COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MATHEUS NASCIMENTO DOS SANTOS

RESOLVENDO PROBLEMAS ENVOLVENDO SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS:

Um encontro entre homotetia, artes visuais e tecnologias digitais

Rio de Janeiro
2024

MATHEUS NASCIMENTO DOS SANTOS

RESOLVENDO PROBLEMAS ENVOLVENDO SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS:

Um encontro entre homotetia, artes visuais e tecnologias digitais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, ofertado pela Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientador(a): Dr. Daniel Felipe Neves Martins

Rio de Janeiro

2024

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

S237 Santos, Matheus Nascimento dos

Resolvendo problemas envolvendo semelhança de triângulos : um encontro entre homotetia, artes visuais e tecnologias digitais / Matheus Nascimento dos Santos. - Rio de Janeiro, 2024.

48 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria - Estudo e ensino. 3. Semelhança e congruência de triângulos. 4. Geometria na arte. 5. Tecnologia educacional. 6. Tecnologias da informação e comunicação. I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Colégio Pedro. II. III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB-7: 5692.

MATHEUS NASCIMENTO DOS SANTOS

RESOLVENDO PROBLEMAS ENVOLVENDO SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS:
Um encontro entre homotetia, artes visuais e tecnologias digitais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, ofertado pela Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Aprovado em 14 de dezembro de 2024

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins
(Orientador- Colégio Pedro II)

Prof. M. Diego Tranjan Viug
(Membro Interno - Colégio Pedro II)

Prof. M. Raphael Martins Gomes
(Membro Externo - Escola Parque RJ/ Profex PUC-Rio)

AGRADECIMENTOS

Agradeço meus pais, Ana Maria Nascimento e Walmir Dantas, por sempre estarem ao meu lado apoiando minhas decisões e por todo suporte durante a minha vida, sem eles seria impossível chegar até aqui. Agradeço a todos da minha família, em especial a minha avó, Percilda Dantas.

Agradeço a minha parceira de vida Carolina Branco pelo apoio durante esse período. Agradeço aos meus amigos pelos momentos de incentivo, em especial Lucas Sampaio e Rayco Machado.

Um agradecimento aos meus queridos alunos, que me ensinam muito e que eu tenho o prazer de acompanhar o crescimento e amadurecimento.

E um agradecimento especial ao meu querido orientador, Daniel Felipe. Uma pessoa que tenho grande admiração e que foi muito importante em diversos momentos nessa trajetória.

RESUMO

SANTOS, M. N**. Resolvendo problemas envolvendo semelhança de triângulos:** um encontro entre homotetia, artes visuais e tecnologias digitais. 2024.Trabalho de Conclusão do Curso de Especialização em Educação Matemática - Pró-reitora de Pós-Graduação, Pesquisa Extensão e Cultura. Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2024.

O presente trabalho teve sua ideia inicial nas práticas inclusivas nas aulas de Matemática. Sua motivação veio a partir da dificuldade que alunos com TDAH trazem consigo ao resolverem questões de geometria que necessitam de verdadeiras engenharias mentais para resolvê-las e que necessitam de múltiplas ferramentas matemáticas vindas da aritmética, da álgebra e da geometria. Ao apresentar uma sequência didática que une a formalidade às possibilidades de resolver as questões a partir de um apelo visual, é que foi percebido que a proposta contida nestas linhas pode ser aplicada a qualquer grupo de alunos. Segue, então, um material que se propõe a dialogar com o professor, num recorte do tema ‘’semelhança de triângulos ", em especial para salas de aula com múltiplos atores.

Palavras-chave: semelhança de triângulos; homotetia; geometria e arte; tecnologias digitais.

ABSTRACT

SANTOS, M. N**. Solving problems involving similarity of triangles:** an encounter between homothety, visual arts and digital technologies. 2024.Trabalho de Conclusão do Curso de Especialização em Educação Matemática - Pró-reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa Extensão e Cultura. Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2024.

The present monograph had its initial idea in inclusive practices in Mathematics classes. His motivation came from the difficulty that students with ADHD bring with them when solving geometry questions that require real mental engineering to solve them and that require multiple mathematical tools from arithmetic, algebra and geometry. By presenting a didactic sequence that combines formality with the possibilities of solving questions using a visual appeal, it was realized that the proposal contained in these lines can be applied to any group of students. The following is material that aims to dialogue with the teacher, focusing on the theme “similarity of triangles”, especially for classrooms with multiple actors.

Keywords: similarity of triangles; homothety; geometry & ars; digital technologies.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este Trabalho de Conclusão de Curso teve sua ideia inicial nas práticas inclusivas em aulas de Matemática. A principal motivação surge quando o autor percebe em aulas de exercícios individuais ou em grupo, que alunos com Transtorno do Déficit de Atenção (seguido ou não de hiperatividade, TDA ou TDAH) trazem consigo muitas dificuldades, ao resolverem questões de geometria nos dois anos finais de escolaridade do Ensino Fundamental. Questões cujas soluções necessitam de múltiplas ferramentas matemáticas e que fazem conexões entre a aritmética, álgebra e geometria são as mais desafiadoras para estes alunos. Da mesma maneira acontece com questões que necessitam de certa criatividade, como o traçado de uma reta auxiliar, de uma altura, de deslizar ou girar uma figura no plano ou no espaço.

A partir do momento que uma sequência didática que procurou unir a formalidade do conteúdo de semelhança de triângulos às possibilidades de resolver as questões a partir de um apelo visual, foi percebido que a proposta contida nas atividades poderia ser aplicada a quaisquer grupos de alunos e não exclusivamente a alunos com TDA ou TDAH. Segue, então, um material que se propõe a dialogar com o professor, num recorte do tema ‘’semelhança de triângulos", em especial para salas de aula com múltiplos atores, que infelizmente não pôde ser aplicado com os estudantes.

No **capítulo 2** trazemos uma breve fala sobre o ensino de geometria a partir do olhar da Historiografia da História da Educação Matemática a fim de contextualizar as ideias da geometria ao longo dos tempos, assim como apresentar um recorte envolvendo o Movimento da Matemática Moderna no Brasil.

No **capítulo 3** organizamos formalmente o conceito de semelhança entre polígonos e em especial a semelhança de triângulos e mostramos como os manuais trazem este assunto para as salas de aula. Comentários foram introduzidos a fim de preparar o leitor para a proposta didática que apresentamos ao final.

Nos **capítulos 4 e 5** atentamos para os aspectos formais da matemática que justificam teoricamente o uso do material de artes nas atividades do **capítulo 6,** para então pensarmos em como o professor poderia ter tido acesso às tecnologias digitais e confeccionar novas atividades inovadoras segundo o seu público.

Por fim, porém não menos importante, seguem as **Considerações Finais** e a breve lista de **referências bibliográficas** que suportam esta pesquisa.

2. ENSINO DE GEOMETRIA

As práticas de vida traduzidas pela geometria estão presentes desde o início da civilização. A ideia de medir o que está em volta por comparação, assim como determinar um número que expressa a área ou o volume são próprias do mundo matemático. Seja na visualização das áreas de terrenos, no cálculo do volume de água, na demarcação de terras ou no cálculo do diâmetro da Terra, a geometria euclidiana se faz presente e nos ajuda a compreender o espaço e tempo que vivemos.

Ao longo dos anos diversos matemáticos fizeram grandes contribuições para a matemática, em especial a geometria, como Tales de Mileto (624 aEC – 456 aEC), Pitágoras de Samos (572 aEC – 496aEC), Hippasus (secVI aEC), Hipócrates de Chios (470 aEC 410 aEC), Platão (427aEC – 347aEC), Euclides de Alexandria (secIII aEC) entre tantos outros que ilustram compêndios de matemática ou Filosofia. Esses nomes tiveram mais destaque especial na geometria, desde a ideia de ponto até a descoberta de teoremas e no desenvolvimento de grandes justificativas estruturadas que hoje conhecemos por demonstrações de afirmativas a partir de um grupo de axiomas. Axiomas são proposições que não carecem de demonstrações. São assumidas como premissas verdadeiras e que quando bem manipuladas, compõem o escopo de verdades de uma teoria.

Grosso modo, falar de geometria é falar de formas, tamanhos, medidas, angulações, posições relativas e de propriedades de figuras planas ou espaciais. É evocar o trabalho árduo de Euclides na sua sistematização e axiomatização. É descrever a engenhosidade das máquinas de Arquimedes ao calcular áreas totais e volumes de sólidos a partir da exaustão, é também reconhecer geômetras importantes como Euler, Lagrange, Lamé, HIlbert, Poincaré, Chasles, Lobachevsky, Riemann, Monge, Hadamard, Descartes, Gaston Darboux, Cartan e outros. Falar de geometria é reconhecê-la na Física, na Astronomia, nas Engenharias e na Etnomatemática. É saber da existência do “Livro dos Mortos do Egito”, das atividades dos agrimensores nomeados por faraós e discutir a origem da geometria a partir de Heródoto, é poder identificar a originalidade das geometrias africanas, reconhecer a Geometria Sona e as nuances culturais dos diferentes impérios africanos com vastos e múltiplos saberes.

O mesmo já não acontece quando pensamos em ensino da Geometria, sobretudo no Brasil. Estudar sobre a História da Geometria no Brasil é reconhecer que no momento colonial tínhamos uma geometria voltada para as construções militares e que até a primeira metade do século XX a população não tinha acesso à educação pública de qualidade. Meneses (2007) afirma que a geometria perdeu espaço nos currículos escolares, principalmente quando o assunto é demonstração de teoremas, ficando seu ensino restrito ao reconhecimento de propriedades de figuras simples e que entre o período colonial e o republicano a geometria deixa de existir como disciplina e passa integrar currículo de matemática.

Com as práticas acadêmicas inspiradas nas tradições francesas, Valente (2007) nos conta que manuais franceses eram usados no Brasil, alguns traduzidos e outros não, e a realidade curricular da disciplina não acompanhava a realidade do alunado brasileiro e do professorado, este último em função de sua formação, uma vez que os manuais de geometria eram utilizados nas escolas de ensino primário e aplicados por professores formados para atuar neste segmento. Somente em 1837, com a inauguração do Colégio Pedro II, o currículo de matemática passa ser pensado para oito anos de escolaridade, e como o colégio tinha como um dos objetivos, servir de modelo de escolarização secundária para todo o país, a geometria passa configurar nos manuais e grades curriculares do 4o e 5o anos, com duas horas de aula.

Já na primeira metade do século XIX a geometria passa por um processo de algebrização, onde cálculos aritméticos e algébricos passam a figurar mais nos exercícios do que na prática do pensar sintético. O livro Elementos de geometria e trigonometria retilínea, de Cristiano Ottoni, foi amplamente utilizado no ensino secundário brasileiro, sobretudo no Colégio Pedro II. Foi um texto de referência para os exames tradicionais da época, sobretudo após a grande reforma curricular de 1841.

