COLÉGIO PEDRO II PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

JOÃO PEDRO MORGADO ALVES

A CONSTRUÇÃO DOS SABERES SOBRE NÚMEROS INTEIROS ATRAVÉS DE JOGOS MATEMÁTICOS: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Rio de Janeiro

2023

JOÃO PEDRO MORGADO ALVES

A CONSTRUÇÃO DOS SABERES SOBRE NÚMEROS INTEIROS ATRAVÉS DE JOGOS MATEMÁTICOS: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, ofertado pela Pró-Reitoria de Pós Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Me. Diego Tranjan Viug

Rio de Janeiro
2023

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

A474 Alves, João Pedro Morgado

A construção dos saberes sobre números inteiros através de jogos matemáticos : uma proposta de sequência didática / João Pedro Morgado Alves. - Rio de Janeiro, 2023.

95 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Diego Tranjan Viug.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Números inteiros. 3. Resolução de problemas (Matemática). 4. Jogos no ensino de matemática. I. Viug, Diego Tranjan. II. Colégio Pedro II. III Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

JOÃO PEDRO MORGADO ALVES

A CONSTRUÇÃO DOS SABERES SOBRE NÚMEROS INTEIROS ATRAVÉS DE JOGOS MATEMÁTICOS: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, ofertado pela Pró-Reitoria de Pós Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Aprovado em 26 de Agosto de 2023.

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Prof. Me. Diego Tranjan Viug
Colégio Pedro II
Orientador

____

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins
Colégio Pedro II

____

Prof. Me. Gilberto Gil Fidelis Gomes Passos
CEFET/RJ

Rio de Janeiro
2023

Aos meus colegas de trabalho, professores e alunos que todos os dias me reensinar a ensinar.

AGRADECIMENTOS

A Deus que guia em toda a minha passagem nesse mundo.

A minha família e principalmente aos meus pais Fatima e Eduardo que foram os meus primeiros professores.

Aos meus professores do ensino básico: Simone, Gil, Madalena; e do ensino superior: Camelier, Gabriella, Paulo, Eleonora; que me inspiraram e inspiram a ser professor.

Aos meus amigos, em especial, aqueles que em nenhum momento me deixaram cair e estiveram sempre ao meu lado nessa caminhada. Em especial Diego, Carol, Chayenne, Vitor e Jenniffer; que mesmo nos priores momentos souberam me ouvir e me ajudar.

Aos meus colegas de sala de professores que a todo instante me engradecem e que o tempo todo sei que posso contar com vocês nessa caminhada, muito obrigados por compartilharem a sabedoria de vocês comigo.

Agradeço também aos meus colegas de curso por todas as trocas: Angela, Jean, Daniel, Mônica, Felipe, Juliana, Taíssa; e todos aqueles que mesmo que não muito próximos ou com uma passagem curtam contribuíram na minha formação. O curso não teria sido completo sem as trocas que fizemos.

Agradeço a todo o corpo docente, em especial ao meu orientado Diego Viug e ao meu Diretor Daniel Martins por todos os ensinamentos do período de escrita e formação.

Agradeço a todos aqueles reforçam em mim a empatia com o próximo e proporcionar a estes a oportunidade de transformar suas vidas.

“Ninguém liberta ninguém, ninguém se liberta sozinho: os homens se libertam em comunhão.”

(Paulo Freire, 1996)

RESUMO

ALVES, João Pedro Morgado Alves. **A construção dos saberes sobre números inteiros através de jogos matemáticos:** uma proposta de sequência didática. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em educação matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2023.

O eixo norteador para a presente pesquisa foram os principais obstáculos epistemológicos inerentes ao ensino de números inteiros e enfrentados pelos discentes do sétimo ano do ensino fundamental anos finais. O presente trabalho apresenta uma proposta de sequência didática baseada em jogos matemáticos que possam auxiliar os discentes a transpassar tais obstáculos epistemológicos. Os pressupostos metodológicos partem de uma abordagem de caráter qualitativo, com a opção do uso da pesquisa bibliográfica pautada sobre: estrutura do conjunto dos números inteiros; um panorama histórico sobre os principais obstáculos epistemológicos e resolução de problemas a partir da utilização de jogos. A partir da pesquisa, conclui-se que a utilização de jogos matemáticos, através de uma sequência didática, pode se apresentar como um relevante objeto didático no ensino de números inteiros quando atrelados a metodologia de resolução de problemas em virtude da autonomia dada aos discente no momento da construção e transposição dos obstáculos epistemológicos inerentes ao conjunto dos números inteiros.

Palavras-chave: educação matemática; número inteiros; resolução de problemas; jogos matemáticos

ABSTRACT

ALVES, João Pedro Morgado Alves. **A construção dos saberes sobre números inteiros através de jogos matemáticos:** uma proposta de sequência didática. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em educação matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2023.

The guiding axis for the present research was the main epistemological obstacles inherent in the teaching of integers and faced by seventh-grade students in the final years of elementary school. This work presents a proposal for a didactic sequence based on mathematical games that can help students overcome such epistemological obstacles. The methodological assumptions stem from a qualitative approach, with the choice of using bibliographic research focused on: the structure of the set of integers; a historical overview of the main epistemological obstacles and problem-solving through the use of games. From the research, it is concluded that the use of mathematical games, through a didactic sequence, can be presented as a relevant didactic tool in the teaching of integers when linked to problem-solving methodology due to the autonomy given to students in the process of constructing and overcoming the epistemological obstacles inherent in the set of integers.

Keywords: mathematics education; integers; problem-solving; mathematical games.

RESUMEN

ALVES, João Pedro Morgado Alves. **A construção dos saberes sobre números inteiros através de jogos matemáticos:** uma proposta de sequência didática. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em educação matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2023.

El eje rector para la presente investigación fue los principales obstáculos epistemológicos inherentes a la enseñanza de los números enteros y enfrentados por los estudiantes de séptimo grado en los años finales de la escuela primaria. Este trabajo presenta una propuesta de secuencia didáctica basada en juegos matemáticos que pueden ayudar a los estudiantes a superar tales obstáculos epistemológicos. Los supuestos metodológicos parten de un enfoque cualitativo, con la elección de utilizar investigación bibliográfica centrada en: la estructura del conjunto de números enteros; una visión histórica de los principales obstáculos epistemológicos y la resolución de problemas a través del uso de juegos. A partir de la investigación, se concluye que la utilización de juegos matemáticos, a través de una secuencia didáctica, puede presentarse como una herramienta didáctica relevante en la enseñanza de los números enteros cuando se vincula con la metodología de resolución de problemas debido a la autonomía otorgada a los estudiantes en el proceso de construir y superar los obstáculos epistemológicos inherentes al conjunto de números enteros.

Palabras claves: educación matemática; números enteros; resolución de problemas; juegos matemáticos.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EFAF - Ensino Fundamental Anos Finais

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$: Conjunto dos números inteiros

$S(n)$: Aplicação S em função de n

$\neq$: Diferente de

$\forall$: Para todo

$\in$: pertence

$\subset$: Está contido

$\wedge$: e

$\times$: Por

$+$: adição

$-$: Subtração

$\cdot$: Multiplicação

$\nexists$: não existe

$>$: maior que

$<$: menor que

$||$: módulo

$\geq$: maior ou igual que

$\mathbb{Z}$: Conjunto dos números inteiros

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A linguagem matemática desempenha um papel fundamental na vida cotidiana dos estudantes, estando presente nas mais diversas representações e comunicações matemáticas. Alan Bishop (1999) destaca que as atividades matemáticas, como: “contar, medir, localizar, projetar (desenhar), jogar e explicar” (GODOY, 2011, p.144) são uma das formas como a matemática pode se manifestar , de forma intrínseca, no cotidiano das pessoas estando presentes em suas mais diversas ações e situações corriqueiras que esses estudantes vivenciam diariamente. Apesar dessas atividades estarem intrínsecas no cotidiano dos alunos, a forma como a Matemática é trabalhada em sala se dá de forma conteudista privilegiando ainda o movimento da Matemática Moderna.

