 0^2},$$

o que implica

$$a = b.$$

Aplicando essa igualdade na equação da elipse focal, obtém-se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Portanto,

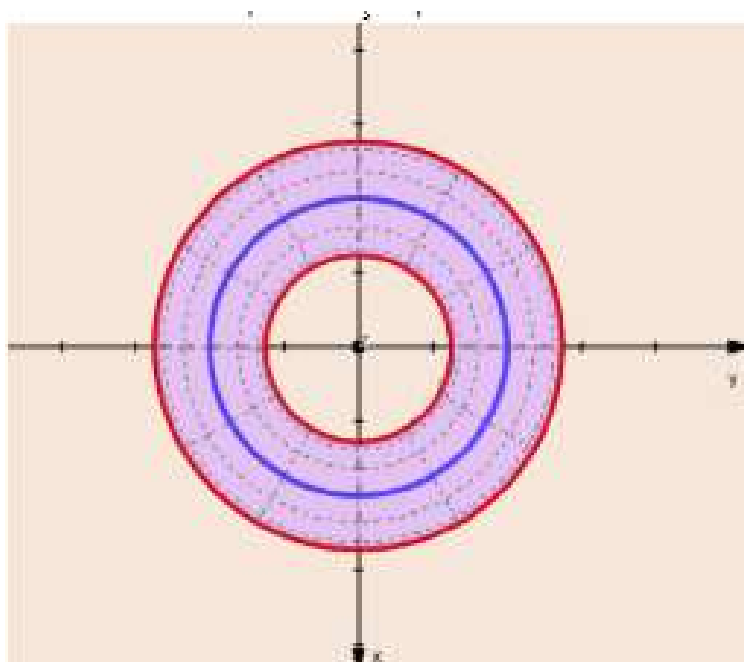
$$a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} \right) + a^2 \left(\frac{y^2}{a^2} \right) = a^2,$$

isto é,

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Assim, a elipse focal reduz-se a uma circunferência centrada na origem e de raio a .

Figura 69 – Linhas de curvatura da representação parametrizada do toro obtidas para $c = 0$.

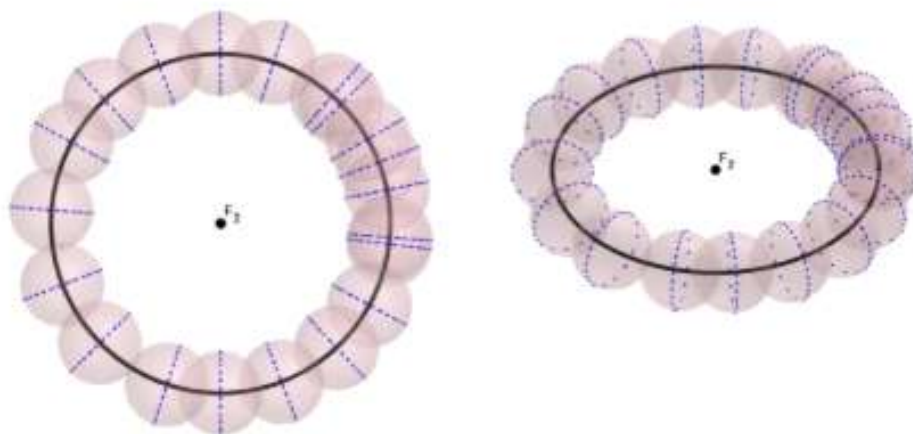


Fonte: Elaboração própria.

Por outro lado, na construção da representação da ciclode por objetos dependentes, quando os centros C_1 e C_2 são coincidentes, os focos da curva diretriz possuem as mesmas coordenadas. Logo, sendo a distância focal igual a zero, a curva diretriz é uma circunferência de raio

$$\frac{R + r}{2}.$$

Figura 70 – Curva diretriz circular da representação sintética da ciclidade na configuração toroidal.



- (a) Vista superior da curva diretriz circular da representação sintética do toro.
 (b) Vista em perspectiva da curva diretriz circular da representação sintética do toro.

Fonte: Elaboração própria.

É importante ressaltar que a representação sintética da ciclidade de Dupin, construída a partir de objetos geométricos dependentes, foi desenvolvida ainda no momento inicial deste estudo. Antes da consolidação das análises apresentadas ao longo deste capítulo, essas construções surgiram como uma forma de experimentar, observar e compreender propriedades que, naquele momento, ainda não estavam suficientemente claras.

Diante das dificuldades encontradas na leitura dos textos originais de Dupin, na literatura consultada e nos materiais disponíveis, especialmente pela escassez de representações visuais manipuláveis, o uso do GeoGebra tornou-se um recurso importante de investigação. A construção dinâmica permitiu aproximar a descrição teórica da superfície de uma experiência visual e geométrica mais concreta, favorecendo a compreensão de relações que, em uma leitura exclusivamente analítica, permaneciam mais abstratas.

A modelagem realizada no ambiente de geometria dinâmica não teve como finalidade produzir apenas uma imagem da ciclidade. Ao contrário, a construção exigiu que os objetos mantivessem entre si relações de dependência coerentes com as propriedades geométricas da superfície. Para isso, foi necessário investigar condições de tangência, relações entre circunferências e esferas, o comportamento das curvas diretrizes e as diferentes configurações morfológicas da família de ciclides de Dupin.

Nesse processo, os erros encontrados durante a construção tiveram papel importante. Em diversos momentos, uma configuração que não se comportava como esperado indicava que alguma propriedade ainda não havia sido compreendida adequadamente. Assim, as dificuldades

técnicas não foram apenas obstáculos operacionais, mas também sinais de que era necessário retornar às definições, rever interpretações e aprofundar o estudo geométrico da superfície.

Ao longo do capítulo, as construções desenvolvidas no GeoGebra passaram a dialogar com a representação parametrizada, com as curvas focais, com as famílias de esferas e com a classificação morfológica das ciclides. Essa articulação permitiu reconhecer, em diferentes abordagens, elementos comuns da ciclidade de Dupin, como as curvas diretrizes, as envoltórias de esferas e as configurações do tipo anel, corno, fuso e toro.

Dessa forma, a geometria dinâmica ocupou um papel metodológico relevante neste estudo. Mais do que ilustrar propriedades previamente conhecidas, ela contribuiu para investigá-las, testá-las e compreendê-las ao longo do processo de construção. A experiência com o GeoGebra mostrou que a manipulação de objetos dependentes pode favorecer a interpretação geométrica das ciclides de Dupin, aproximando descrições clássicas de uma representação visual, dinâmica e exploratória.

As representações construídas neste capítulo fornecem a base geométrica para a análise apresentada no capítulo seguinte, no qual as ciclides de Dupin serão estudadas a partir de elementos da Geometria Diferencial, como curvas coordenadas, vetores tangentes, plano tangente, formas fundamentais e curvaturas.

4 GEOMETRIA DIFERENCIAL APLICADA ÀS CICLIDES

Este capítulo apresenta uma análise da ciclidade de Dupin a partir de elementos da Geometria Diferencial. Após a discussão das parametrizações, das curvas focais, das famílias de esferas, das classificações morfológicas e da representação sintética, passa-se agora ao estudo de propriedades locais da superfície, investigadas por meio de ferramentas diferenciais.

A análise desenvolvida neste capítulo tem como objetivo compreender como a ciclidade se comporta em diferentes regiões, considerando a estrutura induzida pela parametrização. Para isso, são examinados as curvas coordenadas, os vetores tangentes, o plano tangente, o vetor normal, as formas fundamentais e as curvaturas associadas à superfície. Essa abordagem permite relacionar a visualização dinâmica construída no GeoGebra com conceitos clássicos da Geometria Diferencial, mostrando como as variações locais da superfície podem ser interpretadas a partir de seus elementos diferenciais.

4.1 Estrutura diferencial da parametrização

A parametrização da ciclidade de Dupin apresentada nas seções anteriores permite não apenas descrever a superfície globalmente, mas também investigar suas propriedades geométricas locais. Sob a perspectiva da Geometria Diferencial, a superfície pode ser analisada a partir das curvas induzidas pelos parâmetros, dos vetores tangentes associados a essas curvas e das estruturas métricas que deles decorrem.

Seja

$$\psi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

a parametrização da ciclidade. Para cada par de parâmetros (u, v) , obtém-se um ponto da superfície. A variação independente desses parâmetros gera duas famílias naturais de curvas sobre a ciclidade, denominadas curvas coordenadas da parametrização.

Essas curvas constituem a base para a construção dos vetores tangentes, do plano tangente e das formas fundamentais da superfície, permitindo descrever quantitativamente comprimentos, ângulos, áreas e curvaturas.

Curvas coordenadas

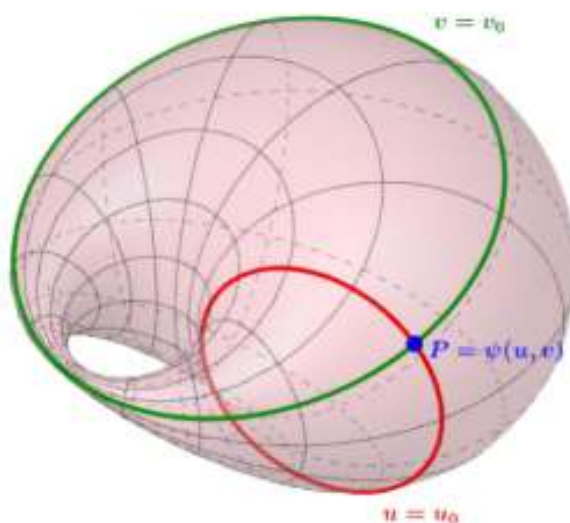
As curvas coordenadas são obtidas mantendo-se um dos parâmetros fixo e permitindo a variação do outro. Quando u permanece constante e v varia, obtém-se uma curva coordenada pertencente à primeira família. De modo análogo, mantendo-se v constante e variando-se u , obtém-se uma curva da segunda família.

A interseção dessas duas curvas determina um ponto da superfície, representado por

$$P = \psi(u, v).$$

Dessa forma, cada ponto regular da ciclode pode ser interpretado como o encontro de duas curvas coordenadas associadas à parametrização.

Figura 71 – Interseção das famílias de curvas coordenadas da ciclode de Dupin. A curva $u = u_0$, em vermelho, e a curva $v = v_0$, em verde, determinam o ponto $P = \psi(u_0, v_0)$, ilustrando a estrutura da malha paramétrica associada à superfície. Cada ponto regular da ciclode é obtido pela interseção de uma curva de cada família, estabelecendo uma correspondência entre os parâmetros da parametrização e os pontos da superfície.



Fonte: Elaboração própria.

A variação contínua dos parâmetros produz uma malha paramétrica sobre a superfície, permitindo visualizar a organização geométrica local da ciclode. Essa malha fornece uma referência natural para o estudo das propriedades diferenciais da superfície, uma vez que as direções tangentes associadas às curvas coordenadas serão utilizadas na construção do plano tangente e das formas fundamentais.

Na construção dinâmica desenvolvida no GeoGebra, as duas famílias de curvas podem ser exploradas simultaneamente por meio dos controles deslizantes associados aos parâmetros u e v . Dessa forma, é possível observar em tempo real a movimentação do ponto $P = \psi(u, v)$ e a variação local da geometria da superfície.

Em configurações com autointerseção, a exploração dinâmica das curvas coordenadas revelam aspectos geométricos que não são imediatamente perceptíveis em uma representação estática da superfície. Em particular, observa-se que determinadas curvas da família $v = v_0$ atravessam a região de autointerseção e passam a ocupar simultaneamente diferentes regiões da superfície.

À medida que o parâmetro d se aproxima de zero, essa distribuição torna-se progressiva-

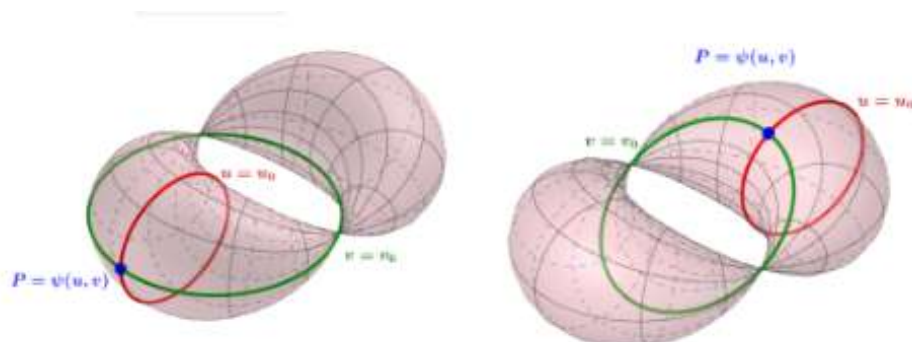
mente mais simétrica em relação ao plano central da construção. Esse comportamento reflete a redução da assimetria longitudinal introduzida por d , já observada na análise morfológica.

As curvas da família $u = u_0$ também sofrem alterações significativas nas proximidades da região singular. Em determinadas posições, sua representação visual aproxima-se de uma curva degenerada na vizinhança da autointerseção, evidenciando a influência da morfologia global da superfície sobre a organização local da malha paramétrica.

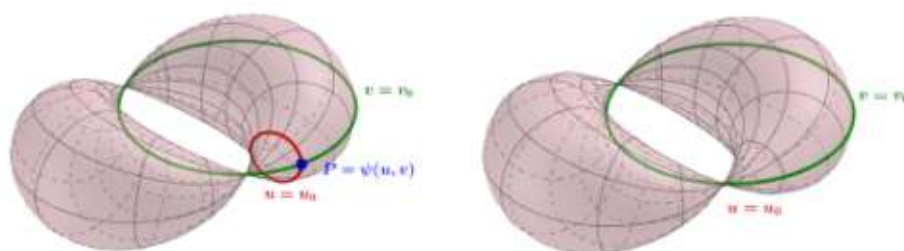
Essas observações ilustram como a parametrização preserva uma descrição contínua da superfície mesmo em configurações geométricas mais complexas. A partir dessa estrutura, torna-se possível avançar para o estudo das direções tangentes associadas às derivadas parciais da parametrização.

A Figura 72 ilustra diferentes posições das curvas coordenadas na configuração de fuso da ciclode de Dupin, deixando claro a continuidade da malha paramétrica mesmo na presença de autointerseção.

Figura 72 – Comportamento das curvas coordenadas na configuração de fusão da ciclidade de Dupin. As imagens mostram diferentes posições das curvas $u = u_0$, em vermelho, e $v = v_0$, em verde, sobre a superfície.



- (a) Curvas coordenadas em uma região regular da superfície, mostrando a interseção entre as famílias $u = u_0$ e $v = v_0$ no ponto $P = \psi(u, v)$.
 (b) Aproximação da curva coordenada $v = v_0$ da região de autointerseção, destacando a continuidade da parametrização durante a transição geométrica da superfície.



- (c) Curva coordenada $u = u_0$ posicionada próxima à região crítica da configuração de fusão.
 (d) Situação limite em que a curva coordenada $u = u_0$ aproxima-se da região de autointerseção; o ponto P foi ocultado para favorecer a visualização da curva coordenada.

Fonte: Elaboração própria.

As curvas coordenadas fornecem uma descrição geométrica natural da superfície parametrizada. Cada ponto regular da ciclidade pode ser identificado pela interseção de duas curvas associadas aos parâmetros u e v , formando uma malha paramétrica sobre a superfície.

A exploração dinâmica mostrou que essa estrutura permanece bem definida mesmo em configurações morfológicas mais complexas, como a ciclidade em fusão. Embora a autointerseção altere significativamente a aparência global da superfície, as curvas coordenadas continuam organizando sua geometria local de maneira contínua.

Além de determinar a posição dos pontos da superfície, essas curvas permitem definir direções privilegiadas associadas à variação dos parâmetros. Essas direções serão utilizadas na construção dos vetores tangentes e do plano tangente da ciclidade, fundamentais para a descrição diferencial da superfície.

4.2 Vetores tangentes associados às curvas coordenadas

As curvas coordenadas introduzidas na subseção anterior fornecem, em cada ponto regular da ciclidade de Dupin, duas direções tangentes naturalmente associadas à parametrização. Essas direções são obtidas pelas derivadas parciais da aplicação

$$\psi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

que definem os vetores

$$\psi_u(u, v) = \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \quad \text{e} \quad \psi_v(u, v) = \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v).$$

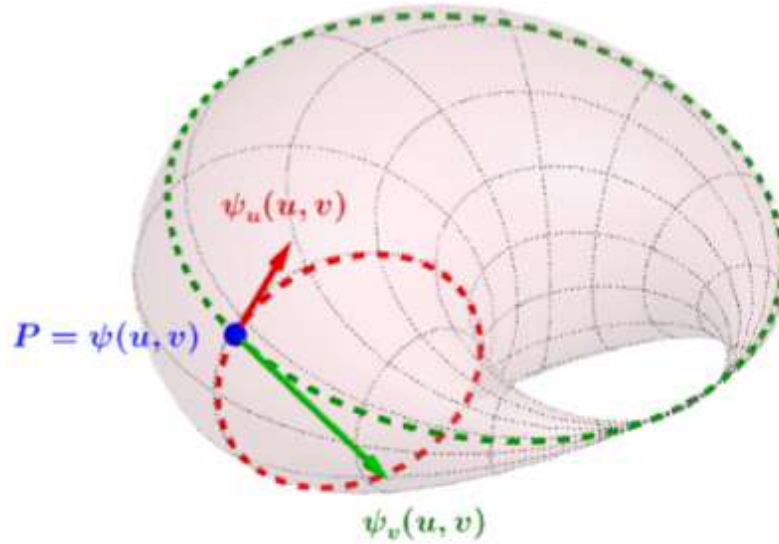
Geometricamente, o vetor $\psi_u(u, v)$ é tangente à curva coordenada obtida pela variação do parâmetro u , mantendo-se v fixo. De modo análogo, o vetor $\psi_v(u, v)$ é tangente à curva gerada pela variação de v , mantendo-se u fixo.

Como observado na análise das curvas coordenadas, cada ponto regular da superfície pode ser interpretado como a interseção de uma curva de cada família. Os vetores tangentes associados a essas curvas fornecem uma descrição local da geometria da ciclidade e constituem a base para a construção do plano tangente e das formas fundamentais.

Na construção dinâmica desenvolvida no GeoGebra, os vetores tangentes podem ser visualizados simultaneamente às curvas coordenadas, permitindo acompanhar como sua direção e magnitude variam ao longo da superfície. Em regiões onde a parametrização sofre maior deformação, observa-se uma alteração significativa no comprimento relativo desses vetores, refletindo diretamente a geometria local da ciclidade.

A Figura 73 ilustra os vetores tangentes associados às curvas coordenadas da ciclidade de Dupin. O vetor $\psi_u(u, v)$ é tangente à curva coordenada obtida pela variação de u , enquanto o vetor $\psi_v(u, v)$ é tangente à curva coordenada obtida pela variação de v .

Figura 73 – Vetores tangentes associados às curvas coordenadas da ciclidade de Dupin. O vetor $\psi_u(u, v)$ é tangente à curva coordenada obtida pela variação do parâmetro u , enquanto o vetor $\psi_v(u, v)$ é tangente à curva gerada pela variação de v . As curvas coordenadas são representadas em linhas pontilhadas, ilustrando a correspondência entre cada família de curvas e seu respectivo vetor tangente.



Fonte: Elaboração própria.

4.3 Plano tangente e vetor normal

Os vetores tangentes associados às curvas coordenadas fornecem duas direções independentes em cada ponto regular da ciclidade de Dupin. Essas direções geram o plano tangente à superfície, que pode ser interpretado como a melhor aproximação linear local da superfície na vizinhança do ponto considerado.

Seja

$$P = \psi(u, v)$$

um ponto regular da superfície parametrizada. O plano tangente no ponto P é determinado pelos vetores tangentes $\psi_u(u, v)$ e $\psi_v(u, v)$, podendo ser escrito como

$$T_P S = P + \langle \psi_u(u, v), \psi_v(u, v) \rangle.$$

Equivalentemente, um ponto Q pertence ao plano tangente em P se pode ser escrito na forma

$$Q = P + \lambda \psi_u(u, v) + \mu \psi_v(u, v),$$

com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Geometricamente, esse plano contém as direções tangentes às curvas coordenadas que passam por P . Em uma vizinhança suficientemente pequena desse ponto, a superfície e o

plano tangente tornam-se praticamente indistinguíveis, destacando o papel desse plano como aproximação local da geometria da superfície.

O vetor normal à superfície no ponto P é obtido pelo produto vetorial entre os vetores tangentes:

$$N(u, v) = \psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v).$$

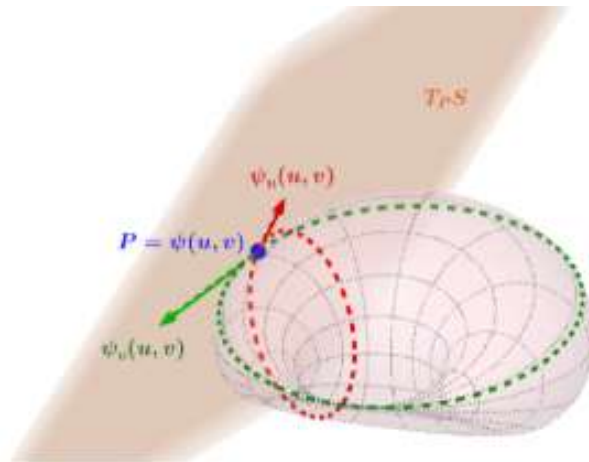
Quando $N(u, v) \neq 0$, o ponto P é regular e o vetor normal unitário pode ser definido por

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v)}{\|\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v)\|}.$$

Assim, enquanto os vetores ψ_u e ψ_v descrevem as direções tangentes à superfície, o vetor normal fornece uma direção perpendicular ao plano tangente. Essa estrutura será fundamental para a análise das formas fundamentais e das curvaturas da superfície.

A Figura 74 ilustra o plano tangente à superfície de Dupin em um ponto regular da superfície, gerado pelos vetores tangentes associados às curvas coordenadas.

Figura 74 – Plano tangente à superfície de Dupin no ponto $P = \psi(u, v)$. O plano tangente $T_P S$ é gerado pelos vetores tangentes $\psi_u(u, v)$ e $\psi_v(u, v)$, associados às curvas coordenadas que se intersectam no ponto considerado.



Fonte: Elaboração própria.

A partir dos vetores tangentes, define-se também uma direção perpendicular à superfície por meio do produto vetorial entre $\psi_u(u, v)$ e $\psi_v(u, v)$. Após a normalização desse vetor, obtém-se o vetor normal unitário, dado por

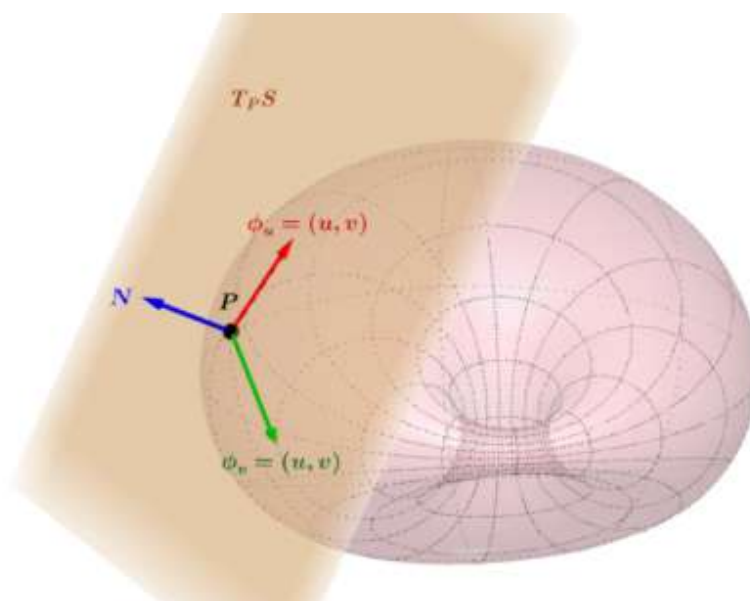
$$N(u, v) = \frac{\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v)}{\|\psi_u(u, v) \times \psi_v(u, v)\|}.$$

O vetor normal unitário fornece a orientação local da superfície e desempenha papel fundamental na descrição de suas propriedades geométricas. Enquanto os vetores tangentes

descrevem direções contidas na superfície, o vetor normal registra como essa superfície está orientada no espaço tridimensional.

A Figura 75 representa o vetor normal unitário à ciclode de Dupin em um ponto regular da superfície. Esse vetor é perpendicular ao plano tangente e é obtido a partir do produto vetorial entre os vetores tangentes associados às curvas coordenadas.

Figura 75 – Vetor normal unitário à ciclode de Dupin. O vetor $n(u, v)$ é obtido pela normalização do produto vetorial entre os vetores tangentes $\psi_u(u, v)$ e $\psi_v(u, v)$, sendo perpendicular ao plano tangente $T_P S$ no ponto $P = \psi(u, v)$.



Fonte: Elaboração própria.

Na construção dinâmica desenvolvida no GeoGebra, a visualização simultânea dos vetores tangentes, do plano tangente e do vetor normal permite acompanhar a variação local da geometria da ciclode. Em regiões onde a superfície apresenta maior curvatura, observa-se uma alteração mais acentuada na orientação do vetor normal, aspecto que será fundamental para o estudo da Segunda Forma Fundamental e das curvaturas principais.

A visualização conjunta desses elementos evidencia a estrutura diferencial da superfície: os vetores tangentes descrevem as direções possíveis de deslocamento sobre a ciclode, o plano tangente fornece sua aproximação linear local e o vetor normal estabelece a referência necessária para a análise de sua curvatura no espaço.

4.4 Primeira Forma Fundamental

A partir dos vetores tangentes associados às curvas coordenadas, é possível introduzir uma das estruturas centrais da Geometria Diferencial de superfícies: a Primeira Forma Fundamental. Essa forma quadrática descreve a geometria intrínseca da superfície, permitindo medir

comprimentos, ângulos e áreas diretamente a partir da parametrização, independentemente de como a superfície está posicionada no espaço tridimensional.

Seja

$$\psi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

uma parametrização regular de uma superfície. Os vetores tangentes $\psi_u(u, v)$ e $\psi_v(u, v)$ geram o plano tangente no ponto $P = \psi(u, v)$ e determinam os coeficientes métricos

$$E = \langle \psi_u, \psi_u \rangle,$$

$$F = \langle \psi_u, \psi_v \rangle,$$

$$G = \langle \psi_v, \psi_v \rangle.$$

Geometricamente, os coeficientes E e G representam os quadrados dos comprimentos dos vetores tangentes associados às direções coordenadas, enquanto F descreve a relação angular entre esses vetores. Esses coeficientes permitem definir a Primeira Forma Fundamental por

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Essa expressão fornece a métrica induzida pela parametrização, constituindo uma ferramenta fundamental para a análise das propriedades geométricas internas da superfície.

Uma interpretação geométrica particularmente útil da Primeira Forma Fundamental é obtida por meio do paralelogramo tangente gerado pelos vetores $\psi_u(u, v)$ e $\psi_v(u, v)$. A área desse paralelogramo é dada por

$$\|\psi_u \times \psi_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Assim, o elemento de área associado à parametrização pode ser escrito como

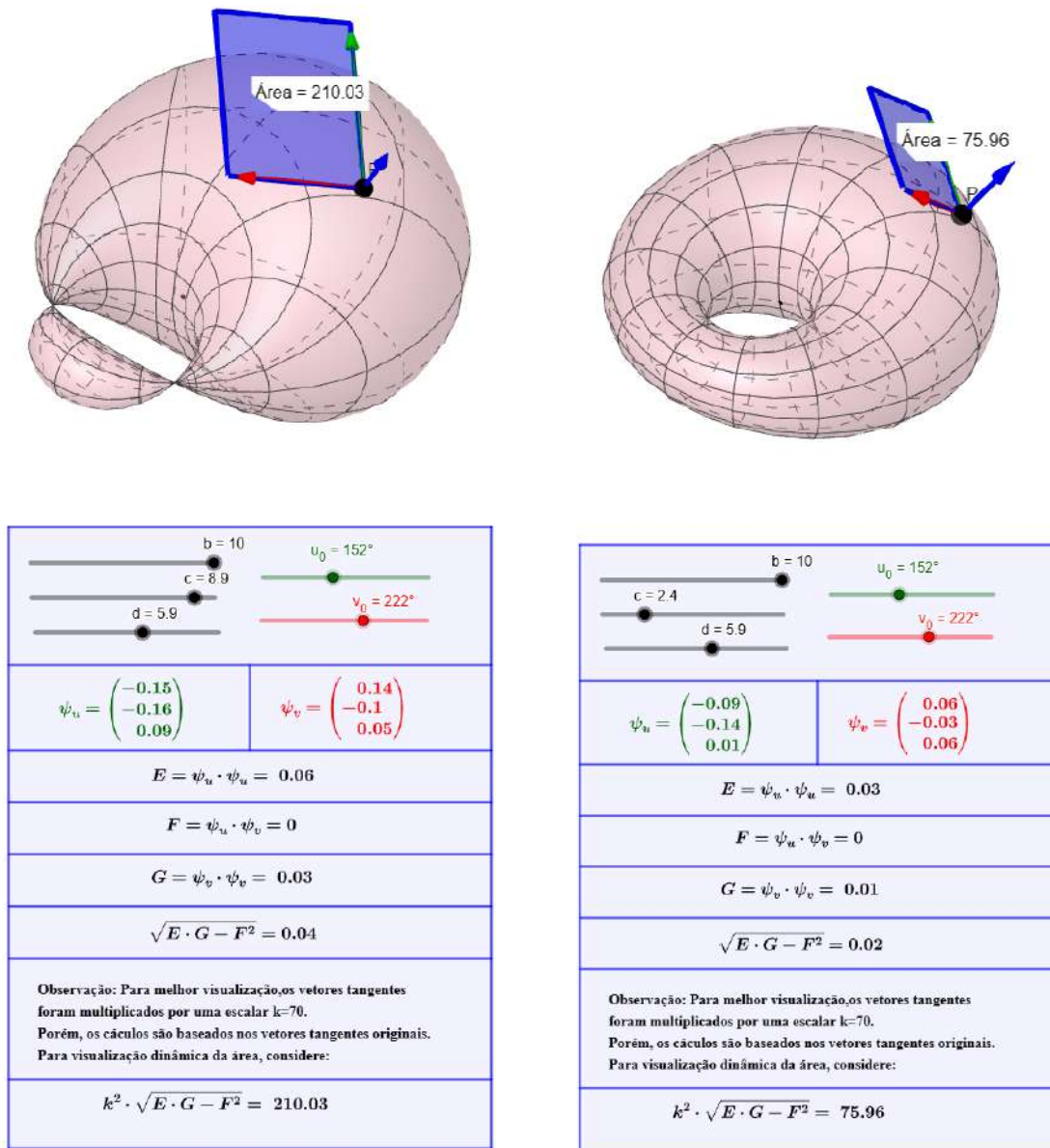
$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Desse modo, os coeficientes E , F e G determinam a geometria métrica local da superfície. Enquanto E e G estão associados aos comprimentos dos vetores tangentes correspondentes às direções coordenadas, o coeficiente F descreve a relação angular entre essas direções. Em conjunto, esses coeficientes caracterizam o paralelogramo tangente gerado por $\psi_u(u, v)$ e $\psi_v(u, v)$, fornecendo uma interpretação geométrica concreta da Primeira Forma Fundamental.

Na construção dinâmica desenvolvida no GeoGebra, o paralelogramo tangente pode ser visualizado simultaneamente à superfície parametrizada, permitindo acompanhar como suas dimensões e sua área variam em função das alterações dos parâmetros geométricos da ciclide. Essa visualização explicita que modificações na parametrização produzem alterações locais na métrica da superfície, refletidas diretamente nos coeficientes métricos e no elemento de área.

Para ilustrar esse comportamento, a Figura 76 apresenta duas configurações distintas da ciclidade de Dupin obtidas pela variação do parâmetro c , mantendo fixos os controles u_0 e v_0 , que determinam o ponto $P = \psi(u_0, v_0)$. A comparação permite observar como a geometria local da superfície influencia a área do paralelogramo tangente associado ao mesmo ponto paramétrico.

Figura 76 – Comparação da Primeira Forma Fundamental em duas configurações da ciclidade de Dupin obtidas pela variação do parâmetro c , mantendo fixos os controles u_0 e v_0 , que determinam o ponto $P = \psi(u_0, v_0)$.



(a) Configuração com $c = 8,9$, na qual o paralelogramo tangente apresenta maior área associada à métrica local da superfície.

(b) Configuração com $c = 2,4$, indicando a redução da área do paralelogramo tangente para o mesmo ponto paramétrico.

Fonte: Elaboração própria.

A Figura 76 indica que a Primeira Forma Fundamental está diretamente relacionada à geometria local induzida pela parametrização da superfície. Embora os controles u_0 e v_0 permaneçam fixos nas duas configurações apresentadas,¹ a variação do parâmetro geométrico c produz alterações nos vetores tangentes e, conseqüentemente, nos coeficientes métricos E , F e G .

Observa-se que a área do paralelogramo tangente, determinada pelo fator $\sqrt{EG - F^2}$, sofre uma redução significativa quando o parâmetro c passa de 8,9 para 2,4. Na primeira configuração, a área aproximada do paralelogramo é de 210,03 unidades quadradas, enquanto, na segunda configuração, essa área é reduzida para aproximadamente 75,96 unidades quadradas. Esse comportamento indica que a alteração dos parâmetros geométricos da ciclode modifica a métrica local da superfície, mesmo quando o mesmo ponto paramétrico é considerado.

A construção dinâmica permite visualizar que a Primeira Forma Fundamental não depende apenas da posição do ponto sobre a superfície, mas também da geometria induzida pela parametrização adotada. Dessa forma, os coeficientes métricos fornecem informações essenciais sobre comprimentos, ângulos e áreas, constituindo a base para o estudo das propriedades intrínsecas da superfície.

Além disso, a comparação entre as duas configurações destaca que diferentes membros da família das ciclides de Dupin podem apresentar métricas locais distintas. Essa observação será importante na sequência deste trabalho, quando forem introduzidas a Segunda Forma Fundamental e as curvaturas principais, responsáveis por descrever como essas superfícies se comportam no espaço tridimensional.

4.5 Segunda Forma Fundamental

Após a análise da Primeira Forma Fundamental, que descreve a métrica induzida pela parametrização, passa-se ao estudo da Segunda Forma Fundamental. Essa estrutura permite investigar como a superfície se curva no espaço tridimensional em relação ao vetor normal unitário.

Seja $\psi(u, v)$ uma parametrização regular da ciclode de Dupin e seja $\mathbf{n}(u, v)$ o vetor normal unitário à superfície. Os coeficientes da Segunda Forma Fundamental são definidos por

$$e = \langle \psi_{uu}, \mathbf{n} \rangle,$$

$$f = \langle \psi_{uv}, \mathbf{n} \rangle,$$

$$g = \langle \psi_{vv}, \mathbf{n} \rangle.$$

A partir desses coeficientes, a Segunda Forma Fundamental é dada por

$$II = e du^2 + 2f du dv + g dv^2.$$

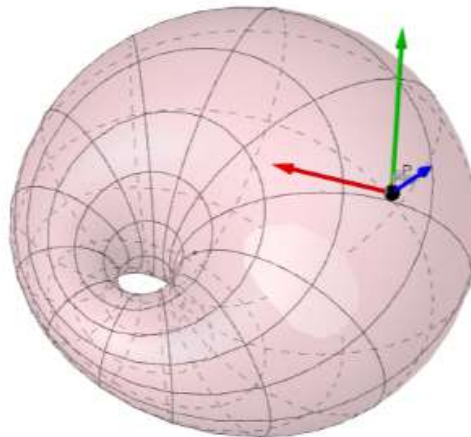
¹ Nas imagens geradas no GeoGebra, os controles u_0 e v_0 aparecem em graus apenas por conveniência da interface visual da construção.

Enquanto a Primeira Forma Fundamental descreve comprimentos, ângulos e áreas sobre a superfície, a Segunda Forma Fundamental registra como a superfície se afasta de seu plano tangente em diferentes direções. Desse modo, ela está diretamente relacionada à variação do vetor normal e constitui a base para o estudo das curvaturas principais.

Na construção desenvolvida no GeoGebra, os coeficientes e , f e g foram calculados dinamicamente a partir das derivadas parciais de segunda ordem da parametrização. Isso permitiu acompanhar as modificações da forma quadrática II sob diferentes configurações da ciclode.

Inicialmente, foram realizadas alterações nos parâmetros geométricos da ciclode, mantendo-se fixo o ponto paramétrico determinado pelos controles u_0 e v_0 . Nas imagens geradas pela construção, esses controles aparecem com valores próximos de $u_0 = 152^\circ$ e $v_0 = 224^\circ$, apenas por conveniência da interface visual do GeoGebra. O objetivo dessa etapa foi investigar a influência da geometria global da superfície sobre os coeficientes da Segunda Forma Fundamental em um mesmo ponto paramétrico.

Figura 77 – Configuração da ciclode de Dupin para análise da Segunda Forma Fundamental.



(a) Representação da superfície parametrizada com os vetores tangentes e o vetor normal no ponto considerado, para a configuração $b = 9$, $c = 4,5$, $d = 7,9$, $u_0 \approx 152^\circ$ e $v_0 \approx 224^\circ$.

	$\psi_u = \begin{pmatrix} -0.1145165879 \\ -0.1551621016 \\ 0.0397749532 \end{pmatrix}$	$\psi_v = \begin{pmatrix} 0.1138043181 \\ -0.0676531638 \\ 0.0662476014 \end{pmatrix}$	$N = \begin{pmatrix} -0.2603124188 \\ 0.4155347271 \\ 0.8715321768 \end{pmatrix}$
	$\phi_{uu} = \begin{pmatrix} 0.0017187553 \\ -0.0019183292 \\ -0.0005969739 \end{pmatrix}$	$\phi_{uv} = \begin{pmatrix} 0.0012782573 \\ 0.0008818618 \\ -0.0000386652 \end{pmatrix}$	$\phi_{vv} = \begin{pmatrix} 0.0002779014 \\ -0.0001652039 \\ -0.0019461837 \end{pmatrix}$

(b) Painel com os controles da construção, os vetores tangentes, o vetor normal unitário e as derivadas parciais de segunda ordem da parametrização.

Figura 77 – Continuação.

$E = \psi_u \cdot \psi_u = 0.0478546136$
$F = \psi_u \cdot \psi_v = 0.0001257197$
$G = \psi_v \cdot \psi_v = 0.0323581597$
$e = \psi_{uu} \cdot N = -0.0017648277$
$f = \phi_{uv} \cdot N = 0$
$g = \phi_{vv} \cdot N = -0.0018371509$
$I = E \, du^2 + F \, du \cdot dv + G \, dv^2 = 0.0000060888$
$II = e \, du^2 + f \, du \cdot dv + g \, dv^2 = -0.0000003602$

(c) Valores numéricos dos coeficientes das Primeira e Segunda Formas Fundamentais obtidos para essa configuração.

Fonte: Elaboração própria.