Professores do Colégio Pedro II como Eugênio Raja Gabaglia e Euclides Roxo procuraram sedimentar a matemática do curso secundário onde a intuição e o reconhecimento dariam lugar progressivamente à formalidade. O mesmo aconteceria com a geometria. Durante as reformas Capanema (1930) e Francisco Campos (1931), na Era Vargas, os alunos brasileiros passaram a ter mais acesso a assuntos ligados à geometria e à trigonometria, sobretudo aqueles que seguiram os estudos em ciências e não nas áreas clássicas. Valente (2007) mostra que o Colégio Pedro II apresenta uma inovação no ensino da geometria. Seu corpo docente, liderado por Euclides Roxo, faz adaptações curriculares, mantendo a grade, porém colocando o aluno como foco do ensino-aprendizagem da disciplina, divulgando que o objetivo das práticas na instituição não serviria somente para preparar os alunos para os exames universitários. Foram trinta anos de um projeto de crescimento da nação onde se discutiu práticas curriculares, porém sem acesso universal e democrático. A educação pública, gratuita e laica ainda não chegava a todos os brasileiros.

Porém não se pode falar em rompimentos estruturais sem falar sobre o ensino da matemática no Brasil na segunda metade do século XX. É importante ressaltar que o Movimento da Matemática Moderna – MMM - teve seu auge entre os anos de 1960 e 1970. É o marco da chegada de uma nova corrente pedagógica com uma proposta diferente de ensinar crianças e adolescentes, com um ensino mais ativo, indo contra o ensino tradicional. Segundo Valente (2013):

> “Para além das discussões metodológicas, o MMM faz surgir algo um tanto incomum, diante daquilo que caracteriza os movimentos pedagógicos. O Movimento trata de redefinir o que até então se considerava elementar para o ensino de Matemática. Isso significa uma intervenção direta sobre os conteúdos a ensinar.” (Valente, 2013, p.161).

Um dos objetivos do MMM era tornar a disciplina mais rigorosa, lógica e abrangente, aproximando para uma matemática mais acadêmica e enfatizando a compreensão dos conceitos. Um dos principais fatores negativos desse movimento foi a falta de conexão do que era ensinado com a realidade dos alunos por causa de uma excessiva formalização. A partir da década de 1970, o MMM começou a perder força, mas foi deixado um legado, principalmente sobre a compreensão conceitual na matemática, mas foi identificado a necessidade de um equilíbrio entre o rigor matemático e a relevância para a vida dos alunos.

Nas últimas décadas do século XIX, surgem materiais que se tornam uma grande referência nacional para o ensino primário, passando a incluir a geometria euclidiana nas séries iniciais. A geometria euclidiana é um ramo da matemática que estuda as propriedades do espaço e das figuras geométricas, como pontos, retas, planos e sólidos. Ela se baseia nos postulados de Euclides e é fundamental no entendimento de muitos conceitos na geometria. Ao longo dos anos, questionamentos são feitos em relação a esse processo de ensino, Jean Piaget (1896 - 1980), por exemplo, era contra o ensino da geometria euclidiana nos anos iniciais, ele defendia que as crianças passam primeiro pelo “estágio topológico” antes da euclidiana, ou seja, elas ainda não conseguem analisar as formas de maneira detalhada, mas tem uma noção de tamanho e de suas características.

A matemática se apresenta como uma disciplina desafiadora para muitos estudantes. Diversos fatores contribuem para essas dificuldades, que vão desde questões individuais até motivos mais gerais do processo de ensino e aprendizagem. Culturalmente, a matemática já é vista como uma disciplina rejeitada por muitos alunos, mas é possível exemplificar alguns motivos que podem causar essa rejeição. A forma que é ensinada influencia diretamente no aprendizado dos alunos, uma abordagem tradicional, com foco na memorização de fórmulas, pode não ser eficaz para todos os estudantes. O rigor das avaliações com questões muitas vezes abstratas e complexas também pode ser um fator determinante. A falta de ligação com o cotidiano dos alunos, sem exemplos práticos, é um fator que pode afetar no processo de aprendizagem.

Sanchez (2004), destaca que as dificuldades de aprendizagem em Matemática podem se manifestar nos seguintes aspectos:

- Dificuldades em relação ao desenvolvimento cognitivo e à construção da experiência matemática; do tipo da conquista de noções básicas e princípios numéricos, da conquista da numeração, quanto à prática das operações básicas, quanto à mecânica ou quanto à compreensão do significado das operações.
- Dificuldades na resolução de problemas, o que implica a compreensão do problema, compreensão e habilidade para analisar o problema e raciocinar matematicamente.
- Dificuldades relativas à própria complexidade da matemática, como seu alto nível de abstração e generalização, a complexidade dos conceitos e algoritmos.

O papel do educador é fundamental quando é falado sobre o processo de ensino-aprendizado. Às vezes a falta de habilidade do professor ou a falta de motivação dos alunos podem ser determinantes. Dentre alguns fatores que podem auxiliar no ensino, está a utilização dos recursos didáticos como jogos, materiais manipuláveis e os recursos tecnológicos.

Quando falamos sobre o ensino de geometria, a utilização desses recursos pode ser ainda mais necessária. A geometria é um conteúdo ensinado desde os anos iniciais da escola com noções de formas e medidas, mas são dois questionamentos que esta pesquisa se propõe a contribuir, um reconhece a dificuldade de aprendizado de alunos em geral e o segundo a dificuldade que professores encontram ao desenhar uma possível solução para a questão. Por isso nos debruçamos sobre os triângulos, em especial sobre a semelhança.

3. SOBRE FIGURAS SEMELHANTES E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Em matemática, dizemos que duas figuras são semelhantes quando é preservada a sua forma, mantendo as medidas dos ângulos internos, mas seu tamanho pode ser alterado. A semelhança está relacionada principalmente com a ideia de reduzir ou ampliar uma figura, de modo que todas as medidas dos lados da nova figura sejam proporcionais à primeira figura. Isto é, na ampliação todos os lados são multiplicados por um número real maior do que 1 e na redução por um número real entre 0 e 1.

Um exemplo comum seria as fotografias impressas, se precisarmos ampliar uma foto retangular que possui dimensões iguais a 10 cm x 15 cm, mas com o intuito de manter a sua forma, precisaríamos de uma figura semelhante.

Figura 1 – Exemplo de uma fotografia com dimensões 10x15

Fonte: Arquivo Pessoal do autor,2022

É possível obter diversos tamanhos de fotografias que não faça uma distorção na imagem. Um exemplo seria de tamanho 20 cm x 30 cm, já que a razão entre a medida original e as novas medidas dos lados homólogos (lados que possuem pares de ângulos com medidas iguais) são iguais.

Tabela 1 - Razão de semelhança em relação a uma fotografia de dimensões 10x15.

Comprimento	Largura	Razão de semelhança
20	30	K = 2
12	18	K = 1,2
30	22,5	K = 1,5
1,7	2,55	K = 0,17

Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

Os resultados das razões no exemplo são chamados de razão de proporcionalidade.

No desenho de um pai e uma filha, supondo que o pai tenha 1,80 m de altura e sua filha tenha 1m de altura, se o desenhista representar o pai com 45 cm no papel, qual deve ser o tamanho da filha no desenho? O conhecimento sobre figuras semelhantes vai auxiliar na resposta dessa e de outras perguntas.

O pai com altura de 1,80 m (igual a 180 cm) foi representado com 45 cm no desenho. Ao relacionar esses valores, é possível observar que a razão entre a medida da altura do pai e a medida no desenho é 4. Para que o desenho não fique distorcido e a altura da filha seja correspondente com a realidade, é necessário que seja realizado o mesmo cálculo, ou seja, 100 cm dividido por um determinado valor seja igual a 4:

$$\frac{100}{x} = 4$$

Logo a altura da filha no desenho deve ser igual a 25 cm. Note que todas as medidas estão expressas em uma mesma unidade de medida

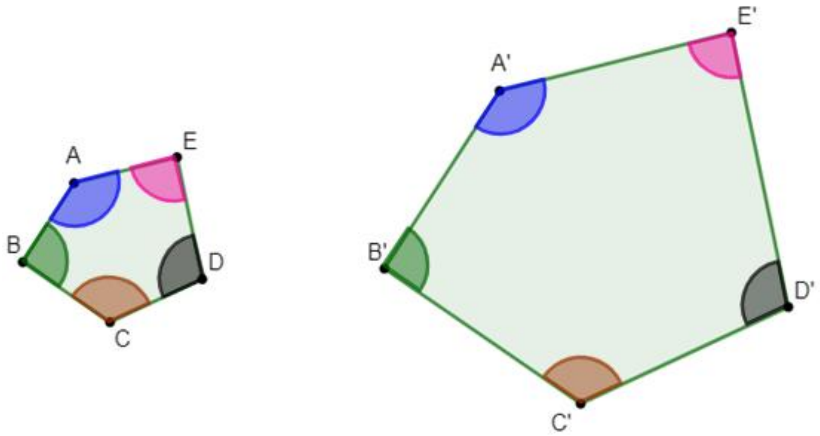
$$\frac{180}{45} = \frac{100}{25} = 4$$

3.1 - Polígonos Semelhantes

Dois polígonos são semelhantes quando existe uma correspondência entre seus vértices que determina: ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais. Entenda-se por ângulos correspondentes aqueles que possuem as mesmas medidas de suas aberturas angulares e cujos lados (homólogos) são proporcionais.

Considere o polígono ABCDE e A’B’C’D’E’ semelhantes.

Figura 2 – Dois polígonos semelhantes construídos no software Geogebra.



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

Então podemos concluir que:

$$\hat{A} = \widehat{A'}\ ;\quad \hat{B} = \widehat{B'}\ ;\ \hat{C} = \widehat{C'};\ D = \widehat{D'};\ \hat{E} = \widehat{E'} \quad \text{e}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = k$$

Considerações:

- Utilizaremos o símbolo ~ para representar duas figuras semelhantes, ou seja, ABCDE ~ A’B’C’D’E’.
- Os lados correspondentes são chamados de lados homólogos.
- O valor das razões dos lados homólogos é chamado de razão de semelhança.