Muitos estudantes de matemática têm uma grande afinidade com a disciplina e, por isso, buscam a graduação em licenciatura em matemática para continuar aprofundando seus estudos e, posteriormente, ensinar os conceitos e conhecimentos adquiridos nos cursos de graduação. Durante a graduação, esses alunos são apresentados a diversos teoremas e axiomas que são fundamentais para a matemática moderna e que são essenciais para o ensino da matemática no ciclo básico da educação brasileira.

No entanto, é importante ressaltar que, apesar de serem apresentados a essas teorias, muitas vezes pouco se fala sobre como adaptá-las para a sala de aula. É necessário que os professores de matemática possam entender como essas teorias podem ser aplicadas na prática para que possam realizar a construção desses conhecimentos junto com os alunos de forma clara e eficaz.

O ensino de matemática é uma prática em constante evolução e é fundamental que os professores estejam sempre atualizados para poderem realizar a troca desses conhecimentos de forma precisa e atualizada. Além disso, é importante que os cursos de graduação em matemática estejam sempre atualizados acerca das novas práticas docentes.

Por fim, é importante destacar que o ensino da matemática deve ser feito de forma lúdica e prática, para que os alunos possam entender a importância da disciplina e se interessar por ela. Para isso, mostra-se necessário que os professores busquem/desenvolvam formas criativas de ensinar matemática, utilizando jogos, atividades práticas e exemplos do cotidiano para tornar o aprendizado mais interessante e acessível para os alunos.

Trabalhar a matemática de maneira conteudista torna esta maçante e distante da realidade dos alunos, tornando-a abstrata e desinteressante aos mesmos (SOARES; RÊGO, 2015 apud BARBOSA et al, 2020). Essa postura se dá, por vezes, pela abordagem metodológica utilizada pelos docentes na hora de ensinar determinados conteúdos, neste caso focando-se muito mais na teoria sem uma representação prática da mesma. Essa abordagem didática acaba, por vezes, não oferecendo as ferramentas necessárias para que os alunos possam transpassar as barreiras epistemológicas inerentes a determinados conteúdos. Tais percalços didáticos dão-se, muito por conta, da transposição didática que estes docentes apresentaram durante os seus cursos de formação sem terem feito uma transposição plena de determinados conteúdos limitando-se a apenas decorar regras e fórmulas que sejam úteis a resolução dos problemas. Outra problemática é a exaustiva jornada de trabalhos que muitos desses docentes são submetidos não proporcionando tempo hábil para que tal docente realize as reflexões necessárias para que o mesmo possa adaptar os conteúdos aos seus discentes o que possibilitaria uma aula mais rica e reflexiva.

Em consonância, muitos alunos esbarram em obstáculos epistemológicos inerentes aos conteúdos matemáticos que por vezes são difíceis de serem transpassados. Isso pode ocorrer, na prática, em função da natureza dos conteúdos abordados, mas também em consequência a forma como esses são trabalhados. Devido à falta de uma explicação clara da relação entre os conceitos matemáticos e a realidade das crianças. Ensinar Matemática sem explicar a origem e finalidade dos conceitos pode levar ao insucesso escolar. (Ponte, 2005; apud Quadros-Flores, 2020).

Percebe-se, portanto, que é crucial associar a Matemática a situações e contextos relacionados ao cotidiano do aluno, tornando-a mais relevante para o seu interesse em se envolver no processo de aprendizagem. Contudo, é necessário ter cautela na escolha dos problemas apresentados, para que estes estejam inseridos dentro de um contexto possível para o aluno é:

> [...] preciso trabalhar com o contexto dos estudantes. Citar temperaturas negativas em uma região onde é muito quente, por exemplo, pois os estudantes que vivem numa região quente não vivenciaram situações de frio intenso, logo, o conceito de sensação térmica em baixas temperaturas não é significativo para eles.” (SOUZA, et al, 2013)

Outra problemática apresentada no ensino de matemática é o reforço a padronização de aulas mecanizadas, que valorizam a memorização de conteúdos com o intuito de resolver exercícios propostos nos materiais didáticos e preparar os alunos para futuras avaliações. Esse tipo de abordagem no ensino de matemática mostra-se positivo quando estes discentes encontram-se próximos de concursos/vestibulares, porém o ensino de matemática através dessa abordagem em um contexto geral faz com que os conhecimentos construídos junto com os discentes se mostre deficiente para o desenvolvimento de novos conhecimentos matemáticos no futuro. Devido a essa abordagem, muitos alunos se sentem desmotivados e desinteressados pela Matemática (SILVA, 2017 apud BARBOSA; DE PONTES; DE CASTRO, 2020). Essa postura didática apenas reforça o estigma estabelecido sobre a matemática sobre ser uma disciplina em que apenas os mais inteligentes estariam aptos a aprender. Os discentes inaptos a transpassar determinados obstáculos epistemológicos a respeito de determinados conteúdos, logo se veem desmotivados e seguirem seus estudos enxergando a matemática como algo desinteressante.

Uma das consequências dessa desmotivação e também um dos eixos fundamentadores dessa pesquisa são os baixos índices de proficiência apresentados por esses estudantes na Prova Brasil. Os elementos obtidos neste documento apontam que os alunos do 9° ano do Ensino Fundamental Anos Finais (EFAF) da rede regular de ensino, apresentam uma média de 267,36 pontos (BRASIL, 2021) o que, dentro dos critérios estabelecidos pelo relatório de resultados do SAEB 2019, indica que a educação do estado do Rio de Janeiro encontra-se no nível 3 da escala de proficiência do estudo. Dessa forma, o documento nos garante que os alunos são capazes de “determinar a soma, a diferença, o produto ou o quociente de números inteiros em situações-problema” (BRASIL, 2021).

O presente projeto objetiva confeccionar uma sequência didática voltada aos alunos do 7° ano do EFAF de forma a auxiliar o processo de ensino e aprendizagem, com um enfoque maior nos estudantes que possuam maiores dificuldades na construção dos saberes relacionados às propriedades operatórias dos números inteiros. Um dos objetivos do presente trabalho é oferecer recursos para que esses discentes possam transpassar tais obstáculos epistemológicos e realizar a reequilibração dos conhecimentos inerentes ao conjunto numéricos o fazendo refletir, em especial aqueles relacionados aos conjuntos dos números inteiros pautados sobre o conjunto dos números naturais, levantar conjecturas e confirma-las através de ensaios realizados durante a trilha didática proposta. Este material trata-se de um dos recursos que os docentes podem utilizar com os alunos no ensino dos números inteiros e suas propriedades operatórias, podendo ser combinado com outros recursos didáticos. O objetivo do presente projeto é apresentar ferramentas que os discentes possam utilizar afim de transpassar determinados obstáculos epistemológicos.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) não apresenta de forma clara na habilidade EF07MA03 a multiplicação e divisão de números inteiros como uma das habilidades de operação desse conjunto limitando-se apenas a sugerir, através dessa habilidade, "comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração" (BRASIL, 2018). Entretanto, temos que a mesma Base Nacional na habilidade EF07MA11 trata sobre "Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias" (BRASIL, 2018). Dessa forma, mostra-se de maneira relevante a apresentação dessas propriedades operatórias, ainda mais relacionada exclusivamente ao conjunto dos números inteiros.

A presente pesquisa caracteriza-se de forma bibliográfica através de uma metodologia qualitativa e será dividida em três capítulos. No primeiro capítulo que se intitula introdução trouxemos um panorama geral sobre os anseios sobre o ensino de matemática que levaram a esta pesquisa e as concepções iniciais que levaram ao desenvolvimento do roteiro didático que será apresentado. O objetivo desses primeiros capítulos é apresentar ao leitor um panorama geral sobre o ensino de matemática, em especial sobre o ensino de números inteiros - apresentando uma justificativa da relevância do presente trabalho.