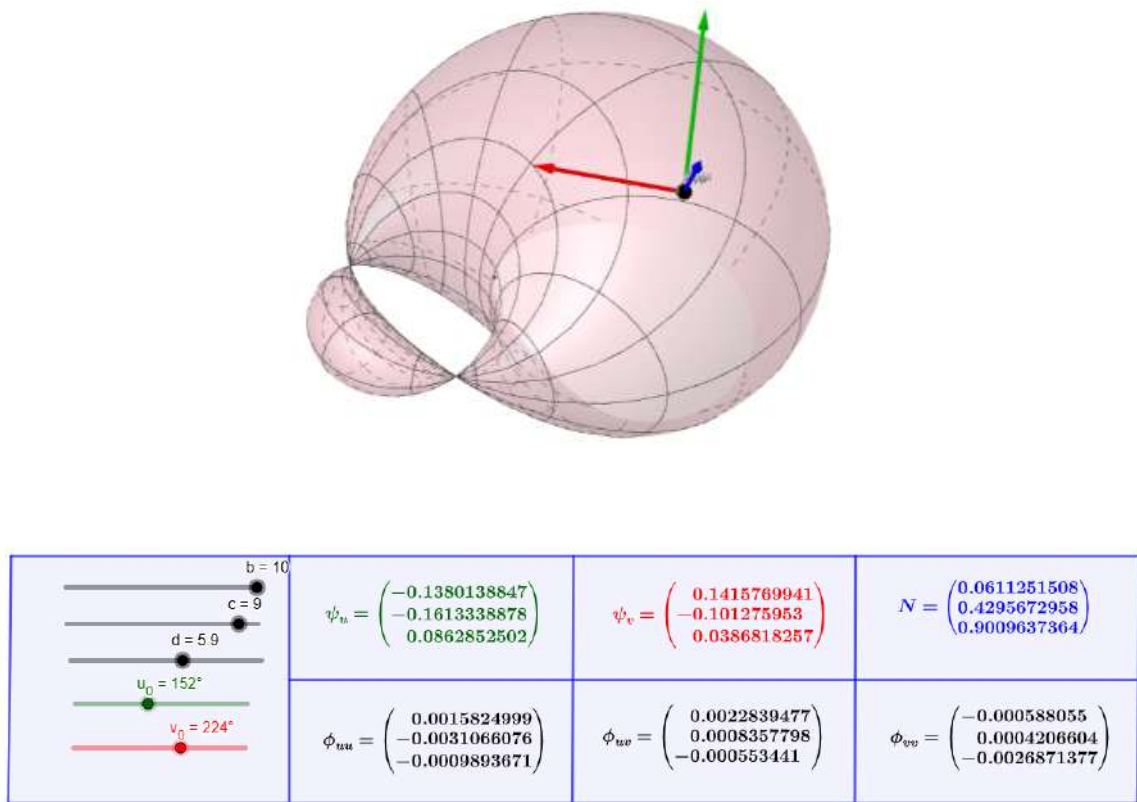
A Figura 77 apresenta a configuração inicial adotada como referência para as análises posteriores. Nessa situação, os coeficientes calculados estabelecem um padrão inicial para o comportamento local da superfície, servindo como base para as comparações realizadas nas figuras subsequentes.

Além dos coeficientes da Segunda Forma Fundamental, a construção permite visualizar simultaneamente os vetores associados às derivadas parciais de segunda ordem da parametrização, representados por ψ_{uu} , ψ_{uv} e ψ_{vv} . Enquanto os vetores tangentes ψ_u e ψ_v descrevem direções locais sobre a superfície, as derivadas de segunda ordem fornecem informações sobre a variação dessas direções ao longo da parametrização.

Dessa forma, a visualização conjunta desses elementos estabelece uma conexão direta entre os aspectos algébricos da parametrização e os coeficientes utilizados na construção da forma quadrática II .

A comparação entre as Figuras 77 e 78 mostra que a alteração dos parâmetros globais da ciclode modifica os coeficientes da Segunda Forma Fundamental, mesmo quando o ponto paramétrico analisado permanece praticamente fixo. Na configuração inicial, com $b = 9$, $c = 4,5$ e $d = 7,9$, obtêm-se determinados valores para os coeficientes e , f e g . Ao modificar a geometria

Figura 78 – Influência da alteração dos parâmetros globais sobre a Segunda Forma Fundamental da ciclidade de Dupin, mantendo fixos os controles u_0 e v_0 .



(a) Configuração da superfície parametrizada com os vetores tangentes, o vetor normal unitário e as derivadas parciais de segunda ordem, para $b = 10$, $c = 9$, $d = 5,9$, $u_0 \approx 152^\circ$ e $v_0 \approx 224^\circ$.

$E = \psi_u \cdot \psi_u = 0.0478546136$
$F = \psi_u \cdot \psi_v = 0.0001257197$
$G = \psi_v \cdot \psi_v = 0.0323581597$
$e = \psi_{uu} \cdot N = -0.0021291504$
$f = \phi_{uv} \cdot N = 0$
$g = \phi_{vv} \cdot N = -0.0022762566$
$I = E \, du^2 + F \, du \cdot dv + G \, dv^2 = 0.0000084593$
$II = e \, du^2 + f \, du \cdot dv + g \, dv^2 = -0.0000004405$

(b) Valores numéricos dos coeficientes das Primeira e Segunda Formas Fundamentais obtidos para essa configuração da superfície.

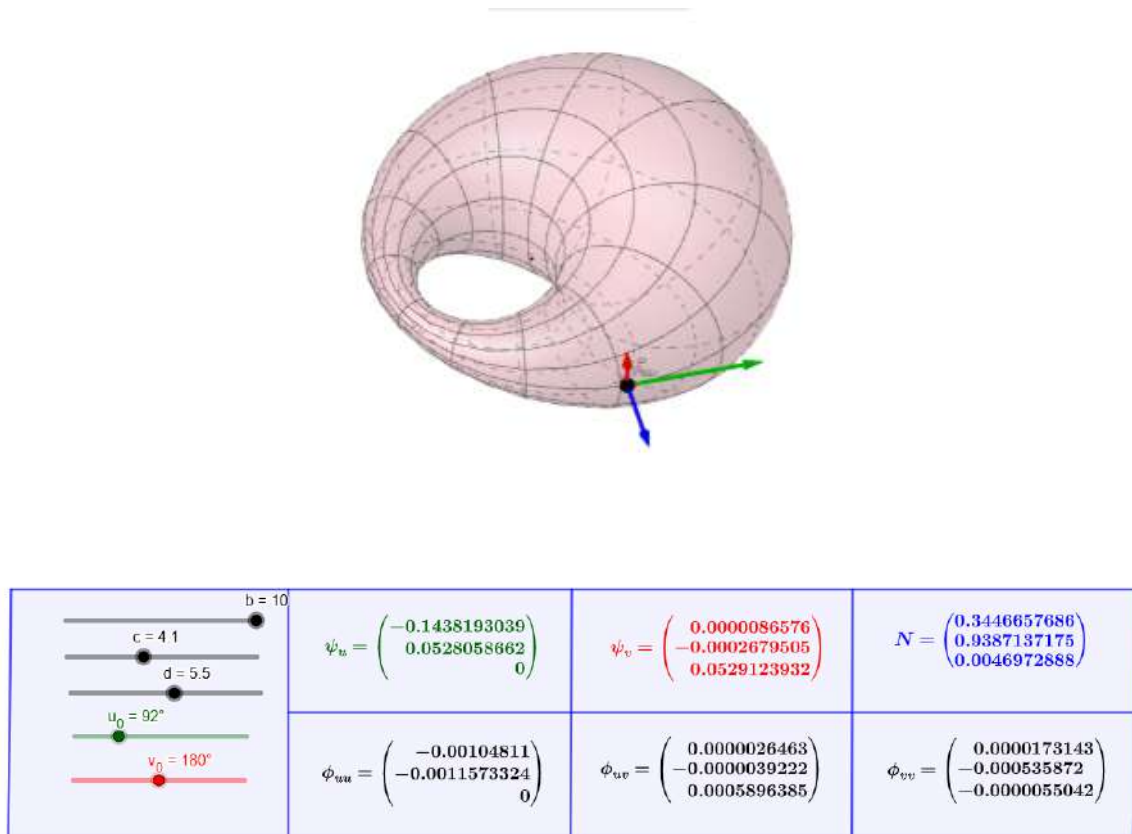
Fonte: Elaboração própria.

da superfície para $b = 10$, $c = 9$ e $d = 5,9$, mantendo-se os mesmos controles u_0 e v_0 , observa-se uma variação nesses coeficientes, indicando que a curvatura local registrada pela Segunda Forma Fundamental é sensível à estrutura global da ciclode.

Esse resultado mostra que, embora a análise seja feita em um mesmo ponto paramétrico, a mudança na forma da superfície altera a maneira como ela se afasta do plano tangente naquela região. Assim, a Segunda Forma Fundamental permite visualizar, de forma quantitativa, como modificações nos parâmetros geométricos da ciclode influenciam sua resposta local no espaço tridimensional.

Concluída a análise da influência dos parâmetros globais, passou-se a investigar o efeito da posição do ponto sobre uma mesma ciclode. Para isso, os parâmetros da superfície foram mantidos fixos em $b = 10$, $c = 4,1$ e $d = 5,5$, variando-se apenas as coordenadas paramétricas do ponto analisado.

Figura 79 – Influência da posição do ponto parametrizado sobre a Segunda Forma Fundamental.



(a) Representação da superfície parametrizada e dos elementos diferenciais associados ao ponto determinado por $u_0 = 92^\circ$ e $v_0 = 180^\circ$, mantendo fixos os parâmetros $b = 10$, $c = 4,1$ e $d = 5,5$.

Figura 79 – Continuação.

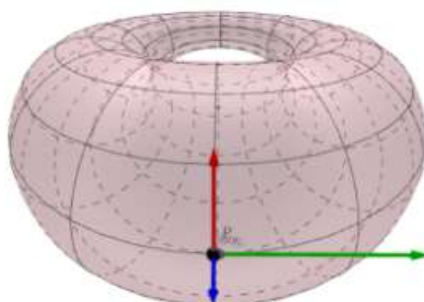
$E = \psi_u \cdot \psi_u = 0.0478546136$
$F = \psi_u \cdot \psi_v = 0.0001257197$
$G = \psi_v \cdot \psi_v = 0.0323581597$
$e = \psi_{uu} \cdot N = -0.0014476514$
$f = \phi_{uv} \cdot N = 0$
$g = \phi_{vv} \cdot N = -0.0004970886$
$I = E du^2 + F du \cdot dv + G dv^2 = 0.0000026241$
$II = e du^2 + f du \cdot dv + g dv^2 = -0.0000001945$

(b) Coeficientes calculados para a região considerada da superfície.

Fonte: Elaboração própria.

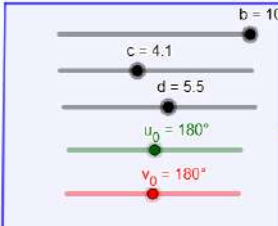
Na Figura 79, o ponto analisado é deslocado para a posição determinada por $u_0 = 92^\circ$ e $v_0 = 180^\circ$, mantendo-se inalterada a configuração da ciclidade. Observa-se que os coeficientes calculados assumem valores distintos daqueles obtidos nas configurações anteriores, revelando que diferentes regiões de uma mesma superfície podem apresentar comportamentos geométricos locais diferentes.

Figura 80 – Avaliação da geometria local da ciclidade de Dupin para o ponto determinado por $u_0 = 180^\circ$ e $v_0 = 180^\circ$.



(a) Representação da superfície e do referencial local no ponto considerado, mantendo fixos os parâmetros $b = 10$, $c = 4,1$ e $d = 5,5$.

Figura 80 – Continuação.

	$\psi_u = \begin{pmatrix} 0.0018120966 \\ -0.2431040467 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\psi_v = \begin{pmatrix} 0.0010667322 \\ 0 \\ 0.1431087693 \end{pmatrix}$	$N = \begin{pmatrix} -0.9999444426 \\ -0.0074535817 \\ 0.0074535817 \end{pmatrix}$
	$\phi_{uu} = \begin{pmatrix} 0.0036233475 \\ 0.0000688779 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\phi_{uv} = \begin{pmatrix} -0.0000001413 \\ 0.000011528 \\ -0.0000074289 \end{pmatrix}$	$\phi_{vv} = \begin{pmatrix} 0.0021329665 \\ 0 \\ -0.0000405465 \end{pmatrix}$

(b) Painel com os controles da construção, os vetores tangentes, o vetor normal unitário e as derivadas parciais de segunda ordem da parametrização.

$E = \psi_u \cdot \psi_u = 0.0478546136$
$F = \psi_u \cdot \psi_v = 0.0001257197$
$G = \psi_v \cdot \psi_v = 0.0323581597$
$e = \psi_{uu} \cdot N = -0.0036236596$
$f = \phi_{uv} \cdot N = 0$
$g = \phi_{vv} \cdot N = -0.0021331503$
$I = E du^2 + F du \cdot dv + G dv^2 = 0.0000079588$
$II = e du^2 + f du \cdot dv + g dv^2 = -0.0000005757$

(c) Valores numéricos dos coeficientes das Primeira e Segunda Formas Fundamentais obtidos nessa posição.

Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 80, o ponto analisado é deslocado para a posição determinada por $u_0 = 180^\circ$ e $v_0 = 180^\circ$, mantendo-se a mesma configuração da ciclode considerada anteriormente. A comparação com a Figura 79 deixa evidente que a simples variação da posição do ponto sobre a superfície já produz alterações nos coeficientes da Segunda Forma Fundamental.

Esse resultado reforça o caráter local dessa forma quadrática: mesmo sem modificar os parâmetros globais da ciclode, diferentes regiões da superfície podem apresentar comportamentos geométricos distintos em relação ao plano tangente e ao vetor normal.

Dessa forma, a análise realizada mostra que a Segunda Forma Fundamental registra a

variação local da superfície em relação ao plano tangente e ao vetor normal. Seus coeficientes dependem tanto da configuração global da ciclide quanto da posição do ponto analisado. A partir dessa estrutura, torna-se possível avançar para o estudo das curvaturas principais, que descrevem de modo mais direto as direções de maior e menor curvatura da superfície.

4.6 Curvatura normal

A curvatura normal constitui uma das primeiras medidas utilizadas para quantificar o comportamento local de uma superfície em relação ao seu plano tangente. Diferentemente da Primeira Forma Fundamental, que descreve propriedades intrínsecas associadas a comprimentos, ângulos e áreas, e da Segunda Forma Fundamental, que mede a variação da superfície em relação ao vetor normal unitário, a curvatura normal combina ambas as estruturas em uma única quantidade geométrica.

Para uma direção tangente arbitrária, determinada pelos incrementos diferenciais du e dv , a curvatura normal é definida por

$$k_n = \frac{II}{I},$$

ou, de forma equivalente,

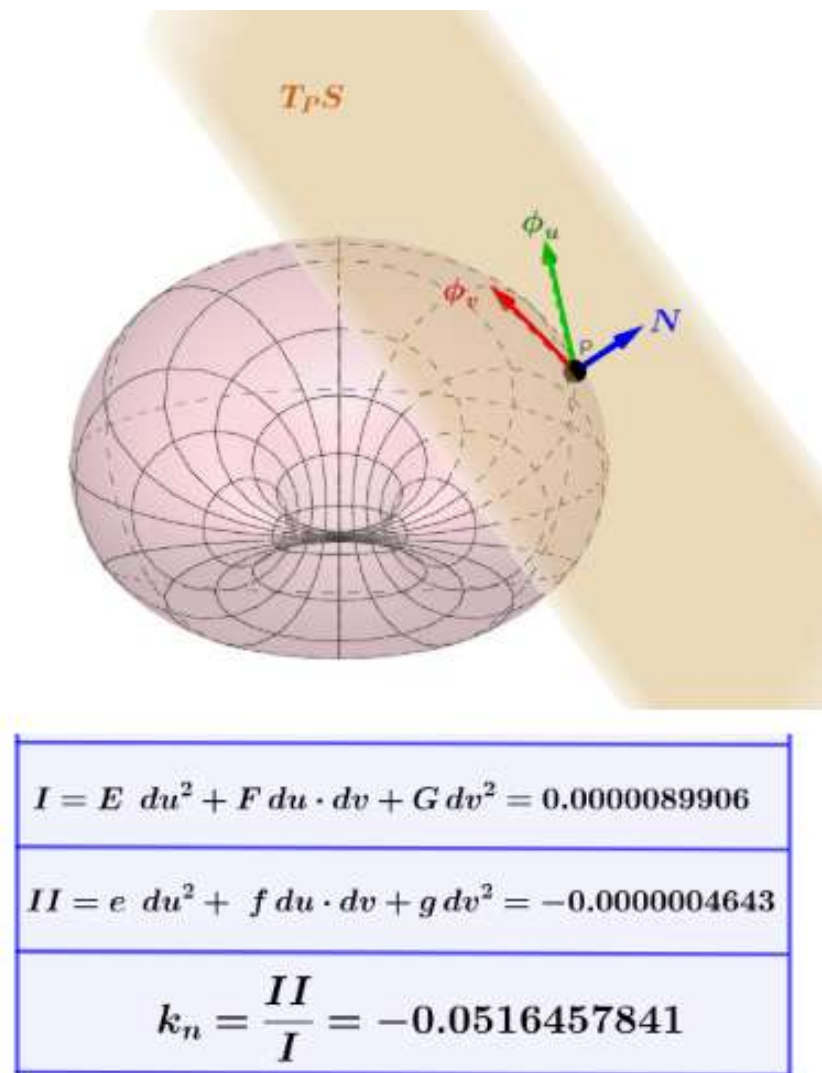
$$k_n = \frac{e du^2 + 2f du dv + g dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}.$$

Essa expressão mostra que a curvatura normal depende simultaneamente dos coeficientes da Primeira e da Segunda Formas Fundamentais. Geometricamente, essa razão fornece uma medida da intensidade com que a superfície se curva em uma direção tangente específica, relacionando a variação normal da superfície ao comprimento medido nessa mesma direção.

Diferentemente da curvatura gaussiana e da curvatura média, que são associadas ao ponto da superfície, a curvatura normal depende também da direção considerada. Assim, em um mesmo ponto da ciclide de Dupin, diferentes direções tangentes podem produzir diferentes valores para k_n , mostrando que a superfície não se curva de maneira uniforme em todas as direções.

A Figura 81 apresenta uma interpretação geométrica da curvatura normal em uma região da ciclide de Dupin. Nessa visualização, o valor de k_n é obtido pela razão entre a Segunda e a Primeira Formas Fundamentais na direção considerada.

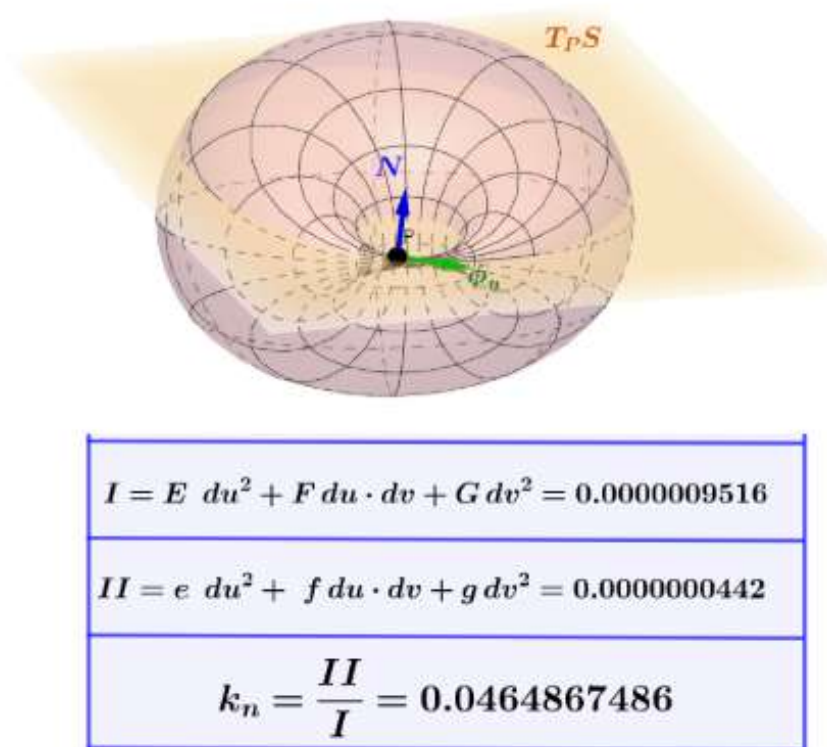
Figura 81 – Configuração local da ciclode de Dupin em uma região exterior da superfície, destacando o plano tangente $T_P S$, os vetores tangentes ψ_u e ψ_v , o vetor normal unitário n e o valor da curvatura normal k_n .



Fonte: Elaboração própria.

A Figura 81 apresenta uma configuração local da ciclidade de Dupin, destacando o ponto parametrizado, o plano tangente, os vetores tangentes e o vetor normal unitário. Esses elementos constituem a base geométrica necessária para a definição da curvatura normal, uma vez que essa medida descreve o comportamento da superfície em relação a uma direção tangente específica no ponto considerado.

Figura 82 – Configuração local da ciclidade de Dupin em uma região interna do anel, destacando o plano tangente $T_P S$, os vetores tangentes ψ_u e ψ_v , o vetor normal unitário n e o valor da curvatura normal k_n .



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 82, observa-se uma segunda região da superfície, indicando que a orientação do plano tangente e do vetor normal varia conforme a posição analisada. Consequentemente, a resposta geométrica associada à curvatura normal também pode assumir comportamentos distintos ao longo da ciclidade, refletindo as particularidades locais da superfície.

A importância da curvatura normal reside no fato de que suas variações permitem identificar direções privilegiadas sobre a superfície. Em particular, os valores máximo e mínimo assumidos por k_n em um ponto correspondem às curvaturas principais da superfície. Dessa forma, a curvatura normal estabelece uma ligação direta entre as formas fundamentais e as curvaturas principais, que serão analisadas nas subseções posteriores.

4.7 Curvatura gaussiana

A curvatura gaussiana constitui uma das grandezas fundamentais da Geometria Diferencial, sendo responsável por descrever o comportamento geométrico local de uma superfície a partir da interação entre suas curvaturas principais. Introduzida por Carl Friedrich Gauss, essa curvatura pode ser obtida diretamente por meio dos coeficientes da Primeira e da Segunda Formas Fundamentais através da expressão

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

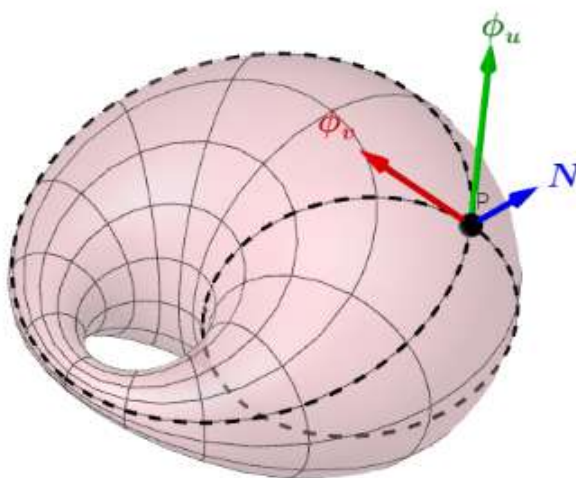
Alternativamente, quando as curvaturas principais são conhecidas, a curvatura gaussiana pode ser interpretada como o produto

$$K = k_1 \cdot k_2.$$

Essa relação fornece uma interpretação geométrica particularmente importante, pois o sinal de K depende diretamente dos sinais das curvaturas principais. Assim, diferentes regiões da mesma superfície podem apresentar comportamentos geométricos distintos, permitindo classificar localmente a geometria da superfície.

Quando as curvaturas principais possuem o mesmo sinal, a curvatura gaussiana é positiva. Nesse caso, a superfície apresenta comportamento local semelhante ao de uma esfera ou de uma concavidade uniforme, curvando-se no mesmo sentido ao longo das duas direções principais.

Figura 83 – Região elíptica da ciclode de Dupin caracterizada por curvatura gaussiana positiva, com $K > 0$ e curvaturas principais de mesmo sinal.



(a) Região da superfície em que as curvaturas principais possuem o mesmo sinal, resultando em curvatura gaussiana positiva.

Figura 83 – Continuação.

$K = \frac{e \cdot g - f^2}{E \cdot G - F^2} = 0.0041999069$
$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} = -0.0495709264$
$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} = -0.0847252053$

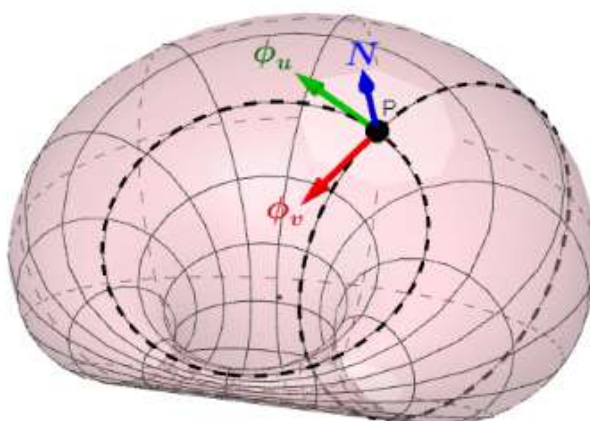
(b) Valores numéricos da curvatura gaussiana e das curvaturas principais associados à região analisada.

Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 83, observa-se uma região da ciclidade de Dupin em que ambas as curvaturas principais apresentam o mesmo sinal. Consequentemente, o produto $k_1 \cdot k_2$ assume valor positivo, produzindo uma curvatura gaussiana positiva. Geometricamente, essa configuração caracteriza uma região elíptica da superfície, na qual o comportamento local se aproxima daquele observado em superfícies esféricas.

Por outro lado, quando as curvaturas principais apresentam sinais opostos, a curvatura gaussiana torna-se negativa. Nessa situação, a superfície curva-se em sentidos contrários ao longo das duas direções principais, produzindo um comportamento geométrico semelhante ao de uma sela.

Figura 84 – Região hiperbólica da ciclidade de Dupin caracterizada por curvatura gaussiana negativa, com $K < 0$ e curvaturas principais de sinais opostos.



(a) Região da superfície em que as curvaturas principais apresentam sinais opostos, resultando em curvatura gaussiana negativa.

Figura 84 – Continuação.

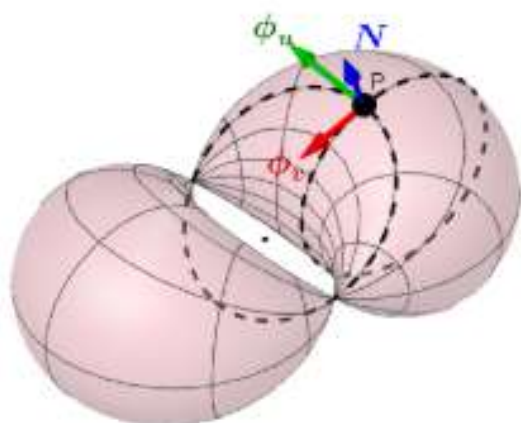
$K = \frac{e \cdot g - f^2}{E \cdot G - F^2} = -0.0000381142$
$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} = 0.0004353288$
$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} = -0.0875527215$

(b) Valores numéricos da curvatura gaussiana e das curvaturas principais associados à região analisada.

Fonte: Elaboração própria.

A Figura 84 apresenta uma região da ciclidade de Dupin em que as curvaturas principais possuem sinais opostos. Como consequência, a curvatura gaussiana assume valor negativo. Esse comportamento caracteriza uma região hiperbólica da superfície, ilustrando que diferentes pontos da mesma ciclidade podem apresentar geometrias locais significativamente distintas.

Além da dependência em relação ao ponto analisado, a curvatura gaussiana também responde às alterações globais impostas pelos parâmetros da família de ciclides. Modificações nos parâmetros responsáveis pela forma geral da superfície influenciam diretamente os coeficientes da Primeira e da Segunda Formas Fundamentais e, conseqüentemente, os valores de K observados em cada região da malha.

Figura 85 – Influência da geometria global na curvatura gaussiana em configurações do tipo fuso.

$K = \frac{e \cdot g - f^2}{E \cdot G - F^2} = 0.0033930959$
$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} = -0.0347566654$
$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} = -0.0976243212$

(a) Configuração do tipo fuso com curvatura gaussiana positiva, $K > 0$, na região analisada.

Figura 85 – Continuação.

(b) Configuração do tipo fusão com curvatura gaussiana negativa, $K < 0$, na região analisada.

Fonte: Elaboração própria.

A Figura 85 apresenta configurações extremas da família de ciclides de Dupin, correspondentes ao caso do tipo fusão. A comparação com as figuras anteriores evidencia que a curvatura gaussiana não depende apenas da posição do ponto considerado, mas também da geometria global da superfície. Dessa forma, alterações morfológicas significativas podem produzir novos comportamentos geométricos locais, refletidos diretamente nos valores assumidos por K .

As observações realizadas mostram que a curvatura gaussiana constitui uma ferramenta eficiente para caracterizar diferentes regiões da ciclidade de Dupin. Por meio da análise de seu sinal e de sua magnitude, torna-se possível identificar comportamentos elípticos, hiperbólicos e parabólicos, fornecendo uma descrição da geometria local da superfície.

4.8 Curvatura média

A curvatura média constitui uma importante medida geométrica associada ao comportamento local de uma superfície. Diferentemente da curvatura gaussiana, que resulta do produto das curvaturas principais, a curvatura média corresponde à média aritmética dessas grandezas, podendo ser calculada por meio da expressão

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Alternativamente, utilizando os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental, obtém-se

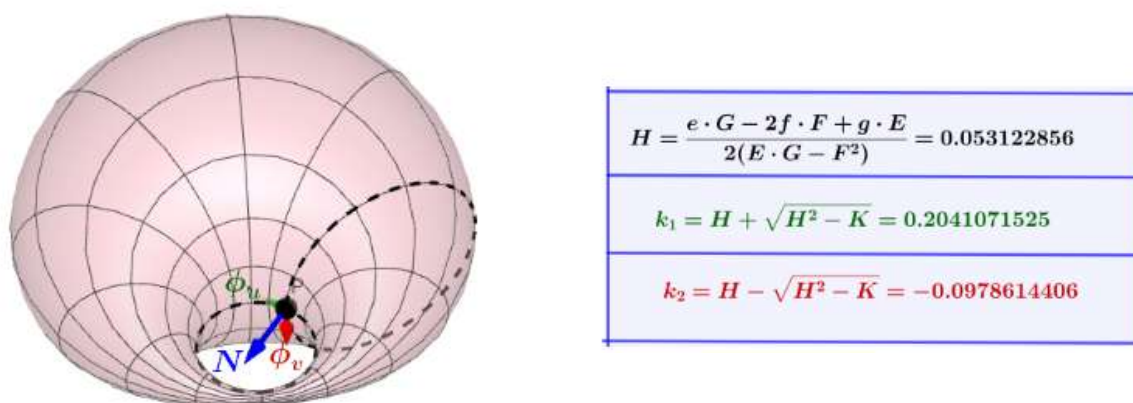
$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Geometricamente, a curvatura média fornece uma medida da tendência média de curvatura da superfície em um determinado ponto. Enquanto a curvatura gaussiana descreve a interação entre as duas direções principais, a curvatura média avalia o efeito combinado dessas curvaturas, permitindo identificar regiões em que os efeitos de curvatura se reforçam ou se compensam.

Quando a soma das curvaturas principais é positiva, obtém-se $H > 0$. Nessa situação, a superfície apresenta uma tendência média de curvatura orientada segundo o vetor normal adotado na construção.

A Figura 86 apresenta um caso em que a curvatura média é positiva em uma região da ciclidade de Dupin. Embora as curvaturas principais apresentem sinais distintos, a soma entre elas permanece positiva, resultando em $H > 0$.

Figura 86 – Curvatura média positiva em uma região da ciclidade de Dupin.



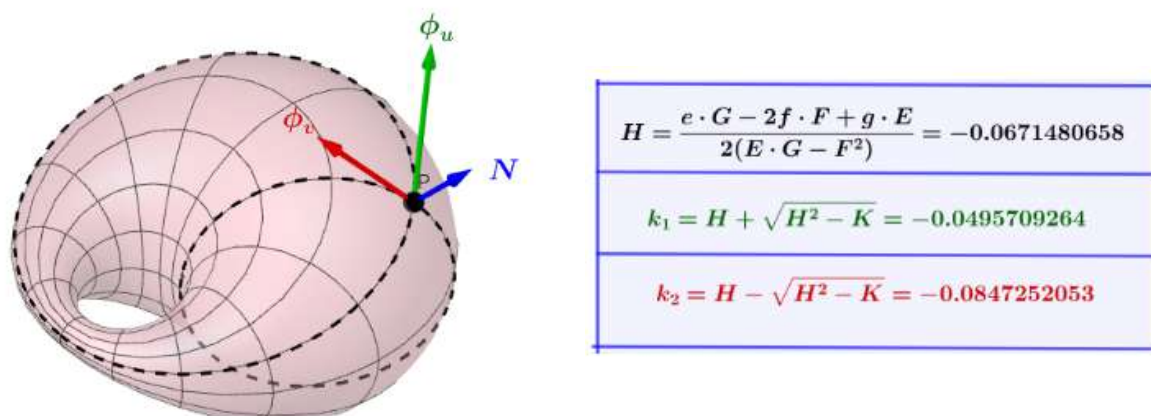
- (a) Representação da região analisada, com indicação dos vetores associados à parametrização e do vetor normal.
 (b) Cálculo da curvatura média e das curvaturas principais no ponto considerado, com $H > 0$.

Fonte: Elaboração própria.

A Figura 86 apresenta uma região da ciclidade de Dupin em que a curvatura média assume valor positivo. Observa-se que a soma das curvaturas principais produz um resultado positivo, indicando que a superfície apresenta uma tendência predominante de curvatura em relação à orientação do vetor normal escolhido.

Por outro lado, quando a soma das curvaturas principais assume valor negativo, obtém-se $H < 0$. Nessa situação, a tendência média de curvatura ocorre em sentido oposto ao observado anteriormente.

Figura 87 – Curvatura média negativa em uma região da ciclode de Dupin.



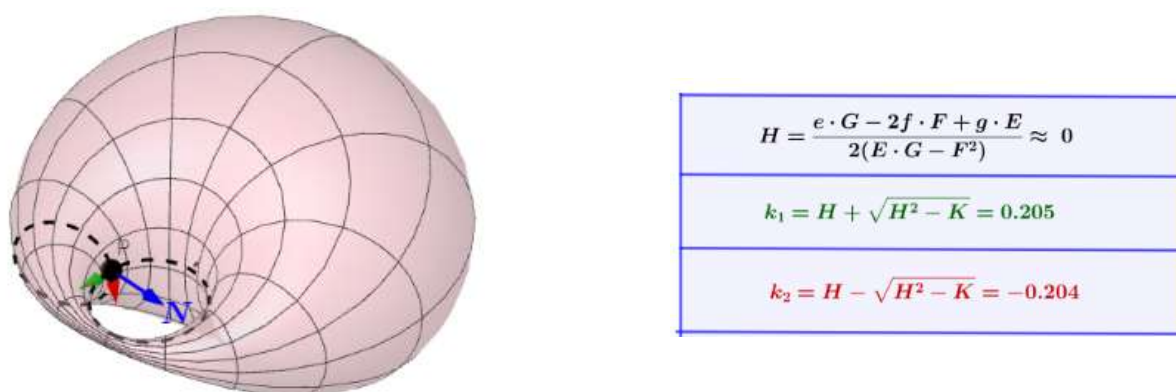
- (a) Representação da região analisada, com indicação dos vetores associados à parametrização e do vetor normal.
 (b) Cálculo da curvatura média e das curvaturas principais no ponto considerado, com $H < 0$.

Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 87, observa-se uma região da superfície em que a curvatura média assume valor negativo. Embora a geometria local continue sendo determinada pelas curvaturas principais, a soma dessas quantidades produz um resultado negativo, indicando uma mudança na orientação média da curvatura da superfície.

Uma situação particularmente interessante ocorre quando as curvaturas principais apresentam magnitudes semelhantes e sinais opostos. Nessa condição, seus efeitos tendem a se compensar, fazendo com que a curvatura média se aproxime de zero.

Figura 88 – Curvatura média aproximadamente nula em uma região da ciclode de Dupin.



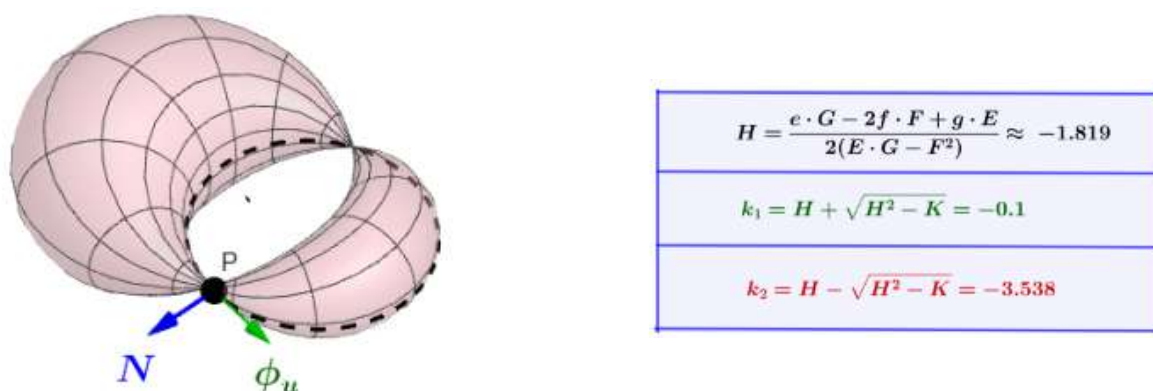
- (a) Representação da região analisada, com indicação dos vetores associados à parametrização e do vetor normal.
 (b) Cálculo da curvatura média e das curvaturas principais no ponto considerado, com $H \approx 0$.

Fonte: Elaboração própria.

A Figura 88 apresenta uma região em que a curvatura média assume valor próximo de zero. Nessa configuração, as contribuições das curvaturas principais praticamente se anulam, produzindo uma situação de equilíbrio entre as duas direções principais de curvatura. Esse comportamento indica uma região de transição entre diferentes tendências geométricas observadas na superfície.

Além da dependência em relação ao ponto analisado, a curvatura média também responde às alterações globais impostas pelos parâmetros da família de ciclides. Modificações na forma geral da superfície influenciam diretamente os valores assumidos por H , permitindo analisar a resposta geométrica da superfície perante diferentes configurações morfológicas.

Figura 89 – Curvatura média em uma configuração extrema da família de ciclides de Dupin do tipo fuso.



- (a) Representação da região analisada em uma configuração extrema do tipo fuso.
 (b) Cálculo da curvatura média e das curvaturas principais no ponto considerado, com $H < 0$.

Fonte: Elaboração própria.

A Figura 89 apresenta uma configuração extrema da família de ciclides de Dupin, correspondente ao caso do tipo fuso. É importante ressaltar que, da Figura 88 para a Figura 89, não houve alterações nos parâmetros u e v , ou seja, o ponto P não foi deslocado sobre a superfície.

A comparação com as figuras anteriores mostra que a curvatura média sofre alterações significativas quando a geometria global da superfície é modificada, reforçando sua dependência simultânea da posição do ponto analisado e da conformação geral da superfície.

As observações realizadas mostram que a curvatura média constitui uma ferramenta eficiente para descrever a tendência média de curvatura da ciclidade de Dupin. Sua análise complementa as informações fornecidas pela curvatura gaussiana, permitindo uma compreensão mais ampla do comportamento geométrico local da superfície.

4.9 Curvaturas principais e linhas de curvatura

As curvaturas principais correspondem aos valores extremos assumidos pela curvatura normal em um determinado ponto da superfície. Geometricamente, elas descrevem as maiores e menores intensidades de curvatura observadas entre todas as direções tangentes possíveis naquele ponto. Essas grandezas podem ser obtidas a partir da curvatura gaussiana e da curvatura média por meio das expressões

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

e

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}.$$

A presença dos sinais positivo e negativo decorre diretamente da resolução da equação quadrática associada ao operador de forma. Geometricamente, esses dois valores representam os extremos da curvatura normal, correspondendo às direções de máxima e mínima curvatura da superfície.