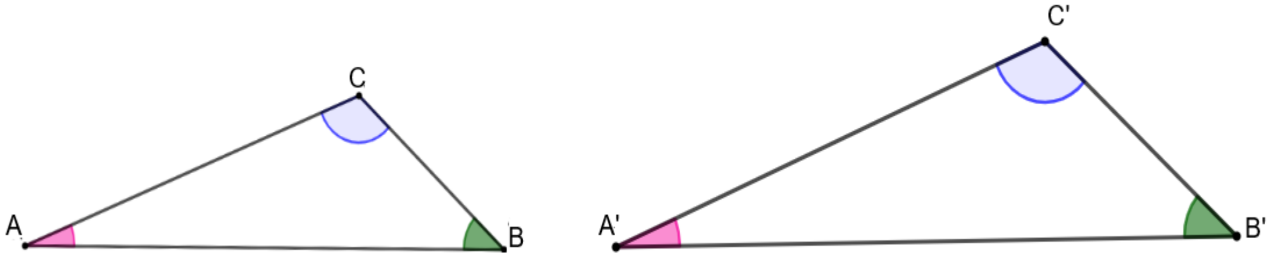
A semelhança de polígonos é um conceito essencial na geometria, que permite entender como diferentes figuras podem compartilhar a mesma forma. Tem aplicações em mapas e escalas, na arquitetura, em desenhos técnicos e em campos multidisciplinares.

3.2 - Semelhança de Triângulos

Dentre as semelhanças de polígonos, a semelhança entre triângulos é uma das mais exploradas nos livros didáticos brasileiros. Em geral, este conteúdo é desenvolvido no 9º ano do Ensino Fundamental. A semelhança entre os triângulos possui algumas particularidades.

Considere os triângulos ABC e A'B'C'.

Figura 3 – Dois triângulos construídos no software Geogebra,



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

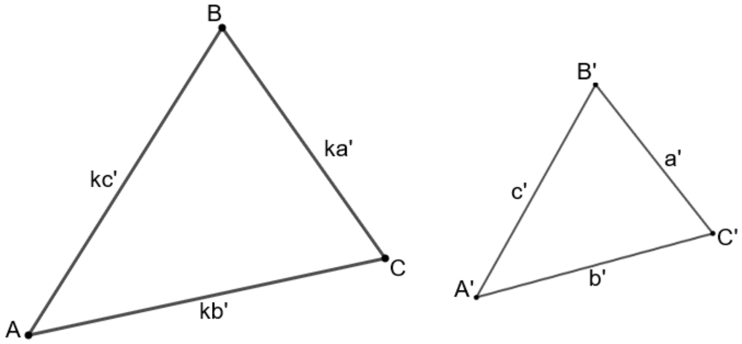
Existem três critérios que definem quando dois triângulos são semelhantes.

- Caso Lado – Lado – Lado (LLL)

Sejam ABC e A'B'C' triângulos no plano, tais que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = K$$

Figura 4 – Dois triângulos construídos no software Geogebra,



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

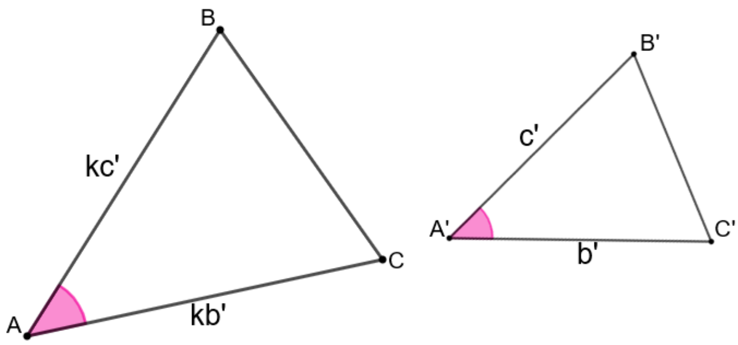
Então ABC ~ A'B'C'.

- Caso Lado – Ângulo – Lado (LAL)

Sejam ABC e A’B’C’ triângulos no plano, tais que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{A'C'}{A'C'} = k \;\; e\, \hat{A} = \hat{A}'$$

Figura 5 – Dois triângulos construídos no software Geogebra,



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

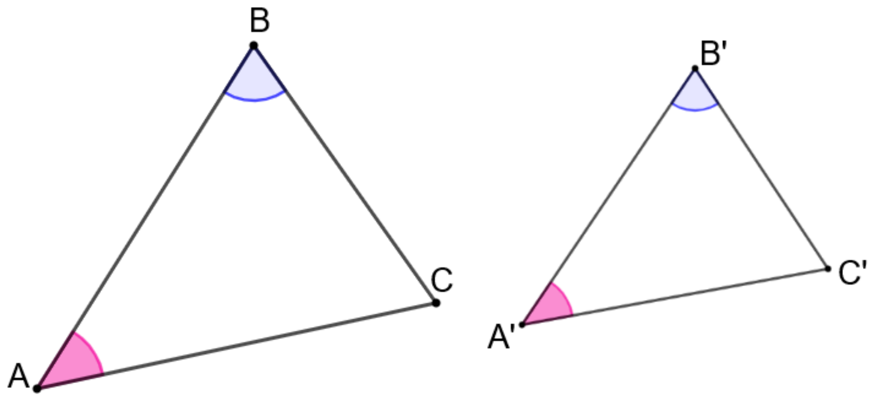
Então, ABC ~ A’B’C’.

- Caso Ângulo – Ângulo (AA)

Sejam ABC e A’B’C’ triângulos no plano, tais que

$$\hat{A} = \widehat{A}' \; e \; \hat{B} = \widehat{B}'$$

Figura 6 – Dois triângulos construídos no software Geogebra,



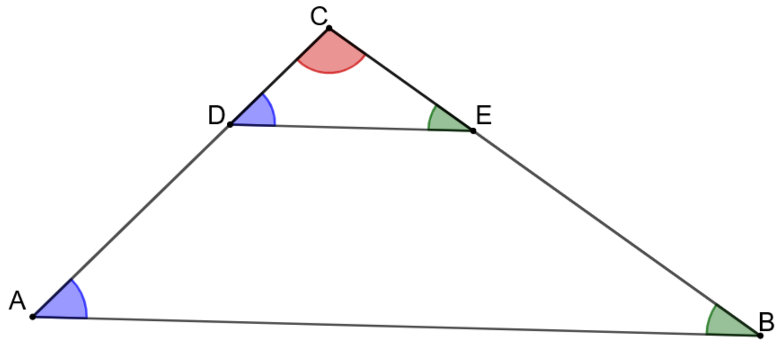
Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

Então, ABC ~ A’B’C’.

É importante chamar atenção para a simbologia adotada nos materiais didáticos e a língua portuguesa. Isto é, quando escrevemos LAL queremos dizer que os dois triângulos semelhantes possuem, dois lados com medidas proporcionais, x e kx, outros dois lados proporcionais, y e ky e um ângulo congruente entre eles.

Considerando um triângulo qualquer ABC e um segmento DE paralelo a AB, com D ∈ AC e E ∈ BC.

Figura 7 – Dois triângulos construídos no software Geogebra,



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

Utilizando essa construção é possível observar que os triângulos ABC e DEC são semelhantes. Os dois triângulos possuem o ângulo C em comum e como AB // DE, podemos afirmar que os ângulos $\hat{A}$ e $\widehat{D}$ são congruentes (assim como os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{E}$. Logo, pelo caso AA, os triângulos ABC e DEC são semelhantes.

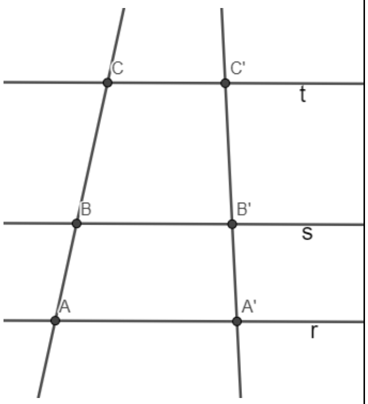
3.3 - Teorema de Tales

Tales de Mileto (Mileto, 624 aEC – Mileto, 456 aEC) foi um filósofo grego que viveu por volta do século VI aEC., é considerado um dos pais da filosofia ocidental. Ele é responsável por diversos resultados em geometria e um deles carrega o seu nome: o Teorema de Tales. Esse teorema é uma ferramenta fundamental em geometria, pois estabelece uma relação de proporcionalidade entre segmentos de reta que estão contidos em retas transversais e cortam um feixe de paralelas.

O teorema de Tales é muito utilizado na resolução de problemas geométricos e tem diversas aplicações na engenharia, arquitetura, cartografia e sua compreensão é muito importante para o estudo em outras áreas além da matemática.

Enunciado: Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhemos pontos A, A' ∈ r, B, B' ∈ s e C, C' ∈ t, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$



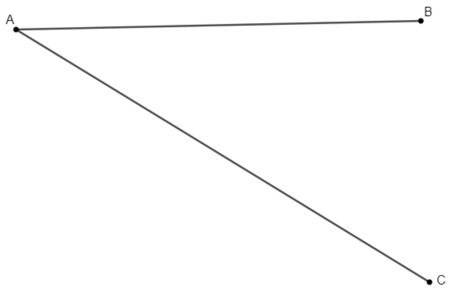
Utilizando esse teorema, é possível dividir um segmento de reta em n partes congruentes utilizando apenas régua não graduada e compasso. Observe as etapas da divisão do segmento de reta AB em 5 partes com mesma medida.

Figura 8 – Segmento AB construído Software Geogebra,

Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

Trace um segmento AC, de modo que os pontos A, B e C não sejam colineares.

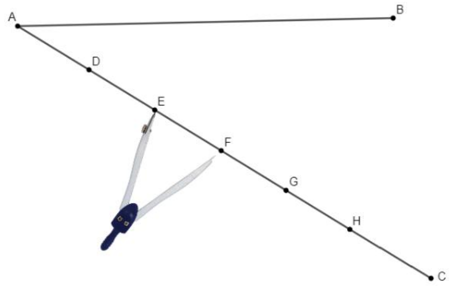
Figura 9 - Segmentos de retas AB e AC construído no software Geogebra.



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

Utilizando uma mesma abertura no compasso, trace os pontos equidistantes D, E, F, G e H.

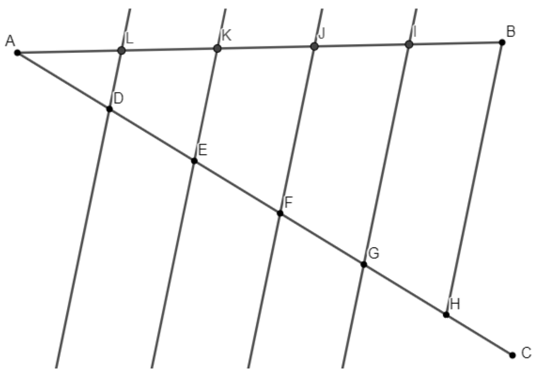
Figura 10 - Segmento AC dividido em 6 partes construído no software Geogebra.



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

Trace o segmento BH e em seguida as retas paralelas a esse segmento que intercepta os pontos D, E, F e G.