No segundo Capítulo, intitulado "O conjunto dos inteiros", trata sobre a natureza dos números relativos e suas estruturas. Este capítulo tratará das propriedades e axiomas dos conjuntos dos números inteiros do ponto de vista da matemática moderna e uma perspectiva um pouco mais informa da construção ´do conjunto dos números inteiros O objetivo geral deste capítulo é fundamentar os conceitos relacionados aos inteiros e ressaltar os possíveis obstáculos epistemológicos apresentados nos estudos.

No terceiro capítulo, intitulado de “obstáculos epistemológicos” traremos a definição desses conceitos e quais foram tais obstáculos apresentados ao longo da história desde a matemática antiga até a matemática moderna. Através deste será traçado um paralelo com estudos presente sobre o ensino de número inteiros, e os principais obstáculos epistemológicos enfrentados pelos grandes matemáticos modernos e que até hoje são apresentados pelos discentes.

No quarto capítulo, que possui o título de “Metodologia de resolução de problemas aliadas a Gamificação", traremos a definição da metodologia de resolução de problemas e sua relevância para o ensino de matemática. Nesse capítulo também serão apresentadas as definições de gamificação no ensino de matemática e como essa abordagem pode ser relevante ao ensino da disciplina. Por fim, será esclarecido o que é uma sequência didática e como esta pode ser estruturada utilizando-se as metodologias ativas citadas.

No quinto capítulo serão apresentadas propostas de seis possíveis atividades que podem ser aplicadas dentro de sala de aula através de uma sequência didática e aplicando elementos de gamificação a estas. As finalidades dessas práticas é transpassar os obstáculos epistemológicos que serão apresentados. Cada atividade, ou conjunto de atividades, a ser apresentada possui como objetivo transpassar um dos obstáculos epistemológicos apresentados no capítulo três. A aplicação dessas atividades por meio de uma sequência didática irá garantir a esses discentes uma consolidação dos temas por meio de uma construção de teorias a partir de problemas cotidianos até problemas plenamente algébricos. As artes para essas atividades estão presentes no link https://acesse.one/f1lZ8 . Caso o drive não esteja disponível, é possível entrar em contato com o autor através do e-mail: jpmorgado.alves@gmail.com .

2 O CONJUNTO DOS INTEIROS

O conjunto dos números naturais é um conjunto de números infinito e enumeráveis usados para contar objetos ou representar uma quantidade em uma sequência ordenada. O conjunto dos números naturais é denotado pelo símbolo "N" ou "N". Esse conjunto consiste em uma sequência de elementos, que podem ser denotados pelo conjunto $N = \{1; 2; 3; 4; \cdots\}$. Tal conjunto respeita os axiomas de Peano, onde, segundo Lages (2004) temos as seguintes propriedades:

i) Existe uma função $s: N \to N$, que associa a cada $n \in N$ um elemento $S(n) \in N$ que é chamado de sucessor de N

ii) A função $s: N \to N$ é injetiva.

iii) Existe um único elemento 1 no conjunto de N, tal que $1 \neq S(n), \forall n \in N$

iv) Se um subconjunto $X \subset N$ é tal que $1 \in N \wedge S(X) \subset X$, então $X = N$

Dessa forma sendo $S(n) = n + 1$, podemos garantir que cada número natural tem um sucessor imediato e único. Além disso, os números naturais possuem outras propriedades importantes.

As operações usais de adição e multiplicação de números naturais podem ser expressas através das funções de $N \times N$ em N:

$$+ : N \times N \ \to \ N \ (a, b) \ \mapsto \ a + b \qquad\qquad \cdot : N \times N \ \to \ N \ (a, b) \ \mapsto \ a \cdot b$$

O conjunto dos números naturais munidos das operações de adição e multiplicação $(N, +, \cdot)$ são fechados em relação à adição e à multiplicação, o que significa que a soma ou multiplicação de dois números naturais resultará sempre em outro número natural. Essa propriedade é conhecida como propriedade de fechamento. Além disso, o conjunto dos números naturais também obedecem aos seguintes axiomas de anéis:

i) Comutatividade da adição

$$a + b = b + a; \forall a, b \in N$$

ii) Associatividade da adição;

$$(a + b) + c = a + (b + c); \forall a, b, c \in N$$

iii) Existência de elemento neutro da adição

$$0 + a = a + 0 = a; \forall a \in N$$

iv) Comutativa da Multiplicação:

$$a \cdot b = b \cdot a; \forall a, b, \in N$$

v) Associatividade da multiplicação:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c); \forall a, b, c \in N$$

vi) Elemento neutro da multiplicação:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a; \forall a \in N$$

vii) Distributiva da multiplicação, em relação a adição:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c; \forall a, b, c \in N$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; \forall a, b, c \in N$$

No entanto, no conjunto dos números naturais dado um $a \neq 0$; $\nexists(-a) \in N \;/\; a + (-a) = (-a) + a = 0$. Ou seja, o simétrico de um elemento a pertencente aos naturais não está contido neste. Dessa forma, temos que a operação da subtração não é fechado nos N. Para transpassar tal barreira, sugere que:

> "Num enfoque informal, os novos números, correspondentes às diferenças $a - b(a < b)$, são interpretados intuitivamente (como débitos, por exemplo) e agregados a N. Como resultado dessa união surge o conjunto dos números inteiros. Como é lícito admitir que se deva ter $0 - 1$ podemos indicar cada uma dessas diferenças por -1. De modo análogo surgem -2, -3, -4, ..." (Domingues, 1991, p.89)

O conjunto dos inteiros, denotado pelo símbolo Z é o conjunto formado pelos elementos $Z = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Dessa forma temos que o conjunto dos naturais N está contido em Z, ou seja, $N \subset Z$. Tendo isso, o conjunto dos números inteiros possui todas as propriedades operatórias anteriormente citadas para o conjunto dos números naturais. Entretanto, há agora uma nova propriedade:

viii) Simétrico ou oposto para a adição:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0; \forall a \in N$$

Dessa maneira temos que o conjunto dos números inteiros é fechado na operação da subtração, sou seja, $a - b \in Z;\ \forall a, b \in Z$.

No estudo da álgebra moderna, há uma mudança de enfoque em relação ao estudo de determinados conjuntos não pela natureza de seus elementos, mas pelas propriedades operatórias presentes nesses conjuntos. Seja um conjunto $A \neq \emptyset$, nas quais, as propriedades i), ii), iii), v), vii) e viii) anteriormente descritas são possíveis, dizemos que esse conjunto é classificado como um Anel, pois respeitas os axiomas de Anéis. Como $(Z, +, \cdot)$ respeita, também, as propriedades vi) e iv) citadas anteriormente, temos que este é chamado de anel comutativo e unitário. Temos também que o conjunto dos números inteiros não possui divisores de zero. Ou seja,

ix) $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \; ou \; b = 0; \forall a, b \in Z$

Por conta disso podemos classificar $(Z, +, \cdot)$ como sendo um domínio de integridade. Entretanto, Z não é um corpo pois não possui elemento inverso tal que:

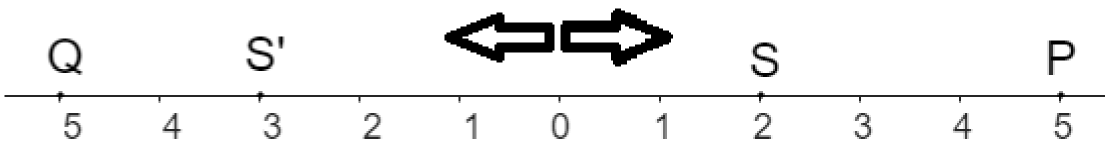
$$a \in Z \; e \; a \neq 0 \Rightarrow \nexists x \in Z; a \cdot x = 1$$

Dentro da perspectiva da matemática moderna, podemos afirmar que o conjunto dos números inteiros surge da necessidade de estabelecer um conjunto numérico que possua um simétrico para adição e consequentemente seja fechado para a subtração. Caraça (1984) traz uma abordagem semelhante a essa ao falar sobre os números inteiros ao afirmar que "a fonte da criação vai ser precisamente a dificuldade encontrada", ou seja, pelo fato de a subtração não ser fechada no conjunto dos números naturais, estabeleceu-se o conjunto dos números inteiros. Para exemplificar melhor esse conceito usaremos a ideia que Caraça apresenta sobre números relativos.