As curvaturas principais desempenham papel fundamental na geometria diferencial, pois permitem interpretar diretamente as demais curvaturas estudadas anteriormente. A curvatura gaussiana é obtida pelo produto das curvaturas principais,

$$K = k_1 \cdot k_2,$$

enquanto a curvatura média corresponde à sua média aritmética,

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Dessa forma, as curvaturas principais podem ser interpretadas como as quantidades fundamentais a partir das quais as demais medidas de curvatura são construídas.

Uma característica notável das ciclídes de Dupin é que suas curvaturas principais permanecem constantes ao longo de suas respectivas linhas de curvatura. Na construção desenvolvida, as curvas coordenadas da parametrização coincidem com essas linhas, permitindo investigar experimentalmente essa propriedade clássica da superfície.

Observação. Nas construções apresentadas a seguir, os controles u_0 e v_0 indicam a posição do ponto P sobre a superfície, isto é,

$$P = \psi(u_0, v_0).$$

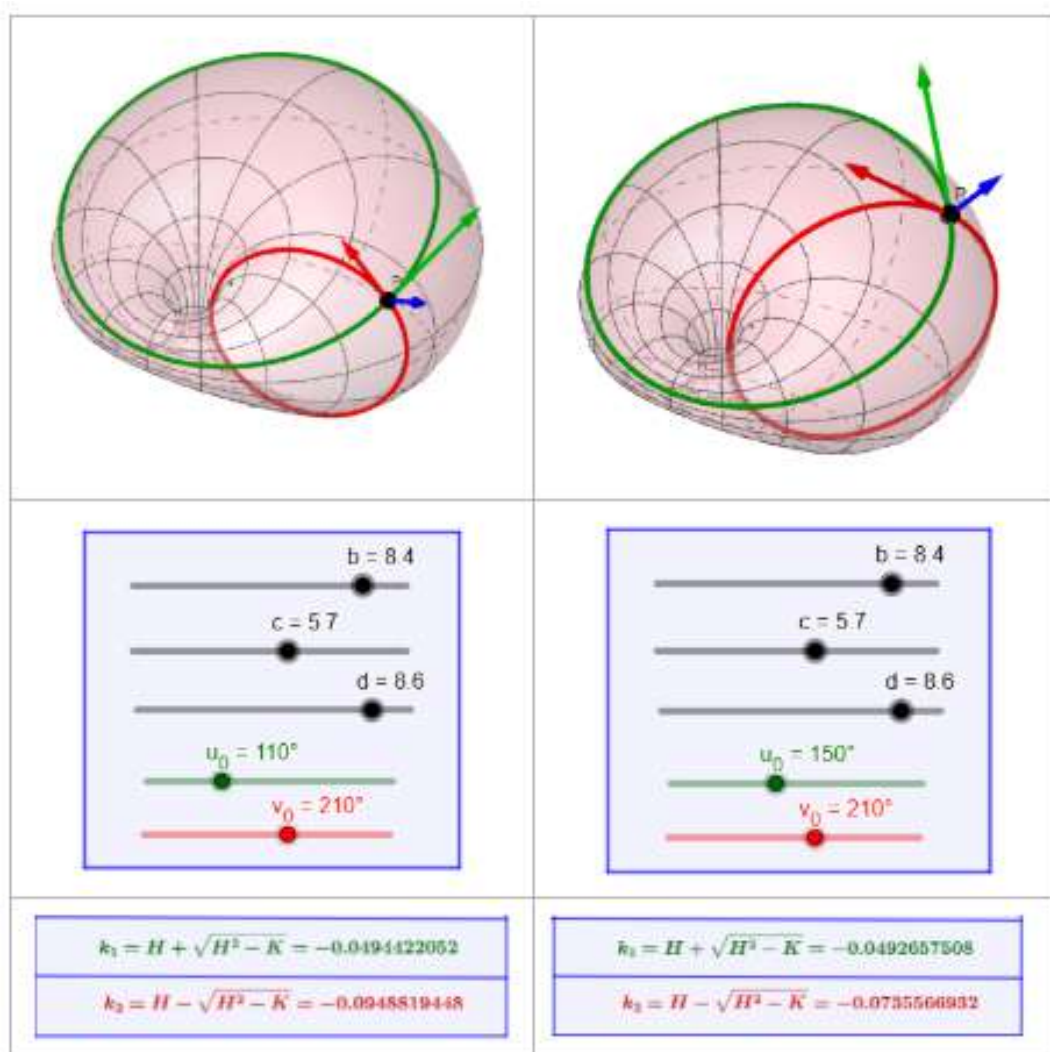
Dessa forma, u_0 e v_0 não representam novos parâmetros da família de ciclídes, mas sim valores particulares dos parâmetros da parametrização, escolhidos para determinar o ponto analisado.

Como as curvas coordenadas da parametrização coincidem com as linhas de curvatura, é possível deslocar o ponto P ao longo dessas linhas mantendo um dos valores fixo e variando o outro. Assim, ao manter v_0 fixo e variar u_0 , o ponto percorre uma das famílias de linhas

de curvatura; de modo análogo, ao manter u_0 fixo e variar v_0 , percorre a outra família. Essa movimentação permite observar experimentalmente que, ao longo de uma linha de curvatura, a curvatura principal correspondente permanece constante.

Ressalta-se ainda que, nas imagens geradas no GeoGebra, os valores de u_0 e v_0 são apresentados em graus. Essa escolha foi adotada por conveniência do próprio ambiente gráfico, que exibe controles angulares nessa unidade. Do ponto de vista analítico, a parametrização pode ser expressa em radianos; entretanto, nas figuras desta seção, os valores indicados seguem a convenção visual utilizada na construção computacional.

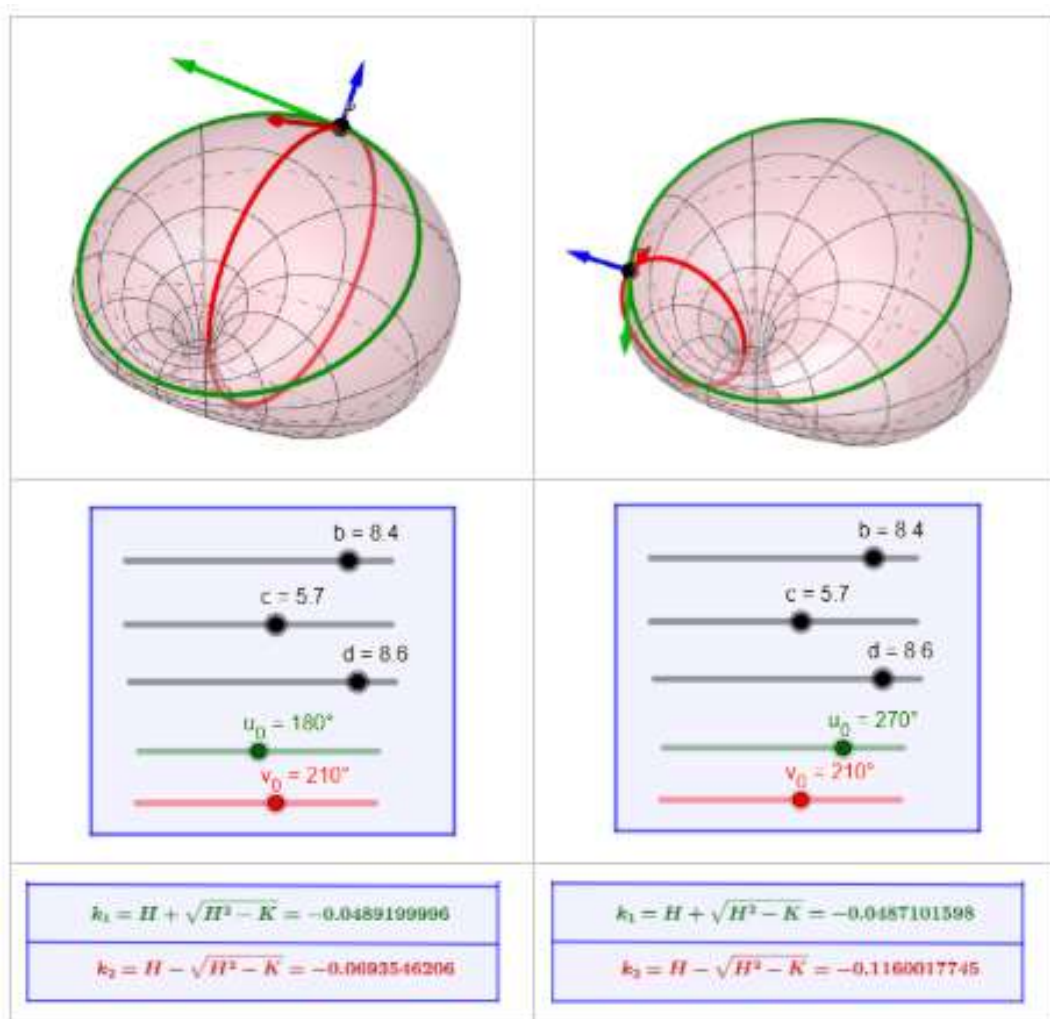
Figura 90 – Deslocamento do ponto P ao longo da primeira linha de curvatura (curva verde), mantendo $v_0 = 210^\circ$, e evidenciando a constância aproximada de uma das curvaturas principais ao longo de sua respectiva linha de curvatura.



(a) Posição inicial do ponto P sobre a linha de curvatura verde, com $u_0 = 110^\circ$.

(b) Deslocamento intermediário do ponto P ao longo da mesma linha de curvatura, com $u_0 = 150^\circ$.

Figura 90 – Continuação.



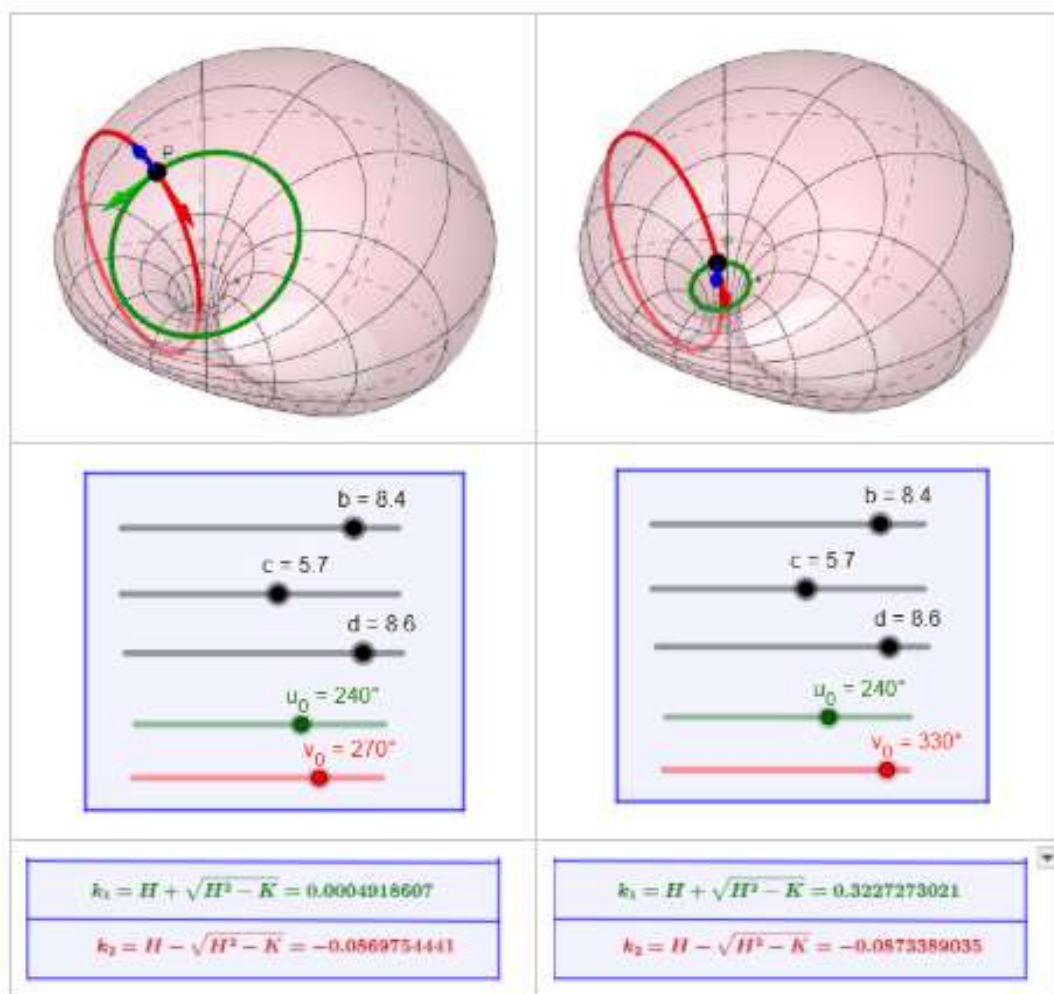
(c) Continuação do percurso sobre a linha de curvatura verde, com $u_0 = 180^\circ$.

(d) Posição final considerada no percurso, com $u_0 = 270^\circ$.

Fonte: Elaboração própria.

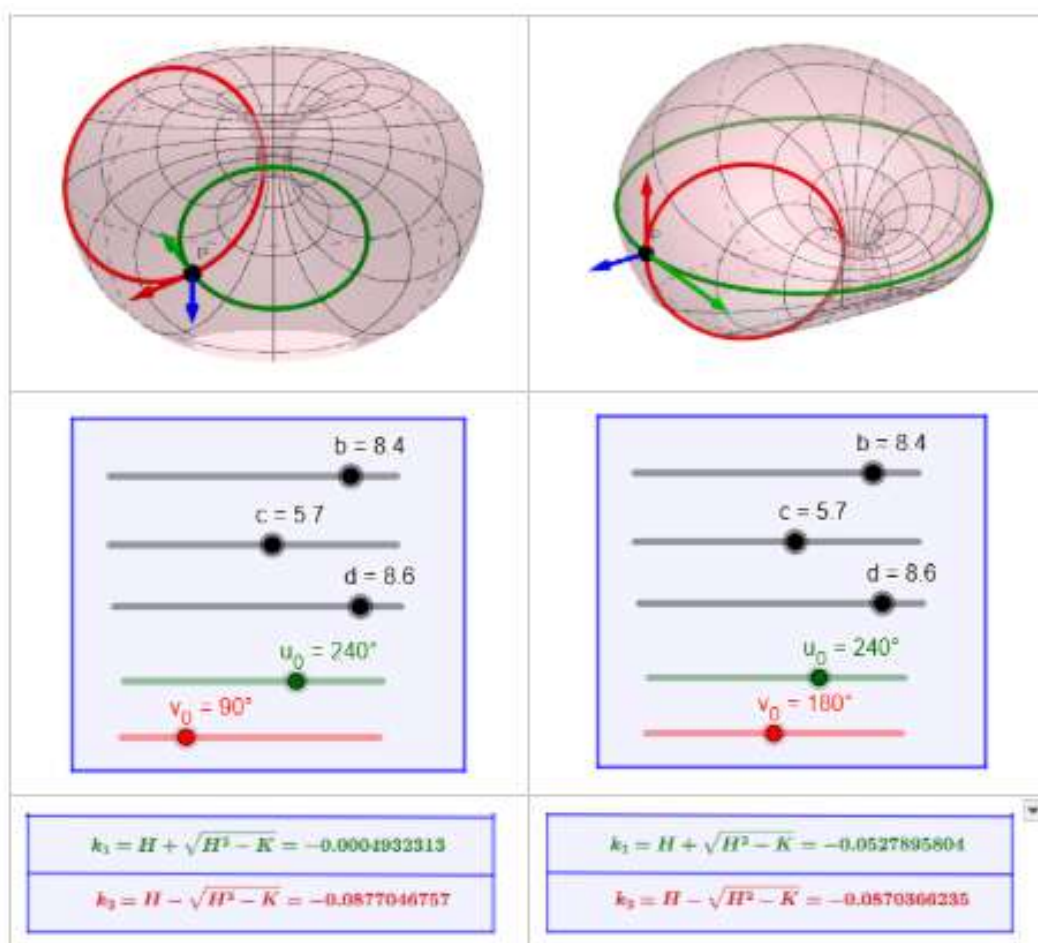
Na Figura 90, o ponto $P = \psi(u_0, v_0)$ desloca-se ao longo da linha de curvatura associada à primeira direção principal. Durante esse movimento, observa-se que a curvatura principal correspondente permanece praticamente constante, enquanto a segunda curvatura principal varia de acordo com a posição do ponto na superfície.

Figura 91 – Deslocamento do ponto P ao longo da segunda linha de curvatura (curva vermelha), mantendo $u_0 = 240^\circ$, e mostrando a constância aproximada de uma das curvaturas principais ao longo de sua respectiva linha de curvatura.



- (a) Posição inicial do ponto P sobre a linha de curvatura vermelha, com $v_0 = 270^\circ$.
 (b) Deslocamento intermediário do ponto P ao longo da mesma linha de curvatura, com $v_0 = 330^\circ$.

Figura 91 – Continuação.



(c) Continuação do percurso sobre a linha de curvatura vermelha, com $v_0 = 90^\circ$.

(d) Posição final considerada no percurso, com $v_0 = 180^\circ$.

Fonte: Elaboração própria.

De maneira análoga, a Figura 91 apresenta o deslocamento do ponto $P = \psi(u_0, v_0)$ ao longo da segunda linha de curvatura. Nessa situação, verifica-se que a segunda curvatura principal permanece aproximadamente constante, enquanto a primeira passa a variar ao longo do percurso considerado.

Essa observação fornece uma verificação numérica da propriedade característica das ciclides de Dupin, segundo a qual cada curvatura principal permanece constante ao longo de sua respectiva linha de curvatura. A construção dinâmica permite visualizar esse comportamento diretamente sobre a superfície, relacionando os valores numéricos obtidos aos elementos geométricos representados na malha paramétrica.

Durante a exploração dinâmica da construção, observam-se pequenas oscilações nos valores das curvaturas principais a partir da terceira ou quarta casa decimal, mesmo em situações nas quais o valor analítico deveria permanecer constante. Esse comportamento não representa uma violação das propriedades geométricas da superfície, mas constitui uma consequência natural dos processos numéricos empregados pelo software.

A construção depende de uma longa cadeia de cálculos envolvendo funções trigonométricas, derivadas parciais, produtos vetoriais, normalizações e operações algébricas sucessivas. Em cada etapa, ocorrem arredondamentos inerentes à aritmética de ponto flutuante utilizada pelo computador. O acúmulo desses pequenos erros produz variações numéricas muito reduzidas, perceptíveis apenas nas últimas casas decimais dos resultados apresentados.

Apesar dessas oscilações residuais, observa-se que os valores permanecem estáveis nas primeiras casas decimais, preservando o comportamento previsto pela teoria. Dessa forma, os resultados obtidos indicam que a construção implementada reproduz adequadamente propriedades diferenciais clássicas das ciclides de Dupin, permitindo visualizar experimentalmente a constância das curvaturas principais ao longo de suas respectivas linhas de curvatura.

Ao longo deste capítulo, a ciclidade de Dupin foi analisada a partir de elementos da Geometria Diferencial, tomando como ponto de partida sua parametrização. A partir dela, foram estudadas as curvas coordenadas, os vetores tangentes, o plano tangente, o vetor normal e as formas fundamentais, estabelecendo uma base para a compreensão de propriedades locais da superfície.

A Primeira Forma Fundamental permitiu interpretar a métrica induzida pela parametrização, relacionando os coeficientes E , F e G à medição de comprimentos, ângulos e áreas sobre a ciclidade. A Segunda Forma Fundamental, por sua vez, possibilitou analisar a variação da superfície em relação ao vetor normal, fornecendo os coeficientes necessários para o estudo das curvaturas.

Com base nessas estruturas, foram examinadas a curvatura normal, a curvatura gaussiana, a curvatura média, as curvaturas principais e as linhas de curvatura. Essas grandezas permitiram observar que a geometria local da ciclidade depende tanto da posição do ponto analisado quanto da

configuração global da superfície, determinada pelos parâmetros envolvidos em sua construção.

As representações dinâmicas desenvolvidas no GeoGebra contribuíram para tornar visíveis aspectos diferenciais que, em uma abordagem exclusivamente algébrica, poderiam permanecer menos intuitivos. A variação dos parâmetros e dos pontos sobre a superfície permitiu acompanhar mudanças nos vetores, nos planos tangentes, nas formas fundamentais e nas curvaturas, aproximando o tratamento formal da Geometria Diferencial de uma leitura visual e exploratória.

Dessa forma, a análise realizada neste capítulo complementa as construções geométricas apresentadas anteriormente e aprofunda a compreensão da ciclidade de Dupin a partir de suas propriedades locais. Os elementos diferenciais estudados fornecem também uma base para as propostas didáticas apresentadas no capítulo seguinte, nas quais a exploração visual, histórica e dinâmica das ciclides será articulada à ampliação da cultura geométrica do professor.

5 AMPLIANDO A CULTURA GEOMÉTRICA DO PROFESSOR

Este capítulo apresenta um conjunto de atividades voltadas à ampliação da cultura geométrica do professor de Matemática, a partir do estudo das ciclides de Dupin. As propostas articulam História da Matemática, geometria diferencial, visualização dinâmica e uso do GeoGebra 3D.

Nos capítulos anteriores, foram discutidos o desenvolvimento histórico das ciclides de Dupin e os principais aspectos matemáticos relacionados a essas superfícies. A partir dessa base, este capítulo organiza atividades que buscam aproximar o professor de conceitos geométricos menos presentes na formação inicial, sem exigir um tratamento formal completo de geometria diferencial.

As atividades foram estruturadas de forma progressiva. A primeira propõe uma leitura guiada de trechos da obra de Charles Dupin, com foco na definição das superfícies ciclides, na geração por esferas e nas linhas de curvatura circulares. A segunda utiliza construções dinâmicas no GeoGebra 3D para explorar superfícies conhecidas, como esfera, cone, cilindro e toro, observando famílias de curvas sobre essas superfícies. A terceira concentra-se nas ciclides de Dupin, relacionando parâmetros, forma canônica, variações da superfície e curva focal.

A organização das atividades procura mostrar como a tecnologia pode auxiliar na visualização de conceitos geométricos e na interpretação de textos históricos. Desse modo, o capítulo contribui para integrar leitura histórica, análise matemática e exploração visual, oferecendo ao professor um percurso de estudo sobre as ciclides de Dupin e suas relações com a geometria diferencial.

5.1 Leitura guiada de um texto clássico: as superfícies ciclides em Charles Dupin

A primeira atividade proposta consiste na leitura orientada de um trecho da obra *Applications de géométrie et de mécanique*, publicada por Charles Dupin em 1822. A obra reúne estudos em que a geometria é mobilizada para tratar de questões ligadas à marinha, às pontes e estradas, à mecânica, à óptica e ao estudo das superfícies, evidenciando uma concepção de geometria fortemente relacionada à compreensão de formas, movimentos e fenômenos físicos.

Nesta atividade, será apresentado ao professor participante um recorte do § III da IVª Memória, correspondente às páginas 200 a 207 da obra de Dupin. Nesse trecho, o autor introduz propriedades das superfícies ciclides, caracterizando-as como superfícies cujas linhas de curvatura são círculos, além de discutir sua geração por famílias de esferas. Em particular, Dupin afirma que basta sujeitar uma esfera de raio variável a tocar constantemente três esferas fixas para definir essas superfícies.

A proposta consiste em disponibilizar, inicialmente, a página original em francês e, em

seguida, sua tradução para o português. Essa disposição busca aproximar o professor do texto histórico, sem exigir domínio prévio da língua francesa ou formação especializada em geometria diferencial, a fim de favorecer uma leitura guiada das ideias geométricas presentes na obra de Dupin, especialmente aquelas relacionadas às linhas de curvatura circulares, à geração por esferas e às condições geométricas que caracterizam as ciclides.

Após a leitura do material, serão propostas questões orientadoras, com a finalidade de auxiliar o professor na identificação das ideias centrais do texto e na construção de relações entre o documento histórico, os conceitos geométricos estudados anteriormente e as possibilidades de visualização dinâmica. Dessa forma, a atividade procura mostrar que um texto matemático clássico, quando mediado por tradução, perguntas de leitura e recursos visuais, pode tornar-se um instrumento de ampliação da cultura geométrica do professor.

A seguir, são apresentados os recortes utilizados na atividade de leitura guiada, contendo trechos selecionados da obra de Dupin, acompanhados de tradução para o português.

Figura 92 – Recorte 1 da atividade de leitura guiada sobre as superfícies ciclides em Charles Dupin.

Recorte 1 — A definição das superfícies ciclidas em Dupin

Trecho selecionado de *Applications de géométrie et de mécanique*, IVª Memória, § III, p. 200–201.

§ III.

Propriétés des surfaces cyclides, ainsi que des courbes et des surfaces du second degré.

Avant de pousser plus loin l'examen des propriétés dont jouissent les rayons lumineux ou sonores, réfléchis par des surfaces, il est nécessaire d'exposer quelques principes de géométrie générale, développés pour la première fois, dans notre *Mémoire sur le contact des cercles et des sphères* (*).

(*) L'analyse des résultats de ce Mémoire se trouve dans la *Correspondance polytechnique*; le Mémoire même n'a pas été imprimé.

ROUTES DE LA LUMIÈRE. 201

Nous allons prouver, premièrement, qu'il existe une famille de surfaces dont la propriété caractéristique est de n'avoir que des cercles pour lignes de plus grande et de moindre courbure : c'est pourquoi nous appellerons *cyclides* ces surfaces.

Remarquons d'abord que la sphère est comprise dans cette famille de surfaces, puisque deux systèmes de cercles tracés à angle droit sur elle, peuvent être considérés comme ses lignes de courbure.

Les surfaces de révolution, soit coniques, soit cylindriques font encore partie de la famille que nous voulons étudier. En effet, elles ont pour lignes de courbure : d'une part des cercles parallèles; de l'autre, des lignes droites méridiennes qu'on peut regarder comme des cercles ayant un rayon infini. Il est d'ailleurs évident qu'aucune surface développable, autre que le cylindre et le cône, ne saurait avoir de cercles pour lignes de courbure; parce que chaque point de l'arête de rebroussement de cette développable, doit être un point de rebroussement pour une des lignes de courbure, et que le cercle n'a pas de point de rebroussement.

Pour que le cercle soit, sur une surface quelconque, une ligne de courbure, il faut d'abord que les droites, menées normalement à cette surface et de chaque point d'un tel cercle, forment une surface développable; il faut, ensuite, que cette surface développable ait elle-même ce cercle pour ligne de courbure. Par conséquent cette surface développable doit être un cône droit circulaire ayant ce cercle pour base.

Ainsi les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont des cercles, ont pour propriété caractéristique, d'être coupées normalement, suivant toute l'étendue de chaque cercle, par un cône droit circulaire.

Fonte: Dupin (1822, p. 200–201).
Tradução do francês realizada com auxílio da
ferramenta de inteligência artificial Gemini e
revisada pela autora.

§ III.

Propriedades das superfícies ciclidas, assim como das curvas e das superfícies do segundo grau.

Antes de levar mais longe o exame das propriedades das quais desfrutam os raios luminosos ou sonoros, refletidos por superfícies, é necessário expor alguns princípios de geometria geral, desenvolvidos pela primeira vez, em nossa Memória sobre o contato dos círculos e das esferas

Vamos provar, primeiramente, que existe uma família de superfícies cuja propriedade característica é não ter senão círculos para linhas de maior e de menor curvatura: é por isso que chamaremos ciclidas a essas superfícies.

Notemos primeiramente que a esfera está compreendida nesta família de superfícies, já que dois sistemas de círculos traçados em ângulo reto sobre ela podem ser considerados como suas linhas de curvatura.

As superfícies de revolução, sejam cônicas, sejam cilíndricas, fazem ainda parte da família que queremos estudar. Com efeito, elas têm por linhas de curvatura: por um lado, círculos paralelos; por outro, linhas retas meridianas que se podem considerar como círculos tendo um raio infinito. É, aliás, evidente que nenhuma superfície desenvolvível, além do cilindro e do cone, poderia ter círculos por linhas de curvatura; porque cada ponto da aresta cuspidal dessa superfície desenvolvível deve ser uma cúspide para uma das linhas de curvatura, e o círculo não possui cúspide.

Para que o círculo seja, sobre uma superfície qualquer, uma linha de curvatura, é preciso primeiramente que as retas, traçadas normalmente a essa superfície e de cada ponto de tal círculo, formem uma superfície desenvolvível; é preciso, em seguida, que essa superfície desenvolvível tenha ela mesma esse círculo por linha de curvatura. Por conseguinte, essa superfície desenvolvível deve ser um cone reto circular tendo esse círculo por base. Assim, as superfícies cujas linhas de curvatura são todas círculos, têm por propriedade característica serem cortadas normalmente, ao longo de toda a extensão de cada círculo, por um cone reto circular.

Fonte: Elaborado a partir de Dupin (1822, p. 200–201). Tradução da autora.

Figura 93 – Recorte 2 da atividade de leitura guiada sobre as esferas móveis e a geração das superfícies ciclides.

Recorte 2 — Esferas móveis e a geração das superfícies ciclidas

Trecho selecionado de *Applications de géométrie et de mécanique*, IV^a Memória, § III, p. 201-203

Prenons le sommet de chacun de ces cônes, pour centre d'une sphère sur laquelle ce cercle soit placé. La sphère ayant, dans toute l'étendue de ce cercle, les mêmes normales que la surface cherchée, aura mêmes plans tangents.

Par conséquent, la surface générale dont toutes les lignes de courbure sont des cercles, peut être engendrée de deux manières différentes, par le mouvement d'une sphère dont le rayon varie convenablement. La première génération donnera les lignes d'une courbure, la seconde génération donnera les lignes de l'autre courbure des surfaces cyclides.

C'est ainsi qu'un cône de révolution, par exemple, peut être engendré : premièrement, par une sphère dont le centre se meut en ligne droite, tandis que son rayon croît ou décroît proportionnellement à l'espace parcouru par ce centre : les lignes de courbure produites par cette génération sont des cercles ; secondement, le même cône de révolution peut être engendré par une sphère d'un rayon infini, c'est-à-dire, par un plan lequel fasse constamment le même angle avec l'axe du cône : les lignes de courbure produites par cette seconde génération sont les droites méridiennes qui servent d'arête au cône.

Revenons au cas général. Il faut évidemment que chaque sphère de la première génération, soit tangente à toutes celles de la seconde ; puisque chaque ligne d'une courbure des cyclides, doit être coupée par toutes celles de l'autre courbure, et qu'à chaque ligne de cette seconde courbure, appartient une sphère de la seconde génération.

Mais, si l'on se contente de prendre trois sphères de la première génération (*), elles suffiront pour déterminer toutes les sphères de la seconde. Il faut donc qu'en prenant trois à trois les premières sphères, et déterminant toutes les secondes d'après cette simple donnée, les secondes sphères soient constamment les mêmes. Par conséquent, c'est la possibilité ou l'impossibilité de cette identité qui, seule, peut montrer s'il existe ou non d'autres surfaces que la sphère, le cône et le cylindre de révolution, qui n'aient que des cercles pour lignes de courbure.

Fonte: Dupin (1822, p. 201–203).
Tradução do francês realizada com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Gemini e revisada pela autora.

Tomemos o vértice de cada um desses cones, por centro de uma esfera sobre a qual esse círculo esteja colocado. A esfera tendo, em toda a extensão desse círculo, as mesmas normais que a superfície procurada, terá os mesmos planos tangentes.

Por conseguinte, a superfície geral cujas linhas de curvatura são todas círculos, pode ser gerada de duas maneiras diferentes, pelo movimento de uma esfera cujo raio varia convenientemente. A primeira geração dará as linhas de uma curvatura, a segunda geração dará as linhas da outra curvatura das superfícies ciclidas.

É assim que um cone de revolução, por exemplo, pode ser gerado: primeiramente, por uma esfera cujo centro se move em linha reta, enquanto o seu raio cresce ou decresce proporcionalmente ao espaço percorrido por esse centro: as linhas de curvatura produzidas por essa geração são círculos; secundamente, o mesmo cone de revolução pode ser gerado por uma esfera de um raio infinito, isto é, por um plano que faça constantemente o mesmo ângulo com o eixo do cone: as linhas de curvatura produzidas por essa segunda geração são as retas meridianas que servem de aresta ao cone.

Voltemos ao caso geral. É evidentemente necessário que cada esfera da primeira geração seja tangente a todas as da segunda; já que cada linha de uma curvatura das ciclidas deve ser cortada por todas as da outra curvatura, e que a cada linha desta segunda curvatura pertence uma esfera da segunda geração.

Mas, se nos contentarmos em tomar três esferas da primeira geração (*), elas bastarão para determinar todas as esferas da segunda. É preciso, portanto, que ao tomar três a três as primeiras esferas, e determinando todas as segundas de acordo com este simples dado, as segundas esferas sejam constantemente as mesmas. Por conseguinte, é a possibilidade ou a impossibilidade desta identidade que, sozinha, pode mostrar se existem ou não outras superfícies além da esfera, do cone e do cilindro de revolução, que não tenham senão círculos como linhas de curvatura.

Fonte: Elaborado a partir de Dupin (1822, p. 201–203). Tradução da autora.

Figura 94 – Recorte 3 da atividade de leitura guiada sobre três esferas fixas, pontos de contato e reta diretriz.

Recorte 3 — Três esferas fixas, pontos de contato e reta diretriz

Trecho selecionado de *Applications de géométrie et de mécanique*, IV^a Memória, § III, p. 203-204

Nous avons vu que deux sphères d'une génération différente, se touchent en un point placé sur la surface cyclide. Lorsqu'une sphère de la seconde génération est déterminée par la condition d'être tangente à trois des premières sphères, on a trois points de contact. Ces trois points appartiennent à la cyclide; ils sont placés sur un même cercle, ligne de courbure. Par conséquent, ils déterminent complètement ce cercle.

Menons un plan par ces trois points de contact; il coupera la sphère génératrice suivant le cercle ligne de courbure dont nous parlons; il coupera chacune des trois sphères fixes, suivant un cercle particulier.

Regardons chacun des quatre cercles ainsi déterminés, comme la base d'un cône droit tangent à la sphère sur laquelle ce cercle est placé. Pour avoir les axes de ces quatre cônes, il faudra du centre de chaque sphère, mener une perpendiculaire au plan commun des quatre bases. Ainsi les quatre axes seront parallèles entr'eux.

Au point de contact de la première sphère avec chacune des trois autres, deux des quatre cônes seront pareillement en contact. Donc le cône circonscrit à la première sphère est touché, en un point différent, par chacun des trois autres cônes.

Or, deux cônes de révolution qui ont leurs axes parallèles, et qui se touchent en un point, sont nécessairement semblables. En effet le même plan, tangent à ces deux cônes, fait un même angle avec les deux axes.

Ainsi les quatre cônes que nous considérons sont semblables entr'eux. Les segments sphériques qu'ils circonscrivent sont, par conséquent, d'un volume proportionnel à celui des sphères dont ils font partie. Donc les bases de ces segments, lesquelles sont aussi les bases des cônes circonscrits, sont éloignées respectivement du centre de la sphère qui leur appartient, de quantités proportionnelles aux rayons de ces mêmes sphères.

Menons, dans le plan des trois sphères fixes, une droite dont les distances à ces centres soient proportionnelles aux rayons des mêmes sphères. Tout plan mené par cette droite, interceptera sur elles, des segments proportionnels à leur volume; et nulle autre droite ne pourra jouir d'une telle propriété.

Ainsi les trois points de contact de la sphère génératrice avec les trois sphères fixes, déterminent un plan particulier, lequel passe toujours par la droite unique dont nous parlons, et que nous appellerons *droite directrice*.

Fonte: Dupin (1822, p. 203-204).
Tradução do francês realizada com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Gemini e revisada pela autora.

Vimos que duas esferas de uma geração diferente se tocam em um ponto colocado sobre a superfície ciclida. Quando uma esfera da segunda geração é determinada pela condição de ser tangente a três das primeiras esferas, têm-se três pontos de contato. Estes três pontos pertencem à ciclida; eles estão colocados sobre um mesmo círculo, linha de curvatura. Por conseguinte, eles determinam completamente esse círculo.

Tracemos um plano por esses três pontos de contato; ele cortará a esfera geratriz segundo o círculo linha de curvatura de que falamos; ele cortará cada uma das três esferas fixas, segundo um círculo particular.

Consideremos cada um dos quatro círculos assim determinados como a base de um cone reto tangente à esfera sobre a qual este círculo está colocado. Para ter os eixos destes quatro cones, será preciso do centro de cada esfera, traçar uma perpendicular ao plano comum das quatro bases. Assim, os quatro eixos serão paralelos entre si.

No ponto de contato da primeira esfera com cada uma das três outras, dois dos quatro cones estarão igualmente em contato. Logo o cone circunscrito à primeira esfera é tocado, em um ponto diferente, por cada um dos três outros cones.

Ora, dois cones de revolução que têm os seus eixos paralelos, e que se tocam em um ponto, são necessariamente semelhantes. Com efeito, o mesmo plano, tangente a estes dois cones, faz um mesmo ângulo com os dois eixos.

Assim, os quatro cones que consideramos são semelhantes entre si. Os segmentos esféricos que eles circunscrevem são, por conseguinte, de um volume proporcional ao das esferas das quais fazem parte. Logo, as bases destes segmentos, as quais são também as bases dos cones circunscritos, estão distanciadas respectivamente do centro da esfera que lhes pertence, de quantidades proporcionais aos raios destas mesmas esferas.

Tracemos, no plano das três esferas fixas, uma reta cujas distâncias a estes centros sejam proporcionais aos raios das mesmas esferas. Todo plano traçado por esta reta interceptará sobre elas, segmentos proporcionais ao seu volume; e nenhuma outra reta poderá desfrutar de tal propriedade.

Assim os três pontos de contato da esfera geratriz com as três esferas fixas determinam um plano particular, o qual passa sempre pela reta única de que falamos, e que chamaremos *reta diretriz*.

Fonte: Elaborado a partir de Dupin (1822, p. 203–204). Tradução da autora.

Figura 95 – Recorte 4 da atividade de leitura guiada sobre linhas de segunda curvatura planas e circulares.

Recorte 4 — Linhas de segunda curvatura planas e circulares.

Trecho selecionado de *Applications de géométrie et de mécanique*, IV^a Memória, § III, p. 204-205

Toutes les tangentes aux cercles de courbure tracés sur les sphères génératrices, par ces plans coupants, passeront évidemment par la même droite que tous ces plans où elles se trouvent respectivement placées. Parmi ces diverses tangentes, celles qui partent des divers points d'une ligne de seconde courbure, formeront par cela même une surface développable.

Mais une surface développable dont les arêtes rectilignes doivent toutes passer par une droite directrice, ne peut être qu'un plan ou un cône. Si elle était un plan, ce plan passant par la droite directrice, serait un de ceux qui contiennent les premières lignes de courbure. Alors les secondes lignes de courbure, loin de couper les premières à angle droit, se confondraient partout avec elles. Il suit de là que les tangentes aux lignes de première

courbure, menées par chacun des points d'une ligne de seconde courbure, forment un cône.

Considérons, maintenant, la suite des points de contact des sphères génératrices avec une des sphères fixes. Ces points forment nécessairement, pour l'enveloppe des sphères génératrices, une seconde ligne de courbure; puisque les normales communes à l'enveloppe et à chaque sphère fixe, forment une surface développable conique.

Donc la ligne de seconde courbure, tracée sur chacune des trois sphères fixes, a pour normales, des droites formant un cône. Nous démontrerons que cette ligne doit être plane et circulaire.

Deux des trois cercles de seconde courbure étant déterminés chacun sur une sphère fixe, ces deux cercles suffiront pour déterminer la position de chaque sphère génératrice; et, par suite la surface enveloppe de toutes ces sphères génératrices.