FIGURA 11 - Segmentos de retas interceptando AB e AC construído no software Geogebra



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

Por construção, AD = DE = EF = FG = GH e LD // KE // JF // IG // BH e pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AL}{LK}$$

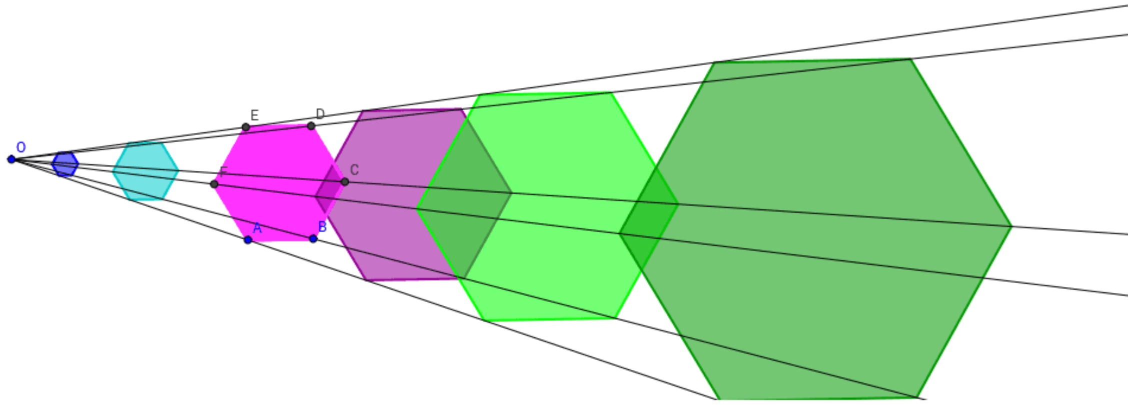
Logo, AL = LK e de maneira análoga, AL = LK = KJ = JI = IB.

Na sequência do trabalho, serão exploradas outras aplicações do Teorema de Tales, destacando sua relevância para a geometria. Esse teorema, que estabelece uma relação fundamental entre segmentos de reta em triângulos e retas paralelas, é uma ferramenta poderosa para a resolução de diversos problemas geométricos. Além disso, sua aplicação vai além das questões envolvendo triângulos, estendendo-se para construções geométricas em figuras planas, como polígonos e circunferências. A compreensão de como o Teorema de Tales pode ser utilizado em diferentes contextos ajuda a consolidar seu papel essencial no desenvolvimento da geometria, fornecendo uma base sólida para outros teoremas .

4. HOMOTETIA

A homotetia é uma transformação geométrica que altera o tamanho de uma figura, mas mantém suas características principais, como a forma e as medidas dos ângulos internos. Essa transformação está relacionada à ampliação ou à redução de uma figura, renessendo ao conceito de semelhança.

Figura 12 - Hexágonos construídos por homotetia

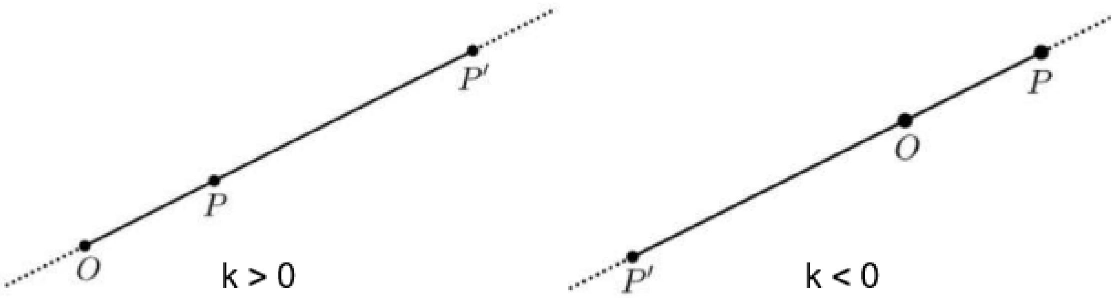


Disponível em: https://www.geogebra.org/m/rZSPwD7b, Acesso em 06 out. /2024.

Definição de Homotetia: Dado um ponto O e um número real $\mathrm{k} \neq 0$, definimos a homotetia de centro O e razão k (em notação: H $(O,\ \mathrm{k})$), como sendo a transformação geométrica que leva um ponto P até um ponto P' de maneira que OP' = $\mathrm{k}.\ OP$ e podemos escrever: P'= $H(P)$.

Se $\mathrm{k} > 0$, dizemos que a homotetia é direta; se $\mathrm{k} < 0$, dizemos que a homotetia é inversa.

Figura 13 – Ponto P' construído por homotetia em relação ao ponto P



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

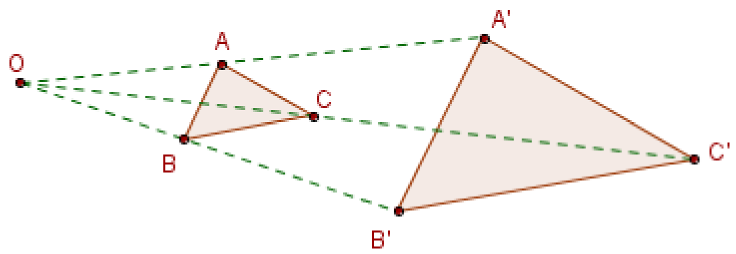
Propriedades da Homotetia:

- Os pontos O, P e P' são colineares.
- A inclinação de uma reta e o paralelismo entre retas é preservado.
- Os ângulos são preservados.

- Polígonos são transformados em polígonos semelhantes com razão de semelhança igual a k.
- Identidade: H (O, 1) seria uma transformação identidade, ou seja, a figura não se altera.
- Reflexão: H (O, -1) é uma reflexão pelo centro ou uma rotação de 180° em torno do centro.

É possível observar abaixo um exemplo de homotetia em relação ao triângulo ABC com fator k > 0 (homotetia direta), com as seguintes propriedades: OA' = k.OA, OB' = k.OB e OC' = k.OC.

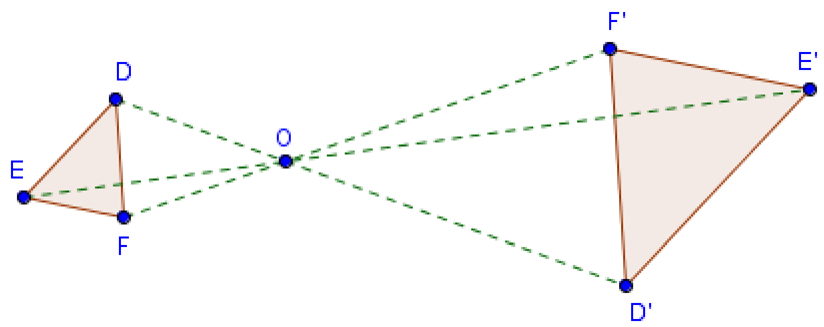
Figura 14 - Triângulo construído por homotetia



Disponível em: https://regua-e-compasso.blogspot.com/2012/08/exercicio-162.html, Acesso em: 06 out. 2024

E no caso do fator k < 0 (homotetia inversa), é observado na figura abaixo, com as seguintes propriedades: OA' = k.OA, OB' = k.OB e OC' = k.OC.

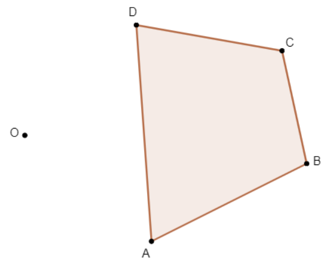
Figura 15 - Triângulo construído por homotetia



Disponível em: https://regua-e-compasso.blogspot.com/2012/08/exercicio-162.html, Acesso em: 06 out. 2024

Utilizando o conceito de homotetia, veja a construção de uma figura homotética ao quadrilátero ABCD com centro O e k =2.

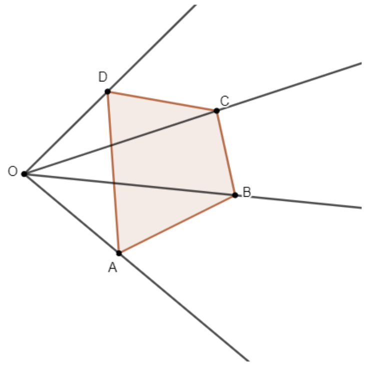
Figura 16 - Quadrilátero ABCD e um ponto O



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

O primeiro passo é a construção das semirretas OA, OB, OC e OD.

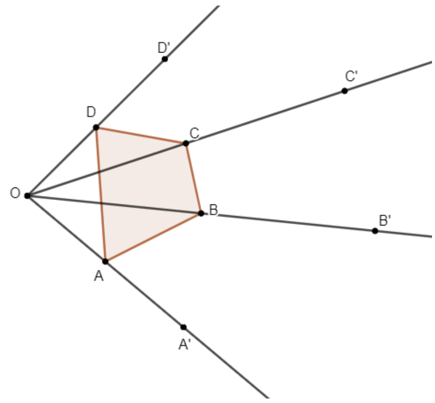
Figura 17 – Quadrilátero ABCD com semirretas AO, OB, OC e OD



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

Em seguida, a marcação dos pontos A’, B’, C’ e D’. Como k = 2, os segmentos OA', OB’, OC’ e OD’, serão o dobro dos segmentos OA, OB, OC e OD, respectivamente.

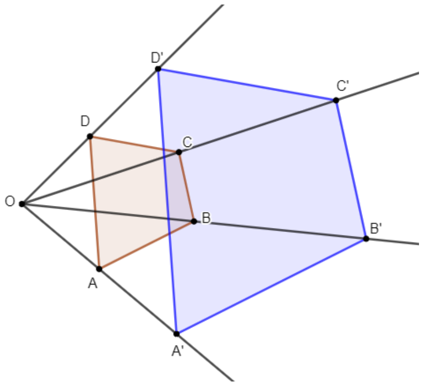
Figura 18 – Sequência da figura anterior com a construção dos pontos A’, B’, C’ e D’



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

A construção é finalizada com os segmentos A’B’, B’C’, C’D’, D’A’.