No cotidiano, por diversas vezes, falamos em números e estes sempre estão associados a grandezas, mas que esses por si só não fornecem sentido pleno a ideia que quer ser passada. Por exemplo, quando damos a ideia de tempo há necessidade de um referencial para sabermos se aquela passagem de tempo se deu antes ou após aquele referencial. Por exemplo, no calendário juliano utilizado por diversos países no ocidente, utiliza-se o nascimento de cristo como referencial. Eventos ocorridos previamente emprega-se a sigla a.C. (antes de Cristo) e posteriormente a isso d.C. (depois de Cristo).

De forma similar, ao estudarmos a posição e o deslocamento de um ponto sobre a reta numérica é preciso entender a posição deste ponto sobre a reta numérica e em qual sentido há o deslocamento deste ponto sobre a reta numérica. Caraça (1984) dá como exemplo o deslocamento um ponto automóvel, sobre uma reta R, tomando como referencial um ponto 0. Se este ponto desloca-se uma unidade a cada segundo, concluímos que após 5 segundos esse ponto estará a 5 unidades de distância de O. Entretanto apenas isso não é suficiente para definir onde este ponto estará presente, como podemos ver na imagem a seguir adaptada da obra de Caraça (1985):

Figura 1 – Representação do ponto móvel sobre e reta numérica



Fonte: O autor, 2023

Nota-se que o valor absoluto por si só não é capaz de representar onde este ponto estará presente sobre a reta numérica. Para tal, é necessário haver um sinal, universal, que seja capaz de representar quem qual sentido se deu o deslocamento de tal ponto.

Seguindo a mesma lógica dos deslocamentos, Caraça afirma ainda que caso um ponto se desloque 5 unidades em um sentido e 3 unidades no sentido oposto, podemos obter a posição desse ponto através da subtração $5 - 3 = 2$, ou seja, este ponto se encontrará 2 unidades do ponto de origem O. Entretanto, ao seguirmos a mesma lógica para um ponto que se deslocou 5 unidades em um sentido e 8 unidades no sentido oposto a equação $5 - 8$ resulta, como veremos no próximo capítulo, no que os matemáticos chamavam de números absurdos.

Para contornar tal problema, usaremos a ideia de números relativos, segundo Caraça (1985) "Sejam a e b dois números reais quaisquer: à diferença $a - b$ chamaremos número relativo, que diremos positivo, nulo ou negativo, conforme for $a > b$, $a = b$, $a < b$.". Dessa forma, a problemática do símbolo universal e do resultado passa a se resolver através dos números relativos, ou seja, dado o problema apresentado no parágrafo anterior, $5 - 8$, como $5 < 8$, o resultado será o número relativo -3.

Dessa forma, através dos números relativos, passamos a considerar os números negativos, bem como agora há também os números positivos. Tais definições dos números relativos (como o nome já bem expressa), compara a distância desses pontos em relação a um ponto inicial ao qual denominaremos de origem.

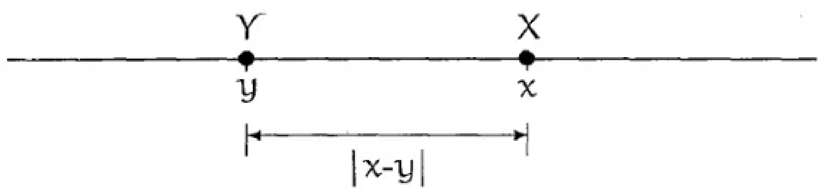
Entretanto, quando passamos a estudar os números relativos "independente de suas qualidades" (Caraça, 1985), ou seja, sem um símbolo/sinal que indique sua orientação, então nesse caso estamos falando dos valores absolutos de tais números.

Segundo Lima (1998), “O valor absoluto (ou módulo) de um número real x, indicado pela notação $|x|$, é definhada pondo-se:”

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Ainda segundo Lima (1998) “Outra importante interpretação do valor absoluto é a seguinte: se x e y são respectivamente as coordenadas dos pontos X e Y sobre o eixo R então $|x - y|$ = distância do ponto X ao ponto Y”

Figura 2 - Distância entre dois pontos X e Y



Fonte: Lima, 1998

Dessa forma Elon (1998) conclui que “A interpretação do valor absoluto $|x - y|$ como a distância, no eixo real, entre os pontos de coordenadas x e y, permite que se possa enxergar intuitivamente o significado e a resposta de algumas questões envolvendo módulos.”

Por exemplo, dada a expressão $3 - 0$, como $3 > 0$ temos que está é igual ao número relativo $+3$, já a expressão $0 - 3$, temos que como $0 < 3$ o resultado dessa expressão é igual ao número relativo -3. Dessa forma,

$$|3 - 0| = |+3| = 3$$

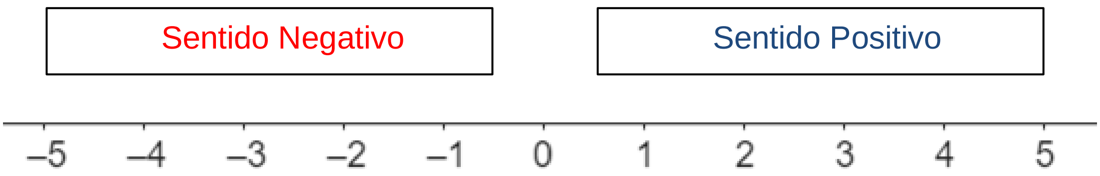
$$|0 - 3| = |-3| = 3$$

Por isso, podemos afirmar, utilizando-se da ideia de distâncias, que todo número negativo é igual a diferença onde o minuendo é zero e o subtraendo é o número natural igual ao módulo deste respectivo número.

Geometricamente podemos posicionar esses números da seguinte maneira:

> “[...] dada a recta orientada, isto é, a recta em que se tomou ponto O para origem e dois sentidos opostos — do O para a direita, ou sentido positivo, e de O para esquerda, ou sentido negativo — há urna correspondência biunívoca entre o conjunto dos seus pontos e o conjunto dos números relativos — a todo o ponto à direita de O corresponde um número real positivo, e reciprocamente; à todo o ponto à esquerda do O, um número real negativo, e reciprocamente; ao próprio O corresponde o número zero.” (Caraça, 1985, p.99)