Il est évident que les trois sphères fixes sont symétriques par rapport au plan mené par leurs trois centres. Par conséquent, 1°. les sphères génératrices sont disposées symétriquement, au-dessus et au-dessous de ce plan; 2°. toute sphère ayant son centre sur ce plan, et touchant deux des sphères génératrices au-dessus du même plan, en touchera pareillement deux autres au-dessous.

Todas as tangentes aos círculos de curvatura traçados sobre as esferas geratrizes, por estes planos secantes, passarão evidentemente pela mesma reta que todos estes planos onde elas se encontram respectivamente colocadas. Entre estas diversas tangentes, aquelas que partem dos diversos pontos de uma linha de segunda curvatura formarão, por isso mesmo, uma superfície desenvolvível.

Mas uma superfície desenvolvível cujas arestas retilíneas devem todas passar por uma reta diretriz, não pode ser senão um plano ou um cone. Se ela fosse um plano, este plano passando pela reta diretriz, seria um daqueles que contêm as primeiras linhas de curvatura. Então as segundas linhas de curvatura, longe de cortarem as primeiras em ângulo reto, se confundiriam por toda a parte com elas. Segue-se daí que as tangentes às linhas de primeira curvatura, traçadas por cada um dos pontos de uma linha de segunda curvatura, formam um cone.

Consideremos, agora, a sucessão dos pontos de contato das esferas geratrizes com uma das esferas fixas. Estes pontos formam necessariamente, para a envoltória das esferas geratrizes, uma segunda linha de curvatura; já que as normais comuns à envoltória e a cada esfera fixa, formam uma superfície desenvolvível cônica.

Logo a linha de segunda curvatura, traçada sobre cada uma das três esferas fixas, tem por normais, retas formando um cone. Nós demonstraremos que esta linha deve ser plana e circular.

Dois dos três círculos de segunda curvatura sendo determinados cada um sobre uma esfera fixa, estes dois círculos bastarão para determinar a posição de cada esfera geratriz; e, por conseguinte a superfície envoltória de todas estas esferas geratrizes.

É evidente que as três esferas fixas são simétricas em relação ao plano traçado pelos seus três centros. Por conseguinte, 1°. as esferas geratrizes estão dispostas simetricamente, acima e abaixo deste plano; 2°. toda esfera tendo o seu centro sobre este plano, e tocando duas das esferas geratrizes acima do mesmo plano, tocará igualmente duas outras abaixo.

Fonte: Dupin (1822, p. 204–205).

Tradução do francês realizada com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Gemini e revisada pela autora.

Fonte: Elaborado a partir de Dupin (1822, p. 204–205). Tradução da autora.

Figura 96 – Recorte 5 da atividade de leitura guiada sobre as condições definitivas da geração das ciclides.

Recorte 5 — Condições definitivas da geração das ciclides.

Trecho selecionado de *Applications de géométrie et de mécanique*, IV^a Memória, § III, p. 205-207

Déterminons une nouvelle sphère fixe touchant ainsi quatre des sphères génératrices précédemment déterminées. Nous pourrions remplacer par cette nouvelle sphère une des trois anciennes. Les deux autres, conservant quatre points de contact avec quatre sphères génératrices supposées rester les mêmes, auront chacune même cercle de contact avec l'enveloppe ainsi qu'avec toutes les sphères génératrices. Par conséquent, cette surface enveloppe n'aura pas changé par la substitution de la nouvelle sphère fixe, à la place d'une des trois anciennes. Donc, enfin, la même surface enveloppe peut être produite par une infinité de nouvelles sphères dont chacune soit tangente à toutes les sphères génératrices, et dont chacune produise un cercle pour ligne de seconde courbure de cette enveloppe.

Ainsi, premièrement, il est possible de trouver d'autres surfaces que la sphère, le cylindre et le cône de révolution, qui n'aient que des cercles pour lignes de courbure; secondement, il suffira, pour définir ces surfaces cyclides, d'assujettir une sphère, variable de rayon, à toucher constamment trois sphères fixes quelconques; troisièmement, il n'y a pas de génération possible qui produise d'autres surfaces de la même famille.

Les lignes lieux des centres de courbure des surfaces cyclides ont des propriétés remarquables: nous allons exposer celles qui peuvent être applicables au sujet que nous traitons.

Nous avons vu que les centres des sphères fixes sont tous situés dans un même plan. Nous eussions pu prendre pour génératrices les sphères que nous avons appelées fixes; et, réciproquement, prendre pour fixes celles que nous avons regardées comme génératrices. Donc les sphères de chaque génération ont leurs centres placés dans un plan particulier unique: il est facile de voir que ces deux plans doivent se couper à angle droit.

La surface cyclide est, comme nous l'avons vu, symétrique par rapport au premier de ces plans; elle l'est aux mêmes titres par rapport au second. Or, quand une surface est symétrique par rapport à deux plans, il faut nécessairement que ces plans se coupent à angle droit (*).

Pour distinguer les deux manières d'engendrer la surface cyclide par les intersections successives de sphères enveloppées, nous appellerons les sphères d'une génération *premières sphères*, et celles de l'autre génération *secondes sphères*.

Fonte: Dupin (1822, p. 205–207).
Tradução do francês realizada com auxílio da ferramenta de inteligência artificial Gemini e revisada pela autora.

Determinemos uma nova esfera fixa tocando assim quatro das esferas geratrizes precedentemente determinadas. Poderemos substituir por esta nova esfera uma das três antigas. As duas outras, conservando quatro pontos de contato com quatro esferas geratrizes supostas permanecerem as mesmas, terão cada uma o mesmo círculo de contato com a envoltória bem como com todas as esferas geratrizes. Por conseguinte, esta superfície envoltória não terá mudado pela substituição da nova esfera fixa, no lugar de uma das três antigas. Logo, enfim, a mesma superfície envoltória pode ser produzida por uma infinidade de novas esferas, das quais cada uma seja tangente a todas as esferas geratrizes, e das quais cada uma produza um círculo como linha de segunda curvatura desta envoltória.

Assim, primeiramente, é possível encontrar outras superfícies além da esfera, do cilindro e do cone de revolução, que não tenham senão círculos como linhas de curvatura; secundamente, bastará, para definir estas superfícies ciclidas, sujeitar uma esfera, variável de raio, a tocar constantemente três esferas fixas quaisquer; terceiromente, não há geração possível que produza outras superfícies da mesma família.

As linhas lugares dos centros de curvatura das superfícies ciclidas têm propriedades notáveis: vamos expor aquelas que podem ser aplicáveis ao assunto que tratamos.

Vimos que os centros das esferas fixas estão todos situados num mesmo plano. Nós poderíamos ter tomado por geratrizes as esferas que chamamos de fixas; e, reciprocamente, tomado por fixas aquelas que consideramos como geratrizes. Logo, as esferas de cada geração têm os seus centros colocados num plano particular único: é fácil de ver que estes dois planos devem se cortar em ângulo reto.

Para distinguir as duas maneiras de gerar a superfície ciclida pelas interseções sucessivas de esferas envolvidas chamaremos às esferas de uma geração primeiras esferas, e às da outra geração segundas esferas.

Fonte: Elaborado a partir de Dupin (1822, p. 205–207). Tradução da autora.

Após a leitura dos cinco recortes selecionados, propõe-se uma etapa de interpretação orientada. As questões a seguir auxiliam na identificação das ideias geométricas centrais do texto de Dupin e favorecem a articulação entre leitura histórica, compreensão conceitual e formação geométrica do professor.

Figura 97 – Questões orientadoras da leitura dos recortes selecionados da obra de Dupin.

Questões orientadoras da leitura

Após a leitura dos recortes selecionados da obra de Charles Dupin, responda às questões a seguir.

As perguntas têm como finalidade auxiliar a identificação das ideias geométricas centrais do texto, relacionando a definição das superfícies cíclicas, a geração por esferas e as condições apresentadas por Dupin para a construção dessas superfícies.

Sobre o Recorte 1 — A definição das superfícies cíclicas em Dupin

1. Como Dupin caracteriza as superfícies cíclicas nesse trecho?
2. O que significa dizer que uma superfície possui linhas de maior e de menor curvatura formadas por círculos?
3. Por que a esfera, o cone e o cilindro de revolução aparecem como exemplos iniciais dessa família de superfícies?

Sobre o Recorte 2 — Esferas móveis e a geração das superfícies cíclicas

4. Como Dupin relaciona as superfícies cíclicas ao movimento de esferas?
5. O que significa afirmar que uma superfície pode ser gerada por uma esfera cujo raio varia convenientemente?
6. De que maneira essa ideia de geração por esferas pode ajudar na visualização das cíclicas?

Fonte: Elaboração própria.

Figura 98 – Continuação das questões orientadoras da leitura dos recortes selecionados da obra de Dupin.

Questões orientadoras da leitura

Sobre o Recorte 3 — Três esferas fixas, pontos de contato e reta diretriz

7. Qual é o papel das três esferas fixas na construção descrita por Dupin?

8. Por que os três pontos de contato entre as esferas são importantes para determinar o círculo linha de curvatura?

9. O que você compreende pela ideia de "reta diretriz" apresentada nesse trecho?

Sobre o Recorte 4 — Linhas de segunda curvatura planas e circulares

10. Como os pontos de contato das esferas geratrizes com uma esfera fixa se relacionam com as linhas de segunda curvatura?

11. Por que é importante observar que essas linhas são planas e circulares?

Sobre o Recorte 5 — Condições definitivas da geração das cíclicas

12. Quais são as condições apresentadas por Dupin para a geração das superfícies cíclicas?

13. Por que a condição de uma esfera variável tocar constantemente três esferas fixas pode ser considerada central para compreender as cíclicas de Dupin?

14. Depois da leitura dos cinco recortes, como você explicaria, com suas próprias palavras, o que é uma superfície cíclica?

Questão-síntese

15. Após a leitura dos recortes selecionados, de que maneira esse contato com um texto clássico de Geometria Diferencial contribuiu para sua percepção sobre as superfícies cíclicas e sobre a própria formação geométrica do professor de Matemática?

Fonte: Elaboração própria.

5.2 Visualizando superfícies e linhas de curvatura no GeoGebra

A segunda atividade propõe uma exploração visual de superfícies no ambiente GeoGebra 3D, tomando como ponto de partida a leitura realizada na atividade anterior. Nos recortes selecionados da obra de Dupin, aparecem superfícies como a esfera, o cone e o cilindro de revolução, associadas à ideia de linhas de curvatura circulares. A partir dessa referência, a atividade busca favorecer a observação de famílias de curvas sobre superfícies, aproximando o professor de uma leitura geométrica mais visual e dinâmica.

Nesta etapa, o professor participante é convidado a acessar construções previamente elaboradas no GeoGebra, observando superfícies conhecidas e identificando nelas curvas geradas pela variação de parâmetros. O foco está na percepção das linhas que estruturam a superfície, como paralelos, meridianos e circunferências obtidas por cortes ou por curvas coordenadas. Essa observação prepara o caminho para a compreensão das ciclides de Dupin, nas quais as linhas de curvatura possuem papel central.

A proposta privilegia uma aproximação inicial com a geometria das superfícies por meio da visualização, da observação e da comparação entre diferentes formas. Desse modo, o GeoGebra é utilizado como recurso para ampliar a percepção geométrica e favorecer a construção de significados a partir de objetos tridimensionais.

Encaminhamento da atividade

Inicialmente, o professor participante deve acessar as construções no GeoGebra 3D correspondentes à esfera, ao cilindro, ao cone e ao toro. Durante a exploração, o professor deve identificar quais curvas permanecem circulares, quais podem ser interpretadas como retas geratrizes e de que maneira essas curvas ajudam a compreender a forma da superfície. Em seguida, deve comparar as superfícies observadas, relacionando-as com a leitura realizada na atividade anterior.

Figura 99 – Construções dinâmicas no GeoGebra 3D para exploração de superfícies e famílias de curvas.

Construções dinâmicas no GeoGebra

Acesse os QR Codes para observar, no GeoGebra 3D, animações das famílias de curvas destacadas sobre cada superfície. Em cada construção, um ponto móvel percorre a superfície e determina curvas associadas a ele, permitindo visualizar como essas curvas organizam geometricamente a esfera, o cone, o cilindro e o toro.

Esfera

A animação apresenta duas famílias de círculos sobre a superfície: uma associada aos paralelos e outra aos meridianos

A visualização permite observar como essas curvas permanecem sobre a esfera e se intersectam ao longo da superfície.



Cone

A construção destaca círculos paralelos à base e retas geratrizes associadas ao ponto móvel.

A animação permite observar como essas curvas percorrem o cone e ajudam a compreender sua estrutura geométrica.



Cilindro

A animação evidencia círculos horizontais e retas geratrizes sobre a superfície cilíndrica.

Essas duas famílias de curvas permitem relacionar o cilindro à discussão feita por Dupin sobre superfícies com linhas circulares e retas interpretadas como círculos de raio infinito.

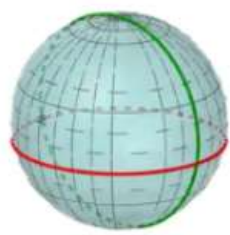
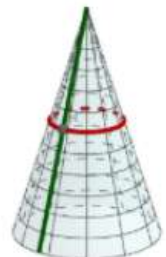
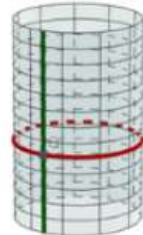
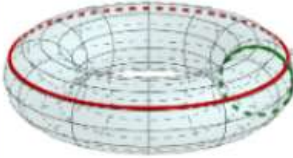


Toro

A construção apresenta curvas associadas à parametrização do toro.

A animação permite observar como essas curvas percorrem a superfície e como a variação dos parâmetros organiza geometricamente o objeto.



Fonte: construções elaboradas pela autora no GeoGebra 3D.

Fonte: Construções elaboradas pela autora no GeoGebra 3D.

Após acessar as construções dinâmicas no GeoGebra 3D, propõe-se uma etapa de exploração orientada. As questões a seguir auxiliam na observação das famílias de curvas destacadas na esfera, no cone, no cilindro e no toro, relacionando a visualização dinâmica ao estudo das linhas de curvatura e à leitura realizada anteriormente na obra de Dupin.

Figura 100 – Questões orientadoras da exploração dinâmica das superfícies no GeoGebra 3D.

Questões orientadoras da exploração dinâmica

Após acessar as construções dinâmicas no GeoGebra 3D, observe as animações de cada superfície e responda às questões a seguir.

As perguntas têm como finalidade orientar a análise das famílias de curvas destacadas na esfera, no cone, no cilindro e no toro, relacionando a visualização dinâmica ao estudo das linhas de curvatura e à leitura realizada anteriormente na obra de Dupin.

Sobre a esfera

1. Na esfera, as duas famílias de curvas destacadas podem ser interpretadas como círculos traçados em direções distintas. Como essa visualização ajuda a compreender a afirmação de Dupin de que a esfera pertence à família das superfícies cujas linhas de curvatura são circulares?
2. Ao observar a animação, que papel o ponto móvel desempenha na percepção dessas famílias de curvas sobre a superfície?

Sobre o cone e o cilindro

3. Dupin considera o cone e o cilindro de revolução como superfícies pertencentes à família estudada por ele. A partir das animações, como é possível justificar essa inclusão?
4. Nas construções do cone e do cilindro, aparecem círculos e retas geratrizes. Em que sentido essas retas podem ser relacionadas à ideia de círculos de raio infinito mencionada por Dupin?
5. Que semelhanças e diferenças podem ser observadas entre a organização das curvas no cone e no cilindro?

Figura 101 – Continuação das questões orientadoras da exploração dinâmica das superfícies no GeoGebra 3D.

Questões orientadoras da exploração dinâmica

Sobre o toro

6. No toro, as curvas destacadas estão associadas à sua parametrização. Como a animação permite perceber que a superfície pode ser compreendida a partir da variação de dois parâmetros?

7. Comparando o toro com a esfera, o cone e o cilindro, que diferenças aparecem na forma como as famílias de curvas se organizam sobre a superfície?

Questões de articulação

8. De que maneira as construções dinâmicas ajudam a tornar visíveis ideias que, no texto de Dupin, aparecem principalmente por meio de argumentação geométrica escrita?

9. Que limites a visualização dinâmica apresenta? Em outras palavras, o que o GeoGebra ajuda a perceber, mas não substitui em relação à compreensão matemática do conceito?

10. Pensando na formação de professores, como essa atividade pode contribuir para ampliar a cultura geométrica sem exigir, necessariamente, um tratamento formal completo de Geometria Diferencial?

Fonte: Elaboração própria.

5.2.1 Parâmetros, forma canônica e curva focal da ciclidade de Dupin no GeoGebra

A terceira atividade propõe a exploração dinâmica de uma construção da ciclidade de Dupin no GeoGebra 3D, com ênfase na relação entre os parâmetros da superfície, sua forma canônica e a curva focal associada. Após a leitura orientada de trechos da obra de Dupin e a visualização de curvas em superfícies como esfera, cone, cilindro e toro, esta atividade direciona a atenção para a ciclidade propriamente dita.

Na construção, são destacados os parâmetros b , c e d , enquanto o valor de a é obtido automaticamente pela relação

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

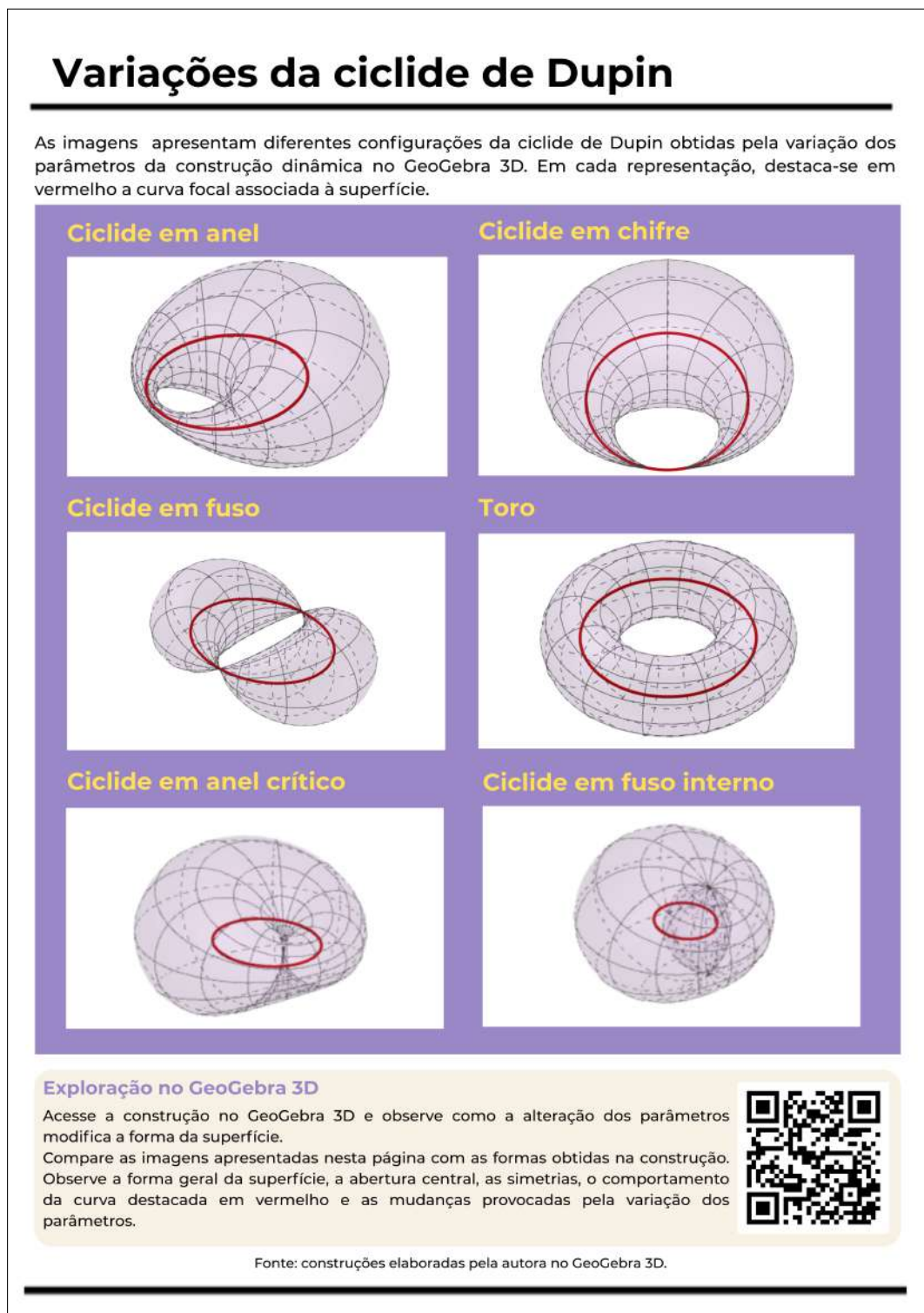
A partir desses valores, o GeoGebra apresenta a equação da ciclidade na forma canônica, a parametrização da superfície e a equação da elipse focal correspondente. Desse modo, o professor participante pode observar como os elementos algébricos presentes nas equações se relacionam com a forma geométrica da superfície representada no ambiente tridimensional.

A atividade busca articular visualização dinâmica e linguagem algébrica, favorecendo a compreensão da ciclidade como um objeto geométrico organizado por parâmetros. Ao modificar os valores disponíveis na construção, o professor pode acompanhar alterações na superfície e na curva focal destacada, analisando como essas mudanças contribuem para interpretar diferentes configurações da ciclidade de Dupin.

As denominações adotadas para as configurações morfológicas das ciclidades de Dupin possuem caráter descritivo e didático, sendo utilizadas para organizar visualmente as formas obtidas nas construções dinâmicas. Neste trabalho, serão consideradas as seguintes configurações: ciclidade em anel, ciclidade em chifre, ciclidade em fusão, toro, ciclidade em anel crítico e ciclidade em fusão interno.

Desse modo, a construção no GeoGebra atua como um recurso de mediação entre a formulação matemática e a percepção visual da superfície. A proposta permite retomar aspectos discutidos anteriormente, como a geração das superfícies ciclides, a presença de curvas associadas à sua estrutura e a importância das representações dinâmicas para a ampliação da cultura geométrica do professor.

Figura 102 – Atividade 3: variações da ciclidade de Dupin obtidas na construção dinâmica no GeoGebra 3D.



Fonte: Construções elaboradas pela autora no GeoGebra 3D.

Figura 103 – Atividade 3: questões orientadoras da exploração dinâmica das variações da ciclidade de Dupin.

Questões orientadoras da exploração dinâmica

Após acessar a construção no GeoGebra 3D, observe as diferentes configurações da ciclidade de Dupin e responda às questões a seguir.

As perguntas têm como finalidade orientar a análise da relação entre os parâmetros da construção, a forma da superfície, a forma canônica e a curva focal destacada em vermelho.

Sobre os parâmetros e as variações da ciclidade

1. Na construção, modifique os parâmetros c e d e observe a forma assumida pela superfície. O que acontece quando $c < d < a$? Que configuração da ciclidade aparece nesse caso?
2. Mantendo $c < d$, ajuste o valor de d até que $d = a$. Que mudança ocorre na superfície? Como essa configuração se relaciona com a ciclidade em anel crítico?
3. Agora aumente o valor de d de modo que $c < a < d$. O que acontece com a superfície quando d ultrapassa o valor de a ?
4. Agora ajuste os parâmetros de modo que $c = d < a$. O que acontece com a forma da ciclidade nesse caso?
5. Considere agora a situação em que $0 < d < c < a$. Que configuração aparece? Como a abertura central e a forma geral da superfície diferem do caso em anel?
6. Faça $d = 0$, mantendo $c > 0$. Que configuração aparece? O que muda em relação ao caso anterior?
7. Agora ajuste $c = 0$, mantendo $0 < d < a$. Que configuração aparece na construção? Como essa superfície se diferencia das demais variações observadas?
8. Compare as situações $c < d < a$, $d = a$, $c = d < a$ e $0 < d < c < a$. Que diferenças podem ser observadas na abertura central e na forma global da superfície?
9. Compare os casos $0 < d < c < a$ e $d = 0$, com $c > 0$. Que mudanças podem ser percebidas na superfície? Em que sentido a configuração com $d = 0$ pode ser vista como um caso particular da ciclidade em fuso?
10. A partir das explorações anteriores, complete a síntese abaixo:
 Quando $c < d < a$, a ciclidade assume a forma de _____.
 Quando $d = a$, a ciclidade assume a forma de _____.
 Quando $c < a < d$, a ciclidade assume a forma de _____.
 Quando $c = d < a$, a ciclidade assume a forma de _____.
 Quando $0 < d < c < a$, a ciclidade assume a forma de _____.
 Quando $d = 0$ e $c > 0$, a ciclidade assume a forma de _____.
 Quando $c = 0$ e $0 < d < a$ a ciclidade assume a forma de _____.

Fonte: Elaboração própria.

Figura 104 – Atividade 3: continuação das questões orientadoras da exploração dinâmica das variações da ciclode de Dupin.

Questões orientadoras da exploração dinâmica

Sobre a forma canônica

11. Observe a equação da ciclode apresentada na construção. De que maneira os parâmetros **a**, **b**, **c** e **d** aparecem na forma canônica da superfície?

12. Ao alterar os parâmetros **c** e **d**, quais termos da equação se modificam?

13. Como a visualização dinâmica ajuda a relacionar os valores numéricos da equação com a forma geométrica da superfície?

14. Que vantagens existem em observar, ao mesmo tempo, a equação da ciclode e sua representação tridimensional ?

Sobre a curva focal

15. Em cada configuração, observe a curva destacada em vermelho. Como sua forma e sua posição se modificam quando os parâmetros são alterados?

16. Que relação pode ser percebida entre a curva focal destacada e a forma assumida pela ciclode?

17. A curva focal apresentada na construção pode ser descrita por uma equação do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Observando os valores de **a** e **b**, em quais situações essa curva se apresenta como uma elipse mais alongada?

18. O que acontece com a curva focal quando **c = 0**?

19. Sabendo que

$$a = \sqrt{b^2 + c^2},$$

o que ocorre com o valor de **a** quando **c = 0**?

20. Substituindo essa relação na equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

qual curva é obtida quando **a = b**?

21. Como essa observação ajuda a compreender o toro como um caso particular da ciclode de Dupin?

Figura 105 – Atividade 3: continuação das questões orientadoras da exploração dinâmica das variações da ciclidade de Dupin.

Questões orientadoras da exploração dinâmica

Questões de articulação

22. Comparando esta atividade com a leitura dos recortes de Dupin, de que maneira a construção dinâmica ajuda a visualizar ideias que, no texto histórico, aparecem por meio de argumentação geométrica?

23. De que modo a análise dos parâmetros, da forma canônica e da curva focal amplia a compreensão da ciclidade de Dupin?

24. Pensando na formação de professores, como essa atividade pode contribuir para aproximar visualização geométrica, linguagem algébrica e História da Matemática?

Questão-síntese

25. Após explorar a construção, escreva um breve comentário explicando como a variação dos parâmetros c e d permite compreender as diferentes configurações da ciclidade de Dupin e o comportamento de sua curva focal.

Fonte: Elaboração própria.

As atividades apresentadas neste capítulo foram organizadas de modo progressivo, partindo da leitura de um texto clássico de Charles Dupin, passando pela visualização dinâmica de superfícies no GeoGebra 3D e chegando à exploração dos parâmetros, da forma canônica e da curva focal da ciclidade de Dupin.

A primeira atividade buscou aproximar o professor de uma fonte histórica, favorecendo a leitura orientada de ideias geométricas presentes na obra de Dupin. A segunda propôs a observação de superfícies mais familiares, como esfera, cone, cilindro e toro, destacando a presença de curvas sobre superfícies e preparando a visualização das ciclides. A terceira concentrou-se na exploração dinâmica da ciclidade de Dupin, relacionando parâmetros, equações, curva focal e diferentes configurações morfológicas obtidas no GeoGebra.

Desse modo, o capítulo articula História da Matemática, visualização geométrica, linguagem algébrica e tecnologia digital. As atividades não têm como finalidade desenvolver formalmente toda a teoria das ciclides de Dupin, mas oferecer ao professor uma possibilidade de aproximação com esse objeto matemático por meio de leitura, observação, manipulação e interpretação.

A proposta reforça a ideia de que recursos digitais, quando articulados a textos históricos

e a construções geométricas, podem contribuir para ampliar a cultura matemática do professor. Nesse sentido, as atividades apresentadas funcionam como um desdobramento didático do estudo desenvolvido nos capítulos anteriores e como uma ponte entre a fundamentação teórica da dissertação e o produto educacional elaborado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo construir possibilidades de aproximação entre a História da Matemática, a Geometria Diferencial, as tecnologias digitais e a divulgação científica, tomando as ciclides de Dupin como objeto central. Ao longo do trabalho, buscou-se desenvolver um percurso teórico, matemático e didático voltado à ampliação da cultura geométrica do professor de Matemática.

O percurso desenvolvido articulou estudo histórico, investigação matemática, modelagem no GeoGebra 3D, elaboração de atividades e produção de um material de divulgação científica. A partir dessa articulação, foi possível organizar uma abordagem que apresenta um objeto matemático pouco usual por meio de leituras orientadas, visualizações dinâmicas, imagens, modelos digitais e impressões 3D.

Mais do que oferecer uma apresentação simplificada das ciclides de Dupin, o trabalho procurou preservar a riqueza histórica e matemática dessas superfícies, reunindo diferentes caminhos de aproximação. Nesse sentido, a dissertação e o produto educacional foram construídos com o propósito de favorecer o contato de professores e estudantes com temas que, embora pouco presentes na Educação Básica e na formação inicial, podem ampliar a compreensão da Matemática como uma área histórica, visual, investigativa e em permanente desenvolvimento.

6.1 Síntese do percurso desenvolvido

Ao longo da dissertação, as ciclides de Dupin foram abordadas sob diferentes perspectivas. No Capítulo 2, essas superfícies foram situadas historicamente no contexto da Geometria Diferencial do século XIX, com destaque para os trabalhos de Charles Dupin, James Clerk Maxwell, Arthur Cayley, Gaston Darboux e outros autores relacionados ao desenvolvimento da teoria das superfícies.

No Capítulo 3, foram estudadas propriedades matemáticas das ciclides de Dupin, suas curvas focais, parametrizações, configurações morfológicas e possibilidades de representação no GeoGebra 3D. Esse estudo permitiu reunir diferentes formas de compreender a superfície, relacionando descrições algébricas, construções geométricas, famílias de esferas, curvas focais, representações sintéticas e visualizações tridimensionais.

No Capítulo 4, a análise foi aprofundada por meio de elementos da Geometria Diferencial aplicados às ciclides de Dupin. A partir da parametrização da superfície, foram discutidos curvas coordenadas, vetores tangentes, plano tangente, vetor normal, formas fundamentais, curvatura normal, curvatura gaussiana, curvatura média, curvaturas principais e linhas de curvatura. Essa etapa permitiu investigar propriedades locais da superfície e relacioná-las às construções dinâmicas desenvolvidas no GeoGebra.

No Capítulo 5, o percurso histórico, matemático e visual foi reorganizado na forma de atividades voltadas a professores de Matemática. As propostas foram elaboradas com a intenção de promover uma aproximação progressiva com o tema, partindo da leitura de textos históricos, passando pela exploração de superfícies mais conhecidas e chegando à investigação das ciclides de Dupin.

A modelagem no GeoGebra 3D ocupou papel central nesse processo. As construções dinâmicas permitiram acompanhar a variação de parâmetros, comparar diferentes configurações morfológicas, analisar elementos diferenciais da superfície e estabelecer relações entre equações, propriedades geométricas e formas tridimensionais. Dessa maneira, a tecnologia atuou como instrumento de investigação e visualização, auxiliando na interpretação de descrições matemáticas que, em textos históricos, aparecem por meio de argumentos geométricos e expressões analíticas.

As imagens, animações e modelos digitais produzidos ao longo da pesquisa também possibilitaram a criação de impressões 3D das ciclides. Esses objetos físicos oferecem novas formas de contato com as superfícies, permitindo sua observação por meio do tato, da rotação manual e da comparação direta entre diferentes configurações. No contexto do produto educacional, tais modelos podem atuar como recursos de aproximação, divulgação e exploração geométrica.

6.2 Contribuições para a formação geométrica do professor

A pesquisa foi orientada pela compreensão de que a formação matemática do professor pode ser ampliada pelo contato com objetos que ultrapassam os conteúdos usualmente abordados na Educação Básica. As ciclides de Dupin oferecem essa possibilidade por mobilizarem conceitos relacionados a cônicas, superfícies parametrizadas, curvas sobre superfícies, tangência, curvatura, famílias de esferas e visualização tridimensional.

Essa perspectiva dialoga com a preocupação apresentada por Klein acerca da relação entre a Matemática superior e a Matemática escolar (Klein, 1928). O estudo de um objeto como a ciclidade permite revisitar conteúdos conhecidos a partir de uma estrutura mais ampla, estabelecendo novas relações entre geometria analítica, geometria espacial, parametrizações e visualização.

A proposta também se relaciona à discussão de Shulman sobre o conhecimento do conteúdo para o ensino (Shulman, 1986). Ao elaborar atividades, imagens, perguntas orientadoras e construções dinâmicas, torna-se necessário reorganizar o conhecimento matemático em formas de representação, explicação e investigação. Nesse sentido, o produto educacional foi concebido como uma mediação entre a complexidade do objeto matemático e professores interessados em ampliar seu repertório geométrico.

A escolha das ciclides valoriza ainda o estudo de objetos matemáticos pouco presentes nos currículos de formação inicial. O contato com essas superfícies pode contribuir para apresentar a Matemática como uma área viva, histórica e investigativa, na qual equações, formas, imagens e

construções se articulam de diferentes maneiras.

A ampliação da cultura geométrica, nessa perspectiva, não está associada à pretensão de transformar o professor da Educação Básica em um especialista em Geometria Diferencial. Trata-se de oferecer condições para que ele conheça novos objetos, reconheça conexões entre diferentes campos da Matemática e tenha acesso a temas que possam alimentar sua curiosidade intelectual, sua formação cultural e sua prática docente.

6.3 História da Matemática, tecnologia e visualização

A articulação entre História da Matemática e tecnologia digital constituiu um dos principais eixos desta pesquisa. A leitura de textos clássicos, como os de Dupin, Maxwell e Cayley, permite compreender que os conceitos matemáticos foram elaborados em contextos específicos, a partir de linguagens, problemas, objetivos e métodos próprios.

Miguel e Miorim destacam que a História da Matemática pode contribuir para o ensino ao favorecer a compreensão da Matemática como produção humana, cultural e historicamente situada (Miguel; Miorim, 2011). Nesta dissertação, essa perspectiva aparece na leitura orientada de Dupin, na retomada dos estudos de Maxwell e Cayley e na interpretação das ciclides como objetos constituídos ao longo de um percurso histórico.

O uso do GeoGebra 3D permitiu estabelecer uma ponte entre os textos históricos e as possibilidades contemporâneas de visualização. As construções dinâmicas possibilitaram observar superfícies e curvas que, nos textos clássicos, são apresentadas por meio de descrições geométricas e formulações analíticas. A tecnologia não substituiu a leitura matemática ou histórica, mas ofereceu outras formas de interpretar, explorar e comunicar os conceitos estudados.

Borba e Villarreal discutem o papel das tecnologias na reorganização do pensamento matemático, especialmente em situações que envolvem experimentação, modelagem e visualização (Borba; Villarreal, 2005). Essa perspectiva aproxima-se do percurso desenvolvido nesta dissertação, pois as construções no GeoGebra auxiliaram tanto no estudo das propriedades das ciclides quanto na elaboração das atividades do produto educacional.

A visualização matemática também ocupou papel importante nesse processo. Arcavi destaca que as representações visuais podem contribuir para a aprendizagem matemática quando articuladas à linguagem simbólica e à argumentação conceitual (Arcavi, 2003). No estudo das ciclides, essa articulação aparece na relação entre equações, parametrizações, curvas focais, superfícies digitais e modelos físicos.

Desse modo, História da Matemática, tecnologia e visualização não foram tratadas como elementos isolados. A combinação entre essas perspectivas orientou a construção de uma proposta na qual textos históricos podem ser relidos com o auxílio de recursos contemporâneos, sem que se perca de vista a complexidade matemática e cultural dos objetos estudados.

6.4 Produto educacional e possibilidades de uso

O produto educacional resultante desta pesquisa corresponde à segunda edição da revista *Trajetórias — História da Matemática e Divulgação Científica*. Nesta edição, as ciclides de Dupin constituem o eixo central de um percurso que reúne História da Matemática, Geometria Diferencial, construções no GeoGebra 3D, atividades orientadas, entrevistas, imagens e modelos impressos em 3D.

A revista foi organizada para conduzir o leitor por diferentes formas de aproximação com as ciclides de Dupin. O percurso inicia-se com sua contextualização histórica, avança para a apresentação matemática e visual das superfícies e chega às propostas de exploração e aos diálogos com pesquisadores e profissionais de diferentes áreas.

As atividades propostas no Capítulo 5 foram organizadas de maneira progressiva. A primeira promove a leitura guiada de trechos da obra de Dupin, aproximando o professor de uma fonte histórica. A segunda propõe a exploração de superfícies conhecidas no GeoGebra 3D, como esfera, cone, cilindro e toro. A terceira concentra-se na ciclidade de Dupin, relacionando parâmetros, equações, curvas focais e configurações morfológicas.

Esse conjunto de atividades poderá ser utilizado em grupos de estudo, oficinas, cursos de formação inicial ou continuada, disciplinas de graduação e iniciativas de divulgação científica. O material também poderá ser consultado individualmente por professores interessados em explorar superfícies, construções no GeoGebra ou relações entre História da Matemática e visualização geométrica.

As impressões 3D ampliam as possibilidades de utilização do produto. Ao serem levadas para contextos escolares e formativos, podem favorecer conversas sobre formas geométricas, superfícies, tecnologia, modelagem e percepção espacial. O contato com os modelos permite ainda aproximar a visualização matemática do corpo e do tato, ampliando as formas de interação com objetos tridimensionais.

As entrevistas reunidas na seção *Trajetórias em Diálogo* também ampliam as perspectivas apresentadas na revista. Os diálogos estabelecem relações entre Geometria Diferencial, formação matemática, História da Matemática, tecnologias digitais, Artes, visualização e divulgação científica. Dessa maneira, o produto não se limita à apresentação formal de um objeto matemático, mas procura inseri-lo em uma rede mais ampla de práticas, experiências e formas de produção do conhecimento.

A teoria das ciclides de Dupin abrange diferentes formulações, casos particulares e generalizações. Nesta dissertação, o estudo concentrou-se principalmente na ciclidade elíptico-hiperbólica, considerando sua relação com as curvas focais e suas possibilidades de construção e exploração no GeoGebra 3D. A ciclidade parabólica foi apresentada como um caso complementar, indicando outras possibilidades de investigação dentro dessa família de superfícies.

6.5 Perspectivas de continuidade

As atividades e os materiais produzidos foram organizados como propostas de leitura, visualização e investigação. Sua utilização em grupos de estudo, cursos de formação de professores, oficinas ou atividades com estudantes constitui uma possibilidade de continuidade deste trabalho.

Uma dessas possibilidades consiste na utilização das atividades em contextos de formação inicial ou continuada de professores, buscando compreender como os participantes interagem com os textos históricos, as construções digitais, as equações e os modelos tridimensionais.

Também poderão ser desenvolvidas oficinas com estudantes da Educação Básica, especialmente do Ensino Médio, explorando as ciclides como objetos de visualização, modelagem e divulgação científica. Nessas experiências, será possível investigar as associações construídas pelos estudantes entre as superfícies matemáticas e formas presentes na arquitetura, no design, nas Artes e no cotidiano.