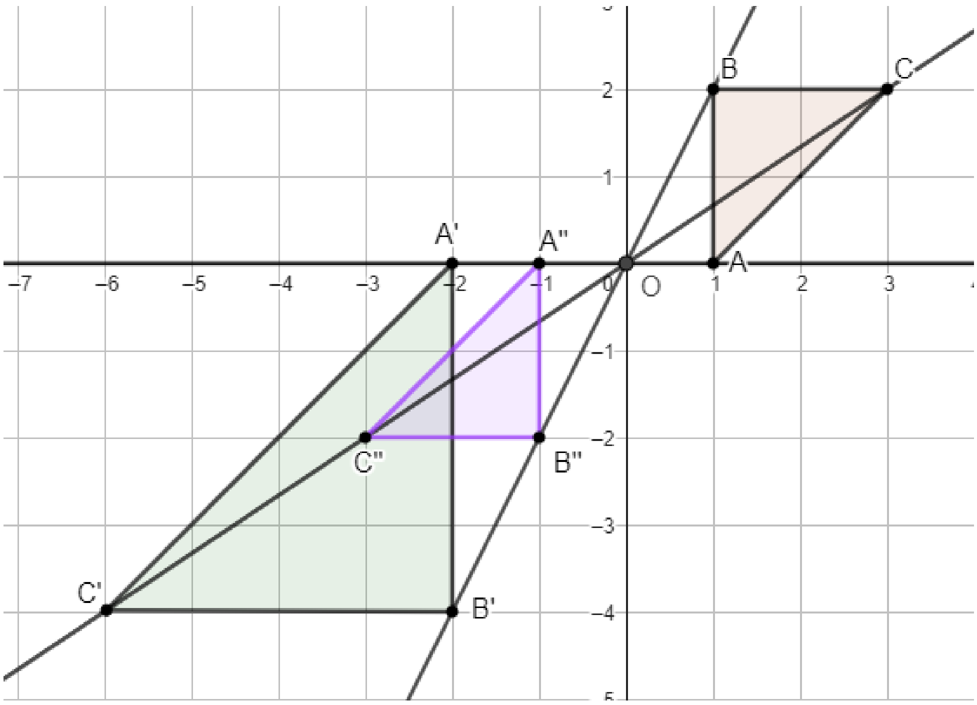
Figura 19 – Sequência da figura anterior com a construção do polígono A’B’C’D’



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

A homotetia também pode ser observada no plano cartesiano. Formando um triângulo, no primeiro quadrante, com os pontos A (1,0); B(1, 2) e C (3, 2) e traçando as retas partindo de A, B e C passando pelo centro O (0, 0).

Figura 20 – Construção de triângulos semelhantes no plano cartesiano.

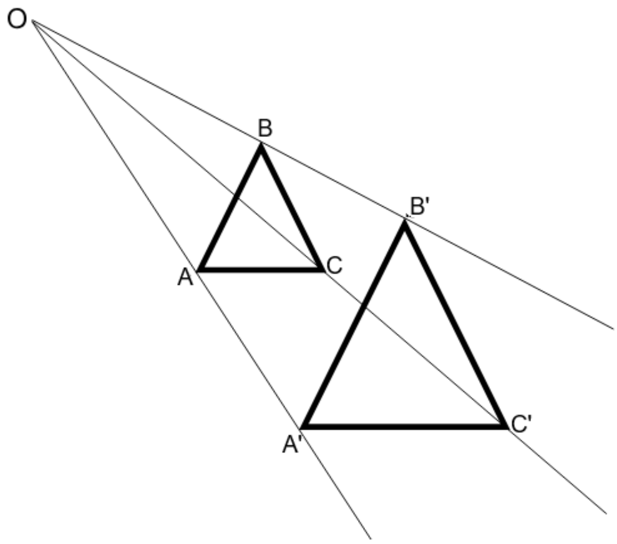


Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

Ao multiplicar as coordenadas do vértice do triângulo ABC pelo fator k = -2, obtemos a homotetia inversa A’B’C’, localizado no terceiro quadrante. E ao multiplicar as coordenadas pelo fator k = -1, obtermos o A’’B’’C’’ simétrico ao triângulo ABC em relação a origem.

A homotetia está diretamente relacionada com a semelhança de triângulos. Quando é aplicada uma homotetia a um triângulo, o triângulo resultante é semelhante ao triângulo original. Inclusive, os critérios de semelhança de triângulos podem ser demonstrados utilizando o conceito de homotetia. Abaixo temos os triângulos ABC e A’B’C’ com centro de homotetia em O e fator K > 0.

Figura 21 – Dois triângulos semelhantes construídos por homotetia com centro em O.



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

Utilizando o conceito de homotetia, OB’ = k.OB, OA’ = k.OA e OC’ = k.OC. Então:

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OC'}{OC} = k$$

Com isso, utilizando a definição do Teorema de Tales, é possível concluir que AB // A’B’, AC // A’C’ e BC //B’C’, logo os triângulos ABC e A’B’C’ são semelhantes.

5. A GEOMETRIA E A ARTE COMO DISCIPLINA ESCOLAR

A geometria e a arte são duas disciplinas distintas, mas que estão interligadas de muitas maneiras. A geometria é o ramo da matemática que estuda as formas, as medidas e as relações espaciais, e a arte utiliza diversas das suas ferramentas em suas obras. A busca por harmonia, pela beleza, pela ordem ou pela exploração de espaços ao pintar um quadro pode estar diretamente ligada à geometria.

Um dos quadros mais famosos do mundo, Mona Lisa, de Leonardo da Vinci (1452-1519) utiliza de estratégias da geometria em sua composição. Para fazer com que a Mona Lisa pareça estar sempre encarando as pessoas, foi observado que seu rosto obedece a proporção áurea (um número irracional cuja aproximação milésima por um racional é 1,618), organizando os elementos da pintura, como a posição da figura central, a disposição dos elementos no fundo e a relação entre os diversos componentes da composição.

Figura 22 – Obra Mona Lisa, de Leonardo da Vinci

Disponível em:https://super.abril.com.br/wp-content/uploads/2020/08/SI_DaVince_Monalisa_2.jpg?quality=70&strip=info, Acesso em 08 nov. 2024

A pintura Calmaria II, da artista brasileira Tarsila do Amaral (1886 – 1973) é um outro exemplo do uso da geometria na arte. É possível observar diversas formas geométricas que em composição artística se apresenta esteticamente notável a partir do conceito de simetria que está presente a partir de um espelho d’água.

Figura 23 – Obra Calmaria II, 1929, de Tarsila do Amaral

Disponível em: https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/geometria-e-a-arte-de-tarsila-do-amaral/. Acesso em 08 nov. 2024

A união entre matemática e arte em sala de aula pode transformar a forma como os alunos aprendem, tornando o processo de aprendizagem mais interessante para os alunos. No quadro de Tarsila do Amaral, por exemplo, os alunos podem realizar uma análise e serem conduzidos a uma boa discussão sobre sólidos geométricos, representação de figuras espaciais no plano e simetria.

> Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino de Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teia de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, pinturas, arquitetura, ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos etc. As atividades geométricas podem contribuir também para o desenvolvimento de procedimentos de estimativa visual, seja de comprimentos, ângulos ou outras propriedades métricas das figuras, sem usar instrumentos de desenho ou de medida. Isso pode ser feito, por exemplo, por meio de trabalhos com dobraduras, recortes, espelhos, empilhamentos, ou pela modelagem de formas em argila ou massa (BRASIL, 1997, p. 82-83).

A geometria tem uma influência significativa na percepção do belo, especialmente quando consideramos conceitos como razão áurea. Esse número aparece em diversas formas naturais e artísticas, sendo considerado uma proporção estética ideal para gerar harmonia visual. A geometria, ao explorar essas proporções, cria formas que são intuitivamente agradáveis ao olhar humano, estabelecendo um equilíbrio entre as partes e o todo. Ao aplicar essa proporção em construções geométricas ou na organização de elementos em uma composição, é possível criar uma sensação de simetria e perfeição que encanta e atrai a atenção. Assim, a geometria não apenas organiza o espaço, mas também contribui para uma estética naturalmente bela e agradável.

Esta união explícita entre a Matemática e as artes visuais foi o elo motivador para que pudesse ser pensado como desenvolver um conteúdo árduo e tão importante como semelhança de triângulos, a fim de que aos poucos, o aluno adquirisse maturidade matemática e um nível de abstração exigido pela disciplina para resolver problemas contidos nos materiais didáticos. Foi então chegado a hora de conhecer os principais materiais utilizados pelos professores numa breve enquete para em seguida, sem a perda da formalidade das definições matemáticas ajudar a todos os alunos. Exercícios como os apresentados no endereço eletrônico abaixo, e que são fontes comuns de busca e estudo de alunos, poderiam ser um dia classificados como trivial um dia? https://matika.com.br/semelhanca-de-triangulos/exercicios Precisava-se pensar no método.

6. A SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS NOS LIVROS DIDÁTICOS

Nesta seção mostraremos como os exercícios são tradicionalmente apresentados por livros didáticos ou em listas de exercícios aos alunos. Todos eles com uma discussão didática implícita, aparentemente levando em consideração o fato de que o professor está apto a desenvolver o tema sem discussão prévia com seus pares. Nos manuais do professor destas coleções estudadas não há discussões sobre o encaminhamento das resoluções de exercícios, levando-nos concluir que cada professor dá o seu tom à sua aula. Porém, questionamentos importantes ficam sem respostas, como saber se o conceito de proporcionalidade é bem explorado, a interpretação da razão de semelhança e de seu sinal e as conexões com o Teorema de Talles, previamente estudado. São estas as questões que pretendemos resgatar a fim de diminuir as dificuldades dos alunos, sejam eles com alguma necessidade específica ou não.

6.1 - Livro: SuperAÇÃO! Matemática, Lilian Aparecida Texeira, 2022.

A unidade sobre semelhança entre figuras é iniciada com a representação da fachada de um prédio na malha quadriculada sendo relacionada a figura original com uma ampliação e uma redução. E a seguinte afirmação:

Figura 23 – Enunciado de figuras semelhanças

Se uma figura for a ampliação, redução ou reprodução de outra, essas figuras serão semelhantes.

Fonte: Livro: SuperAção! Matemática, Lilian Aparecida Texeira, 2022

O livro também utiliza a malha quadriculada em outros exemplos e nos exercícios para que fique ainda mais evidente a semelhança entre as figuras.

A semelhança entre polígonos é iniciada com a definição de figuras semelhantes e um exemplo de dois trapézios retângulos semelhantes, mostrando que os seus lados são proporcionais e seus ângulos congruentes.

Figura 24 – Enunciado de polígonos semelhanças

Dois **polígonos são semelhantes** quando satisfazem, simultaneamente, as seguintes condições:

- as medidas de comprimento dos respectivos lados são proporcionais;
- os respectivos ângulos internos são congruentes.

Fonte: Livro: SuperAção! Matemática, Lilian Aparecida Texeira, 2022

Um dos exercícios da unidade é uma atividade com dobradura e recorte de uma folha de papel para que o aluno observe a semelhança entre retângulos.

Na sequência, o livro trabalha com a homotetia, iniciando com a construção de uma figura homotética de um pentágono regular com razão 2. Nos exercícios, é trabalhada as construções de figuras semelhantes e com a determinação da razão de semelhança com a utilização de uma régua graduada.

O próximo tópico é referente a semelhança de triângulo. Ele inicia relembrando as características para que duas figuras sejam semelhantes e um exemplo de dois triângulos semelhantes com as medidas de seus lados e seus ângulos.