Figura 3 - Sentido Positivo e Sentido Negativo



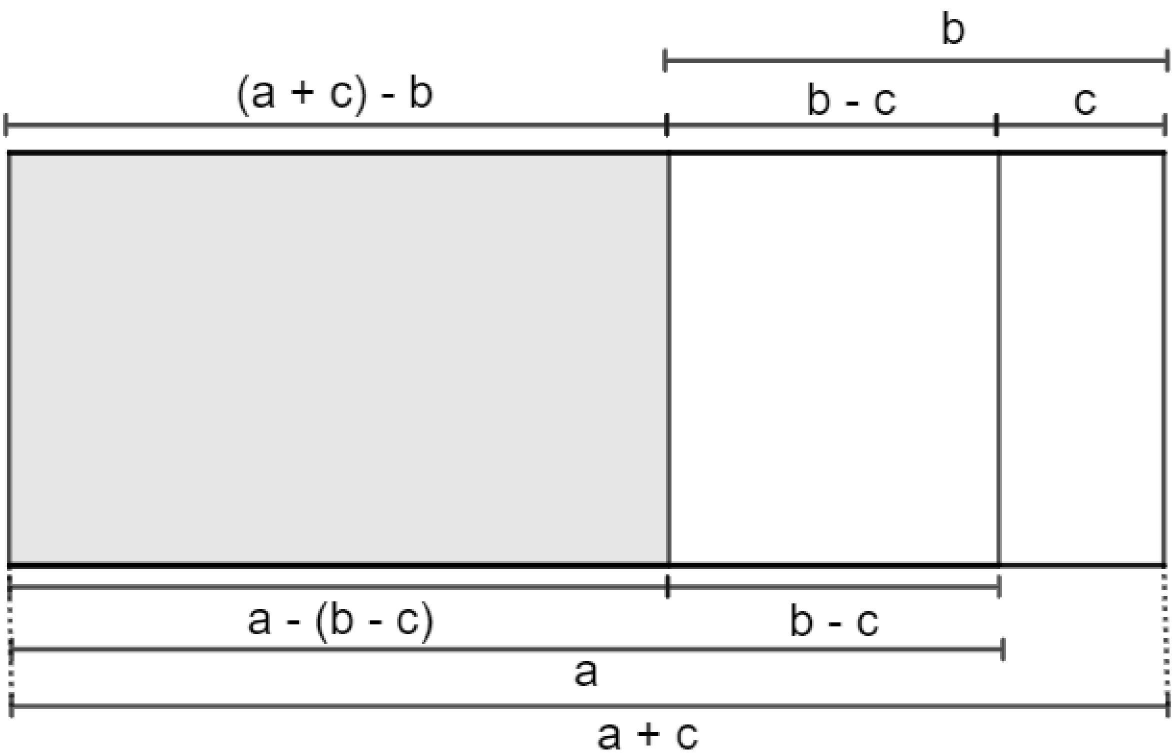
Fonte: O autor, 2023

Com relação a ideia das operações entre os números relativos, iniciaremos a partir das operações de adição e subtração, porém antes é necessário relembrar uma propriedade em relação a subtração:

$$a - (b - c) = (a + c) - b$$

Essa propriedade fica melhor explicada no livro de Caraça (1985) através da seguinte imagem:

Figura 4 - Representação geométrica da regra dos sinais



Fonte: O autor, 2023

A partir dessa propriedade e mais uma vez utilizando a ideia de distâncias podemos chegar à seguinte conclusão em relação a adição e a subtração entre dois números relativos.

$$a + (-b) = a + (0 - b) = a + 0 - b = a - b$$

$$a - (-b) = a - (0 - b) = a - 0 + b = a + b$$

Ou seja, somar um número a qualquer a um número negativo é equivalente a subtrair por um positivo de mesmo módulo, enquanto que subtrair um número negativo de a é equivalente a soma-lo ao módulo deste número hora negativo.

Já com relação a multiplicação, é necessário relembrar a propriedade distributiva. Para tal, utilizaremos a seguinte ideia utilizada por Diofantes de Alexandria (Século III d.C.) que consistem em:

$$(p - q) \cdot (r - s) = p \cdot (r - s) - q \cdot (r - s)$$

$$(p - q) \cdot (r - s) = p \cdot r - p \cdot s - q \cdot r + q \cdot s$$

$$(p - q) \cdot (r - s) = p \cdot r + q \cdot s - p \cdot s - q \cdot r$$

$$(p - q) \cdot (r - s) = (p \cdot r + q \cdot s) - (p \cdot s + q \cdot r)$$

Com isso, para cada uma das permutações das regras dos sinais podemos encontrar os seguintes resultados:

$$(+a) \cdot (+b) = (a - 0) \cdot (b - 0) = (a \cdot b + 0 \cdot 0) - (a \cdot 0 + 0 \cdot b) = +a \cdot b$$

$$(+a) \cdot (-b) = (a - 0) \cdot (0 - b) = (a \cdot 0 + 0 \cdot b) - (a \cdot b + 0 \cdot 0) = -a \cdot b$$

$$(-a) \cdot (+b) = (0 - a) \cdot (b - 0) = (0 \cdot b + a \cdot 0) - (0 \cdot 0 + a \cdot b) = -a \cdot b$$

$$(-a) \cdot (-b) = (0 - a) \cdot (0 - b) = (0 \cdot 0 + a \cdot b) - (0 \cdot b + a \cdot 0) = +a \cdot b$$

Com isso, chegamos à conclusão de regra dos sinais que tanto trazem estranheza e dificuldade aos discentes que possuem contato com esses resultados em um primeiro instante. Veremos no próximo capítulo que tais dificuldades não são exclusividade dos discentes, porém de grandes matemáticos que por hora também tiveram dificuldade em aceitar e entender as operações entre os números negativos.

3 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A escolha desse tema de estudo se dá pela dificuldade apresentada por estudantes no processo de assimilação dos conceitos e propriedades próprias ao conjunto dos números inteiros. Mesmo esse conteúdo estando implícito na realidade dos alunos em situações como: “a ordem bancária com crédito ou débito, as notícias de baixas temperaturas em determinadas regiões, no saldo de gols dos times de futebol em um campeonato, para situar fusos horários de países, dentre outras situações.” (oliveira, 2017).

Temos que a forma como esses problemas são abordados não são expressivos a estes estudantes e muitas das vezes desconexos de suas realidades. É notório que problemas envolvendo créditos e dívidas estão intrínsecos a realidades de diversos brasileiros, porém muitos dos estudantes do 7° ano do EFAF não experienciaram situações contínuas nos quais tivessem que lidar com créditos e dívidas. Por esse fator nem sempre utilizar esse exemplo como prática mostra-se um bom caminho para se introduzir a ideia de números relativos e as operações entre si. Dessa forma, mostra-se de extrema relevância o debate sobre o tema na escola visto que esta será uma situação que muitos dos estudantes terão de lidar no futuro.

Parte então do professor saber reconhecer os espaços que seus discentes ocupam dentro da sociedade e adaptar os conteúdos a essas realidades sem negligenciar as futuras vivências que tais discentes virão a ter as realidades as quais precisarão dos conceitos apresentados nas instituições formais.

O entendimento sobre propriedades entre os números relativos, segundo Glaeser (2010) foram um grande entrave epistemológico por muito tempo dentro do meio acadêmico. Ainda segundo Glaeser, há pesquisadores como Jean Piaget que apontaram em seus estudos as dificuldades apresentadas por matemáticos como d'Alembert em relação à existência e às propriedades operatórias com números negativos. Em um dos trechos de seu trabalho, Glaeser aponta um pasmo causado a Piaget onde:

> “Ele se espanta com o fato de que o matemático enciclopedista ‘viesse a julgar obscura a noção de quantidade negativa’, sem notar que isto ocorreu com todos os matemáticos até o século XIX! Limita-se a afirmar que a única dificuldade se prenderia ao caráter fixo do número, como se o concebia então” (GLAESER, 2010)

Vale ressaltar que à luz da época em que esses trabalhos foram desenvolvidos não haviam as tecnologias que a sociedade atual possui. Dessa forma, a construção dos saberes matemáticos através de uma trilha didática associadas a elementos de gamificação podem apresentar excelentes resultados no ensino das propriedades operatórias dos números inteiros auxiliando os alunos a transpassar os obstáculos epistemológicos que veremos a seguir.

Os entraves apresentados por esses alunos durante o processo de construção dos conceitos acerca das propriedades sobre o conjunto dos números inteiros assemelham-se àqueles apresentados por matemáticos até metade do século XIX. Piaget (1949; apud Glaser, 2010) afirma ainda que tal dificuldade poderia ser transpassada ao compreendermos os números, não através de um caráter fixo e imutável, porém como representações de ações como apresentados no capítulo anterior onde os valores são representações de diferenças entre duas distâncias.

Para Bachelard (1991) os obstáculos epistemológicos partem do conhecimento comum que precisam ser retificados a partir de uma análise crítica e científica.

> [...] a presença desses obstáculos não significa a ausência de conhecimento, mas sim, a existência de conhecimentos antigos que, cristalizados pelo tempo, resistem à instalação de novas concepções, ameaçando a estabilidade intelectual de quem detém esse conhecimento. (OLIVEIRA, 2017)

Para Piaget, a estabilidade intelectual consiste no estágio final do processo de assimilação e acomodação. Para que ocorra a aquisição de novos conhecimentos os indivíduos partem de conhecimentos prévios sobre a realidade e criam novos esquemas de assimilação a partir daqueles pré estabelecidos.

Para que haja a assimilação de novos conhecimentos é necessário que os saberes prévios se modifiquem a partir de uma desequilibração de tal forma que esse processo de reequilibração faça sentido ao sujeito. Piaget denomina o nome de todo esse fenômeno de processo de crescimento cognitivo.