Outra possibilidade está na ampliação das construções digitais e dos modelos físicos, incluindo novas configurações das ciclides, diferentes formas de parametrização e o aprofundamento do caso parabólico. A incorporação de recursos de realidade aumentada, animações e ambientes virtuais também poderá ampliar as formas de interação com as superfícies.

As entrevistas e os diálogos iniciados na revista poderão igualmente ter continuidade, reunindo pesquisadores, professores e profissionais de outras áreas para discutir diferentes formas de aproximação com a Geometria, a História da Matemática e a divulgação científica.

O percurso desenvolvido nesta dissertação permitiu reunir diferentes formas de observar e compreender as ciclides de Dupin. Os textos históricos apresentaram os problemas, as linguagens e as construções relacionadas ao surgimento dessas superfícies; o estudo matemático possibilitou investigar suas equações, curvas focais e configurações; e o GeoGebra 3D tornou possível acompanhar dinamicamente a variação de seus parâmetros.

Esses elementos foram incorporados à segunda edição da revista *Trajetórias — História da Matemática e Divulgação Científica*. A revista reúne o estudo histórico e matemático realizado, as construções digitais, as propostas de atividades, as entrevistas e os modelos tridimensionais produzidos ao longo da pesquisa.

Ao aproximar textos do século XIX de recursos contemporâneos de visualização, o trabalho propõe uma forma de acesso a temas pouco presentes na formação inicial de professores de Matemática. As ciclides de Dupin tornam-se, nesse percurso, um ponto de encontro entre Geometria Diferencial, História da Matemática, tecnologia, ensino e divulgação científica.

Espera-se que a revista possa circular entre professores, licenciandos, estudantes e leitores interessados em Matemática, incentivando novas leituras, construções e investigações. Mais do que apresentar uma superfície específica, o trabalho procura abrir espaço para uma formação

matemática que valorize a curiosidade, a visualização, a história e o contato com diferentes formas de produção do conhecimento geométrico.

REFERÊNCIAS

- ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 52, p. 215–241, 2003.
- BORBA, M. d. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Experimentation and Visualization*. New York: Springer, 2005.
- BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- Britannica Editors. *Jean-Gaston Darboux*. 2026. Encyclopaedia Britannica. Disponível em: <<https://www.britannica.com/biography/Jean-Gaston-Darboux>>. Acesso em: 4 jul. 2026.
- CARMO, M. P. do. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976.
- CAYLEY, A. On the cyclide. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. 12, p. 148–165, 1873.
- CHANDRU, V.; DUTTA, D.; HOFFMANN, C. M. On the geometry of dupin cyclides. *The Visual Computer*, v. 5, p. 277–290, 1989.
- DARBOUX, G. *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*. Paris: Gauthier-Villars, 1873. Disponível em: <<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2980753>>.
- DARBOUX, G. *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*. Paris: Gauthier-Villars, 1887. v. 1.
- DARBOUX, G. *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*. Paris: Gauthier-Villars, 1896. v. 4.
- DEGEN, W. Cyclides. In: FARIN, G.; HOSCHEK, J.; KIM, M.-S. (Ed.). *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Amsterdam: North-Holland, 2002. p. 575–601.
- DUPIN, C. *Applications de géométrie et de mécanique*. Paris: Bachelier, 1822. Disponível em: <<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6527581r>>.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- GAUSS, C. F. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Göttingen: Dieterich, 1827.
- GAUSS, C. F. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Gottingae: Typis Dieterichianis, 1828. Edição digitalizada pelo Google a partir do acervo da New York Public Library, disponível no Internet Archive. Disponível em: <<https://archive.org/details/disquisitionesg00gausgoog>>. Acesso em: 12 jul. 2026.
- HILBERT, D.; COHN-VOSSEN, S. *Geometry and the Imagination*. New York: Chelsea Publishing Company, 1944.
- Killa Design. *Museum of the Future – Dubai*. 2022. Página institucional da Killa Design. Acesso em: 4 jul. 2026. Disponível em: <<https://www.killadesign.com/portfolio/museum-of-the-future/>>.

KLEIN, F. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Berlin: Springer, 1928. v. 1.

MathCurve. *Cyclide de Dupin*. s.d. Disponível em: <<https://mathcurve.com/surfaces.gb/cyclidedupin/cyclidedupin.shtml>>. Acesso em: 12 jul. 2026.

MAXWELL, J. C. On the cyclide. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. 9, p. 111–126, 1868.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. *História na educação matemática: propostas e desafios*. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

Nik Bentel Studio. *The Orb Bag in Black and White*. 2024. Página do Nik Bentel Studio. Acesso em: 4 jul. 2026. Disponível em: <<https://www.nikolasbentelstudio.com/projects/a002214f>>.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Pierre Charles François Dupin*. 2000. MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews. Acesso em: 4 jul. 2026. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dupin/>>.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Jean Gaston Darboux*. 2020. MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews. Acesso em: 4 jul. 2026. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Darboux/>>.

PRATT, M. J. Cyclides in computer aided geometric design. *Computer Aided Geometric Design*, v. 7, n. 1–4, p. 221–242, 1990.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986.

STRUİK, D. J. *Lectures on Classical Differential Geometry*. New York: Dover Publications, 1988. Disponível em: <<https://archive.org/details/lecturesonclassi0000stru>>.

APÊNDICES

APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL: REVISTA TRAJETÓRIAS

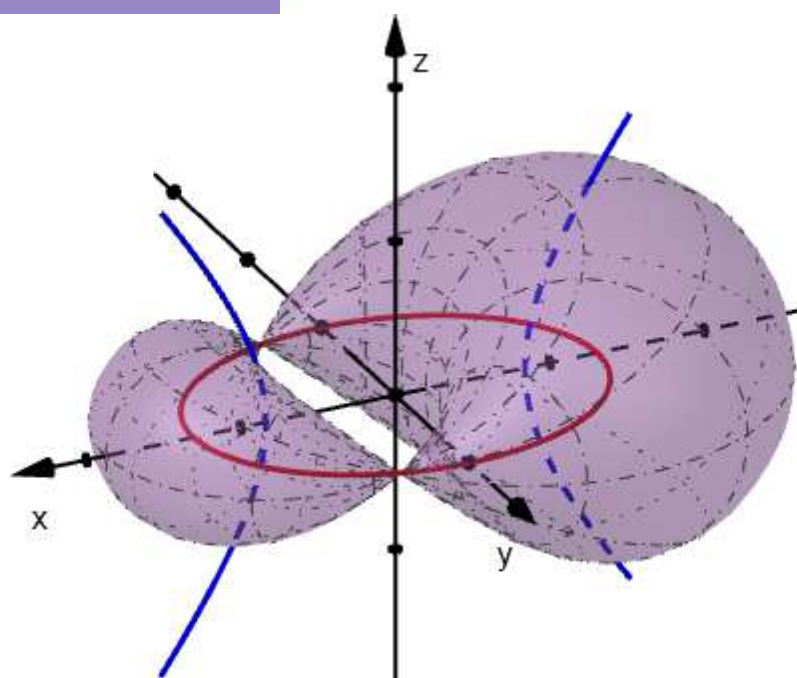


TRAJETÓRIAS

História da Matemática e Divulgação Científica

AS CICLIDES DE DUPIN

História, geometria e visualização dinâmica no GeoGebra.



TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO: Entrevistas com matemáticos brasileiros: história, tecnologia e ensino.

CHARLES DUPIN: Um geômetra do século XIX e a introdução das ciclides.

FORMAS DAS CICLIDES: Toro, fuso, chifre e outras configurações.

LINHA DO TEMPO: Do século XIX à retomada computacional.

PRÁTICA EM SALA DE AULA: GeoGebra, modelos digitais e impressão 3D como recursos didáticos.

Editorial — p. 03

1. Seção Histórica

Charles Dupin (1784–1873) — p. 04

A obra de 1822 — p. 05

As ciclides na obra de Dupin — p. 06

Evolução das ciclides — p. 07

2. Seção Matemática

Ciclides de Dupin como objeto matemático — p. 08

Superfície algébrica de grau quatro e inversão esférica — p. 09

Inversão esférica — p. 10

Ciclidade como envoltória de esferas — p. 11

A ciclidade de Dupin por meio das curvas focais — p. 12

Elipse focal e hipérbole focal — p. 13

Parâmetros e equação da ciclidade — p. 14

Parametrização e construção dinâmica no GeoGebra 3D — p. 15

Formas da ciclidade de Dupin — p. 16

Ciclidade em anel — p. 17

Ciclidade em chifre — p. 18

Ciclidade em fuso — p. 19

Ciclidade em fuso simétrico — p. 20

Toro — p. 21

Ciclidade em anel crítico — p. 22

Ciclidade em fuso interno — p. 23

Síntese das configurações das ciclides — p. 24

E as ciclides parabólicas? — p. 25

3. Trajetórias em Diálogo — p. 26

Entrevista com Celso Costa — p. 27

Entrevista com Humberto Bortolossi — p. 35

Entrevista com Felipe Aizic — p. 38

Conversa com Eduardo Madeiro — p. 43

4. Seção Didática

Da equação ao objeto — p. 47

Do modelo 3D ao GeoGebra — p. 48

Conclusão — p. 47

Referências — p. 50

Ficha Técnica — p. 52

É com grande alegria que apresento a segunda edição da revista Trajetórias – História da Matemática e Divulgação Científica.

Esta edição nasce a partir de minha pesquisa de mestrado e do desejo de aproximar professores, estudantes e leitores curiosos de um objeto geométrico tão belo quanto desafiador: as ciclides de Dupin. Ao longo deste material, buscamos mostrar que a Matemática não é apenas um conjunto de fórmulas e definições, mas também uma produção histórica, visual e criativa, construída por diferentes sujeitos ao longo do tempo.

O tema desta edição são as ciclides de Dupin, superfícies estudadas no século XIX e relacionadas a linhas de curvatura, famílias de esferas, curvas focais e transformações geométricas. A partir dos trabalhos de Charles Dupin e de outros matemáticos que ampliaram esse campo de estudo, como Maxwell, Cayley e Darboux, essas superfícies revelam uma rica articulação entre Geometria Diferencial, visualização matemática e tecnologia.

Nesta revista, o leitor encontrará uma breve trajetória histórica das ciclides, uma apresentação visual de suas principais formas, discussões sobre suas propriedades geométricas e propostas de exploração com o GeoGebra. Além disso, a edição também apresenta possibilidades de uso didático, incluindo modelos digitais e impressões 3D como recursos para tornar a geometria das superfícies mais acessível, manipulável e significativa.

Nosso propósito é simples e profundo: mostrar que objetos matemáticos aparentemente abstratos podem se tornar mais compreensíveis quando articulamos história, imagem, tecnologia e ensino. Que cada página seja um convite à descoberta, à curiosidade e ao encantamento diante das formas que a Matemática é capaz de produzir.

Boa leitura!

Victória Gentil
Editora



+55 21 99605-8507



prof.victoriagentil@gmail.com

SEÇÃO HISTÓRICA:

CHARLES DUPIN (1784–1873)

O geômetra por trás das ciclides

Charles Dupin foi um matemático, engenheiro, professor e político francês nascido em Varzy, em 1784. Sua formação científica esteve ligada à **École Polytechnique**, onde ingressou em 1801, e ao ambiente intelectual marcado pela influência de Gaspard Monge, um dos nomes centrais da geometria francesa no início do século XIX.

Seus primeiros trabalhos seguiram a tradição da geometria diferencial e da geometria aplicada. Em **Développements de géométrie**, publicado em 1813, Dupin apresentou ideias importantes sobre superfícies, tangentes conjugadas e a **indicatriz** que hoje leva seu nome. Já em **Applications de géométrie et de mécanique**, de 1822, reuniu estudos voltados a problemas de aplicação, como estabilidade de corpos flutuantes, obras de engenharia, óptica, reflexão e refração da luz.



Figura 1 - Charles Dupin

Linha do Tempo de Dupin

Nasce em Varzy, França. 1784

Ingressa na École Polytechnique. 1801

Publica *Développements de géométrie* 1813

Torna-se professor no Conservatoire National des Arts et Métiers, onde atuaria até 1854. 1818

Publica *Applications de géométrie et de mécanique*. 1822

Falece na França. 1873

É nessa obra de 1822 que Dupin introduz a noção de **ciclidade**, superfície que também passaria a carregar seu nome. As ciclides de Dupin surgem, portanto, em um contexto no qual a geometria era pensada não apenas como teoria abstrata, mas como ferramenta para compreender formas, movimentos, fenômenos físicos e problemas ligados à engenharia e à mecânica.

Dupin não estudou apenas figuras isoladas. Seu trabalho ajudou a desenvolver uma forma de pensar as superfícies por meio de suas curvaturas, linhas especiais e relações geométricas.

Por isso, seu nome permanece associado à **indicatriz de Dupin**, ao **teorema de Dupin** e às **ciclides de Dupin**.

Para além das ciclides

Charles Dupin não se destacou apenas na geometria. Também atuou na vida política francesa, ocupando cargos públicos e defendendo temas ligados à educação, à indústria e ao progresso técnico. Sua trajetória revela um intelectual que circulava entre a pesquisa matemática e os debates sobre o futuro da sociedade francesa.

SEÇÃO HISTÓRICA:

A OBRA DE 1822

Geometria, mecânica e o surgimento das ciclides

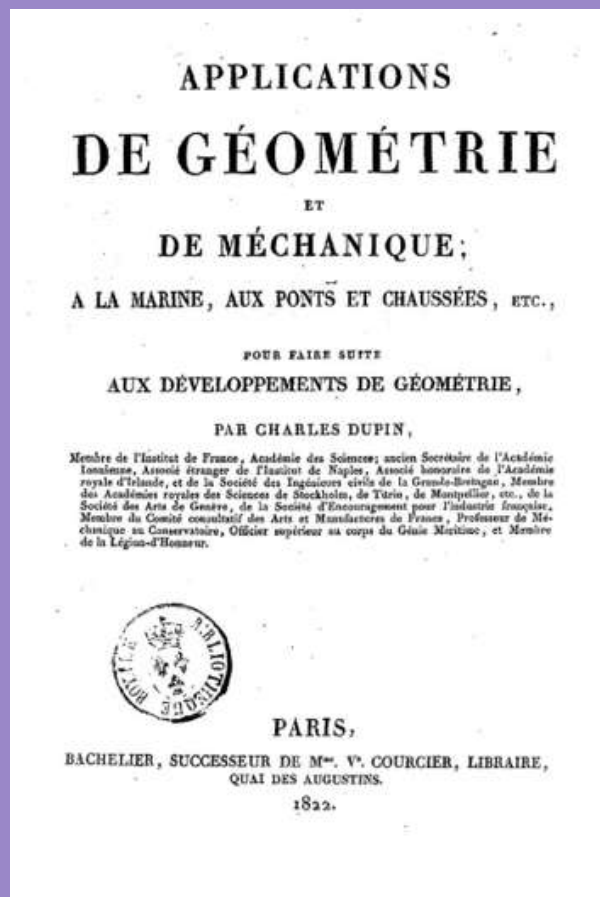


Figura 2 - Folha de rosto da obra *Applications de géométrie et de mécanique*, publicada por Charles Dupin em 1822.

Fonte: Dupin (1822).

Publicada em 1822, *Applications de géométrie et de mécanique* reúne estudos em que Charles Dupin procura aplicar a geometria a problemas científicos e técnicos. A obra aborda temas ligados à marinha, à estabilidade dos corpos flutuantes, à estrutura dos navios, ao traçado de estradas, aos cortes e aterros e aos caminhos seguidos pela luz e pelo som nos fenômenos de reflexão e refração.

Nesse contexto, a geometria aparece como uma ferramenta para compreender formas, movimentos e fenômenos físicos. É também nessa obra que Dupin emprega o termo “**cyclide**”, ao estudar superfícies associadas a famílias de esferas e a linhas de curvatura circulares.

Assim, as **ciclides** não surgem como figuras isoladas, mas como parte de uma investigação mais ampla sobre superfícies, curvaturas, tangências e aplicações geométricas. A obra revela a preocupação de Dupin em aproximar a teoria geométrica de problemas concretos da mecânica, da óptica e da engenharia.

FICHA DA OBRA

Título: *Applications de géométrie et de mécanique*

Autor: Charles Dupin

Publicação: Paris, Bachelier, 1822

Área: Geometria aplicada e mecânica

Temas abordados: marinha, pontes e estradas, óptica e estudo das superfícies

SEÇÃO HISTÓRICA:

AS CICLIDES NA OBRA DE DUPIN

O § III da IVª Memória e a geração por esferas

§ III. PROPRIÉTÉS DES SURFACES CYCLIDES, AINSI QUE DES COURBES ET DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

Exposition préliminaire de quelques propriétés des surfaces <i>cyclides</i> , c'est-à-dire, des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont des cercles.	p. 200
Exemples particuliers de quelques surfaces comprises dans cette famille : la sphère.	p. 201
Le cône et le cylindre de révolution.	p. 201
Génération complète des surfaces cyclides.	p. 201
Conditions définitives de la génération des surfaces cyclides.	p. 206
Propriétés des lignes, lieux des centres de courbure des surfaces cyclides.	p. 206
Elles sont respectivement sur deux plans qui se coupent à angle droit.	p. 206
Chacune d'elles est le sommet d'un cône de révolution ayant l'autre pour base.	p. 207
Équidifférence des arêtes de ces cônes, ainsi terminées entre cette base et ce sommet.	p. 207
THÉORÈME. Dans tous les cônes dont les sommets sont placés sur la première courbe des centres, et dont la base commune est la seconde courbe des centres, la différence des deux arêtes qui aboutissent respectivement à deux points donnés de la base, cette différence, dis-je, est la même pour tous les cônes.	p. 208
Génération réciproque des deux lignes servant de base à ces cônes, par des rayons vecteurs à différences constantes.	p. 208
Nouvelles propriétés des courbes du second degré.	p. 209
Système général des foyers de ces courbes.	p. 209
Génération de l'hyperbole par une infinité de foyers et de rayons vecteurs.	p. 209
Génération de l'ellipse par des rayons vecteurs à somme constante, et par d'autres rayons vecteurs à différence constante.	p. 210
Génération de la parabole par une infinité de foyers.	p. 210

Figura 3 – Sumário do § III da IVª Memória de *Applications de géométrie et de mécanique*, dedicado às propriedades das superfícies cíclicas.

Fonte: Dupin (1822).

Nas páginas 200 a 210 da IVª Memória, Dupin define as superfícies cíclicas como aquelas cujas linhas de curvatura são círculos. Ele também descreve sua geração por famílias de esferas, especialmente pela condição de uma esfera de raio variável tangenciar três esferas fixas.

A partir dessa construção, Dupin relaciona os centros de curvatura das ciclides a curvas do segundo grau. Mais tarde, Maxwell e Cayley aprofundariam essa leitura por meio das curvas focais, contribuindo para novas interpretações geométricas e computacionais dessas superfícies.

O que aparece nas p. 200-210?

- Definição das superfícies cíclicas
- Linhas de curvatura circulares
- Esfera, cone e cilindro como casos particulares
- Geração por famílias de esferas
- Esfera de raio variável tangente a três esferas fixas
- Centros de curvatura organizados em cônicas
- Curvas do segundo grau em planos perpendiculares
- Ponte para as curvas focais

SEÇÃO HISTÓRICA:

EVOLUÇÃO DAS CICLIDES

Da Geometria Diferencial do século XIX à retomada computacional

Gaspard
Monge1795

Publica ***Application de l'analyse à la géométrie***, obra importante para a consolidação do estudo geométrico das superfícies.

1822

Publica ***Applications de géométrie et de mécanique***, obra em que aparecem ideias ligadas às linhas de curvatura, às superfícies de canal e às ciclides.

Charles
DupinCarl
Frederich
Gauss1827

Com a obra ***Disquisitiones generales circa superficies curvas***, Gauss estabelece bases importantes para compreender as superfícies a partir de suas próprias propriedades intrínsecas.

1868

Publica ***On the Cyclide*** e retoma o estudo das ciclides por meio da inversão geométrica e de famílias de esferas.

James
Clerk
MaxwellArthur
Cayley1873

Também publica ***On the Cyclide***, aprofundando a interpretação das ciclides por curvas focais e formulações algébricas.

1873

Publica ***Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques***, ampliando e generalizando o estudo das ciclides.

Jean-
Gaston
DarbouxRetomada
Computacional1990

Na década de 1990, as ciclides passaram a ser retomadas em contextos de modelagem geométrica computacional e desenho assistido por computador, como exemplifica o artigo de M. J. Pratt sobre ciclides em ***Computer Aided Geometric Design***.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

As ciclides podem ser descritas de quatro formas principais:

A ciclidade de Dupin é uma superfície estudada por Charles Dupin no século XIX. Sua forma pode lembrar um toro deformado, mas sua estrutura matemática envolve curvas focais, famílias de esferas tangentes e linhas de curvatura circulares.

As ciclides de Dupin aparecem na Geometria Diferencial como superfícies cujas linhas de curvatura são circunferências ou retas. Essa propriedade permite relacionar a superfície a construções geométricas clássicas e a modelos dinâmicos em ambientes como o GeoGebra 3D.

Uma ciclidade pode ser observada de diferentes maneiras:

- como uma **superfície algébrica de grau quatro**;
- como imagem de superfícies mais simples por **inversão esférica**;
- como **envoltória** de uma **família de esferas**.
- como superfície associada a **curvas focais**;

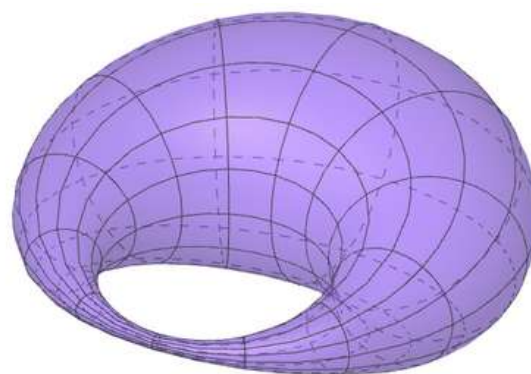


Figura 3 - Ciclidade do tipo anel



UM OBJETO, VÁRIAS REPRESENTAÇÕES

A ciclidade de Dupin pode ser estudada por diferentes caminhos. Cada representação destaca um aspecto da superfície:

- a equação mostra sua natureza algébrica;
- a inversão esférica relaciona a ciclidade do toro;
- as esferas geradoras mostram sua construção por tangência.
- as curvas focais revelam sua organização interna;

Ao longo da seção, essas ideias serão retomadas com imagens e construções no GeoGebra 3D.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

1. Superfície algébrica de grau quatro

A ciclidade como uma superfície quártica

Do ponto de vista algébrico, uma ciclidade de Dupin pode ser descrita por uma equação cartesiana implícita de grau quatro. Superfícies desse tipo são chamadas de quárticas.

Uma forma geral de representar essa família é:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D)^2 = R^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

O QUE ESSA EQUAÇÃO MOSTRA?

A equação reúne as coordenadas **x**, **y** e **z** em uma expressão de grau quatro. Os parâmetros A, B, C, D e R controlam aspectos da superfície, como posição, escala e configuração no espaço.

2. Imagem por inversão esférica

Outra forma de compreender as ciclidades de Dupin é por meio da inversão esférica. Em 1868, Maxwell dedicou uma seção de seu artigo *On the Cyclide à inversão* da ciclidade e observou que, ao aplicar esse tipo de transformação, a imagem obtida continua pertencendo à mesma família de superfícies.

De modo geral, a inversão esférica transforma pontos do espaço a partir de uma esfera fixa escolhida como referência. No caso das ciclidades, Maxwell destaca que essa transformação preserva a família das ciclidades: uma ciclidade invertida torna-se novamente uma ciclidade.

Como o toro pode ser compreendido como um caso particular de ciclidade de Dupin, essa propriedade ajuda a relacionar o toro, as superfícies de revolução e outras configurações da mesma família. Assim, a inversão esférica oferece uma maneira de visualizar como formas aparentemente diferentes podem estar conectadas por uma transformação geométrica.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

2. Imagem por inversão esférica

A inversão esférica não deve ser entendida apenas como uma mudança visual da superfície. Trata-se de uma transformação geométrica que altera a posição dos pontos no espaço, podendo modificar fortemente a aparência da superfície obtida.

No caso das ciclides de Dupin, Maxwell observa que a inversão de uma ciclidade produz novamente uma ciclidade. Isso significa que a transformação pode alterar sua forma, mas mantém a superfície dentro da mesma família geométrica.

NA FONTE ORIGINAL:

“every cyclide similarly inverted becomes another cyclide.”

Tradução livre:

“toda ciclidade, invertida de modo semelhante, torna-se outra ciclidade.”

Fonte: Maxwell (1868 p. 119).

Em alguns casos particulares, Maxwell também relaciona a ciclidade invertida a superfícies de revolução. Essa observação é importante porque permite compreender o toro como uma forma especial dentro da família das ciclides de Dupin.

As imagens à direita apresentam uma construção dinâmica no GeoGebra 3D com caráter exploratório.

A esfera azul representa a esfera utilizada como referência para a inversão, enquanto a superfície inicial e sua imagem ajudam a visualizar como uma transformação geométrica pode modificar a aparência da superfície.

A construção tem função ilustrativa e não substitui a formulação algébrica apresentada por Maxwell.

$O = (d, 0, 0)$: centro da esfera de inversão

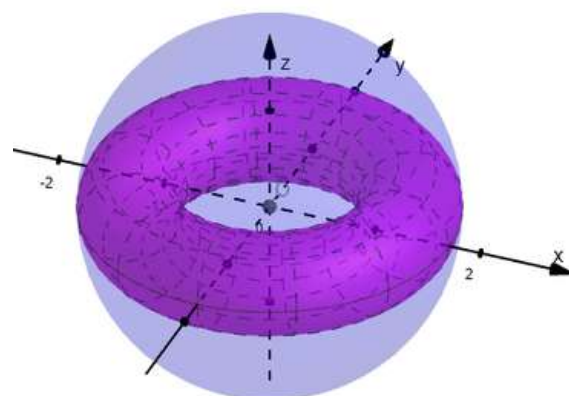


Figura 4.1 - $d = 0$

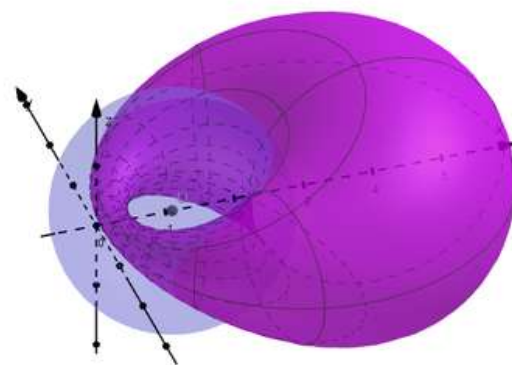


Figura 4.2- $d = 1$

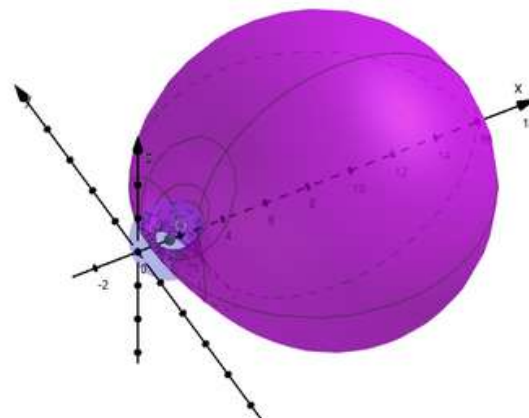


Figura 4.3- $d = 1,5$

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

2. Ciclide como envoltória de esferas

Uma maneira geométrica de compreender a ciclidade de Dupin é vê-la como uma superfície de canal, isto é, como a envoltória associada a uma família de esferas. Nessa construção, as esferas variam de tamanho ao longo de uma curva focal, e a superfície surge como o envelope dessa família.

Na configuração apresentada, utilizamos uma ciclidade do tipo anel para fins didáticos. As imagens mostram a superfície sendo formada em torno da família de esferas, permitindo observar a relação entre a elipse focal, os raios das esferas e a forma final da ciclidade.



OBSERVAÇÃO SOBRE A FIGURA

As esferas destacadas são uma amostra da família associada à construção da ciclidade.

Elas podem se intersectar entre si; o objetivo da imagem é mostrar a ciclidade como superfície envoltória relacionada a essa família de esferas.

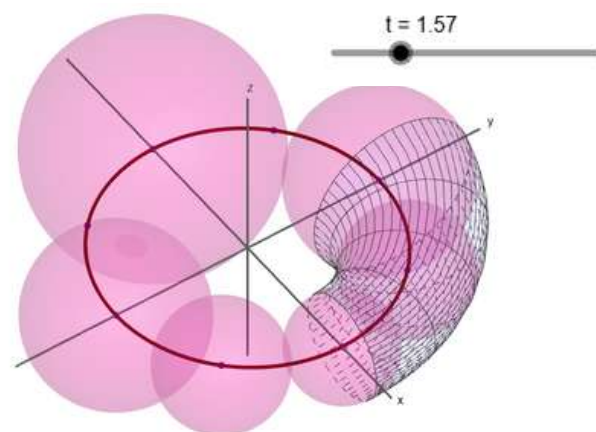


Figura 5.1 – Formação da ciclidade até $t = \frac{\pi}{2}$.

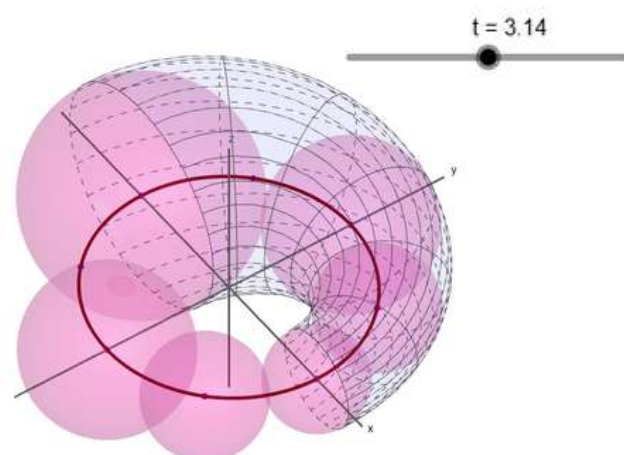


Figura 5.2 – Formação da ciclidade até $t = \pi$.

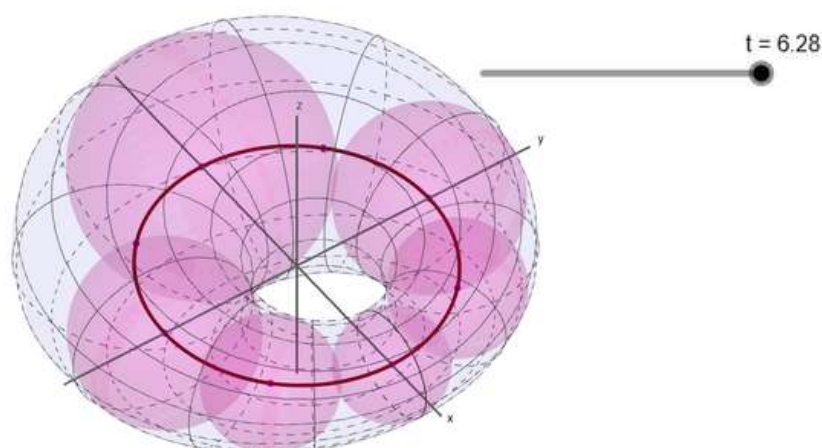


Figura 5.4 – Formação completa da ciclidade para $t = 2\pi$.

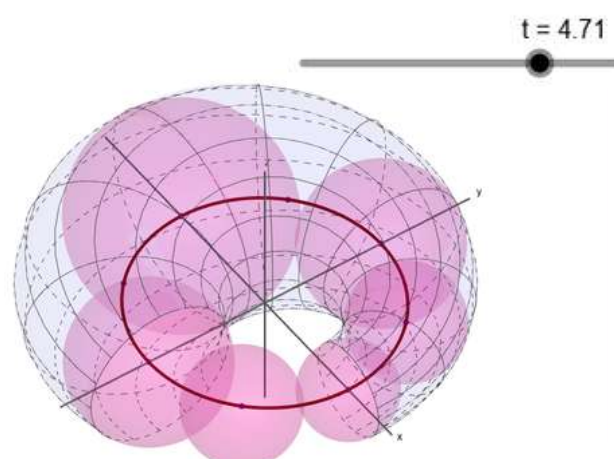


Figura 5.3 – Formação da ciclidade até $t = \frac{3\pi}{2}$.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

4. A ciclidade de Dupin por meio das curvas focais

Na construção elíptico-hiperbólica da ciclidade de Dupin, aparecem duas curvas focais principais: uma elipse e uma hipérbole.

Essas curvas estão situadas em planos ortogonais e ajudam a organizar a superfície no espaço. A elipse focal aparece no plano horizontal, enquanto a hipérbole focal aparece em um plano vertical.

Elipse focal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hipérbole focal

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

RELAÇÃO ENTRE OS PARÂMETROS

Na construção utilizada nesta revista, os parâmetros satisfazem:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Assim, os valores de b e c determinam o valor de a e influenciam a forma da elipse, da hipérbole e da própria ciclidade.

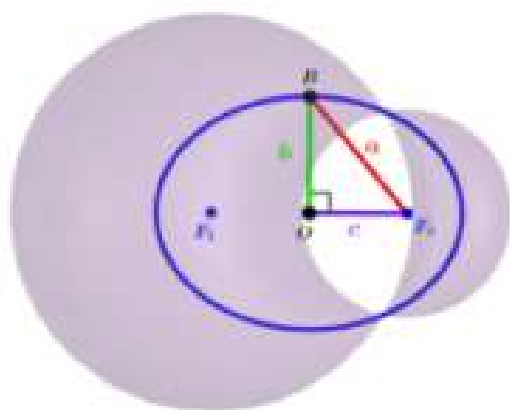


Figura 6.1 - Elipse focal associada à ciclidade de Dupin, com destaque para os parâmetros a , b e c .

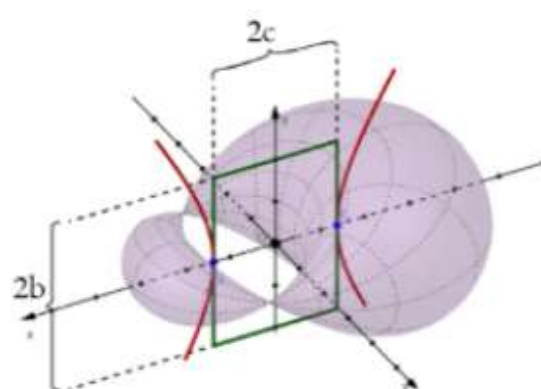


Figura 6.2 - Hipérbole focal associada à ciclidade de Dupin, com retângulo auxiliar de dimensões $2c$ e $2b$.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

4. A ciclidade de Dupin por meio das curvas focais

Quando observamos a elipse focal e a hipérbole focal juntas, percebemos que elas ajudam a organizar a estrutura da ciclidade de Dupin no espaço.

Na construção utilizada nesta revista, a elipse focal aparece destacada em vermelho, no plano horizontal. A hipérbole focal aparece em azul, em um plano vertical.

Essas curvas estão situadas em planos ortogonais e se relacionam por meio dos parâmetros a , b e c .

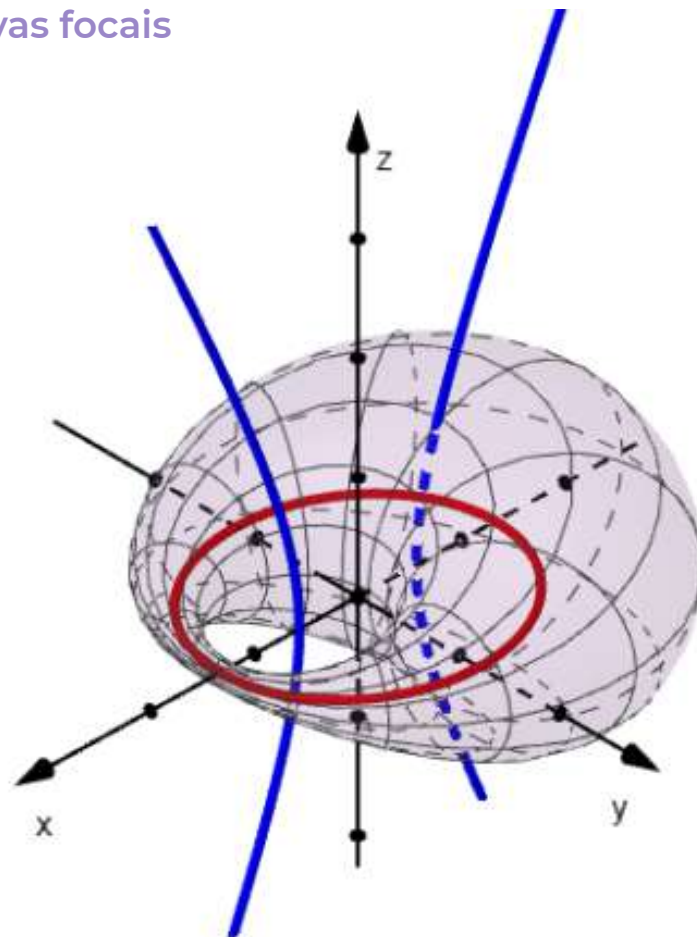


Figura 7 - Elipse focal e hipérbole focal associadas à ciclidade de Dupin do tipo anel.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Em 1822, Charles Dupin já indicava elementos associados às curvas focais ao descrever geometricamente as ciclides por meio de famílias de esferas e propriedades de curvatura. No entanto, seu tratamento permaneceu principalmente geométrico.

Décadas depois, Maxwell retomou essas superfícies em 1868, aprofundando a relação entre ciclides, esferas geradoras e curvas focais.

Em 1873, Cayley avançou na formalização algébrica do tema, apresentando equações e formulações que ajudaram a consolidar o estudo das ciclides no século XIX.

O QUE OBSERVAR NA IMAGEM?

- a **elipse focal** em vermelho;
- a **hipérbole focal** em azul;
- os **planos ortogonais** em que as curvas aparecem;
- a **ciclidade** organizada em torno dessas curvas.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

4. A ciclidade de Dupin por meio das curvas focais

A partir dos parâmetros associados às curvas focais, podemos escrever uma equação implícita para a ciclidade de Dupin.

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - d^2)^2 = 4((ax - cd)^2 + b^2y^2)$$

Essa equação descreve a ciclidade de Dupin em função dos mesmos parâmetros que aparecem na construção focal.

Assim, a superfície não é apresentada separadamente das curvas focais: sua forma é organizada pelos parâmetros que controlam a elipse, a hipérbole e a disposição geométrica associada à ciclidade.

O papel do parâmetro d

O parâmetro d atua na construção das esferas associadas à ciclidade.

Na imagem, aparecem os comprimentos d , $d+c$ e $|d-c|$, que ajudam a visualizar como esse parâmetro interfere na geometria da superfície.

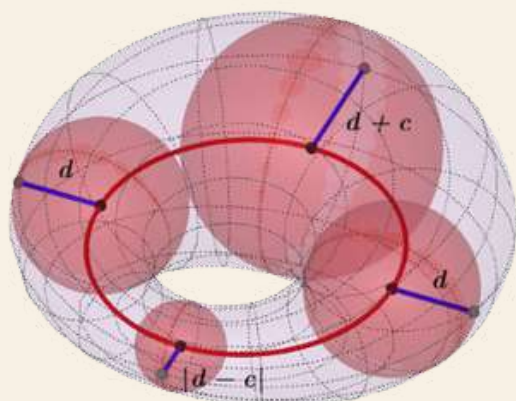


Figura 8.1 — Esferas associadas à construção da ciclidade de Dupin.