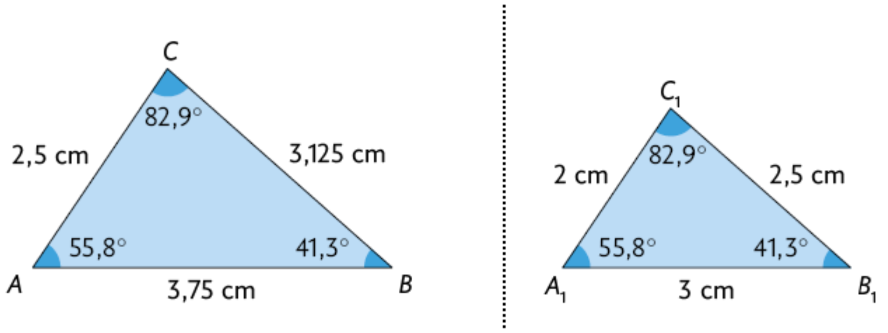
Figura 25 – Enunciado triângulos semelhanças

Triângulos semelhantes

Estudamos anteriormente que dois polígonos são semelhantes quando satisfazem, simultaneamente, as seguintes condições.

- As medidas de comprimento dos respectivos lados são proporcionais.
- Os respectivos ângulos internos são congruentes.

Para compreender melhor, acompanhe, por exemplo, como podemos verificar se os triângulos a seguir são semelhantes.



Nos triângulos, todos os respectivos lados apresentam medidas proporcionais e todos os respectivos ângulos internos são congruentes.

$$\boxed{\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 1,25}$$

$$\text{med}\left(B\hat{A}C\right) = \text{med}\left(B_1\hat{A_1}C_1\right) = 55{,}8^\circ$$

$$\text{med}\left(A\hat{B}C\right) = \text{med}\left(A_1\hat{B_1}C_1\right) = 41{,}3^\circ$$

$$\text{med}\left(A\hat{C}B\right) = \text{med}\left(A_1\hat{C_1}B_1\right) = 82{,}9^\circ$$

Portanto, como ambas as condições foram satisfeitas, os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ são semelhantes, com razão de semelhança 1,25. Essa semelhança é representada por:

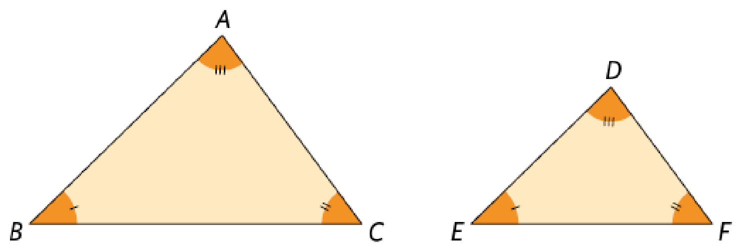
$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

Fonte: Livro: SuperAção! Matemática, Lilian Aparecida Texeira, 2022

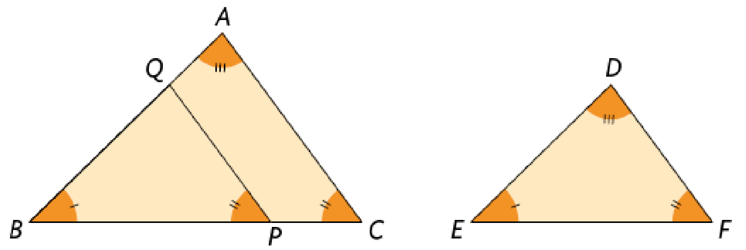
No 1º caso de semelhança (AA), é feita a demonstração sobrepondo os triângulos em cada um dos três vértices correspondentes. Através dessa sobreposição, é possível observar que os ângulos são congruentes e utilizando o teorema de Tales, concluir que os lados são todos proporcionais.

Figura 26 – Demonstração do caso AA de semelhança de triângulos

Demonstração: Vamos mostrar que, se nos triângulos ABC e DEF temos $A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$, $B\hat{C}A \cong E\hat{F}D$ e $B\hat{A}C \cong E\hat{D}F$, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes.



Marque um ponto P sobre o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC, de maneira que $\overline{EF} \cong \overline{BP}$, e trace o segmento PQ paralelo ao lado $\overline{AC}$ do triângulo.



De acordo com as imagens, verificamos que $A\hat{C}P \cong Q\hat{P}B$, pois são ângulos correspondentes de paralelas cortadas por uma transversal. Já pelo caso ALA de congruência de triângulos, temos $\triangle DEF \cong \triangle QBP$.

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{BQ}{BA} = \frac{BP}{BC}$$

Como $\triangle DEF \cong \triangle QBP$, segue que $\frac{ED}{BA} = \frac{EF}{BC}$.

Seguindo o mesmo procedimento, marque um ponto M sobre o lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC, de maneira que $\overline{DF} \cong \overline{MC}$, e trace o segmento $\overline{MN}$ que seja paralelo ao lado $\overline{AB}$.

Assim, pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{MC}{AC} = \frac{NC}{BC}$$

Como $\triangle DEF \cong \triangle MNC$, pelo caso ALA de congruência de triângulo, temos:

$$\frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

Logo, $\frac{ED}{BA} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$. Portanto, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

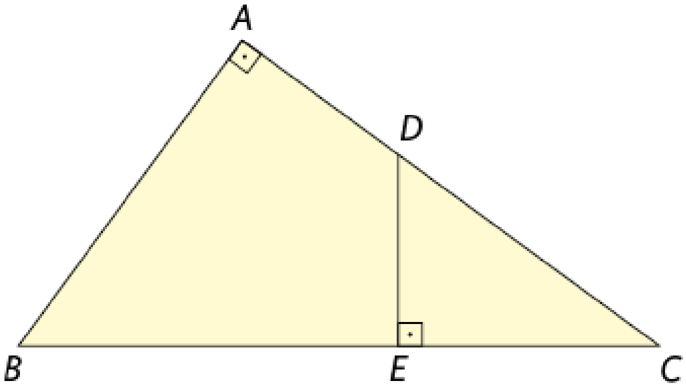
Fonte: Livro: SuperAção! Matemática, Lilian Aparecida Texeira, 2022

Nos casos de semelhança LAL e LLL a autora não realizou as demonstrações. Os exercícios trabalhados no tópico são variados, com destaque ao exercício abaixo, que será utilizado na sequência do trabalho.

Figura 27 – Exercício do livro sobre semelhança de triângulos

22. Considere as informações referentes à figura a seguir.

- $\triangle ABC \sim \triangle EDC$
- $AB = 3$ cm
- $BC = 5$ cm
- $DE = 1{,}5$ cm



Qual é a medida do comprimento do segmento de reta CD?

Fonte: Livro: SuperAção! Matemática, Lilian Aparecida Texeira, 2022

A unidade referente a semelhança de figura se encerra logo em seguida, com um total de 24 exercícios em toda a unidade, o livro possui uma boa variedade de questões e uma parte teórica bem estruturada.

6.2 - Livro: Matemática – Bianchini, Edwaldo Bianchini, 2022

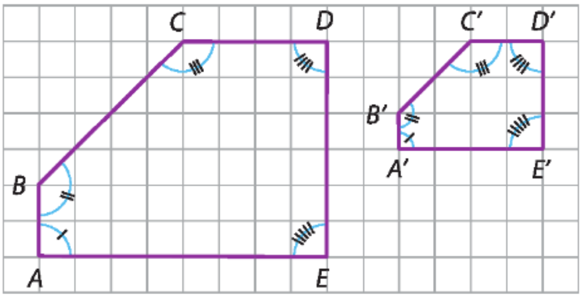
O livro inicia o capítulo de semelhança de figuras com a ideia das imagens na tela do celular e da tv, onde as imagens aparecem em tamanhos diferentes, mas mantendo a sua forma. Em seguida, exemplifica com a ampliação e a redução de fotografias para obter figuras semelhantes utilizando a porcentagem para representar o quanto aumentou ou diminuiu.

A semelhança entre polígonos é mostrada na malha quadriculada com dois quadriláteros, destacando os ângulos correspondentes, os lados homólogos proporcionais e a razão de semelhança.

Figura 28 – Enunciado semelhança de polígonos

Dois polígonos são **semelhantes** quando os lados correspondentes têm medidas de comprimento proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

Agora, vamos reduzir o polígono *ABCDE* em 50%, obtendo o polígono *A'B'C'D'E'*. Acompanhe.



A medida de qualquer lado do polígono *A'B'C'D'E'* tem metade da medida do lado correspondente no polígono *ABCDE*. Nesse caso, dizemos que a razão de semelhança entre o polígono reduzido (*A'B'C'D'E'*) e o polígono original (*ABCDE*) é $\frac{1}{2}$. Então:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA} = \frac{1}{2}$$

Fonte: Livro: Matemática – Bianchini, Edwaldo Bianchini, 2022

Também é pedido para ser feita duas análises para identificar se os polígonos são semelhantes ou não, onde no primeiro caso, as figuras tinham ângulos congruentes, mas os lados não são proporcionais. No segundo caso, os lados homólogos eram proporcionais, mas os ângulos correspondentes não eram congruentes, logo, nesses dois casos as figuras não são semelhantes.

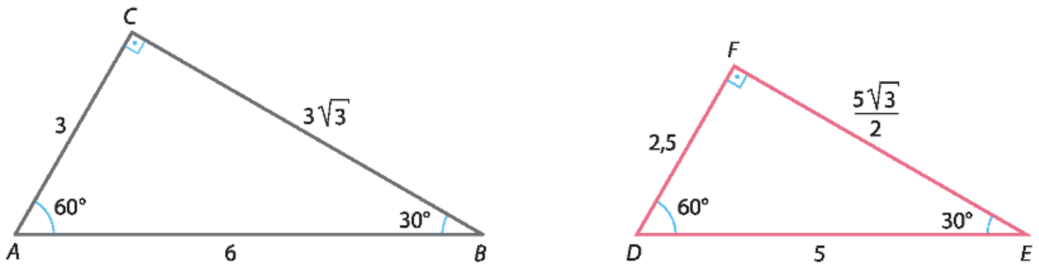
A homotetia é comentada rapidamente no processo de construção de um pentágono semelhante por homotetia e com três exemplos de imagens semelhantes. A parte dos exercícios é composta por duas questões. O assunto poderia ser melhor trabalho e explorado, a questão da razão negativa foi dita em um dos exemplos, mas não foi aprofundada ou comentada as características desse conceito.

A semelhança de triângulos é iniciada com dois triângulos retângulos semelhantes, indicando a proporção de seus lados correspondentes e os ângulos congruentes. O autor destaca a identificação dos lados correspondentes, mostrando que os lados correspondentes são opostos aos ângulos congruentes.

Figura 29 – Enunciado semelhança de triângulos

Dizemos que, para dois triângulos serem semelhantes, deve ser possível estabelecer uma correspondência entre as medidas dos lados por proporcionalidade e entre os ângulos, por congruência.

Considere os triângulos *ABC* e *DEF* a seguir.