Por vezes, assimilação de novos conteúdos se mostra verdadeiramente complicada para o indivíduo, “neste caso, o organismo (mente) desiste ou se modifica” (MOREIRA, 1995). Por isso, mostra-se necessário que os problemas apresentados tenham relação com o cotidiano próximo ao estudante. Além disso, a necessidade de novas formas de construção do conhecimento atreladas a metodologias que façam o aluno refletir e criar conjecturas sobre o assunto apresentam-se de forma tão urgente.

3.1 História dos números negativos

Através de um olhar histórico sobre os números relativos podemos notar que a aceitação dos mesmos por parte dos matemáticos durou mais de 1500 anos (Glaeser, 2010), o que caracteriza a dificuldade da reequilibração desse conhecimento. Uma das características formuladas por Bachelard (1938, apud Igliori, 1999) sobre as causas que levam a esses obstáculos epistemológicos é o fato de “um conhecimento funciona como obstáculo se começa a assim o crer, se ele se torna um preconceito, se ele não é mais questionado, se ele não exige mais ser validado”. Através do trabalho de Anjos (2008) e Glaeser (2010), podemos chegar das dificuldades históricas que levaram a tais obstáculos epistemológicos e como decorreu-se a aceitação dos números relativos.

Diferentes culturas da antiguidade se utilizaram da ideia dos números negativos sem necessariamente terem os caracterizados. Como exemplo disso, temos a civilização egípcia que segundo Anjos (2008) utilizavam uma malha quadriculada para elaborar obras de arte gráficas com a finalidade de garantir a proporcionalidade das imagens produzidas entretanto essas mesmas malhas foram utilizadas na construção das pirâmides do Egito onde os egípcios elencaram uma linha para representar a linha do chão, ao qual chamavam de *nfr* (o que pode ser compreendido como o zero) e a partir dessa realizavam suas construções tanto para a parte superior dessa linha quanto para a parte inferior. Apesar da utilização da *nfr* nos desenhos e projeções feitas pelos egípcios, não se chegou a haver uma formalização dos números negativos dentro da matemática egípcia.

De acordo com os historiadores Martzloff (1997) e Eves (2004; apud, Anjos, 2008) o surgimento dos números negativos deu-se na matemática chinesa, mais precisamente durante a dinastia Han (206 a.C a 220 d. C), durante esse período foi publicado o livro *Nove Capítulos da Arte Matemática*, nele estão presentes diversas ideias sobre o pensamento matemático chines baseado na filosofia. Neste estudo, os números negativos eram baseados sobre a filosofia de opostos complementares - *yng e yang* - e muito provavelmente foram concebidos para resolução de equações que envolvessem resultados negativos. Dentro dessa ideia, os chineses usavam varas vermelhas para representar os números negativos, e pretas para representar os números positivos.

A cultura chinesa teve pouca influência sobre a matemática grega, muito por conta do afastamento geográfico entre as duas regiões. Segundo Anjos afirmar que “a cultura que teve mais influência sobre os gregos foi a egípcia, a qual desenvolveu, como vimos, linhas de nível” (p. 20). Entretanto, a ideia de números negativos não estava presente dentro da civilização grega, muito por conta da filosofia da época. Segundo historiadores da época (Wussing, 1998; Boyer, 2003 apud Anjos, 2008) as escolas Jônicas possuíam como pensamento norteador a necessidade de explicar o mundo através da natureza.

A matemática da Grécia Antiga se destacava pelo uso de geometria e magnitudes geométricas ou suas razões como base para seus cálculos. Diferentemente dos números negativos, que são comuns em nossos dias, essas quantidades como comprimentos, áreas e volumes reais só podiam ser positivas naquela época. Essa visão pode ser explicada pelo fato de que a matemática grega estava fortemente ligada à filosofia e à ideia de harmonia e ordem na natureza. Assim, a ideia de números negativos não fazia sentido em um mundo onde tudo era visto como perfeito e equilibrado. Apesar disso, como veremos a seguir, a matemática grega teve forte influência no desenvolvimento da matemática moderna servindo como base aos grandes matemáticos iluministas.

O surgimento dos números negativos não pautou-se sobre problemas de contagem, como poderíamos supor a partir da matemática de linhas dos egípcios, mas a partir de problemas de cálculos de equações lineares e quadráticas. Diofanto (*fl.* Século III) em sua obra apresenta a resolução de equações com o uso implícito da regra dos sinais, entretanto, desconsiderando as soluções negativas por serem absurdas dentro da filosofia grega.

Os números negativos foram estruturados e melhores utilizados dentro da matemática hindu, através do trabalho de Bhahmagupta (598 – 665 d.C). Apesar do trabalho ser voltado para o estudo de astronomia, assim como a maioria dos trabalhos hindus (Anjos, 2008); Bhahmagupta, usando uma matemática essencialmente prática estabeleceu regras aritméticas em seu trabalho fazendo uso da regra dos sinais e chegando a usar símbolos para os números negativos. Apesar disso, Anjos (2008) afirma que os hindus não chegaram a usar os números negativos de forma sistemática, como exemplo disso temos que Bhaskara (1114-1185) desconsiderava as raízes negativas.

A matemática europeia possuiu fortes raízes durante a Renascença e a Idade Pré-Moderna sob forte influência do tratamento da pelos árabes em relação a matemática. Os árabes desenvolveram sua matemática a partir de textos traduzidos do hindu em relação a astronomia, entretanto, essa fundamentação não foi suficiente para a aceitação dos números negativos pelos árabes pois, além dos textos hindus, os mesmos utilizavam-se das traduções dos textos gregos para fundamentar suas teorias. Esse último, por pautar-se sobre uma matemática a partir das construções geométricas, fez com que os árabes não tivessem uma boa aceitação dos números negativos.

Por meio dos trabalhos árabes e das expansões comerciais “ao final do século X, a matemática árabe tornou-se um dos meios mais significativos de encontro entre o Império Árabe e a Europa Ocidental, que começava a sair de um período de pouco desenvolvimento econômico e intelectual.” (Anjos, 2008). Essa aproximação com o conhecimento árabe fez emergir na Europa as primeiras universidades. O desenvolvimento dessas universidades deu-se de duas formas:

> A primeira, ocorrida até o século XII, consistiu nas traduções dos textos árabes para o latim, e a segunda forma referia-se ao forte comércio que se instaurou entre o oriente e o ocidente, possibilitando dessa forma uma interação e captação de informações de aritmética e álgebra úteis ao comércio. (Anjos, 2008)

A matemática europeia passou a desenvolver-se através dos centros italianos. Esse alcance deu-se, em grande parte graças à Alexandre de Pisa, também conhecido como Fibonacci. Em seus manuais de práticas relacionadas ao comércio (Anjos, 2008), o matemático apresentou teorias relacionadas às equações quadráticas. Apesar do pioneirismo, Fibonacci seguia uma matemática pautada em demonstrações geométricas o que impunha certa restrição as raízes negativas dessas equações.

Com o aumento da complexidade das transações financeiras, passou-se a admitir os números negativos dentro desse contexto. Apesar de todo o conhecimento produzido nas *escolas dos abaccus*, esses textos, baseados nas fontes árabes deram pouco embasamento aos matemáticos renascentista.

Durante o Renascimento a matemática foi vista como uma ferramenta de "resolução de problemas que surgiam na vida cada vez mais capitalista." (Anjos, 2008). Durante o século XVI a publicação de Geronimo Cardano sobre a resolução de equações cúbicas apresentou uma mudança no campo da álgebra (Parshall, 1988 apud Anjos, 2008). Esse desenvolvimento contribuiu para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, bem como para o desenvolvimento do sistema simbólico para o aperfeiçoamento dos métodos matemáticos acarretando em um afastamento das demonstrações geométricas. A matemática simbólica passou a ter maior relevância a partir das obras do francês François Viète, consolidando de vez o sistema simbólico. Apesar dos trabalhos do francês apresentarem meios de obtenção de raízes negativas o mesmo também as evitava por conta de seus princípios geométricos.