Como cada parâmetro atua

a : é o **semieixo maior** da elipse focal. Na construção, ele não é livre, pois depende de b e c pela relação.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

b : atua como **semieixo menor** da elipse focal e também aparece na hipérbole focal. Sua variação interfere na abertura das curvas e na forma geral da ciclidade.

c : representa a **distância focal** da elipse e aparece como parâmetro da hipérbole focal. Junto com b , determina o valor de a .

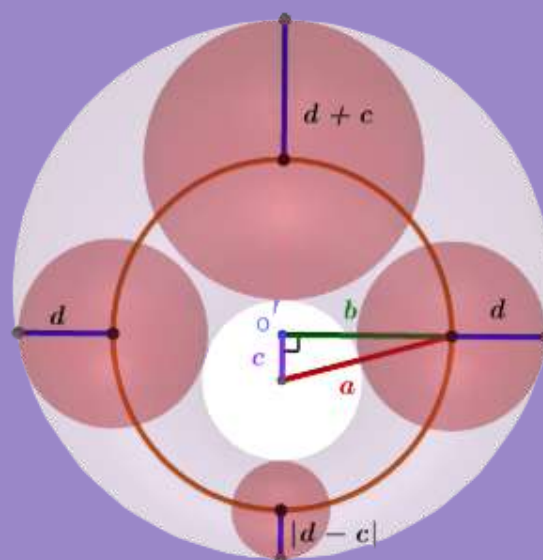


Figura 8.2 — Elipse focal associada à ciclidade de Dupin, destacando a relação entre os parâmetros a , b e c que determinam parte da estrutura da superfície.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

4. A ciclidade de Dupin por meio das curvas focais

Para construir a ciclidade no GeoGebra 3D, foi utilizada uma parametrização disponível no MathCurve, adaptada para a construção dinâmica da superfície.

Nessa representação, a ciclidade é descrita pelas coordenadas $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$, em função dos parâmetros a , b , c e d .

$$x(u, v) = \frac{d(c - a \cos u \cos v) + b^2 \cos u}{a - c \cos u \cos v}$$

$$y(u, v) = \frac{b \sin u(a - d \cos v)}{a - c \cos u \cos v}$$

$$z(u, v) = \frac{b \sin v(c \cos u - d)}{a - c \cos u \cos v}$$

A **parametrização** permite que a superfície seja gerada ponto a ponto no espaço tridimensional. Ao variar os parâmetros no **GeoGebra**, a forma da ciclidade se modifica dinamicamente.

Parâmetros	Curvas focais	
$b = 5.5$ $c = 5.8$ $d = 2.9$ $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 7.99$	Hipérbole	Elipse
	$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	$\frac{x^2}{5.8^2} - \frac{z^2}{5.5^2} = 1$	$\frac{x^2}{7.99^2} + \frac{y^2}{5.5^2} = 1$
Equação implícita da superfície		
$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - d^2)^2 = 4(a \cdot x - c \cdot d)^2 + 4 \cdot b^2 \cdot y^2$		
$(x^2 + y^2 + z^2 + 5.5^2 - 2.9^2)^2 = 4(7.99 \cdot x - 5.8 \cdot 2.9)^2 + 4 \cdot 5.5^2 \cdot y^2$		
Equação paramétrica da superfície		
$x(u, v) = \frac{d(c - a \cos u \cos v) + b^2 \cos u}{a - c \cos u \cos v}$ $y(u, v) = \frac{b \sin u(a - d \cos v)}{a - c \cos u \cos v}$ $z(u, v) = \frac{b \sin v(c \cos u - d)}{a - c \cos u \cos v}$	$x(u, v) = \frac{2.9(5.8 - 7.99 \cos u \cos v) + 5.5^2 \cos u}{7.99 - 5.8 \cos u \cos v}$ $y(u, v) = \frac{5.5 \sin u(7.99 - 2.9 \cos v)}{7.99 - 5.8 \cos u \cos v}$ $z(u, v) = \frac{5.5 \sin v(5.8 \cos u - 2.9)}{7.99 - 5.8 \cos u \cos v}$	

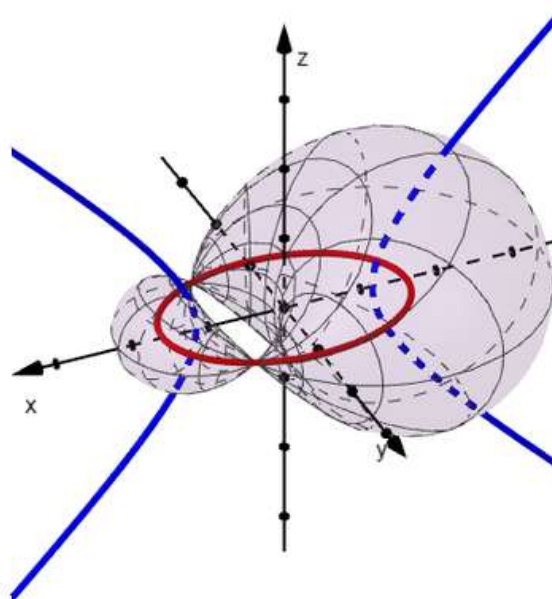


Figura 9 — Parametrização da ciclidade de Dupin e construção dinâmica no GeoGebra 3D.

ACESSE E MANIPULE

A construção dinâmica permite alterar os parâmetros da ciclidade e observar, em tempo real, as mudanças na superfície.

Escaneie o QR Code ou acesse o link para explorar a construção no GeoGebra 3D.

clique aqui



SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

Ao variar os parâmetros da construção, a ciclidade de Dupin pode assumir diferentes configurações geométricas. Essas formas ajudam a visualizar como pequenas mudanças nos valores de **b**, **c** e **d** alteram a aparência da superfície no espaço.

Nesta revista, utilizamos uma **nomenclatura descritiva** e **didática** para organizar as principais configurações observadas nas construções dinâmicas no **GeoGebra 3D**.

Antes de apresentar as diferentes **formas da ciclidade de Dupin**, vamos observar como os raios das esferas associadas à construção variam de acordo com os parâmetros **c** e **d**.

Para facilitar a visualização, utilizamos inicialmente uma **ciclidade do tipo anel**. Nessa configuração, a superfície apresenta abertura central e a família de esferas pode ser observada com mais clareza, sem que a imagem fique excessivamente sobreposta.

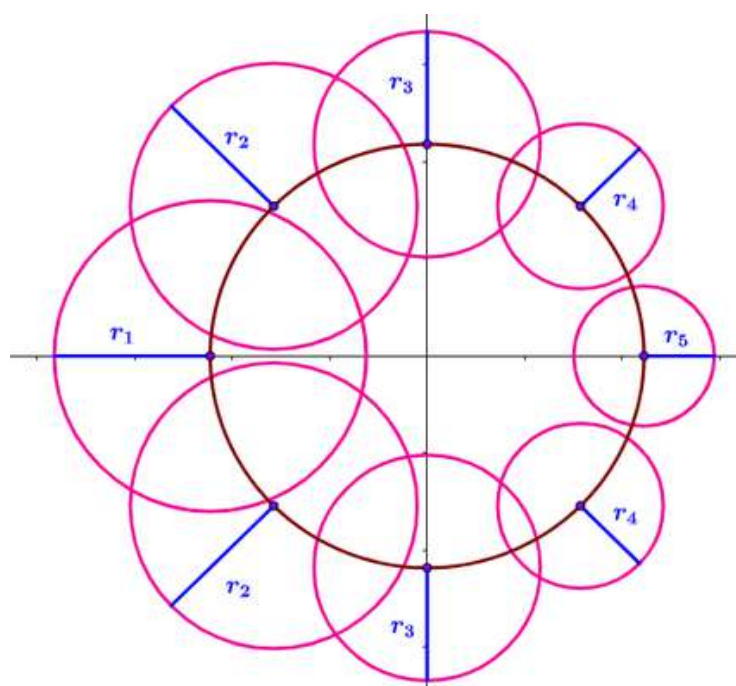


Figura 10 — Raios das esferas associadas à ciclidade do tipo anel, destacados em uma visualização plana da elipse focal.

Na visualização plana, os centros das esferas aparecem distribuídos ao longo da elipse focal

$$r_1 = d + c$$

$$r_2 = d + c \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$r_3 = d$$

$$r_4 = \left| d + c \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right|$$

$$r_5 = |d - c|$$

Alguns raios destacados são representados por r_1, r_2, r_3, r_4 e r_5 , permitindo observar como os valores de **c** e **d** modificam o raio das esferas e, conseqüentemente, a aparência da ciclidade.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

1. Ciclide do tipo anel

A ciclide do tipo anel ocorre quando $c < d < a$. Nessa configuração, a superfície preserva uma abertura central e não apresenta autointerseção.

Sua forma lembra um toro deformado, mas os raios das esferas associadas à construção variam de acordo com os parâmetros c e d .

Por isso, essa configuração é usada como ponto de partida para observar a relação entre parâmetros, raios das esferas e forma da superfície.

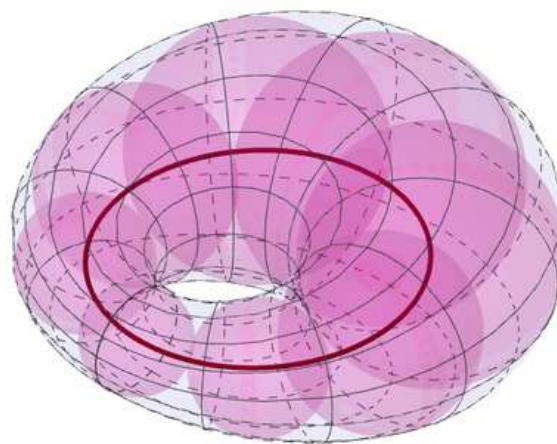
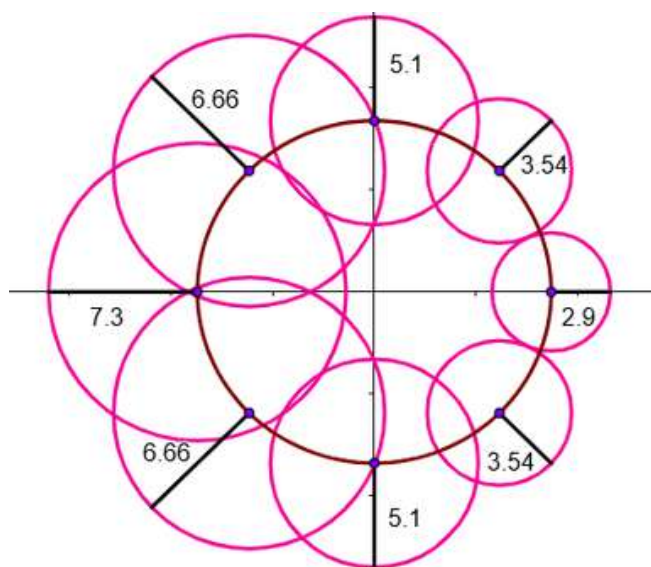


Figura 11 — Ciclide em anel



$$b = 8.4$$

$$c = 2.2$$

$$d = 5.1$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = 8.68$$

$d + c = 7.3$
$ d - c = 2.9$
$\left d + c \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right = 3.54$
$d + c \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6.66$

Condição do exemplo

$$c = 2,2 \quad d = 5,1 \quad a = 8,68$$

Logo,

$$c < d < a.$$

Essa relação caracteriza a ciclide do tipo anel. Nesse caso, a superfície mantém uma abertura central e não apresenta autointerseção, enquanto os raios das esferas variam ao longo da construção.

O que observar?

- a abertura central da superfície;
- a ausência de autointerseção;
- a variação dos raios das esferas;
- a semelhança visual com um toro deformado.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

2. Ciclide em chifre

A ciclidade em chifre ocorre quando $d = c$. Nessa configuração, a superfície atinge um caso limite entre a ciclidade em anel e a ciclidade em fuso.

Geometricamente, a abertura característica do anel se reduz a um ponto de tangência, produzindo a singularidade que dá origem à forma em chifre.

Por isso, essa configuração ajuda a observar a transição entre uma superfície sem autointerseção e uma superfície com autointerseção.

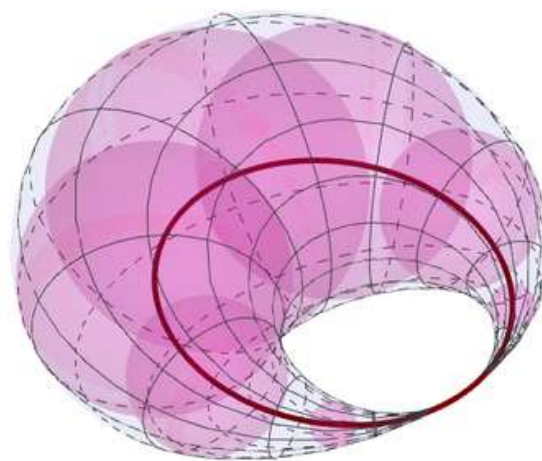


Figura 12 — Ciclide em chifre

Condição do exemplo

$$c = 4 \quad d = 4 \quad a = 9,3$$

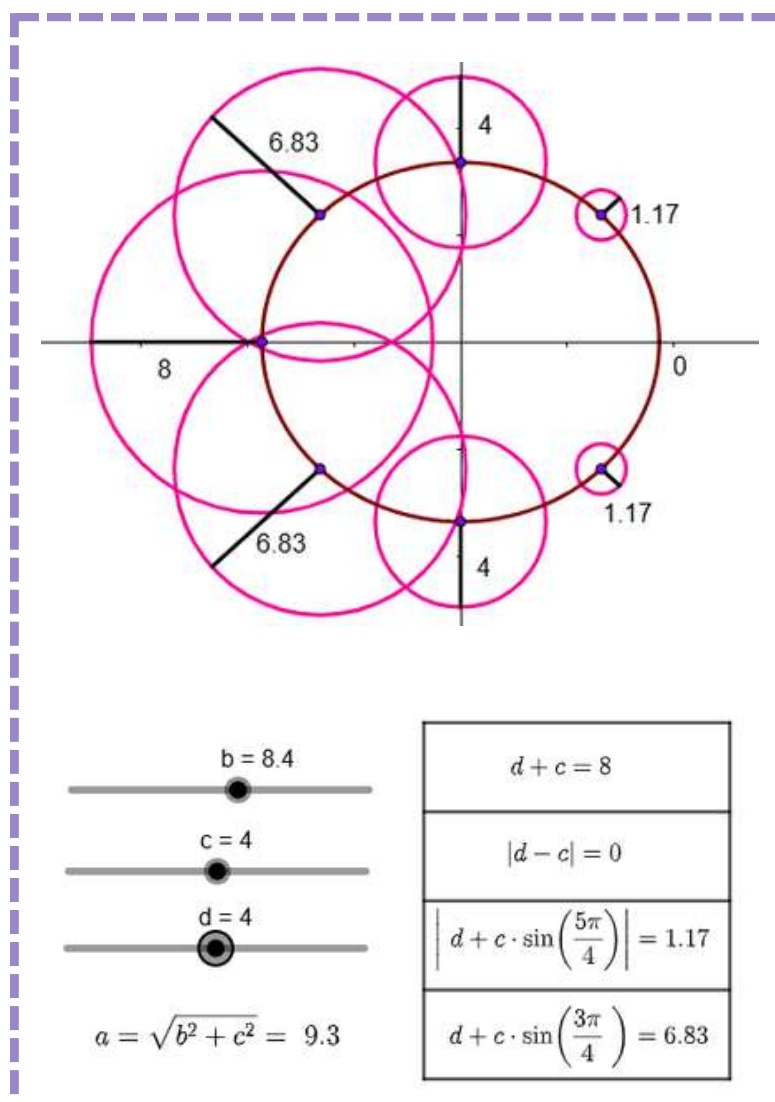
Logo,

$$c = d$$

Essa relação caracteriza a ciclidade em chifre. Nesse caso, a superfície atinge uma situação limite: a abertura do anel se reduz a um ponto de tangência, indicando a transição para configurações com autointerseção.

O que observar?

- o caso limite $d = c$;
- o ponto de tangência da superfície;
- a transição entre anel e fuso;
- a redução da abertura central.



SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

3. Ciclide em fuso

A ciclide em fuso ocorre quando $d < c$. Nessa configuração, a superfície passa a apresentar autointerseção, formando uma região de cruzamento característica dessa forma.

Diferentemente da ciclide em anel, a abertura central não se preserva como uma região vazada regular. A variação dos raios das esferas torna-se mais acentuada, e a superfície passa a atravessar a si mesma.

Por isso, essa configuração ajuda a observar como a mudança na relação entre c e d altera a geometria da ciclide.

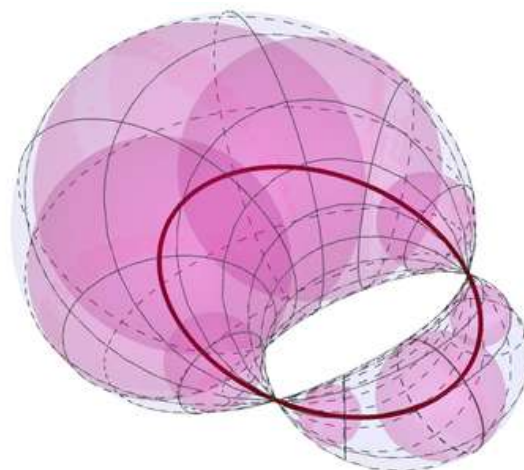


Figura 12— Ciclide em fuso

Condição do exemplo

$$c = 7 \quad d = 3 \quad a = 10,93$$

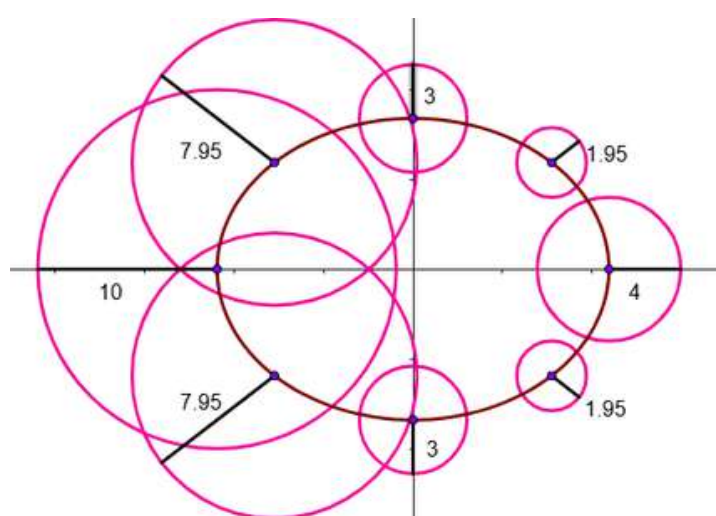
Logo,

$$d < c < a.$$

Essa relação caracteriza a ciclide em fuso. Nesse caso, o parâmetro d é menor que c , fazendo com que a superfície apresente autointerseção e deixe de preservar a abertura central regular observada na ciclide em anel.

O que observar?

- a condição $d < c$;
- a presença de autointerseção;
- a perda da abertura central regular;
- a variação mais acentuada dos raios das esferas.



$$b = 8.4$$

$$c = 7$$

$$d = 3$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = 10.93$$

$d + c = 10$
$ d - c = 4$
$\left d + c \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right = 1.95$
$d + c \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 7.95$

SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

4. Ciclide em fuso simétrico

A ciclide em fuso simétrico ocorre quando $d = 0$. Nessa configuração, o parâmetro d deixa de deslocar a construção, produzindo uma forma mais equilibrada em relação à elipse focal.

A superfície apresenta uma configuração do tipo fuso, com simetria mais evidente. Os raios das esferas associadas à construção ficam organizados de maneira espelhada, como pode ser observado na visualização plana.

Por isso, esse caso ajuda a perceber como a ausência do parâmetro d modifica a distribuição dos raios e a forma final da ciclide.

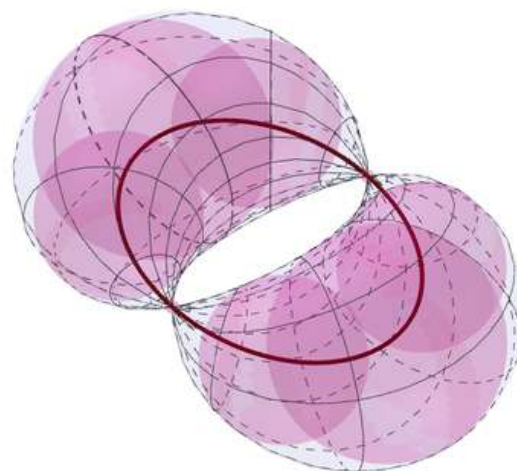


Figura 14 — Ciclide em fuso simétrico.

Condição do exemplo

$$c = 8 \quad d = 0 \quad a = 11.75$$

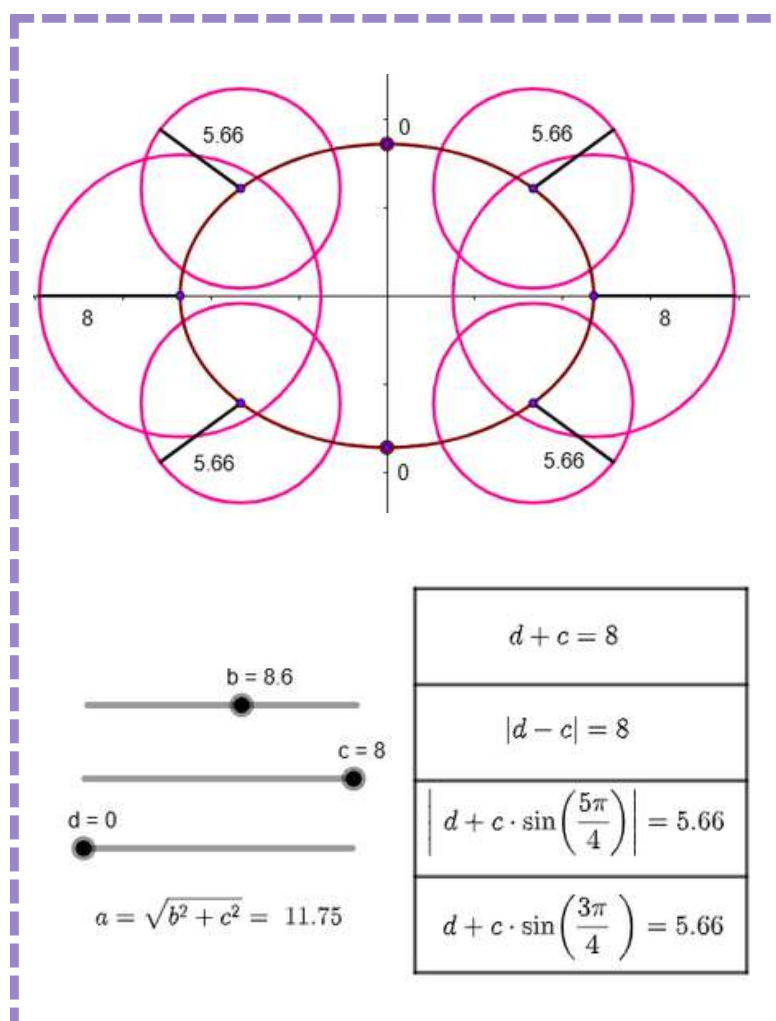
Logo,

$$d = 0 < c < a$$

Essa relação caracteriza a ciclide em fuso simétrico. Nesse caso, o parâmetro d é nulo, e a construção passa a apresentar uma distribuição mais simétrica dos raios das esferas em torno da elipse focal.

O que observar?

- a condição $d = 0$;
- a simetria da construção;
- a distribuição espelhada dos raios;
- a formação de uma configuração do tipo fuso.



SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

5. Toro

O toro aparece como um caso particular da ciclidade de Dupin quando $c = 0$ e $d < a$.

Nessa configuração, a relação $a^2 = b^2 + c^2$ se reduz a $a = b$.

Com isso, a elipse focal perde sua excentricidade e passa a ser uma circunferência. A construção fica mais simétrica, e os raios das esferas associadas permanecem iguais.

Por isso, o toro pode ser entendido como uma forma especial dentro da família das ciclides de Dupin.

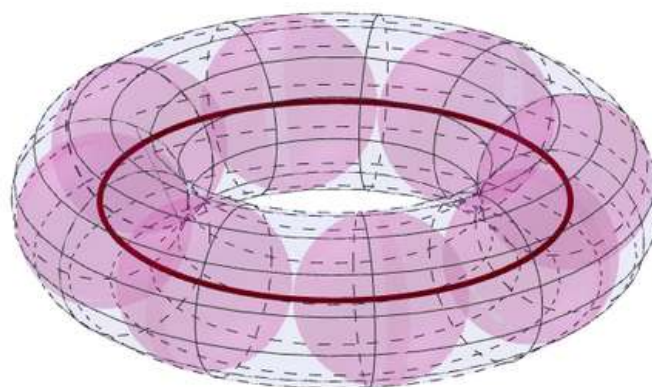
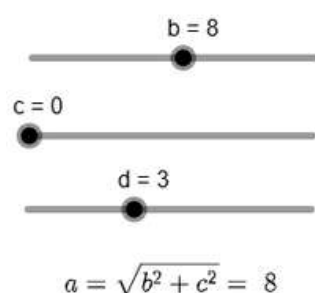
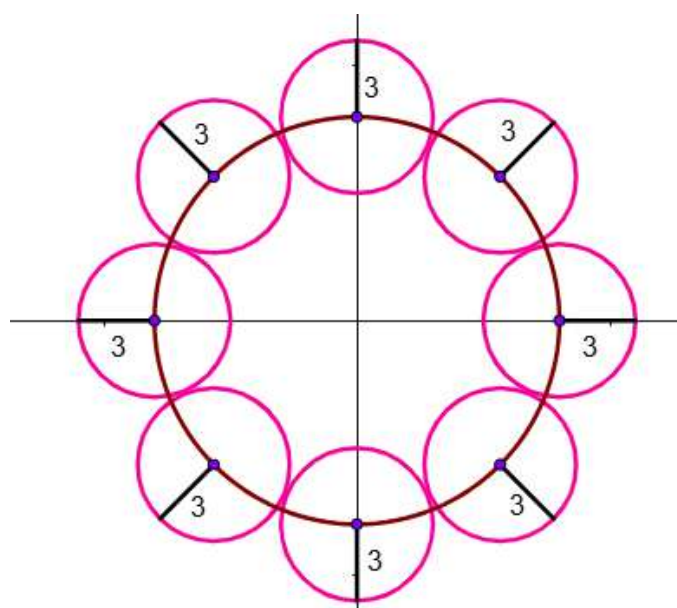


Figura 15 — Toro



$d + c = 3$
$ d - c = 3$
$\left d + c \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right = 3$
$d + c \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3$

Condição do exemplo

$$c = 0 \quad d = 3 \quad a = 8 \quad b = 8$$

Logo,

$$b = a > d$$

Essa relação caracteriza o toro como caso particular da ciclidade de Dupin. Nesse caso, a construção torna-se simétrica, a elipse focal se transforma em circunferência e os raios das esferas permanecem constantes.

O que observar?

- a condição $c = 0$;
- a igualdade $a = b$;
- a elipse focal transformada em circunferência;
- os raios das esferas com o mesmo valor;
- a simetria característica do toro.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

6. Ciclide em anel crítico

A ciclide em anel crítico ocorre quando $d = a$. Nesse caso, o parâmetro d atinge o valor do semieixo maior da elipse focal.

Essa configuração representa um caso limite após a ciclide em anel, caracterizada por $c < d < a$.

Quando d chega a a , a superfície passa para uma forma crítica, na qual a abertura central deixa de se comportar como no anel regular.

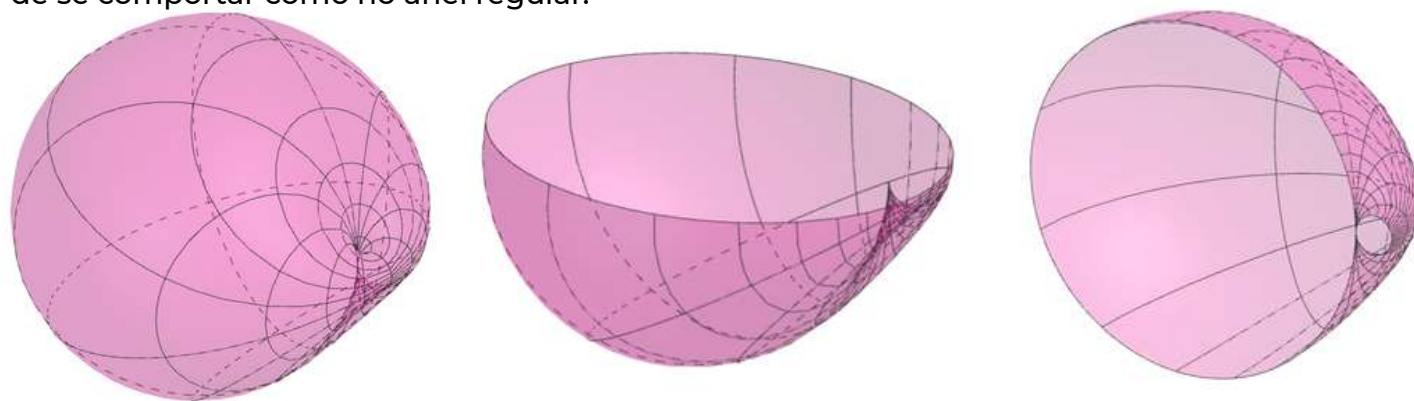


Figura 16 — Ciclide em anel crítico, apresentada em vista externa e em cortes para facilitar a visualização da região interna.

Condição do exemplo

$$c = 4 \quad d = 5 \quad a = 5$$

Logo,

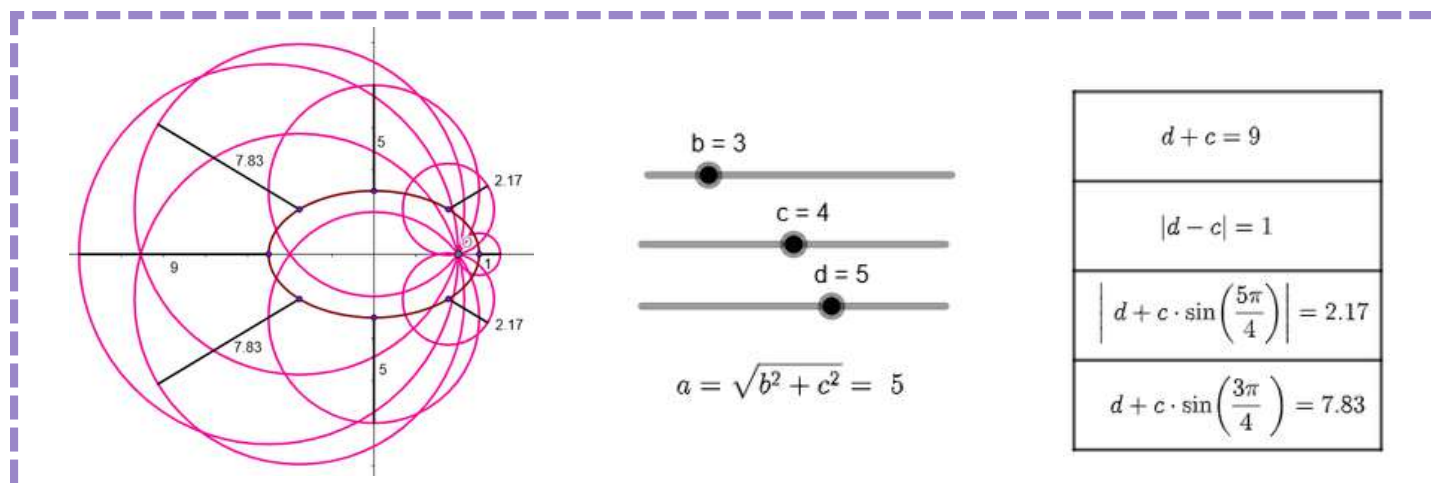
$$c < d = a.$$

Essa relação caracteriza a ciclide em anel crítico. Nesse caso, o parâmetro d atinge exatamente o valor de a , marcando a transição entre o regime regular da ciclide em anel e as configurações seguintes.

Observação sobre as imagens

Nesta configuração, a família de esferas apresenta grande sobreposição, dificultando a visualização da superfície.

Por esse motivo, optamos por apresentar a ciclide em vistas mais limpas e também em corte, permitindo observar com maior clareza a região interna e a forma crítica da superfície.



SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

7. Ciclide em fuso interno

A ciclide em fuso interno ocorre quando $d > a$. Nessa configuração, o parâmetro d ultrapassa o valor do semieixo maior da elipse focal.

Esse caso sucede a ciclide em anel crítico e produz uma auto-interseção interna mais evidente. A abertura central deixa de apresentar o comportamento do anel regular, e a superfície passa a exibir uma região interna característica da forma em fuso.

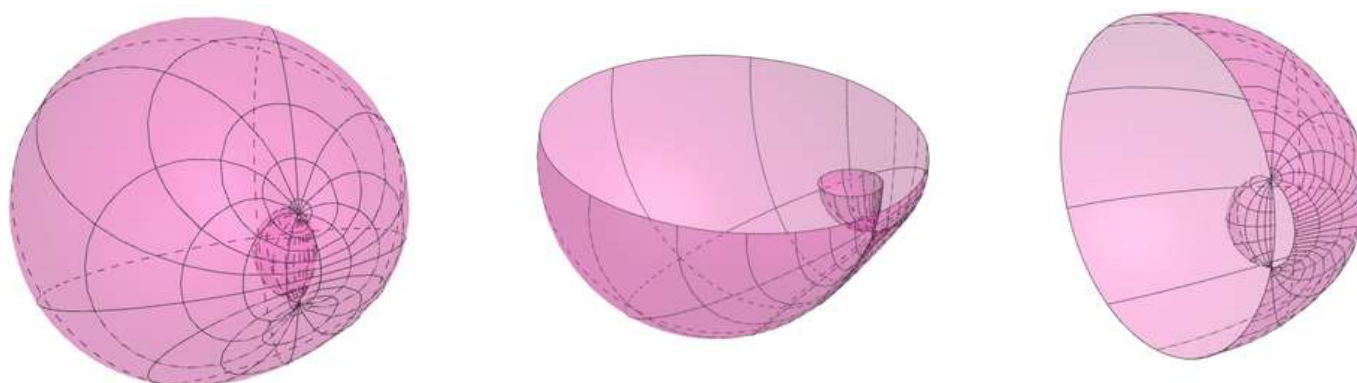


Figura 17—Ciclide em fuso interno, apresentada em vista externa e em cortes para facilitar a visualização da região interna.

Condição do exemplo

$$c = 4 \quad d = 7 \quad a = 5$$

Logo,

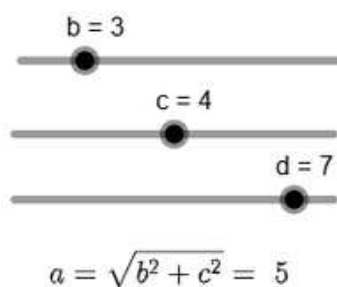
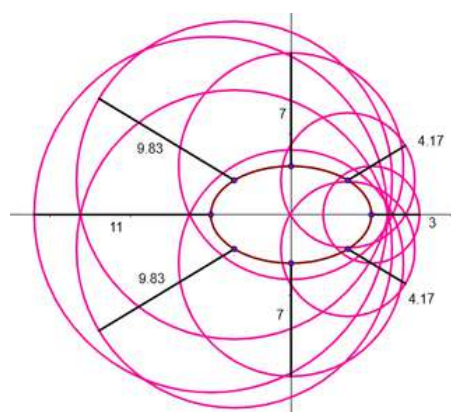
$$c < a < d.$$

Essa relação caracteriza a ciclide em fuso interno. Nesse caso, o parâmetro d ultrapassa o valor de a , fazendo com que a superfície deixe o regime crítico e passe a apresentar uma auto-interseção interna mais acentuada.

Observação sobre as imagens

Assim como na ciclide em anel crítico, a sobreposição das esferas dificulta a leitura visual da superfície.

Por isso, a ciclide em fuso interno é apresentada em vistas mais limpas e em corte, destacando a região interna e a auto-interseção característica dessa configuração.



$$d + c = 11$$

$$|d - c| = 3$$

$$\left| d + c \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right| = 4.17$$

$$d + c \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 9.83$$

SEÇÃO MATEMÁTICA:

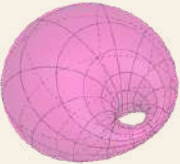
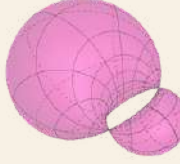
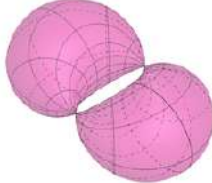
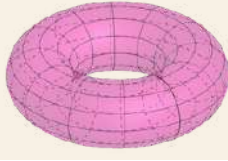
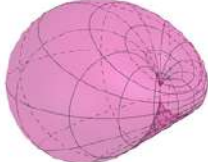
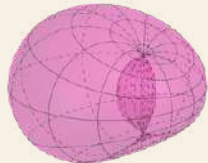
FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

196

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

A tabela a seguir reúne, de forma sintética, as principais configurações das ciclides de Dupin consideradas nesta revista.

A nomenclatura utilizada possui caráter descritivo e didático, e foi adotada neste material para facilitar a identificação visual das formas, das condições sobre os parâmetros e dos aspectos geométricos mais relevantes.

Forma	Nomenclatura	Condição	O que observar
	Ciclode em anel	$c < d < a$	abertura central sem autointerseção
	Ciclode em chifre	$d = c$	caso limite entre anel e fuso
	Ciclode em fuso	$d < c < a$	presença de autointerseção
	Ciclode em fuso simétrico	$0 = d < c < a$	distribuição simétrica dos raios
	Toro	$c = 0$ e $d < a = b$	caso particular com raios constantes
	Ciclode em anel crítico	$c < d = a$	caso limite após a ciclode em anel
	Ciclode em fuso interno	$c < a < d$	autointerseção interna mais acentuada

ACESSE E MANIPULE

Explore a construção dinâmica no **GeoGebra 3D**.



Use o **QR Code** para variar os parâmetros e observar, em tempo real, as mudanças na forma da ciclode.

Ou, acesse pelo link:

[Clique aqui](#)

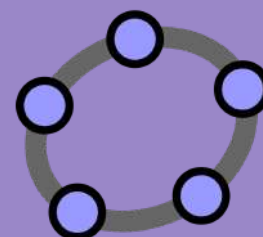


Tabela 1 — Síntese das configurações das ciclides de Dupin consideradas nesta revista.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

E AS CICLIDES PARABÓLICAS?

197

Um caso complementar da família das ciclides de Dupin

Além das formas exploradas nas páginas anteriores, a teoria das ciclides de Dupin também contempla outros casos. Um deles é a ciclidade parabólica, associada a uma configuração em que as curvas focais são duas parábolas situadas em planos ortogonais.

Uma ciclidade parabólica pode ser descrita por uma equação cúbica da forma:

$$z(z - \beta)(z - \gamma) + (z - \gamma)y^2 + (z - \beta)x^2 = 0,$$

em que β e γ são constantes associadas à configuração focal considerada.

Nesta revista, a ciclidade parabólica é apresentada apenas como um caso complementar. Sua presença ajuda a mostrar que a família das ciclides de Dupin é mais ampla do que as configurações exploradas nas páginas anteriores.

O percurso desenvolvido neste material concentrou-se na ciclidade elíptico-hiperbólica, pois essa foi a configuração escolhida para as construções, atividades e explorações dinâmicas realizadas no GeoGebra 3D. Assim, a ciclidade parabólica é mencionada como possibilidade de continuidade e de novas investigações.