Esses triângulos são semelhantes, pois:

- os ângulos correspondentes são congruentes;

$$\widehat{A} \cong \widehat{D}, \widehat{B} \cong \widehat{E} \text{ e } \widehat{C} \cong \widehat{F}$$

- os lados correspondentes têm medidas de comprimento proporcionais.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{6}{5}$$

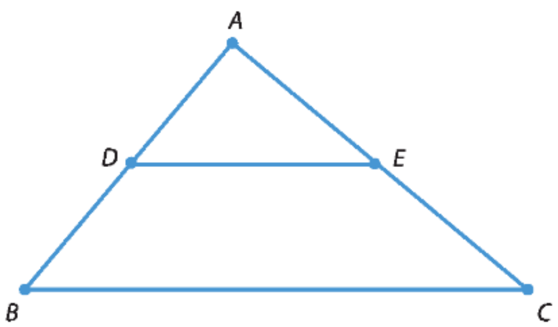
Fonte: Livro: Matemática – Bianchini, Edwaldo Bianchini, 2022

Após alguns exercícios para encontrar o comprimento de lados de triângulos semelhantes, é enunciado o teorema fundamental da semelhança:

"Toda reta paralela a um lado de um triângulo que cruza os outros lados em dois pontos distintos determina um triângulo semelhante ao primeiro."

Figura 30 – Demonstração semelhança de triângulos

Observe a figura a seguir, em que $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$.



Vamos provar que os triângulos *ADE* e *ABC* são semelhantes.

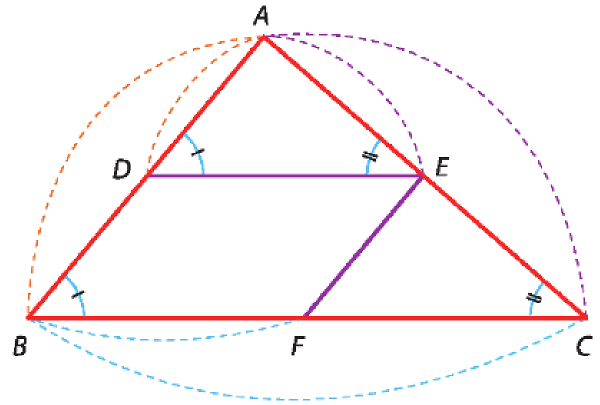
Para a demonstração formal de um teorema, indicaremos, como em outras vezes, a **hipótese** (proposição aceita como verdadeira) e a **tese** (proposição cuja verdade se quer provar).

Hipótese: $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$

Tese: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

• **Demonstração**

Construção auxiliar: traçamos, por *E*, $\overline{EF} \mathbin{/\!/} \overline{AB}$.



Analise atentamente os passos a seguir para acompanhar a demonstração.

① $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ (por hipótese)

② $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ (pelo teorema de Tales)

③ $\widehat{A} \cong \widehat{A}$ (ângulo comum)

④ $\widehat{B} \cong \widehat{D}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

⑤ $\widehat{C} \cong \widehat{E}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

⑥ $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$ (pelo teorema de Tales)

⑦ $\overline{BF} \cong \overline{DE}$ (lados opostos de um paralelogramo)

⑧ $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ (de ⑥ e ⑦)

⑨ $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ (de ② e ⑧)

⑩ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (de ③, ④, ⑤ e ⑨)
Note que os lados correspondentes dos dois triângulos têm medidas de comprimento proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes. Portanto, *ADE* e *ABC* são triângulos semelhantes, como queríamos demonstrar.

Fonte: Livro: Matemática – Bianchini, Edwaldo Bianchini, 2022

Após alguns exercícios com triângulos sobrepostos e com um dos lados paralelos, é trabalhado com os casos de semelhança de triângulos onde o autor realiza a demonstração dos três casos de semelhança.

Todo o capítulo sobre semelhança de triângulo possui 27 exercícios. O capítulo foi dividido em algumas etapas até os casos de semelhança de triângulos. A homotetia poderia ter sido mais bem explorada, mas foi interessante a sequência didática do livro.

6.3- Livro: Desafios da Matemática, Ênio Silveira, 2022

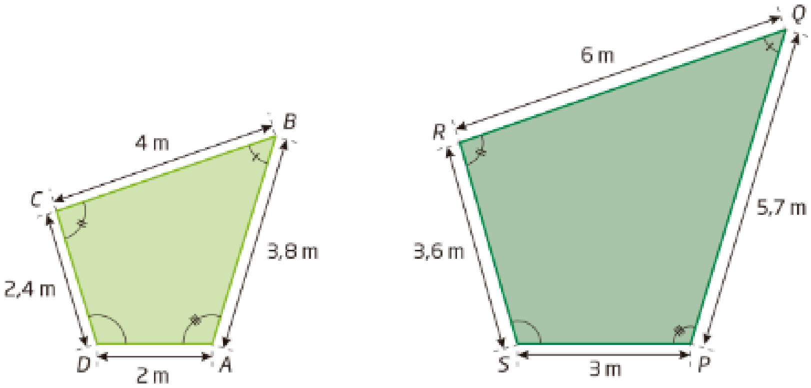
No livro de Ênio Silveira, a semelhança entre figuras está contida no capítulo que se inicia trabalhando com o conceito de razão e proporção nos segmentos de reta e em seguida com o teorema de Tales.

Depois desses tópicos, a parte sobre semelhança de figuras é iniciada com uma imagem do mapa do Brasil e a marcação de quatro pontos em cada extremo do país, um ponto na cidade de Salvador e outro ponto na cidade de São Luís. Com duas ampliações da primeira imagem, o autor faz a relação entre as medidas dos segmentos que unem os pontos norte e sul; leste e oeste; Salvador e São Luís e os ângulos formados por esses cruzamentos. Através das medidas desses segmentos e da medida dos ângulos formados, é possível concluir que os lados são proporcionais e os ângulos congruentes, logo as figuras são semelhantes.

A semelhança entre polígonos inicia com dois quadriláteros semelhantes, sendo mostrada as medidas de seus lados e destacando os ângulos que possuem a mesma medida.

Figura 31 – Enunciado semelhança de polígonos

Considere os polígonos *ABCD* e *PQRS* abaixo.



Comparando os polígonos, podemos identificar que:

- os ângulos correspondentes são congruentes;

$$\widehat{A} \cong \widehat{P}\,;\ \widehat{B} \cong \widehat{Q}\,;\ \widehat{C} \cong \widehat{R}\,;\ \widehat{D} \cong \widehat{S}$$

- as medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais.

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} \text{ ou } \frac{3,8\text{ m}}{5,7\text{ m}} = \frac{4\text{ m}}{6\text{ m}} = \frac{2,4\text{ m}}{3,6\text{ m}} = \frac{2\text{ m}}{3\text{ m}} = \frac{2}{3}$$

Quando dois polígonos têm os ângulos correspondentes congruentes e as medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais, eles são denominados **polígonos semelhantes**.

A razão entre as medidas de comprimento dos lados correspondentes em polígonos semelhantes é denominada **razão de semelhança** ou **coeficiente de proporcionalidade**. Então, no exemplo da semelhança entre os polígonos *ABCD* e PQRS, temos:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \underbrace{k}_{\text{razão de semelhança}}$$

Fonte: Livro: Desafios da Matemática, Ênio Silveira, 2022

Os exercícios sobre semelhança de polígonos poderiam ter sido mais explorados, possui apenas duas questões referente a quadriláteros semelhantes e duas questões utilizando os triângulos.

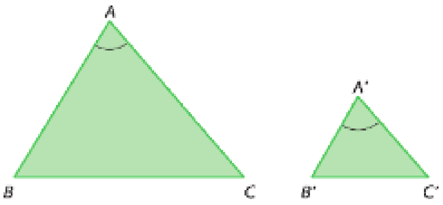
Logo na sequência é iniciado o tópico sobre semelhança de triângulos e o teorema fundamental da semelhança com o teorema de Tales sendo usado em sua demonstração. Um exemplo do enunciado do 2º caso: LAL (Lado – Ângulo – Lado).

Figura 32 – Enunciado 2º caso de semelhança de triângulos

2º caso: LAL (Lado – Ângulo – Lado)

Se dois triângulos têm as medidas de comprimento de dois pares de lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos por esses lados forem congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

Analise os triângulos *ABC* e *A'B'C'*.



Se $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ e como $B\widehat{A}C \cong B'\widehat{A'}C'$, então: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Fonte: Livro: Desafios da Matemática, Ênio Silveira, 2022

O autor também conta um pouco da história de Tales e da sua motivação no cálculo da altura das pirâmides do Egito, mostrando como teria sido feito esse cálculo.

Os casos de semelhança entre triângulos são trabalhados sem demonstrações e o capítulo é finalizado após os exercícios e um bom resumo do que foi trabalhado em toda unidade com mais questões. O autor não trabalhou com a homotetia de figuras.

A análise dos livros mostrou que uma outra abordagem desses tópicos pode acrescentar muito no processo de aprendizagem dos alunos. Com a utilização de recursos didáticos no ensino de semelhança de triângulos, o aluno pode se apropriar ainda mais desse conceito e solucionar diversos tipos de problemas. E qual o recurso? A arte!

7. ATIVIDADES PROPOSTAS

7.1 Geometria e Arte

Retomando a atividade 22 do livro **"SuperAÇÃO! Matemática, Lilian Aparecida Texeira, 2022."** citado acima, segue o link de um vídeo com uma proposta de abordagem: https://youtu.be/Ap9K_6U_pec .

Para realizar a atividade proposta no vídeo, foram necessários papéis coloridos, tesoura, caneta, papelão, alfinetes e uma par de esquadros.

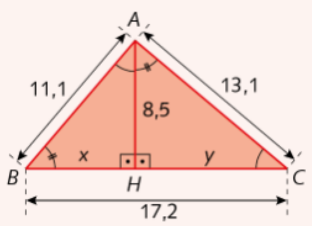
A utilização de recursos didáticos tem uma grande influência no aprendizado dos alunos. Essa atividade tem como característica unir a arte com a utilização das cores e recortes das figuras com a geometria abordando a questão das figuras geométricas e a semelhança entre triângulos. Permitir ao aluno a possibilidade de movimentar um triângulo do exercício, observar o paralelismo dos segmentos, utilizar o conceito de homotetia e do Teorema de Tales que foram apresentados no trabalho é enriquecedor para o seu aprendizado de matemática.

A seguir, temos exemplos de atividades retiradas dos livros citados acima que podem auxiliar no ensino de semelhança de triângulos.