3.2 Obstáculos epistemológicos na história da matemática moderna

A partir dos trabalhos de Viète vemos que a matemática moderna passou a se desenvolver nas universidades francesas. A partir desse ponto passaremos a estudar os obstáculos epistemológicos apresentados por esses matemáticos e que se assemelham, até certo ponto, com aqueles que os discentes apresentam na educação básica.

Glaeser (2010) apresenta seis obstáculos epistemológicos apresentados por esses matemáticos:

> "1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas.
> 2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.
> 3. Dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semirretas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.
> 4. A ambiguidade dos dois zeros (v. fls. 36).
> 5. Estagnação no estágio das operações concretas (era confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido 'concreto' atribuído aos seres numéricos.
> 6. Desejo de um modelo unificador."

Esse último refere-se ao desejo de existir um modelo único e satisfatório que exemplificasse tanto o modelo aditivo, quanto o modelo multiplicativo como tentando muitos dos discentes e docentes hoje em dia ao tentar exemplificar a regra dos sinais.

O autor reforça ainda que a transposição desses obstáculos não se deu de forma cronológica, existindo precursores do processo, mas que estes não necessariamente tenham sido aceitos em seus tempos dentro do meio acadêmico.

Glaeser (2010) nos apresenta ainda um quadro com os obstáculos epistemológicos apresentados pelos autores estudados até o momento e alguns que ainda veremos. Nele, os pontos de interrogação apresentam situações aonde, a partir das obras dos autores, não se foi possível responder se houve a transposição de tais obstáculos.

Figura 5 - Quadro de obstáculos epistemológicos

OBSTÁCULOS / AUTORES	1	2	3	4	5	6
DIOFANTES	-					
SIMON STEVIN	+	-	-	-	-	-
RENÉ DE SCARTES	+	?	-	?		
COLIN MACLAURIN	+	+	-	-	+	+
LEONARD EULER	+	+	+	?	-	-
JEAN D'ALEMBERT	+	-	-	-	-	-
LAZARE CARNOT	+	-	-	-	-	-
PIERRE DE LAPLACE	+	+	+	?	-	?
AUGUSTIN CAUCHY	+	+	-	-	+	?
HERMAN HANKEL	+	+	+	+	+	+

Fonte: Glaeser, 2010

Seguindo a ordem imposta pelo autor deixaremos de lado o estudo por Diofantes de Alexandria por já termos citado o matemático anteriormente. Iniciaremos esse percurso histórico através de Simon Stevin (1540-1620) que em seus estudos baseados nos textos de Diofantes apresenta uma prova geométrica a regra dos sinais. Tal prova elucida o obstáculo 1, apresentando uma forma de manipular tais quantidades negativas entre em si ou com quantidades positivas. Apesar disso, o mesmo não é capaz admitir a existência dos números negativos. Muito por conta da corrente filosófica presente na época e já descrita anteriormente. Esses é um dos sintomas de evitação apresentados por Bachelard e que impossibilitam a transposição didática.

Até o final do século XVIII os matemáticos não davam aos resultados negativos os status de números, renegando a tais resultados como impossíveis. Rene Descartes em seus livros Geometria (1628) descreve, em pelo menos um terço de sua obra, maneiras de livra-se das raízes “falsas” resultantes das equações.

Toda via, a parir do século XVII os números negativos passam a ganhar tal status de número muito por conta do desenvolvimento do cálculo na época. Colin MacLaurin, em sua obra póstuma *Tratado de Álgebra* (1748) descreve:

> “[...] a quantidade negativa, longe de ser rigorosamente menor que nada, não é menos real na sua espécie do que a positiva, mas é tomada num sentido oposto; segue-se daí que uma quantidade considerada isoladamente não poderia ser negativa, pois ela só o será por comparação; e que quanto a quantidade que chamamos positiva não tem outra que lhe seja oposta, não se poderia dela subtrair outra maior. Por exemplo: seria absurdo querer subtrair uma quantidade maior de matéria, de outra menor” (MacLaurin, 1748; apud, Glaeser, 2010)

Essa conclusão, segundo Glaeser (2010) demonstrou um passo importante para a demonstração da regra dos sinais explicitada por Deofante, mas também demonstrou a transposição do obstáculo 2 dando sentido aos números negativos. Apesar disso ainda resta unificar a reta numérica e transpassar a ambiguidade dos dois zeros. Esta primeira nem mesmo transposta por Léonard Euler (1707-1783) que ao denotar os números negativos apresenta uma brilhante explicação sobre os números negativos, porém sem conseguir associar um número negativo como sendo o oposto de um número positivo.

Tal caracterização foi possível através da obra de Jean d'Alembert (1717-1783) aonde o autor afirma que as quantidades positivas são contrárias as negativas. Ou seja, aonde encerra-se um, se inicia a outra. Tal definição deixa claro que d'Alembert possuía a ideia de que os números negativos de fato eram opostos em relação aos números positivos, todavia o matemático não admitia a existência de tais resultados (Glaeser, 2010). Apesar disso, sua obra serviu de base para outros matemáticos como por exemplo o matemático Laplace.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) em sua obra para a Escola Normal Superior retoma a dedução para a distributividade e adota a ausência de um modelo físico para tal explicação, dessa maneira contornando de maneira informal o obstáculo 6. Associado ao trabalho de Augustin Cauchy (1789-1857) transpassa o obstáculo 5 restantes até o momento apresentando a multiplicação de modo formal sem utilizar um modelo físico. Apesar disso acaba cometendo alguns erros de sinais (similares aos que os discentes comentem) em relação ao sinal associado ao número ser um sinal operatório ou predicativo.

Apenas através da obra de Herman Hankel (1867), todos os obstáculos elencados por Glaeser são ultrapassados.

> “A revolução realizada por Hankel consiste em abordar o problema de uma perspectiva totalmente diversa. Não se trata mais de extrair da Natureza exemplos práticos que "expliquem" os números relativos de modo metafórico. Tais números não são mais descobertos, mas inventados, imaginados.” (Glaeser, 2010)

Podemos notar que por mais de 15 séculos o número negativo forma um percalço aos matemáticos por conta da abordagem filosófica deste a luz da época. Todavia, vimos que através do Renascimento a compreensão das propriedades relacionadas a esses números puderam ser transpassadas.

A proposta da criação de um roteiro didático entra em consonância com essa dificuldade apresentadas pelos grandes matemáticos (antigos e modernos) e apresentada pelos estudantes atuais em realizar a reequilibração dos saberes afim de transpassar tais obstáculos epistemológicos. Este roteiro é uma das soluções a serem utilizadas pelos professores e alunos a fim de compreender melhor os conceitos sobre as propriedades operatórias do conjunto dos números inteiros.

4 METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALIADAS A GAMIFICAÇÃO

As tendências em educação no século XXI possuem como um eixo norteador um deslocamento de um enfoque individualizado, para um enfoque maior em questões sociais, políticas e ideológicas (GADOTTI, 2000 apud PAIVA, 2016).

Com a inserção das novas camadas sociais nas instituições de ensino com o objetivo, principalmente, de ascensão social por meio da educação, essas classes passaram a ter acesso a qualificação e a conquistas de patamares antes exclusivos e uma pequena parcela da população (Allevato, Onuchic, 2014). Todavia, essa democratização do ensino trouxe novos desafios à escola e aos professores como o ensino de conteúdos a perfis sociais, econômicos e culturais heterogêneos.

Dessa forma emergem novas metodologias de ensino que atendam a essas necessidades. Dentro desse campo, de novas metodologias, encontram-se as metodologias ativas. Essas metodologias apresentam como principais benefícios "desenvolvimento da autonomia do aluno, o rompimento com o modelo tradicional, o trabalho em equipe, a integração entre teoria e prática, o desenvolvimento de uma visão crítica da realidade e o favorecimento de uma avaliação formativa." (PAIVA, 2016).