VISUALIZAÇÕES DA CICLIDE PARABÓLICA

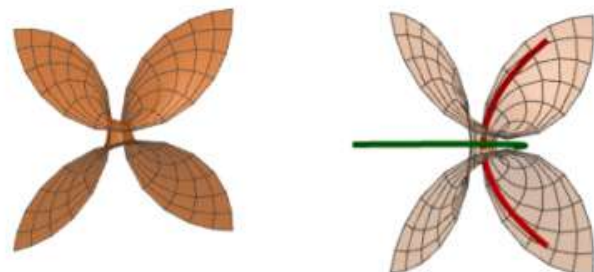


Figura 18.1 — Configuração com lóbulos secantes, evidenciando a estrutura aberta da superfície.

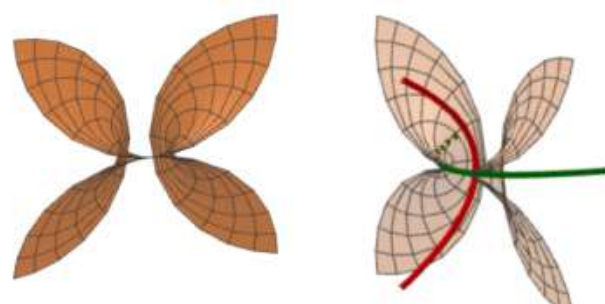


Figura 18.2 — Configuração de transição, com destaque para as curvas focais parabólicas.

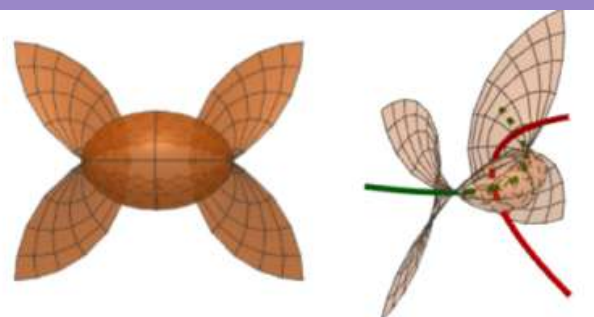


Figura 18.3 — Configuração com lóbulo interno ovalado, obtida pela variação dos parâmetros da construção.



Curiosidade para investigar

No caso parabólico, algumas configurações apresentam simetrias interessantes. O **MathCurve** destaca uma ciclidade parabólica em anel que permanece invariante por uma meia-volta, isto é, por uma rotação de 180°.

A página também sugere uma comparação com a superfície de Costa e a superfície de Enneper, que apresentam uma propriedade de simetria semelhante. Essa observação não será aprofundada nesta revista, mas pode servir como ponto de partida para novas explorações geométricas.

Para investigar: MathCurve, página Dupin Cyclide. Disponível em: [clique aqui](#)

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

198

Ciclides, visualização e cultura geométrica:

A presente seção reúne quatro olhares complementares sobre as ciclides de Dupin, a visualização matemática e a cultura geométrica. As entrevistas aproximam pesquisa em Geometria Diferencial, História da Matemática, formação de professores, tecnologias digitais e Arte, revelando diferentes maneiras de compreender, representar e comunicar objetos geométricos.



Celso Costa

Matemático brasileiro, doutor pelo **IMPA** e professor da **UFF**, conhecido pela descoberta da **Superfície Costa**. Sua trajetória aproxima esta revista da Geometria Diferencial, das superfícies mínimas e da pesquisa matemática brasileira.

Felipe Aizic

Mestre em Matemática Pura pela **UFRJ** e doutorando em **História da Matemática e da Física** pelo **PEMAT/UFRJ**. Sua trajetória articula Geometria Diferencial, ensino, história, filosofia e física.



Humberto Bortolossi

Professor da **UFF** e pesquisador em visualização matemática, tecnologias digitais e ensino. Coordena ações ligadas ao **GeoGebra**, à produção de materiais interativos e à formação de professores de Matemática.

Eduardo Madeiro

Doutorando em **Memória Social** pela **UNIRIO** e mestre pela **UFRRJ**. Pesquisa memória, patrimônio cultural, identidade, cultura popular, educação antirracista e quadrilhas juninas da Baixada Fluminense.



POR QUE CONVIDAMOS ESSES PESQUISADORES?

A escolha dos entrevistados reúne quatro perspectivas complementares sobre as ciclides, a visualização e a cultura geométrica:

- **Celso Costa**, pela experiência na Geometria Diferencial, na pesquisa matemática e na divulgação científica;
- **Felipe Aizic**, pelas relações que estabelece entre Geometria Diferencial, História da Matemática, Filosofia e Física;
- **Humberto Bortolossi**, pelo trabalho com visualização matemática, GeoGebra, tecnologias digitais e formação de professores;
- **Eduardo Madeiro**, pelo olhar da Arte e pelas possibilidades de diálogo entre formas geométricas, imagem, volume e criação artística.

Juntos, os entrevistados apresentam diferentes maneiras de observar, compreender e comunicar a geometria, aproximando pesquisa, ensino, tecnologia, história e arte.

COMO CHEGAMOS ÀS PERGUNTAS?

As perguntas foram elaboradas a partir da trajetória de cada entrevistado e dos principais eixos desta edição. Os diálogos percorrem a formação em Geometria Diferencial, a permanência das ciclides na pesquisa, as relações com a História da Matemática, o papel da visualização e das tecnologias digitais e as aproximações entre geometria e Arte.

- Como ocorre hoje a formação em Geometria Diferencial?
- Curvas, superfícies e ciclides ainda encontram espaço na formação e na pesquisa?
- Como a História da Matemática pode ampliar a compreensão da geometria?
- O que a visualização e as tecnologias digitais transformam na pesquisa e no ensino?
- Como o GeoGebra, os modelos 3D e a Arte podem criar outras formas de perceber e comunicar objetos geométricos?

A seguir, você encontrará o diálogo completo com Celso Costa, Felipe Aizic, Humberto Bortolossi e Eduardo Madeiro, revelando como as ciclides de Dupin podem ser compreendidas e comunicadas entre pesquisa, ensino, tecnologia e arte.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

199

ENTREVISTA COM CELSO COSTA

Nesta entrevista, Celso Costa é convidado a revisitar a trajetória que o levou à descoberta da superfície que leva seu nome e a refletir sobre a permanência do estudo das superfícies na Geometria Diferencial. O diálogo também percorre as formas de visualização anteriores aos recursos computacionais, as relações entre História da Matemática e tecnologias digitais e os caminhos da divulgação científica.

Celso Costa



Celso Costa é matemático, escritor e educador, mestre e doutor pelo **IMPA** e professor titular do Instituto de Matemática e Estatística da **UFF**. Em 1982, encontrou as equações de uma nova superfície mínima completa, hoje conhecida internacionalmente como **Superfície Costa**, solucionando um problema que permanecia aberto havia **206 anos**. É membro titular da **Academia Brasileira de Ciências** e possui uma reconhecida atuação na educação e na divulgação científica. Também publicou os livros *A vida misteriosa dos matemáticos*, *A arte de driblar destinos* — vencedor do **Prêmio LeYa 2022** — e *A geometria do chapéu do sambista*, lançado em 2026.

Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/7439097890470621>

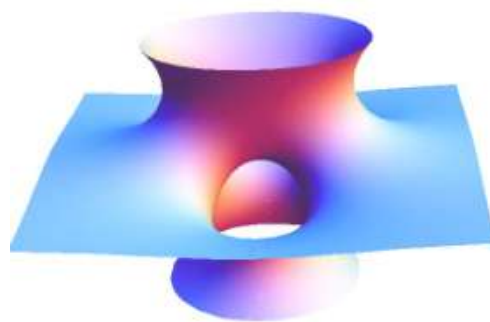
1. Quais caminhos de pesquisa levaram o senhor à concepção da superfície de Costa? Quais são as principais características dessa superfície?

CC: A Superfície Costa se enquadra num estudo geral de superfícies no espaço euclidiano tridimensional, denominadas de **superfícies mínimas**. Tais tipos de superfícies podem ser realizadas (pelo menos em regiões limitadas) por películas de sabão, e esse lado mágico lembra as brincadeiras da infância.

No mundo imenso das superfícies mínimas imersas no espaço euclidiano tridimensional se destaca um mundo exclusivo e desafiador de formas singulares da geometria. Em linguagem técnica, esse mundo específico diz respeito às **superfícies mínimas completas, propriamente mergulhadas e com topologia finita**. Nesse mundo aconteceu meu ponto de partida para a busca de responder uma pergunta que pairava há mais de duzentos anos.

Mas é necessário, para melhor entendimento, que eu possa especificar as propriedades fundamentais das superfícies desse mundo restrito.

Superfície Costa



Fonte: acervo de Celso Costa.

Explore no GeoGebra:

Acesse um modelo simplificado da Superfície de Costa, desenvolvido por **Humberto José Bortolossi**, e explore sua visualização em ambiente dinâmico.



[Clique aqui](#)

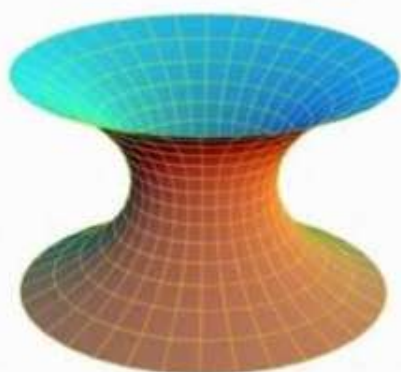
TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

200

ENTREVISTA COM CELSO COSTA

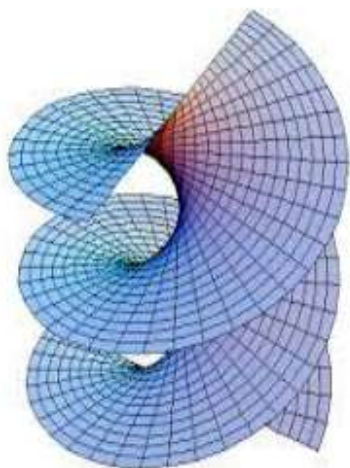
Na segunda metade do século XVIII apenas três superfícies integravam esse mundo particular de formas singulares da geometria: o **Plano de Euclides**, o **Catenoide de Leonhard Euler** e o **Helicoide de Jean-Baptiste Meusnier**. Ao longo dos dois séculos seguintes, alguns matemáticos tentaram provar a impossibilidade de existência de uma nova superfície nesse universo, outros tentaram encontrar suas equações. **Esse se tornou o meu problema de tese no ano de 1980, quando estudante de doutorado do Impa: encontrar no espaço tridimensional uma quarta forma nesse reduzidíssimo universo.**

Catenoide



Fonte: material encaminhado por Celso Costa.

Helicoide



Fonte: material encaminhado por Celso Costa.

A procurada superfície precisava verificar três requisitos essenciais.

Primeiro: a forma espacial precisava ser mínima, isto é, qualquer pequena porção dela poderia ser reproduzida como uma película de sabão.

Segundo: a superfície precisava ser completa e propriamente mergulhada; ou dito de outro modo, precisava dividir o espaço euclidiano tridimensional em duas regiões conexas e disjuntas, se estabelecendo como a fronteira comum dessas duas regiões.

Terceiro: tal quarta superfície deveria ter uma topologia finita. Essa última propriedade exigia que fosse uma superfície compacta com um número finito de buracos. Topologia faz referência à forma plástica do objeto. Do ponto de vista geral, as superfícies compactas de topologia finita podem ser descritas sem esforço, uma vez que existe um teorema que as classifica em **esfera, toro, bitoro... n-toro..., etc.**

Que o Plano é uma dessas formas singulares da geometria decorre da equação a derivadas parciais

$$(1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0$$

introduzida, em 1760, pelo eminente matemático Joseph-Louis Lagrange, dando nascimento a um ramo da matemática denominado **Cálculo das Variações**. Nessa equação $f(x,y)$ é uma função a duas variáveis num domínio conexo e

$$f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy} \text{ e } f_{yy}$$

são derivadas parciais. Lagrange apontou as soluções triviais da equação, descrevendo família de planos euclidianos, através de funções $f(x,y) = ax + by + c$, onde a, b, c são números reais onde a ou b são não nulos.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

201

ENTREVISTA COM CELSO COSTA

No mesmo ano, **Euler**, utilizando o método de separação das variáveis, encontrou a primeira solução não trivial da equação de Lagrange, revelando a existência do **Catenoide**. Em seguida, em 1776, impondo novas restrições à referida equação, **Meusnier descobriu o Helicoide**. Essas três superfícies permaneceram como os únicos exemplos de tais formas singulares da geometria nos duzentos anos seguintes.

Leonhard Euler foi um dos maiores matemáticos de todas as épocas. Viveu setenta e seis anos e provou mais de mil teoremas. O **Catenoide de Euler** tem a forma plástica de um cilindro, com uma região central de cintura fina, onde, à medida que o círculo gerador se afasta indefinidamente, tanto em uma direção quanto na outra, os comprimentos dos raios dos respectivos círculos convergem para o infinito.

Jean Baptiste Meusnier, matemático, químico e engenheiro, participou na revolução francesa com a patente de general. Atingido em combate, morreria em decorrência dos ferimentos, seis dias antes de completar trinta e nove anos. O **Helicoide descoberto em 1776** pelo ilustre matemático francês, em sua forma torcida lembra essas rampas de estacionamento nos edifícios-garagem. Tal forma espacial, 177 anos após sua descoberta, forneceria luz aos cientistas James Watson, Francis Crick e Maurice Wilkins na definição da estrutura geométrica capaz de modelar a molécula do DNA, na forma de uma **dupla hélice**.

Desde logo, um aspecto importante reúne o Plano e essas duas superfícies: **todas têm a esfera como a topologia de base**. O Plano e o Helicoide se conformam a **uma esfera menos um ponto**, enquanto o Catenoide, em termos topológicos, é **uma esfera menos dois pontos**.

Na solução de minha tese de doutorado, de partida, busquei a quarta superfície vislumbrando uma topologia mais complexa. Vasculhando a biblioteca, encontrei uma pré-publicação de **F. Gackstatter**, um matemático alemão contemporâneo na qual era construída uma superfície mínima com a **topologia do Toro menos um ponto**. O método ali usado se reportava às **funções elípticas**, uma antiga técnica matemática fundada por Karl Weierstrass no final do século XIX.

Passei a estudar em profundidade tais funções e logo topei com uma verdadeira bíblia sobre o assunto: a obra escrita pela dupla de franceses, **J. Tannery e J. Molk**, apresentada em dois extensos volumes, *Elements de la Theorie des Fonctions Elliptiques*, vindo à luz entre os anos 1893-1902. Nessa bíblia imperava a **função $P(z)$ de Weierstrass**, a função que junto com sua derivada é capaz de expressar qualquer outra função elíptica genérica. Em outras palavras, a função $P(z)$ desempenha, na geometria complexa do toro, papel equivalente à função z no plano complexo.

Esse era o estado da arte dos meus estudos no primeiro semestre de 1980. Em síntese, eu precisava encontrar funções capazes de **mergulhar um toro menos três pontos no espaço euclidiano tridimensional**, de modo a produzir uma quarta superfície nesse mundo particular de formas singulares da geometria.

Foi, portanto, **no contexto de minha tese de doutorado que se deu a descoberta da Superfície, depois nomeada Superfície Costa ou Costa's surface pela comunidade internacional**, tese de doutorado defendida em dezembro de 1982.

O caminho de chegada aconteceu após **sete anos de estudos no IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada)**. Durante todo esse tempo fui orientado pelo **prof. Manfredo Perdigão do Carmo**, matemático considerado o pai da geometria diferencial em nosso país.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

202

ENTREVISTA COM CELSO COSTA

Durante esses sete anos aconteceu uma fase de mestrado (dois anos e meio), mais uma fase inicial do doutorado (outros dois anos), onde me dediquei a avançar nos estudos de matemática abrangendo um leque de possibilidades, dentre as quais cito, **Análise, Geometria, Topologia Algébrica, Equações Diferenciais, Variáveis Complexas**, entre tantas outras disciplinas, com o objetivo de alcançar uma fronteira do conhecimento matemático da época.

Portanto foi necessário todo esse empenho na aquisição de conhecimentos técnicos em matemática, até me deparar com **problemas não resolvidos e enfrentar um deles como assunto de tese**

Foi, portanto, **no rastro do Plano, do Catenoide e do Helicoide**, que escolhi encontrar uma quarta superfície mergulhada no espaço euclidiano tridimensional, que fosse completa e de curvatura total finita. Além disso como o catenoide tem a topologia da esfera menos dois pontos e o helicoide tem a topologia da esfera menos um ponto, fui atrás de **um exemplo com uma topologia mais complexa**.

Nesse caminho **escolhi o toro menos três pontos como candidato a suportar a nova superfície. Foram quase dois anos de busca**, até apresentarmos à comunidade matemática as equações de uma tal superfície:

$$g = \frac{K}{P'(z)} \quad ; \quad w = P(z) dz$$

São equações que apresentam uma **disfarçada simplicidade**: a inversa da derivada da função **$P(z)$ de Weierstrass** representando o campo de vetores normais sobre a superfície e a mesma função, como coadjuvante, comparece na representação da diferencial **w** .

Toda a complexidade da representação reside na **função $P(z)$ de Weierstrass**, uma função descoberta pelo matemático alemão Karl Weierstrass na década de 1860 e como dito anteriormente, junto com suas derivadas gera toda a geometria complexa de um toro, ou seja a **função $P(z)$ de Weierstrass gera todas as funções elípticas de um toro**.

DA BUSCA À SUPERFÍCIE COSTA

1980 — O problema de tese

Encontrar uma quarta superfície nesse universo restrito de superfícies mínimas completas.

Uma topologia mais complexa

Celso Costa escolheu o toro menos três pontos como candidato a suportar a nova superfície.

Quase dois anos de busca

O percurso envolveu o estudo de funções elípticas e da função $P(z)$ de Weierstrass.

Formação no IMPA

O caminho até a descoberta foi construído ao longo de sete anos de estudos no IMPA, envolvendo áreas como Análise, Geometria, Topologia Algébrica, Equações Diferenciais e Variáveis Complexas, sob orientação de Manfredo Perdigão do Carmo.

1982 — A descoberta

A tese foi defendida em dezembro de 1982, e a superfície encontrada passou a ser conhecida internacionalmente como Superfície Costa.

POR QUE ESSA DESCOBERTA FOI IMPORTANTE?

Até o início da década de 1980, o conjunto das superfícies mínimas completas no espaço euclidiano tridimensional parecia extremamente restrito.

A descoberta da Superfície Costa ampliou esse horizonte ao apresentar um novo exemplo com topologia mais complexa, abrindo novas possibilidades de investigação em Geometria Diferencial.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

203

ENTREVISTA COM CELSO COSTA

2. O estudo das superfícies ainda constitui um forte objeto de pesquisa em Geometria Diferencial?

CC: Certamente, o estudo das superfícies no contexto da Geometria Diferencial é um assunto dinâmico, com problemas que resistem ao tempo e muito deles, ao serem resolvidos, abrem novas linhas de investigação.

É também mister ressaltar que os espaços onde se inserem tais superfícies é rico em complexidade, pois podem ser o espaço euclidiano de curvatura gaussiana nula, ou um espaço não euclidiano de curvatura gaussiana 1 (as esferas tridimensionais), ou ainda um espaço não euclidiano de curvatura gaussiana -1 (os espaços de Lobachevsky). Cada um desses espaços, onde as superfícies estão inseridas, requerem ferramentas matemáticas próprias na tentativa de resolver conjecturas, os tais problemas em aberto.

3. Sabemos que a tecnologia está muito presente na formação da minha geração. Estudar um texto clássico tendo em mãos um software de geometria dinâmica facilita bastante a compreensão de termos difíceis, sobretudo quando o argumento de visualização geométrica se torna mais complexo. Como era fazer Geometria nos tempos anteriores à computação e aos recursos digitais de visualização?

CC: É fato notório que a visualização dos objetos em geometria é muito importante no auxílio da resolução de problemas. Na minha época de doutorado já tínhamos acesso às visualizações de superfícies, especialmente no espaço euclidiano tridimensional.

Lembro por exemplo que o software **MATLAB** já tinha suas primeiras versões para uso da academia no final da década de 1970, embora seu lançamento comercial tenha se dado na década de 80. Também logo após a descoberta da superfície Costa foi a vez do surgimento do **Mathematica**, outro software poderoso na construção de superfícies a partir das coordenadas uma vez conhecidas.

Mas devo ressaltar que a **Superfície Costa**, tendo como modelo topológico um toro menos três pontos, representou um desafio sem precedentes quando da plotagem de suas equações no espaço euclidiano tridimensional.

Esse grande desafio, o qual de certa forma inaugurou um caminho para a computação gráfica que hoje conhecemos, foi enfrentado com especial originalidade por matemáticos americanos.

ANTES DO GEOGEBRA

Visualizar superfícies antes das ferramentas atuais



Fim da década de 1970

O uso de recursos computacionais começa a ampliar as possibilidades de visualização geométrica no meio acadêmico.



Anos 1980

Softwares como MATLAB e Mathematica passam a integrar o trabalho de pesquisadores interessados em representar curvas e superfícies.



O desafio da Superfície Costa

A complexidade topológica da Superfície Costa tornou sua representação computacional um problema particularmente difícil, marcando um momento importante no desenvolvimento da computação gráfica aplicada à Matemática.



Hoje

Ferramentas de geometria dinâmica, ambientes computacionais e impressão 3D tornam mais acessível a exploração visual de superfícies em contextos de ensino e divulgação científica.

MATLAB → Mathematica → computação gráfica → visualização dinâmica

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

204

ENTREVISTA COM CELSO COSTA

4. Quais são, em sua visão, algumas das principais áreas de pesquisa ligadas à Geometria Diferencial? O senhor acredita que seja possível articular História da Matemática e tecnologias digitais como uma metodologia de ensino capaz de ampliar a formação matemática e cultural do professor, sem a pretensão de torná-lo um geômetra profissional?

CC: São inúmeras as áreas de pesquisa em **Geometria Diferencial**, especialmente quando se considera os espaços euclidianos e não euclidianos de dimensão maior ou igual a três. Portanto, para ficar num universo mais restrito, colocaria foco nas **superfícies inseridas no espaço euclidiano tridimensional** e também nos **espaços não euclidianos tridimensionais**.

No caso euclidiano são as superfícies ordinárias de nossa visualização. No caso não euclidiano a visualização se torna um objeto bem mais complexo.

Ficando apenas nessas restrições, existem uma gama imensa de **problemas não resolvidos ligados às superfícies de curvatura média constante**, em particular quando essa curvatura média se anula, o que é justamente o caso das superfícies mínimas.

O relevante aqui é que **as superfícies mínimas podem ser representadas localmente por uma película de sabão**. O físico belga **Ferdinand Plateau** foi quem originalmente tipificou as superfícies mínimas no espaço euclidiano tridimensional como películas de sabão. Plateau realizou suas famosas experiências no período entre **1842 e 1868**.

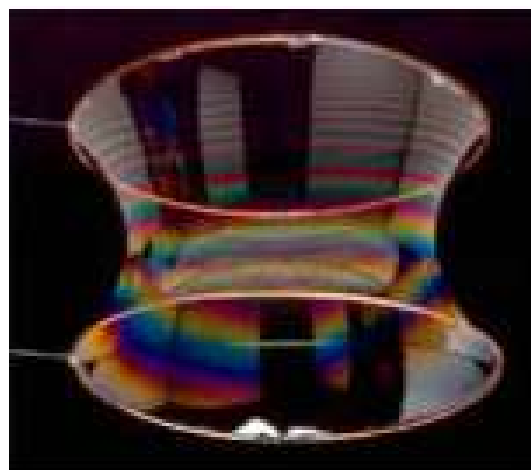
Ele tomava aros metálicos na forma de círculos deformados e mergulhava em uma solução de água e sabão, a fim de obter uma película, a qual era suportada nos bordos pela estrutura de fios de arame. **Tal película é uma superfície mínima**.

Tais experiências com películas de sabão são **exemplos lúdicos que podem ser apresentados a estudantes de todos os níveis**.

Evidentemente, devido à importância e circunstâncias em que tais experimentos foram realizados pelo físico belga — auxiliado por seus estudantes, pois ficou cego após observar um eclipse do sol sem proteção nos olhos —, tal prática fornece material para **um ponto de vista histórico sobre o nascimento e desenvolvimento da teoria das superfícies mínimas**.

Insumo que pode oferecer ao professor **material pedagógico importante para estimular vocações em matemática**

Catenoide formado por uma película de sabão entre duas circunferências de mesmo diâmetro, coaxiais e paralelas.



Fonte: Sá (2020, p. 96), a partir de Matthen.

Saiba mais: [Das Películas de Sabão às Superfícies Mínimas](#), de Vivilene de Souza Sá.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

205

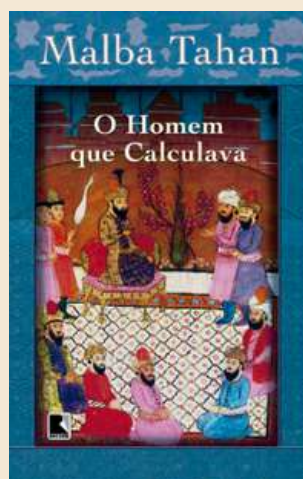
ENTREVISTA COM CELSO COSTA

5. Gostaria de destacar que *A vida misteriosa dos matemáticos* é um dos meus livros favoritos. A leitura me marcou muito pela maneira como o senhor constrói uma narrativa ficcional capaz de aproximar o leitor da vida e das ideias de diferentes matemáticos, sem perder o vínculo com a História da Matemática. Na sua opinião, como obras desse tipo podem contribuir para a divulgação da Matemática e para despertar, em professores, licenciandos e estudantes, o interesse pela História da Matemática?

CC: Quando escrevi **“A vida misteriosa dos matemáticos”** tive por objetivo traçar um panorama limitado, mas o mais abrangente possível da história da matemática, desde o primeiro homem de ciência, **Tales de Mileto no século V a.C.** — cuja lenda nos chega até os dias de hoje com a medida de pirâmides através de triângulos semelhantes e sombras —, alcançando os dias atuais com a resolução por **Grigori Perelman da conjectura de Poincaré**, um dos sete problemas do milênio.

É um livro que, tendo como mote **a narrativa das lendas que permeiam as descobertas em matemática**, traça uma espinha dorsal do conhecimento da disciplina desde os primórdios com os desenhos na areia, até a era moderna com o advento do computador e os cálculos na linguagem binária.

Creio que tais tipos de obra que segue uma tradição inaugurada com **“O homem que calculava” de Malba Tahan** oferecem alternativas lúdicas para a prática docente, bem como suas leituras podem estimular em jovens estudantes o interesse pela matemática.



O HOMEM QUE CALCULAVA

Clássico de Malba Tahan, o livro une narrativa e problemas matemáticos de forma lúdica. A obra se tornou uma referência importante para a divulgação da Matemática e para a aproximação entre literatura, ensino e imaginação.

OBRAS DE CELSO COSTA



Em destaque,

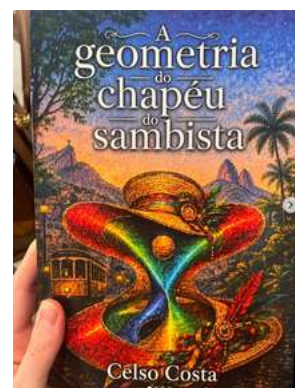
A vida misteriosa dos matemáticos, obra mencionada na entrevista.

Abaixo, aparecem também

A arte de driblar destinos,

vencedor do Prêmio LeYa 2022,

e ***A geometria do chapéu do sambista***, lançado em 2026.



TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

206

ENTREVISTA COM CELSO COSTA

6. Que sugestões o senhor daria para professores, licenciandos e estudantes interessados em ter um primeiro contato com o estudo das superfícies e com a Geometria Diferencial, especialmente em propostas que valorizem História da Matemática, visualização geométrica, tecnologias digitais e divulgação científica?

CC: Creio que o estudo das **superfícies no espaço euclidiano tridimensional** é um assunto bem concreto com vasta referências bibliográfica, cujos exemplares se prestam a uma **perfeita visualização geométrica**.

Inclusive em dias atuais, com o **auxílio da impressão 3D**, podemos construir as superfícies no formato de **objetos tridimensionais**, e assim apreciá-los em nossas mãos.

Esse avanço na visualização, bem como uma contextualização dos assuntos em vista da perspectiva histórica da evolução dos conceitos em matemática, pode ser um instrumento pedagógico relevante para tornar as aulas lúdicas e despertar nos alunos um interesse real pelo aprendizado.

ECOS DA CONVERSA

DA PESQUISA À SALA DE AULA



PESQUISA

Uma pergunta em aberto, anos de formação e a busca por uma nova superfície levaram à descoberta da Superfície Costa.



VISUALIZAÇÃO

Das películas de sabão aos recursos computacionais, visualizar tornou-se parte fundamental da maneira de investigar e compreender superfícies.



ENSINO

História da Matemática, tecnologias digitais e modelos tridimensionais podem aproximar conceitos avançados da formação de professores e estudantes.

HISTÓRIA • GEOMETRIA • VISUALIZAÇÃO • TECNOLOGIA • DIVULGAÇÃO

A entrevista com Celso Costa percorre justamente o caminho que esta edição de Trajetórias procura explorar: compreender a Matemática como uma construção histórica, visual, investigativa e também compartilhável.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

207

ENTREVISTA COM HUMBERTO BORTOLOSSI

Nesta entrevista concedida por escrito, Humberto Bortolossi discute possibilidades de articulação entre Geometria Diferencial, História da Matemática, tecnologias digitais e formação de professores. Suas respostas destacam caminhos para aproximar conceitos e textos clássicos da experiência do futuro professor, valorizando a visualização, a compreensão conceitual e as conexões com a Educação Básica.

Humberto Bortolossi



Humberto José Bortolossi é licenciado em Matemática pela **UEM**, mestre em Matemática pelo **IMPA** e doutor em Matemática pela **PUC-Rio**. É professor associado da **UFF**, onde atua na graduação, na educação a distância, em cursos de especialização e no mestrado profissional. Como coordenador do **Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro**, desenvolve trabalhos que integram tecnologia e Educação Matemática. Também se destaca na divulgação científica e na produção de projetos e materiais interativos voltados à formação de professores e à democratização do conhecimento matemático.

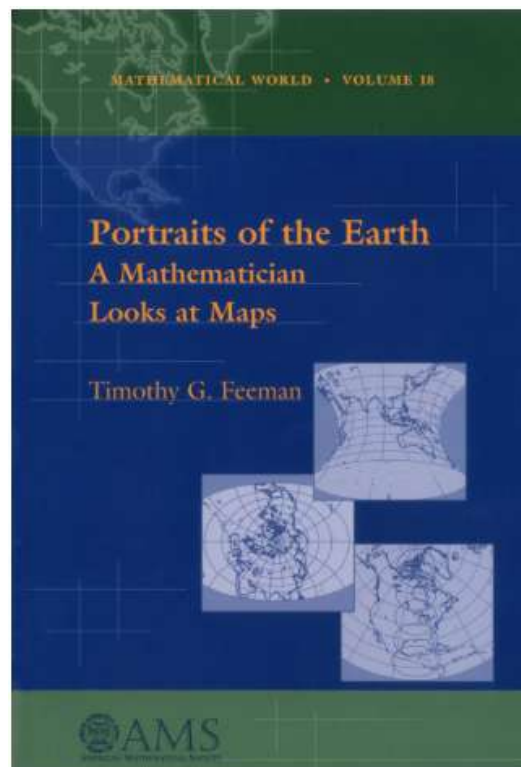
Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1032454150925984>

1. O senhor acredita que essa união seja possível de ser feita em cursos de formação de professores? Ou seja, seria possível criar um curso de Geometria Diferencial na licenciatura que tenha um diálogo direto entre Matemática e História da Matemática, e que não seja tão focado nos cálculos, a fim de compreender melhor os conceitos?

HB: Para a formação de professores, essa união **não é só possível, como desejável** — especialmente se o foco recair sobre temas que encontram eco na escola básica: projeções cartográficas e o papel do Teorema Egrégio de Gauss (o livro cuja capa coloco a seguir, "Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps" de Timothy G. Feeman pode ser útil), curvatura, comprimento de arco, cálculo de áreas e a visualização de superfícies parametrizadas (como, por exemplo, cunhas esféricas, cones de bases não circulares etc.).

Um curso com esse desenho **desloca o centro de gravidade dos cálculos para os conceitos**: os resultados clássicos deixam de ser um fim em si e passam a iluminar conteúdos que o futuro professor efetivamente ensinará.

A História da Matemática, nesse contexto, não entra como ornamento, mas como fio condutor que revela por que esses conceitos foram criados e quais problemas eles resolvem.



Capa de Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps, de Timothy G. Feeman. Fonte: American Mathematical Society (AMS).

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

208

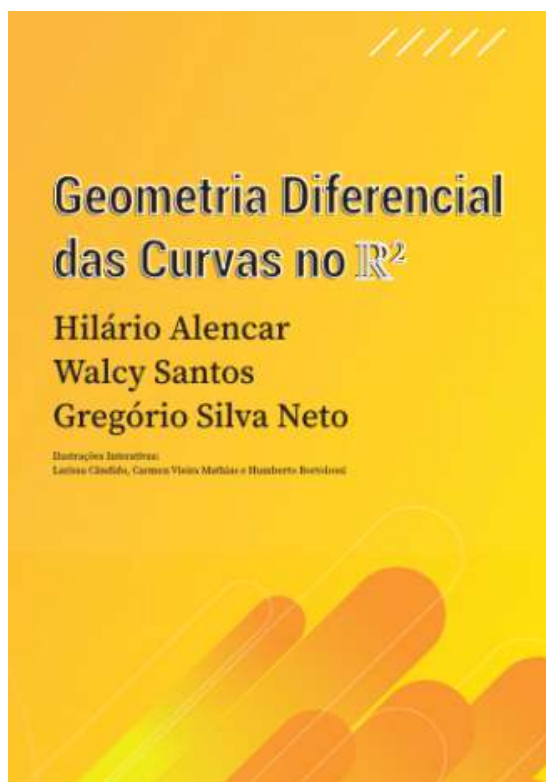
ENTREVISTA COM HUMBERTO BORTOLOSSI

2. O senhor acredita que as tecnologias digitais, como o software GeoGebra, possam ser facilitadoras da compreensão de textos clássicos de Geometria Diferencial para estudantes em formação que se interessam por História da Matemática?

HB: Certamente — tanto é assim que **geômetras de referência já estão produzindo material bibliográfico com o uso desses recursos**. Para citar um exemplo, entre vários: “Geometria Diferencial das Curvas no Plano”, de Hilário Alencar, Walcy Santos e Gregório Silva Neto, disponível gratuitamente em:



Geometria Diferencial das Curvas no $\mathbb{R}^2$



Capa de Geometria Diferencial das Curvas no $\mathbb{R}^2$, de Hilário Alencar, Walcy Santos e Gregório Silva Neto. Fonte: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

Vale registrar que, além do GeoGebra, sistemas como **Mathematica, Maple, Maxima, SageMath e Desmos** têm sido amplamente usados pela comunidade de professores e matemáticos. Esses recursos permitem **materializar dinamicamente o que os textos clássicos descrevem apenas analiticamente** — variar parâmetros, animar construções, explorar casos — encurtando a distância entre a linguagem do século XIX e a intuição geométrica do leitor de hoje.

ALÉM DO GEOGEBRA: OUTROS RECURSOS DIGITAIS

MATHEMATICA

Ambiente de computação técnica e simbólica da Wolfram, com recursos para cálculos, gráficos e visualizações.

Acesse: <https://www.wolfram.com/mathematica/>

MAPLE

Software matemático voltado à resolução, análise e visualização de problemas matemáticos

Acesse: <https://www.maplesoft.com/products/Maple/>

MAXIMA

Sistema livre de álgebra computacional para cálculos simbólicos e numéricos, incluindo derivação, integração, equações diferenciais e gráficos 2D e 3D.

Acesse: <https://maxima.sourceforge.io/pt/>

SAGEMATH

Sistema matemático livre e de código aberto que reúne diferentes ferramentas computacionais em uma interface baseada em Python.

Acesse: <https://www.sagemath.org/>

DESMOS

Ambiente on-line para exploração gráfica e visual de funções, curvas, equações e outros objetos matemáticos.

Acesse: <https://www.desmos.com/?lang=pt-BR>

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

209

ENTREVISTA COM HUMBERTO BORTOLOSSI

3. Que sugestões o senhor daria para levar o estudo das superfícies e o interesse pela Geometria Diferencial para professores, licenciandos e estudantes do Ensino Médio? Em especial, como esse primeiro contato poderia ser construído na formação inicial de professores, articulando História da Matemática, tecnologias digitais, visualização geométrica e divulgação científica?

HB: Acredito que **há muito a se explorar nessas conexões**. Para ilustrar, indico duas produções minhas que são exemplos dessa articulação entre História da Matemática, tecnologias digitais, visualização geométrica e divulgação científica:

“O que é simetria? Diferentes usos da palavra ao longo da História da Matemática.”

Regina Célia Guapo Pasquini e Humberto José Bortolossi

[Acesse aqui](#)

“Modelos Cosmológicos: Três Episódios na História da Matemática para a Sala de Aula”

Regina Célia Guapo Pasquini e Humberto José Bortolossi



[Acesse aqui](#)

Nessa mesma linha, menciono também o livro ***“Simetria – História de um Conceito e suas Implicações no Contexto Escolar”***, que escrevi em coautoria com Regina Célia Guapo Pasquini, publicado na Série História da Matemática para o Ensino (SBHMat/Editora Livraria da Física), que mostra como **um conceito historicamente rico pode ser levado à sala de aula da escola básica**.



Disponível em:

https://www.crephimat.com.br/visor_mnc.php?id_t=30

Como projetos futuros, estou considerando tratar da **história da reta numérica** — mais um tema em que **história, visualização e ensino se encontram de maneira natural**.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

210

ENTREVISTA COM FELIPE AIZIC

Nesta entrevista, Felipe Aizic revisita sua formação em Matemática e o percurso que o aproximou da Geometria Diferencial. A conversa aborda a presença de curvas e superfícies na graduação e na pós-graduação, os desafios da formação matemática e as relações entre geometria, História da Matemática, Filosofia, ensino e Física.

Felipe Aizic



Felipe Colar Aizic é licenciado em Matemática e mestre em Matemática Pura pela UFRJ, com pesquisa na área de **Geometria e Topologia**. Atualmente, é doutorando em **Ensino e História da Matemática e da Física pelo PEMAT/UFRJ**, na área de História e Fundamentos da Física Matemática. Participa do Grupo de Teoria e História dos Conhecimentos, da USP, e já atuou como professor substituto na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Sua trajetória articula Geometria Diferencial, História da Matemática, Filosofia, Física e ensino. É também medalhista internacional em Olimpíadas de Matemática.

Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1010095289875870>

1. Fale-nos um pouco de sua formação em matemática e como foi o seu encontro/encantamento pela geometria. Como se deu?

FA: Minha trajetória foi, de fato, bastante não-linear. Fiz Licenciatura em Matemática na UFRJ (2020–2023), seguida pelo Mestrado em Matemática Pura (PgMAT/UFRJ, 2024–2026) e, atualmente, curso o Doutorado em História da Matemática e da Física (PEMAT/UFRJ). Como a grande maioria dos estudantes, sofri um “choque” inicial com a matemática do primeiro período, mas logo **me encantei por ser provocado a questionar tudo e pelas novas formas de argumentar, especialmente em Álgebra e Geometria**. Logo no 2º período fiz Análise I e, no 3º, Análise II, ambas com o professor Víctor Giraldo. Essas experiências me trouxeram um amadurecimento precoce e **um olhar diferente para os saberes matemáticos**, motivando-me a aprofundar na matemática sempre guiado por questões de ensino, filosofia e história.