ATIVIDADE 1

Livro: Desafios da Matemática, Ênio Silveira, 2022. Página 75

22. Calcule os valores aproximados de *x* e de *y* na figura, sabendo que *AHB* e *CHA* são triângulos semelhantes.



No enunciado da figura acima, já está sendo dito que os dois triângulos são semelhantes. Uma das dificuldades dos alunos poderia ser a identificação dos segmentos correspondentes. A proposta do seguinte trabalho auxilia na visualização da semelhança entre esses triângulos e dos lados que são correspondentes. Após essa análise, uma das possíveis soluções é:

$$\frac{AB}{BH} = \frac{AC}{AH}$$

$$\frac{11,1}{x} = \frac{13,1}{8,5}$$

$$13,1x = 94,35$$

$$x \cong 7,2$$

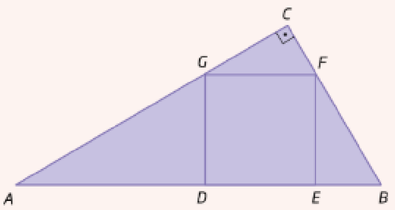
Vídeo de resolução da atividade:

https://www.youtube.com/watch?v=s9HZGC70EO8&t=8s

ATIVIDADE 2

Livro: Desafios da Matemática, Ênio Silveira, 2022. Página 79

27. Sabendo que *GDEF* é um quadrado, responda: os triângulos *ADG* e *GCF* são semelhantes? Justifique sua resposta.



Na atividade acima, os alunos não precisam realizar nenhuma conta, mas precisa buscar uma maneira de mostrar que os dois triângulos pedidos são semelhantes. Uma das estratégias é utilizar o conceito de retas paralelas cortadas por uma transversal. Como DEFG é um quadrado, podemos observar que AB // FG e estão sendo interceptadas pelo segmento AC. Logo, $D\hat{A}G = F\hat{G}C$ e $F\hat{C}G = A\hat{D}G$. Então, pelo caso AA, os triângulos são semelhantes.

Vídeo de resolução da atividade:

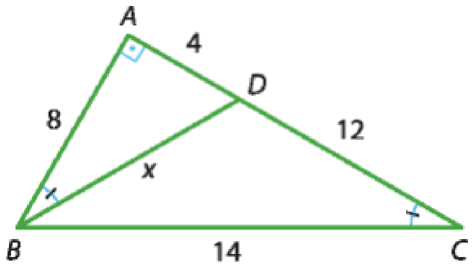
https://www.youtube.com/watch?v=qNLy1M8lZJU&t=1s

ATIVIDADE 3

Livro: Matemática – Bianchini, Edwaldo Bianchini, 2022, Página 126

25 Mostre que os triângulos indicados são semelhantes e calcule o valor de *x*.

a) $\triangle ABC$ e $\triangle ADB$



Pelo caso AA é possível concluir que os triângulos ABC e ADB são semelhantes. Para identificar o valor de x, é possível novamente realizar a movimentação do triângulo ABD e com isso observar que os segmentos paralelos são correspondentes, ou seja: $\frac{x}{14} = \frac{4}{8}$. Logo, $x = 7$.

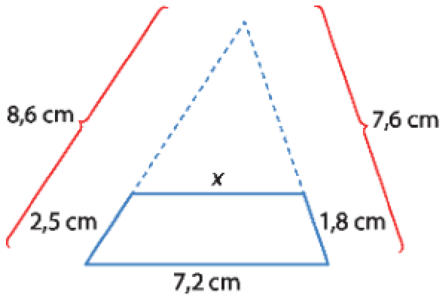
Vídeo de resolução da atividade:

https://www.youtube.com/watch?v=Pr52ssjAnWc&t=14s

ATIVIDADE 4

Livro: Desafios da Matemática, Ênio Silveira, 2022. Página 132

5 O quadrilátero a seguir foi obtido ao traçar um segmento de reta cortando dois lados de um triângulo e paralelo ao terceiro lado. Qual é a medida aproximada de *x*?



a) 4,9 cm

b) 5,1 cm

c) 6,1 cm

d) 7,3 cm

Uma das coisas que é importante de ter atenção nessa questão é qual informação que está sendo dada. As medidas que são mostradas na figura não são todas em relação aos triângulos, as medidas 2,5 cm e 1,8 cm fazem referência ao quadrilátero e não farão parte do cálculo da proporção. Porém essas medidas são necessárias para que seja calculada as medidas do triângulo. Realizando os seguintes cálculos:

$$8{,}6 - 2{,}5 = 6{,}1$$

$$\frac{6{,}1}{8{,}6} = \frac{x}{7{,}2} \qquad x \cong 5{,}1$$

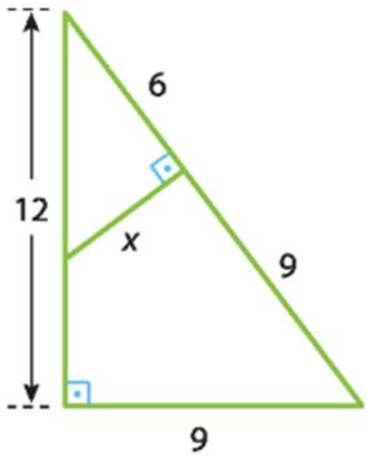
Vídeo de resolução da atividade:

https://www.youtube.com/watch?v=uvpo9GAUXT8&t=9s

ATIVIDADE 5

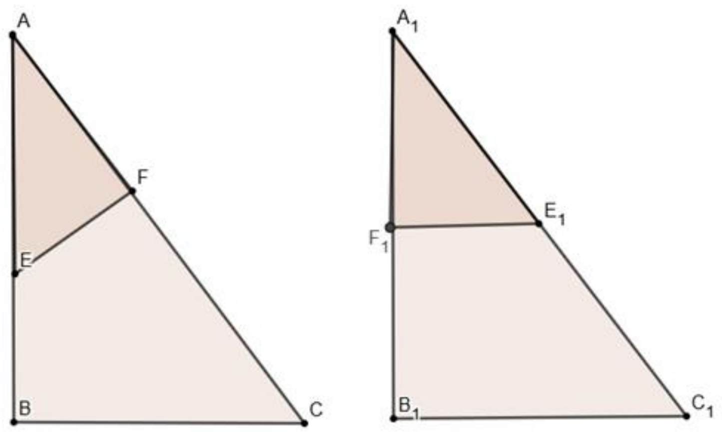
Livro: Matemática – Bianchini, Edwaldo Bianchini, 2022. Página 126

24) Identifique os triângulos semelhantes e calcule o valor de *x*.



Essa atividade exemplifica o que foi visto nos vídeos. Temos na imagem dois triângulos, que precisamos verificar se são semelhantes para que em seguida seja calculado o valor de x. Uma outra opção no auxílio da visualização dos alunos é a utilização do software Geogebra. É possível realizar a construção da figura e realizar a movimentação do triângulo com o intuito de trabalhar com o Teorema de Tales.

Figura 33 – Triângulos construídos no software Geogebra



Fonte: Arquivo Pessoal do autor, 2024

Dessa maneira, é possível identificar com mais facilidade que: $\frac{6}{12} = \frac{x}{9}$. Logo, $x = 4{,}5$.

ATIVIDADE 6

SEMELHANÇA E TECNOLOGIAS

Estas são atividades complementares que acreditamos que contribuíram para a formação do professor. Não podemos negar que embora o uso das artes visuais são tecnologias, a tecnologia digital está presente em nossos dias e não é interessante que o professor não as comunique a seus alunos.

O desafio é refazer as quatro atividades propostas a partir do software GeoGebra, criando uma série de questionamentos em que a semelhança de triângulos emerja das atividades de homotetia.

MATERIAL VIRTUAL AUXILIAR

A seguir, é disponibilizado alguns links para reforçar os pontos discutidos no trabalho.

(a) https://www.geogebra.org/t/dilation?lang=pt

(b) https://youtu.be/_ZjHkAL7Kl0?si=TmjoFQ3K5yoV7BRc

(c) https://www.geogebra.org/t/similar-triangle?lang=pt

(d) https://www.geogebra.org/m/azgqtxuh

(e) https://youtu.be/pIg72r-WG-Q?si=aDsY981Y8T85Du4A

(f) https://youtu.be/10EeOInSE6g?si=6E7Xv13JUFAdQE5o

(g) https://youtu.be/a1GuIv4r80k?si=eDpATUNVWzv6e-Qm

Os links têm como intuito auxiliar o professor em suas construções no software Geogebra e disponibilizar figuras que já estão prontas que podem ser utilizadas. O material acima reforça o que foi dito no trabalho, proporciona uma maior interatividade com as atividades e mostra como o recurso digital pode ser um grande aliado no processo de aprendizagem dos estudantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estas linhas finais vêm fechar o que na verdade não se configurou com uma monografia de final de curso propriamente dita, mas um relato de experiência menos formal, talvez, ou até mesmo a arrogância de relatar que esta prática aliada a aprendizagem por investigação pode dar muito certo neste caso.

Para muitos professores, a geometria tem um lugar especial em seus corações e ouvir de alunos que este assunto é difícil ou chato, não combina com as potencialidades pedagógicas, metodológicas e as múltiplas abordagens, todas interessantes e criativas que estão ao alcance dos atores que estão nas salas de aula de matemática.

Embora a ideia inicial fosse lançar mão das artes e das tecnologias digitais para melhor contribuir para que os alunos com TDA ou TDAH compreendessem e aprendessem um determinado tópico de geometria, foi constatado que o lúdico via artes visuais e plásticas é um possível caminho para o desenvolvimento curricular desta disciplina. Não são atividades simples de serem projetadas e confeccionadas, porém é um material que dialoga com o tempo todo com o aluno e permite que este aluno registre descobertas e teste suas conjecturas “com a mão na massa”.

As ideias apresentadas no seguinte trabalho estão de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), já que a habilidade apresentada na BNCC em relação a semelhança de triângulos é: (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Por questões de tempo deixamos aqui a proposta didática para o professor já que as aplicações das atividades em sala foram intencionais, porém sem rigor científico, o que faz da melhor estruturação deste texto e de uma futura pesquisa acadêmica um compromisso da parte do autor. Futuramente pretendemos entrevistar professores, apresentar a proposta e convidá-los a desenvolver uma nova abordagem para o ensino deste tópico.

Foi uma tarefa prazerosa escrever o texto porque passou pela História da Educação Matemática Brasileira, em especial do ensino da geometria, até a atualidade onde o profissional precisa lidar com a realidade das classes realmente inclusivas. É um material de professor para professor.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática** Bianchini. 10ª Edição. São Paulo. Editora Moderna, 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília, 1997.

MENESES, Ricardo Soares de. **Uma história da Geometria Escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino**, 2007, 172 folhas. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2007.

SANCHEZ, Jesús Nicasio Garcia. **Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SILVEIRA, Ênio. **Desafios da Matemática com Ênio Silveira**. 1ª Edição. São Paulo. Editora moderna, 2022.

TEXEIRA, Lilian Aparecida. **SuperAÇÃO! Matemática**. 1ª Edição. São Paulo. Editora Moderna, 2022.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930**. 2a Edição. São Paulo. Annablume/ FAPESP, 2007.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Que geometria ensinar? Uma breve história da redefinição do conhecimento elementar matemático para crianças**. São Paulo, 2013