O encanto definitivo pela geometria, no entanto, não veio de uma disciplina formal completa, mas de um fascínio genuíno pelo **Paradoxo de Banach-Tarski**, que conheci ainda em 2021, na disciplina de Análise II. Fiquei fascinado, fui pesquisar sobre o assunto e descobri diversas relações belíssimas de geometria que foram me aproximando do tema. Nessa mesma época, o encanto pela pesquisa já ganhava forma: além de participar de competições (onde fui medalhista internacional em olimpíadas de matemática), fiz duas Iniciações Científicas.

Na segunda delas (2022–2023), sobre Perspectivas Decoloniais em Educação Matemática, pesquisei sobre a concepção de tempo não hegemônica e o ensino de cálculo. Parte da pesquisa envolvia relacionar o Teorema Fundamental do Cálculo com os teoremas do cálculo vetorial (Green, Stokes e Gauss), o que naturalmente me levou ao **Teorema de Stokes em variedades**, o que colocou **meu primeiro pé na Geometria Diferencial**.

TERMOS - CHAVE

(1) Paradoxo de Banach-Tarski

Resultado matemático segundo o qual uma bola pode ser dividida em um número finito de conjuntos e reorganizada, por rotações e translações, para formar duas bolas do mesmo tamanho da original. Está relacionado à teoria dos conjuntos, à teoria da medida e às simetrias.

(2) Perspectivas decoloniais em Educação Matemática

Abordagens que questionam a ideia de uma única tradição matemática universal e valorizam diferentes saberes, práticas, culturas e formas de produzir e compreender conhecimentos matemáticos.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

211

ENTREVISTA COM FELIPE AIZIC

A semente de Banach-Tarski, plantada em 2021, amadureceu em 2022 numa eletiva de “Filosofia e Lógica em Matemática” com Michael Deustch. No final de 2023, descobri **uma relação intrínseca entre o paradoxo e a possibilidade de definir uma medida universal invariante** — o que motivou que fosse meu objeto de estudo no mestrado em 2024. Inicialmente, **eu estudaria o paradoxo em Flag Manifolds, o que me empurrou de vez para a Geometria Diferencial enquanto campo**. Acabei redirecionando a pesquisa, junto ao meu orientador, Thiago Drummond, para espaços métricos e variedades completas (conectadas pelo **Teorema de Hopf-Rinow**), o que me levou a cursar **Geometria Riemanniana** além da obrigatória Geometria Diferencial. Minha dissertação, *“Aspectos Geométricos das Decomposições Paradoxais em Espaços Métricos”*, uniu geometria, topologia, ações de Grupos de Lie, teoria da medida e também bastante álgebra. Foi ali que comecei a **construir uma formação sólida na área**.

Hoje, no Doutorado, percebo que encontrei o meu **“baricentro”: a intersecção exata entre matemática, física, ensino, história e filosofia**. Durante uma eletiva de “Simetrias e Integrabilidade em Física” com o professor **Alejandro Cabrera**, que fiz durante o mestrado, a mecânica quântica capturou meu interesse por sua imensa riqueza matemática e filosófica. Assim, vou buscar na minha pesquisa de doutorado, sob orientação do Thiago Hartz, primeiro, compreender como físicos e matemáticos chegaram à estrutura do momento angular na mecânica quântica, em particular o papel dos **invariantes da teoria**, como o de Casimir; segundo, compreender como o teorema da impossibilidade de Groenewold se insere nos debates acerca da quantização de sistemas clássicos; e, por fim, compreender o surgimento da mecânica quântica no espaço de fase, desde os trabalhos de Weyl, passando pela **tese de Groenewold**, até o **teorema de Lichnerowicz** et al. de 1978. Em suma, meu encontro com a geometria foi construído por comentários, conexões e tópicos soltos que se uniram de forma orgânica, e meu objetivo agora é consolidar essa formação **conectando história, geometria e física**.

TERMOS - CHAVE

(1) Flag Manifolds

Variedades associadas a sequências encadeadas de subespaços vetoriais. Aparecem em diferentes áreas da geometria, da álgebra e da teoria de grupos, sendo exemplos importantes de espaços com estrutura geométrica rica.

(2) Teorema de Hopf-Rinow

Resultado central da Geometria Riemanniana que relaciona completude, geodésicas e propriedades globais das variedades. Em linhas gerais, mostra quando a estrutura do espaço garante bons comportamentos de caminhos minimizantes.

(3) Geometria Riemanniana

Ramo da Geometria Diferencial que estuda variedades dotadas de uma métrica, permitindo medir comprimentos, ângulos, distâncias e curvaturas. É fundamental no estudo de geodésicas e da forma dos espaços.

(4) Invariante de Casimir

Objeto importante na teoria de Lie e na Física Matemática. Surge no estudo de simetrias e ajuda a compreender estruturas ligadas, por exemplo, ao momento angular na Mecânica Quântica.

DIÁLOGO ENTRE EDIÇÕES

O professor **Alejandro Cabrera**, citado por Felipe Aizic nesta entrevista, participou da primeira edição da revista Trajetórias, organizada por **Wallace da Silva**.

Na ocasião, Cabrera discutiu temas ligados à **Geometria Diferencial**, à **Física** e à permanência do **toro** como objeto de investigação matemática.

Para saber mais:

veja a entrevista com Alejandro Cabrera na **Edição 1** (2025) da revista Trajetórias em Diálogo.



TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

212

ENTREVISTA COM FELIPE AIZIC

2. Sabemos que a disciplina de Geometria Diferencial não consta nas grades da Licenciatura em Matemática. Você cursou geometria como eletiva? Cursar geometria na graduação é pré-requisito para fazer um bom curso de geometria no mestrado? O que você aconselha a um aluno em formação inicial?

FA: Não cursei Geometria Diferencial durante a graduação. Na verdade, eu só cursei Álgebra III e Filosofia e Lógica em Matemática de disciplinas do Bacharelado. No mestrado, logo no primeiro semestre (2024.1), eu cursei a disciplina de Geometria Diferencial que, por sua vez, é **um curso de Análise em Variedades**, e não um curso clássico de curvas e superfícies. No entanto, no semestre seguinte (2024.2), eu cursei Geometria Riemanniana, que trata sobre diversos tópicos da Geometria Diferencial que se conectam mais diretamente com um curso de curvas e superfícies da graduação, como, por exemplo, curvaturas e geodésicas.

Sobre um curso de Variedades, eu acho que tem vários requisitos, mas, de certa maneira, eles são parte constitutiva da formação intelectual de um matemático — ou seja, **fazem parte do seu capital cultural**. Por exemplo, para entender as primeiras noções de uma variedade (definição, exemplos e proposições), é importante ter alguns conceitos de topologia geral e análise no $\mathbb{R}^n$. No meu caso particular, os cursos de Análise que fiz foram suficientemente bons para que eu tivesse os requisitos necessários para consolidar essas ideias, tendo em vista que boa parte do curso foi feita em um Espaço Métrico e alguns exercícios já brincavam com a ideia de construir as noções de topologia sem ter uma noção de distância.

Confesso que, no curso de variedades, eu tive algumas dificuldades iniciais pela falta de familiaridade com algumas coisas, mas nada que me impedisse de compreender os conceitos. Afinal, **conceitos sutis, profundos e bonitos demoram para “cair a ficha”**, e entender isso enquanto processo também é parte de se entender enquanto matemático. Desta forma, eu **não acho que um curso de Geometria Diferencial seja requisito necessário e suficiente para entender um curso de variedades**, mas certamente um curso de Análise no $\mathbb{R}^n$ e algo como Introdução à Topologia Geral podem ajudar bastante, pois há uma certa passagem de abstração cuja maturidade se faz necessária.

Já para um curso como Geometria Riemanniana, o próprio curso de Variedades é um pré-requisito, pois trabalhamos em variedades, métricas e, portanto, a noção de Tensor, além de trabalharmos com fibrados, formas diferenciais, dentre outras coisas. É claro que, aqui, um

curso de Geometria Diferencial da graduação, sobre curvas e superfícies, **pode ajudar muito quanto aos exemplos e à familiaridade**. De certo modo, a Geometria Riemanniana é um curso que vai muito além, mas os exemplos “elementares” resgatam o que fora visto na graduação. No entanto, eu também não diria ser um pré-requisito necessário e suficiente; é bem plausível ser feito sem ter tido contato direto com esses tópicos na graduação (em particular, geodésicas e curvaturas).

Porém, apesar de tudo isso, eu aconselho fortemente cursar a Geometria Diferencial na graduação, por diversas razões:

- proporciona o contato com um ramo belíssimo da matemática exigindo poucos requisitos (eventualmente Cálculo 3 e Álgebra Linear);
- permite desbravar um mundo particularmente novo, tendo em vista que as únicas geometrias das quais se tem conhecimento prévio em meados da graduação são a sintética e a analítica;
- facilita o contato com o campo de pesquisa da Geometria na pós-graduação; e, por fim,
- insere o aluno desde cedo nas diversas vertentes de pesquisa da área, além de ajudá-lo a compreender grande parte do desenvolvimento da matemática contemporânea.

Desta forma, reitero que aconselho fortemente a disciplina a um aluno em formação inicial; tenho certeza de que valerá muito a pena, apesar de não achar estritamente que seja um pré-requisito

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

213

ENTREVISTA COM FELIPE AIZIC

3. Ainda se estudam curvas e superfícies em nível de pós-graduação *stricto sensu*? Você já ouviu falar ou conhece o conceito de ciclides?

FA: É claro que essa pergunta é um pouco subjetiva, pois depende de instituição para instituição. Mas, em geral, eu acho que se estuda, mas não é uma obrigatoriedade vigente nos currículos. A maioria das instituições de pós-graduação *stricto sensu* possui um formato de *n* disciplinas obrigatórias e *m* eletivas. Eu diria que, em geral, **curvas e superfícies estão presentes no bloco das disciplinas eletivas.**

No meu caso particular, que foi na UFRJ, em Matemática Pura, há 4 disciplinas obrigatórias e 3 eletivas. As 4 obrigatórias são: Estruturas Algébricas (Teoria de Galois), Geometria Diferencial (Variedades Diferenciais), Integração (Teoria da Medida) e Análise Complexa. Ou seja, curvas e superfícies não estão contidas nesse bloco, apesar de o curso de Geometria Diferencial fornecer naturalmente alguns exemplos de curvas e superfícies, mas não eram exemplos imprescindíveis à teoria. Quero dizer com isso que **os exemplos enriqueciam a teoria** para quem conhecia ou tinha certa familiaridade ou algum tipo de encantamento com esse mundo, mas, caso tais exemplos não aparecessem, a teoria permanecia sustentada para os alunos em geral com sua abstração ou com outros exemplos que não fossem necessariamente curvas e superfícies.

No bloco de disciplinas eletivas, existem algumas disciplinas que tratam de curvas e superfícies, mas, de maneira mais introdutória, eu destaco duas: **Geometria Riemanniana** (que é, formalmente, disciplina de Doutorado) e **Cálculo Avançado II** (eletiva para a matemática pura e obrigatória para a matemática aplicada), disciplina essa que eu cursei durante o meu primeiro período, concomitantemente à Geometria Diferencial (e Estruturas Algébricas).

Eu diria que essa concomitância foi muito importante para eu compreender os conceitos, pois, enquanto Geometria Diferencial ia para o mundo das Variedades, Cálculo Avançado II pegava, às vezes, os mesmos conceitos e trabalhava em Superfícies; tinha uma certa particularidade — e também uma beleza por si só. Esse curso trabalhou, em geral, com Integração Múltipla,

Aplicações Diferenciáveis e Integrais de Superfície, ou seja, conceitos como superfície regular, imersão, submersão, mergulho, orientação, superfícies com bordo, recobrimento, teorema de Stokes etc.

Apesar de eu ter visto e estudado algumas superfícies particularmente interessantes nesses cursos, **eu nunca ouvi falar em ciclides.**

4. Como você compreende o diálogo entre Geometria e História da Matemática nos cursos de Geometria Diferencial? Acha que esta combinação pode trazer ganhos para o licenciando e para o bacharelado em Matemática?

FA: Compreendo esse diálogo como um **exercício de análise epistemológica sobre a produção do pensamento geométrico. A história não se resume a biografias ou curiosidades cronológicas;** ela é o registro das crises conceituais, das tensões entre diferentes práticas matemáticas e das mudanças profundas nos critérios de rigor ao longo dos séculos. Compreender isso é entender que **as ideias não nascem prontas**, elas são fruto de “práticas matemáticas” de sua época, e isso é fundamental para desafiar o utilitarismo que, muitas vezes, esvazia a disciplina de sua própria vitalidade. Esse utilitarismo oculta debates que fundam os próprios conceitos e que, quando resgatados, nos ajudam profundamente a compreendê-los.

Para o bacharelado, a **inserção da História da Matemática** constrói um **capital cultural indispensável**, além de atuar como uma **ferramenta de resistência contra o formalismo vazio**. A **Geometria Diferencial ganha vida e motivação quando compreendemos as necessidades que a forjaram**. É muito diferente, por exemplo, aprender sobre curvaturas apenas enquanto fórmulas e compreendê-las entendendo que nasceram da impossibilidade geométrica de representar a superfície terrestre em um plano sem distorções. A história ajuda o pesquisador a desenvolver maturidade intelectual, revelando o estatuto epistemológico e político por trás do formalismo contemporâneo. A maneira “isolada” como a matemática frequentemente é concebida representa somente uma das competências que um pesquisador deve desenvolver, e não a sua totalidade. Torna-se crucial entender que a sua pesquisa se insere como uma etapa provisória de uma longa construção humana.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

214

ENTREVISTA COM FELIPE AIZIC

Já para o licenciando, os ganhos são ainda mais urgentes. A geometria escolar, quase exclusivamente euclidiana, é frequentemente reduzida a algoritmos e propriedades, reforçando a imagem da matemática enquanto estática, finalizada e inquestionável. Ao ter contato com a história da Geometria Diferencial e com o surgimento das geometrias não euclidianas no século XIX, **o futuro professor ganha ferramentas para subverter essa visão dogmática**. Conceitos naturalizados, como o de “reta”, podem ser ressignificados e ampliados (como na forma de geodésicas), dependendo do espaço geométrico em que operamos. Além disso, a história eleva o estatuto do pensamento no ensino ao nos mostrar, por exemplo, que os erros não precisam ser vistos como “pecados” — como frequentemente o são nas aulas de matemática. **O erro deve ser encarado como uma força criativa que abre um horizonte de sentidos produzidos pelos alunos**, por nós e pela sociedade, não apenas por uma postura política nossa, mas, sobretudo, porque o próprio desenvolvimento histórico da matemática legitima essa posição.

Em suma, essa combinação traz ganhos imensos. Ela forma bacharéis mais reflexivos sobre os alicerces de suas pesquisas e forma licenciandos capazes de levar para a **sala de aula uma matemática viva e em constante construção**, afastando-se do ensino como um mero treinamento de métodos repetitivos. No entanto, vale ressaltar que a inserção da história vai além dessa tentativa de apenas “humanizar” a disciplina. Ao mostrar que a matemática não é um bloco de verdades prontas e inquestionáveis, a história expõe as escolhas e as disputas por trás do conhecimento. No fim das contas, isso nos devolve a responsabilidade crítica sobre qual visão de ciência estamos ajudando a construir na pesquisa e na sala de aula.

IDEIAS-CHAVE DA ENTREVISTA

(1) Geometria Diferencial na graduação

A disciplina pode ser cursada ainda na formação inicial e, mesmo não sendo um pré-requisito obrigatório para a pós-graduação, amplia o repertório matemático e aproxima o estudante de um campo importante de pesquisa.

(2) Curvas e superfícies na pós-graduação

Embora nem sempre estejam entre as disciplinas obrigatórias, curvas e superfícies seguem presentes na pós-graduação, sobretudo em disciplinas eletivas, contribuindo para enriquecer exemplos, intuições e conexões geométricas.

(3) História da Matemática como formação crítica

Para Felipe Aizic, a História da Matemática não se reduz a curiosidades ou biografias: ela ajuda a compreender crises conceituais, mudanças de rigor e práticas matemáticas, favorecendo uma formação mais reflexiva.

(4) Geometria, história e ensino

O diálogo entre Geometria Diferencial e História da Matemática fortalece tanto a formação do bacharelado quanto a do licenciando, ao apresentar a matemática como construção humana, viva e em constante transformação.

“A história não se resume a biografias ou curiosidades cronológicas; ela é o registro das crises conceituais, das tensões entre diferentes práticas matemáticas e das mudanças profundas nos critérios de rigor ao longo dos séculos.”

— Felipe Aizic

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

215

CONVERSA COM EDUARDO MADEIRO

Nesta conversa, Eduardo Madeiro observa as ciclides de Dupin a partir da Arte, da cultura visual e de sua experiência como professor da Educação Básica. A conversa explora relações entre forma, volume, vazio e movimento, além das possibilidades de diálogo entre Matemática, Arte, modelos tridimensionais e práticas escolares.

Eduardo Madeiro



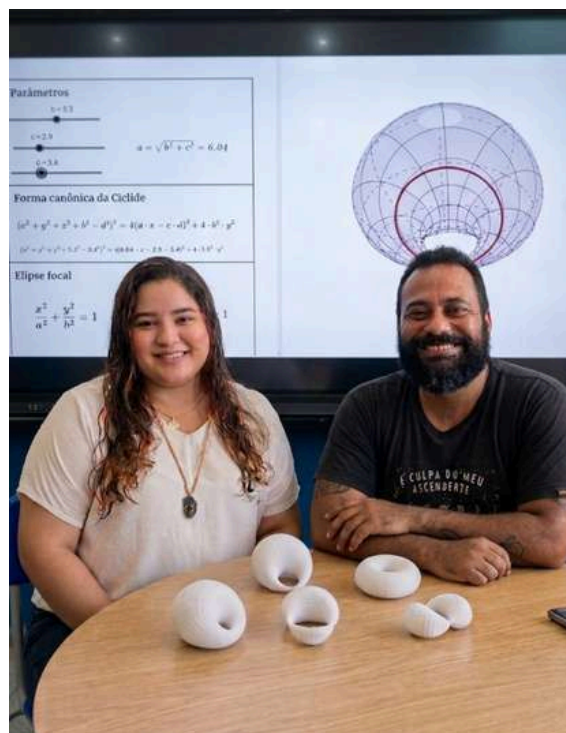
Eduardo Madeiro de Santana é professor de **Arte na Educação Básica**, pesquisador e agente cultural. É licenciado em Artes Visuais e graduado em Moda e Figurino, Sociologia e História, além de possuir formação em Pedagogia. Atualmente, é doutorando em Memória Social pela **UNIRIO** e mestre em Patrimônio, Cultura e Sociedade pela **UFRRJ**. Suas pesquisas envolvem memória, patrimônio cultural, identidade, cultura popular e educação antirracista, com destaque para as festas juninas e outras manifestações culturais da Baixada Fluminense. Sua trajetória também reúne experiências em figurino, moda, Carnaval, teatro e produção audiovisual.

Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9551400673148962>

QUANDO A GEOMETRIA ENCONTRA A ARTE

Esta conversa foi realizada presencialmente e teve como ponto de partida a observação e a manipulação de diferentes modelos impressos em 3D de ciclides de Dupin. As superfícies também foram exploradas dinamicamente no GeoGebra 3D, em um quadro interativo, permitindo acompanhar as transformações produzidas pela variação dos parâmetros.

A partir desse contato visual e material, Victória Gentil e Eduardo Madeiro constroem um diálogo sobre círculo, simetria, volume, vazio, movimento e percepção espacial. Ao longo da conversa, surgem aproximações com a arquitetura, o design, o cubismo, o concretismo e a arte contemporânea, além de reflexões sobre as possibilidades de integração entre Matemática e Arte na Educação Básica.



TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

216

CONVERSA COM EDUARDO MADEIRO

VG: Olhando para essas formas, qual é a sua primeira impressão, do ponto de vista visual e artístico, ao manipulá-las?

EM: A primeira coisa que me chama atenção é a **presença do círculo**, que me remete imediatamente ao **equilíbrio entre o volume e o vazio**, como nessa peça que lembra uma bolsa nessa peça que lembra uma bolsa. Também pensei, pela organização das formas, no **Homem Vitruviano**, de Leonardo da Vinci.

Essas superfícies também me recordam o **movimento concretista nas artes**. Ao mesmo tempo, a ideia do círculo traz algo muito orgânico, que foge daquela concepção mais engessada que encontramos em muitas construções arquitetônicas atuais.

VG: O fato de serem objetos matemáticos muda a forma como você olha para eles?

EM: Não necessariamente. Eu não tenho uma base matemática aprofundada, mas consigo compreender esses objetos por meio de noções de **simetria e assimetria, volume, espaço vazado, vazio, presença da linha e peso visual**.

Consigo observar como o objeto se posiciona no espaço, se há mais peso visual de um lado do que do outro e como a forma se organiza visualmente. Então, mesmo sem partir do cálculo matemático, consigo perceber essas superfícies como **objetos espaciais**.

VG: Como você percebe a relação entre forma, volume, vazio e movimento nessas peças?

EM: Para mim, o mais interessante é justamente a possibilidade de **brincar com esses conceitos**. Como gosto muito de arquitetura, vejo muitas possibilidades de trabalho a partir dessas formas.

Elas me remetem à **arquitetura modernista**, especialmente pela relação com o aproveitamento da luz e do espaço. Penso em construções que trabalham com **mezaninos, vazios, circulação e integração com a natureza**.

O uso das curvas também me lembra o trabalho de **Oscar Niemeyer**. Há essa ideia de **dar forma ao concreto**, criar silhuetas, trabalhar a leveza e a mobilidade visual. Ter essas peças em mãos torna mais fácil visualizar essas relações.

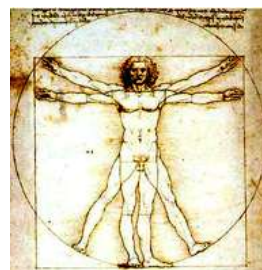
CHAVES DE LEITURA VISUAL

(1) Círculo, volume e vazio

As formas destacam o equilíbrio entre cheio e vazio.

(2) Homem Vitruviano

Referência à organização visual e à proporção.



Leonardo da Vinci, Homem Vitruviano, c. 1490. Reprodução em domínio público. Fonte: Wikiversidade

(3) Concretismo

Aproximação com a geometria e a estrutura formal na arte.

(4) Simetria e peso visual

O olhar artístico percebe linha, equilíbrio, assimetria e organização espacial.

(5) Arquitetura modernista

Luz, circulação, vazios e integração com a natureza.

(6) Oscar Niemeyer

Curvas, leveza, silhueta e mobilidade visual.



Catedral Metropolitana de Brasília, obra de Oscar Niemeyer. Fonte: Tissiana de A. de Souza/Wikimedia Commons.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

217

CONVERSA COM EDUARDO MADEIRO

VG: Na escola, a geometria costuma ser apresentada por meio de figuras e sólidos mais regulares e familiares, como a esfera, o cilindro, o cone e o cubo. No entanto, existe uma enorme diversidade de curvas e superfícies, muitas delas pouco conhecidas e raramente exploradas no ambiente escolar. Você acha que o contato com formas menos convencionais, como as ciclides de Dupin, pode ajudar a ampliar a visão dos estudantes sobre a geometria?

EM: Sim. Isso se relaciona ao que mencionei sobre o **modernismo** e sobre pensar a **utilidade** da forma para as pessoas. Hoje também vemos um movimento de retorno à **integração entre arquitetura e natureza**.

A matemática pode ajudar muito nessa unificação entre o **espaço natural e a forma geométrica**. Quando percebemos essas estruturas em objetos, construções e espaços, a **matemática deixa de parecer algo restrito ao ambiente escolar**.

VG: A impressão 3D ajuda a transformar uma ideia abstrata em um objeto mais próximo do corpo, do olhar e do tato?

EM: Sim. Usando a arte como referência, isso me aproxima da ideia do **cubismo**, especialmente em Picasso, no sentido de tentar enxergar um objeto a partir de **vários ângulos e perspectivas**.

A impressão 3D proporciona essa possibilidade de **visualização multifacetada**. O objeto pode ser girado, observado de diferentes lados, tocado e percebido em sua totalidade. **Isso amplia muito a experiência de compreensão da forma**.



Modelos tridimensionais de ciclides de Dupin utilizados durante a entrevista.
Fonte: acervo da autora.

VG: Você acha que objetos como esses podem gerar diálogos entre Matemática e Arte na escola?

EM: Totalmente. A **arquitetura**, por exemplo, é uma forma de arte presente no cotidiano e está ligada ao **design**, que pensa diretamente no usuário e na função dos objetos.

Se antes do século XIX tínhamos uma arte muito voltada à decoração e ao belo, a partir do século XX, com o modernismo, passamos a pensar também na **utilidade do objeto para a sociedade**.

Pensar a funcionalidade da matemática junto à natureza e ao mundo contemporâneo é fundamental. Esses objetos podem abrir um diálogo muito rico entre **Matemática, Arte, design, arquitetura e tecnologia**.

VG: Pensando nos alunos, que tipo de reação ou curiosidade essas formas podem provocar?

EM: A primeira reação é tentar perceber **onde essas formas aparecem no mundo real**. Alguns alunos podem estabelecer conexões com o mundo da moda, por exemplo, no design de bolsas, ou com a arquitetura de lugares como Dubai.



The Orb Bag, criação do Nik Bentel Studio inspirada nas ciclides de Dupin.

Fotografia: Mía Teresa;
modelo: Maya Man.

Fonte: Nik Bentel Studio.

Museu do Futuro, em Dubai.

Fotografia: Dubai Future Foundation/via Reuters.

Fonte: UOL.



Isso desperta a curiosidade de entender que a **matemática não existe apenas dentro da escola**. Ela aparece fora dela, nos objetos, nas construções, nas imagens e nas formas que circulam no cotidiano.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

218

CONVERSA COM EDUARDO MADEIRO

VG: Se você apresentasse essas peças em uma aula, oficina ou exposição, qual aspecto delas destacaria?

EM: Eu destacaria primeiro o **volume marcante das peças**, a **simetria de algumas formas** e a **presença do círculo**. Também seria possível trabalhar a repetição para gerar grafismos.

A partir dessas formas, podemos abordar desde **representações artísticas de povos originários**, por meio de padrões repetidos, até propostas contemporâneas, explorando os vazios, os volumes e as estruturas das peças.

VG: Você vê alguma potência didática ou artística em trabalhar superfícies matemáticas como objetos visuais e tridimensionais?

EM: Vejo muita potência. Eu mesmo utilizo esse tipo de recurso. Para mim, a matemática está muito ligada à **leitura visual**, à **perspectiva** e à **percepção espacial**, mais do que ao cálculo em si.

Quando o aluno tem a oportunidade de identificar essas relações no cotidiano ou na escola e consegue transformar esse conceito em **desenho ou escultura**, estamos unindo **Matemática e Arte**.

VG: Que referências da Arte, da escultura, do design ou da percepção visual poderiam conversar com esse tipo de forma?

EM: Uma referência que eu trago é a artista contemporânea **Beatriz Milhazes**, que trabalha intensamente com **círculos, repetição e elementos do barroco**. Ela faz um trabalho muito orgânico e explora também a ideia do erro.

A obra dela não busca uma perfeição exata. Pelo contrário, ela expõe a **falha humana como contraponto à perfeição tecnológica**, o que considero muito interessante.

BEATRIZ MILHAZES

Beatriz Milhazes é uma artista visual brasileira, nascida em 1960, no Rio de Janeiro, onde vive e trabalha. Sua produção reúne pintura, gravura, colagem e escultura, com composições marcadas pela sobreposição de formas geométricas e ornamentais, especialmente círculos, flores, arabescos e padrões repetidos.



Obra de Beatriz Milhazes. As sobreposições de círculos, formas orgânicas e padrões decorativos dialogam com as referências mencionadas por Eduardo durante a conversa.

Jardim Botânico, de Beatriz Milhazes. Estampa em seda baseada em detalhe de Belezinha (2011).
Fonte: Galeria Alphaville.

VG: Quando comecei a estudar essas superfícies, parti da leitura dos documentos históricos e, diante da necessidade de compreender melhor suas formas e propriedades, recorri à **modelagem geométrica** e à **visualização dinâmica**.

A partir da repetição de círculos e esferas, fui testando possibilidades, observando, errando, refazendo e reconstruindo. Esse percurso, guiado pela percepção visual e geométrica e marcado por erros e acertos, foi fundamental para que eu chegasse às construções.

Por isso, achei especialmente interessante você mencionar o **erro como parte do processo criativo**, porque ele também ocupou um lugar importante na minha própria investigação.

Agradeço por este diálogo e por compartilhar seu olhar sobre o projeto.

EM: Eu que agradeço. O projeto é muito interessante.

SEÇÃO DIDÁTICA

219

DA EQUAÇÃO AO OBJETO

Como ter sua superfície em 3D

Nem toda superfície matemática precisa permanecer apenas na tela. A partir de uma parametrização, é possível construir a superfície no GeoGebra 3D, exportar o modelo em formato STL e transformá-lo em um objeto físico por meio da impressão 3D.

1 Escolha uma superfície

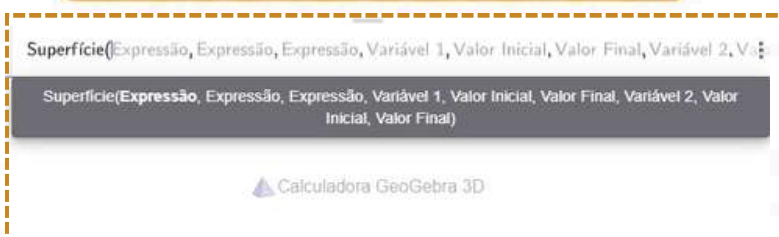
Acesse o MathCurve e explore o catálogo de superfícies. Escolha uma superfície parametrizada e identifique as expressões $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ e os intervalos dos parâmetros.



2 Construa no GeoGebra 3D

Insira a parametrização no comando de superfície do GeoGebra 3D, definindo também os intervalos de u e v .

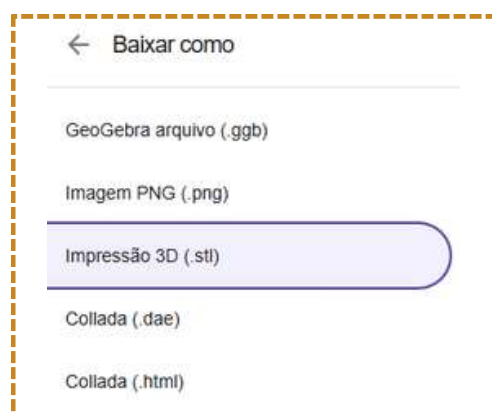
Superfície($x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$, u , início, fim, v , início, fim)



3 Exporte o arquivo

Depois de visualizar a superfície, use o menu do GeoGebra para baixar o modelo em formato STL.

Menu → Baixar como → STL



4 Imprima seu modelo

Se você tiver acesso a uma impressora 3D, abra o arquivo STL em um programa de fatiamento e prepare a impressão. Se não tiver, envie o arquivo a um laboratório, espaço maker, gráfica ou profissional que realize impressão 3D.



Exemplo de modelos impressos em 3D prontos para uso.



Dica importante

- verifique os intervalos dos parâmetros
- observe a orientação da superfície
- salve o arquivo em STL



Depois de imprimir o modelo, compare a superfície física com a construção no GeoGebra 3D e utilize o material na atividade investigativa.

Explore o MathCurve:
[clique aqui](#)

SEÇÃO DIDÁTICA

220

DO MODELO 3D AO GEOGEBRA

Esta atividade parte da observação de modelos impressos em 3D de ciclides de Dupin e segue para a exploração de uma construção dinâmica no GeoGebra 3D. O objetivo é relacionar forma, visualização espacial e variação de parâmetros, aproximando o leitor de diferentes configurações da superfície.



Modelos impressos em 3D de diferentes configurações da ciclidade de Dupin.

1 Materiais

- modelos impressos em 3D
- construção dinâmica no GeoGebra 3D
- celular, tablet ou computador

2 Proposta da atividade

Escolha um dos modelos, observe sua forma e tente reproduzi-lo no GeoGebra 3D. Para isso, manipule os parâmetros da construção e compare, continuamente, o modelo físico com a superfície digital.

3 O que observar

- abertura central da superfície
- presença ou ausência de autointerseção
- simetria e geometria global
- semelhanças e diferenças entre as configurações

Desafio investigativo



Que alterações nos parâmetros fazem a superfície mudar de configuração?

Explore no GeoGebra



BNCC em foco

Matemática

- EF09MA17 — Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicá-las na representação de objetos.
- EM13MAT512 — Investigar propriedades geométricas, formular conjecturas e testar relações com apoio de tecnologias digitais.

Computação

- Pensamento computacional — reconhecer padrões, comparar configurações e explorar parâmetros.
- Cultura digital — utilizar o GeoGebra de forma crítica, criativa e investigativa.

CONCLUSÃO

Ao longo desta edição, as ciclides de Dupin foram revisitadas por diferentes caminhos. Partimos de seu desenvolvimento histórico no século XIX, acompanhando contribuições de matemáticos como Charles Dupin, James Clerk Maxwell, Arthur Cayley e Gaston Darboux, e seguimos em direção às possibilidades contemporâneas de visualização, investigação e construção dessas superfícies.

As diferentes representações apresentadas mostram que um mesmo objeto matemático pode ser observado sob múltiplas perspectivas. Equações, curvas focais, famílias de esferas, construções dinâmicas no GeoGebra 3D e modelos impressos permitem estabelecer conexões entre o pensamento algébrico, a visualização espacial e a geometria das superfícies. Esse diálogo entre representações também esteve presente na própria pesquisa, na qual o GeoGebra foi utilizado não apenas como recurso de ilustração, mas como parte do processo de investigação e compreensão geométrica.

As entrevistas reunidas em Trajetórias em Diálogo ampliaram ainda mais esse percurso. Diferentes vozes aproximaram a Geometria Diferencial da formação matemática, da História da Matemática, da Educação Básica, da Arte, da cultura e de outras formas de compreender e comunicar o conhecimento. Assim, as ciclides deixaram de aparecer apenas como superfícies definidas por propriedades matemáticas e passaram também a funcionar como ponto de encontro entre diferentes experiências e campos de saber.

Na Seção Didática, a passagem entre o digital e o material abriu outras possibilidades de exploração. Manipular parâmetros, comparar configurações, construir superfícies no GeoGebra e transformá-las em modelos impressos em 3D permite que a geometria seja observada, experimentada e investigada de diferentes maneiras.

Esta edição não pretende esgotar o estudo das ciclides de Dupin. Ao contrário, pretende deixar caminhos abertos. As superfícies apresentadas aqui podem servir como ponto de partida para novas leituras históricas, novas construções digitais, outras experiências didáticas e diferentes diálogos entre Matemática, tecnologia, cultura e educação.

Que esta revista seja, portanto, menos um ponto de chegada e mais um convite para continuar olhando, manipulando, perguntando e descobrindo geometria.

REFERÊNCIAS

- AIZIC**, Felipe Colar. Entrevista concedida a Victória Gentil Andrade. Rio de Janeiro, 2026.
- ALENCAR**, Hilário; **SANTOS**, Walcy; **SILVA NETO**, Gregório. Geometria Diferencial das Curvas no $\mathbb{R}^2$. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/SBM/000001> . Acesso em: 10 ago. 2026.
- BORTOLOSSI**, Humberto José. Entrevista concedida a Victória Gentil Andrade. Rio de Janeiro, 2026.
- BORTOLOSSI**, Humberto José; **PASQUINI**, Regina Célia Guapo. Modelos cosmológicos: três episódios na História da Matemática para a sala de aula. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.
- BRASIL**. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF: MEC, 2018.
- BRASIL**. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Computação na Educação Básica: complemento à Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF: MEC/CNE, 2022. A Computação foi estabelecida oficialmente como complemento à BNCC em 2022.
- CAYLEY**, Arthur. On the cyclide. The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, v. 12, p. 148–165, 1873.
- COSTA**, Celso. Entrevista concedida a Victória Gentil Andrade. Rio de Janeiro, 2026.
- DARBOUX**, Gaston. Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques. Paris: Gauthier-Villars, 1873. Disponível em: Gallica – Bibliothèque nationale de France. Acesso em: 4 jul. 2026.
- DEGEN**, Werner. Cyclides. In: FARIN, Gerald; HOSCHEK, Josef; KIM, Myung-Soo (ed.). Handbook of Computer Aided Geometric Design. Amsterdam: North-Holland, 2002. p. 575–601.
- DUPIN**, Charles. Applications de géométrie et de mécanique. Paris: Bachelier, 1822. Disponível em: Gallica – Bibliothèque nationale de France. Acesso em: 4 jul. 2026.
- FEEMAN**, Timothy G. Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps. Providence: American Mathematical Society, 2002. (Mathematical World, v. 18).
- GAUSS**, Carl Friedrich. Disquisitiones generales circa superficies curvas. Göttingen: Dieterich, 1827.
- GEOGEBRA**. GeoGebra 3D Calculator. Disponível em: <https://www.geogebra.org/3d>. Acesso em: 10 ago. 2026.

REFERÊNCIAS

HILBERT, David; **COHN-VOSSEN**, Stephan. Geometry and the Imagination. New York: Chelsea Publishing Company, 1944.

KLEIN, Felix. Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Berlin: Springer, 1928. v. 1

MADEIRO, Eduardo de Santana. Entrevista concedida a Victória Gentil Andrade. Rio de Janeiro, 2026.

MATHCURVE. Dupin Cyclide. [s.d.]. Disponível em: <https://mathcurve.com/surfaces.gb/cyclidedupin/cyclidedupin.shtml>. Acesso em: 12 jul. 2026.

MAXWELL, James Clerk. On the cyclide. The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, v. 9, p. 111–126, 1868.

NIK BENTEL STUDIO. The Orb Bag in Black and White. 2024. Disponível em: <https://www.nikolasbentelstudio.com/projects/a002214f>. Acesso em: 4 jul. 2026.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Pierre Charles François Dupin. MacTutor History of Mathematics Archive. University of St Andrews, 2000. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dupin/>. Acesso em: 4 jul. 2026.

PASQUINI, Regina Célia Guapo; **BORTOLOSSI**, Humberto José. O que é simetria? Diferentes usos da palavra ao longo da História da Matemática. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, v. 3, n. 9, p. 6–17, 2018. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/50>. Acesso em: 10 ago. 2026.

PASQUINI, Regina Célia Guapo; **BORTOLOSSI**, Humberto José. Simetria: história de um conceito e suas implicações no contexto escolar. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. (Série História da Matemática para o Ensino, v. 9).

PRATT, Michael J. Cyclides in computer aided geometric design. Computer Aided Geometric Design, v. 7, n. 1–4, p. 221–242, 1990.

SILVA, Wallace da. Trajetórias: História da Matemática e Divulgação Científica. Edição 1: As seções do toro. 2025. Disponível em: <https://petrus.cp2.g12.br/items/67498796-ac98-4adb-aa98-9ee35c579810>. Acesso em: 4 jul. 2026.

STRIJK, Dirk J. Lectures on Classical Differential Geometry. New York: Dover Publications, 1988.

FICHA TÉCNICA

Título da revista:

Trajetórias – História da Matemática e Divulgação Científica

Título da edição:

As Ciclides de Dupin: História, Geometria e Visualização Dinâmica no GeoGebra

Edição:

2ª edição – 2026

Produção, texto, pesquisa e diagramação:

Victória Gentil Andrade

Orientação acadêmica:

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins

Entrevistas:

Prof. Dr. Celso Costa

Prof. Dr. Humberto José Bortolossi

Felipe Colar Aizic

Eduardo Madeiro de Santana

Imagens, diagramas e GeoGebra:

Victória Gentil Andrade

Apoio:

PROFMAT – Colégio Pedro II

© Victória Gentil Andrade. Uso educacional permitido com citação da fonte.