Tais metodologia mostram-se importantes pois:

> Visando-se uma sociedade mais justa, capaz de intervir no desenvolvimento da humanidade crítica e criativamente, buscando uma melhoria na qualidade de vida do cidadão, não é suficiente apresentar conhecimentos cristalizados e fora do contexto moderno. É preciso fazer com que os alunos tornem-se pessoas capazes de enfrentar situações diferentes dentro de contextos diversificados, que façam com que eles busquem aprender novos conhecimentos e habilidades. Só assim estarão melhor preparados para adaptar-se às mudanças culturais, tecnológicas e profissionais do novo milênio. (SOARES, 2001)

Dessa forma mostra-se cada vez mais relevante

> "[...]a necessidade de superar práticas ultrapassadas de transmissão de conhecimentos e transferir para o aluno grande parte da responsabilidade por sua própria aprendizagem, colocando-o como protagonista de seu processo de construção de conhecimento. O desenvolvimento da criatividade, da autonomia e de habilidades de pensamento crítico e de trabalho em grupo devem ser promovidos" (ALLEVATO, ONUCHIC, 2014)

Em consonância com essa ideia, emergiu do trabalho do educador matemático húngaro George Polya a metodologia de resolução em seu livro A arte de resolver problemas (1978). Essa metodologia baseia-se na apresentação de situações problemas em aberto que exigem do aluno uma postura de agente ativo na construção do próprio conhecimento. (Soares, 2001). Tal metodologia pressupõem desenvolver nos alunos o domínio sobre os procedimentos e conhecimentos matemáticos desenvolvendo nestes discentes a postura crítica sobre as perguntas que os inquietam, sejam elas escolares ou relativos à vida cotidiana. Para Thompson (1989) um problema é tudo aquilo que possibilite uma variedade de abordagens para suas soluções não apenas dependendo daquilo que se tem, como uma fórmula ou um exemplo, mas que desenvolva novas ideias. Dessa forma um problema deve despertar no aluno os mais diversos sentimentos como: desafio, diversão e frustração.

Onuchi (2013) traz em seu trabalho um quadro com trechos do documento *Orientações curriculares para o ensino médio* (Brasil, 2016), nele são destacadas algumas questões metodológicas para o ensino de matemática. Afim de sintetizar, o quadro a seguir foi adaptado utilizando trechos dos destaques feitos pela autora.

Tabela 1 - Síntese das questões metodológicas

QUESTÕES METODOLÓGICAS
Uma segunda corrente, ainda pouco explorada em nossos sistemas de ensino, transfere para o aluno, em grande parte, a responsabilidade pela sua própria aprendizagem, na medida em que o coloca como ator principal desse processo
As ideias socioconstrutivistas da aprendizagem partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas. Essa ideia tem como premissa que a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Dessa forma, caberia a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático.
Ancorada nas concepções de aprendizagem, e fortemente articulada com o conceito de contrato didático, surge a ideia de transposição didática, que vem frequentemente dividida em dois grandes momentos: a transposição didática externa e a transposição didática interna. A primeira toma como referência as transformações, as inclusões e as exclusões sofridas pelos objetos de conhecimento matemático, desde o momento de sua produção até o momento em que eles chegam à porta das escolas. Atuando, de certa forma, em uma esfera exterior à escola (mas sempre como resposta às suas demandas), o produto dessa transposição didática externa se materializa, em sua maior parte, pelos livros didáticos e pelas orientações curriculares, como o presente documento. A transposição didática interna apresenta-se, por sua própria natureza, no interior da escola e, mais particularmente, em cada uma de nossas salas de aula.
O conceito de transposição didática também aparece intimamente ligado à ideia de contextualização, e ajuda a compreender a dinâmica de produção e circulação dos saberes que chegarão à escola e entrarão em nossas salas de aula. [...]. A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa

antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de “ilustrar” o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola
A contextualização pode ser feita por meio da resolução de problemas. Vale aqui ressaltar o quanto é importante, para o exercício da cidadania, a competência de analisar um problema e tomar as decisões necessárias à sua resolução. Mas aqui é preciso estar atento aos problemas “fechados”, porque esses pouco incentivam o desenvolvimento de habilidades, enquanto que o problema do tipo aberto procura levar o aluno à aquisição de procedimentos para resolução de problemas. A prática em sala de aula desse tipo de problema acaba por transformar a própria relação entre o professor e os alunos e entre os alunos e o conhecimento matemático

Fonte: Onuchi (2013)

Dessa forma é possível notar que os documentos oficiais encontram-se em consonâncias com a necessidade de abordar matemática através de novas metodologias ativas, em especial a metodologia de resolução de problemas.

Tais conceitos estão presentes também na BNCC (2018) onde está cita que a resolução de problemas é um dos pilares para o letramento matemático:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura (Brasil, 2018, p.266)

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. (Brasil, 2018, p.266)

Os problemas de matemática podem ser entendidos como um ponto de partida para o ensino de matemática. A partir desta e das vivências de mundo os alunos são capazes de desenvolver as mais diversas capacidades intelectuais mobilizando diversas como por exemplo: “criatividade, intuição, imaginação, iniciativa, autonomia, liberdade, estabelecimento de conexões, experimentação, tentativa e erro, utilização de problemas conhecidos, interpretação dos resultados, etc.” (Romanatto, 2012). Dessa forma, a resolução de problemas desenvolve nos estudantes a capacidade de elaborar/adquirir ideias e aspectos da matemática.

A resolução de problemas é uma característica intrínseca à história da matemática. Um exemplo desta prática são os Papiros de Ahmes (1650 a.C.) que apresentam uma seleção de problemas. Tais problemas eram passados entre os estudiosos da época como forma de divulgação dos problemas e aprimoração dos métodos matemáticos (Onuchi, 2013). Atualmente, os livros didáticos seguem uma lógica semelhante, entretanto, ainda seguem uma lógica muito míope com relação a metodologia de resolução de problemas apresentando-se, apenas, como fatos da vida real que possam ser resolvidos através da aplicação de conceitos específicos já previamente expressos.

> A importância dada à Resolução de Problemas, no contexto da sala de aula de Matemática, é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção. (Onuchic, Allevato, 2005)

Um outro aspecto relevante da resolução de problemas são os saberes mobilizados por esses alunos. Essa mobilização pode se dar após o ensino dos conceitos (num aspecto puramente matemático), onde esse aluno transfere esses conhecimentos para a resolução dos problemas. Entretanto, partindo dessa abordagem, a metodologia de resolução de problemas corre o risco de ser classificada como uma metodologia que possa ser utilizada apenas após os alunos terem aprendido a teoria, caindo no erro de que a resolução de problemas seria algo similar a resolução de exercícios.

Uma outra abordagem para a metodologia de resolução de problemas é apresentar estes previamente a teoria de um assunto apresentado. Dessa forma os discentes são capazes de levantar conjecturas com relação aos saberes presentes naqueles problemas baseados, principalmente, nos saberes construídos anteriormente. “Matemática e resolução de problemas, são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente.” (Allevato, Onuchic, 2014). Dessa forma podemos afirmar que:

> “Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. (BRASIL, 2018, p. 266, apud ALLEVATO, ONUCHIC, 2014)

Em resumo, a metodologia de resolução de problemas não baseia-se na resolução de exercícios matemáticos semelhantes a aqueles presentes no final dos capítulos dos livros didáticos. Esses problemas roteirizados não exigem ou avaliam os conhecimentos construídos pelos alunos, servindo apenas de um reforço dos esquemas ensinados.

Um bom problema de matemática deve, segundo Dante (1988, apud Soares, 2001) deve fazer com que o aluno pense de forma produtiva, incentivando o desenvolvimento do raciocínio crítico de forma que este esteja apto a enfrentar as situações mais diversas do cotidiano. Essa metodologia permite ao aluno envolver-se com aplicações e modelagens matemáticas tornando as aulas de matemática mais produtiva. Além disso, essa metodologia fornece ao aluno estratégia para que o mesmo possa analisar e solucionar situações que apresentem mais de um elemento desconhecido, fornecendo a este uma alfabetização matemática que o torne um agente crítico do mundo.

Dante (1988, apud Soares, 2001) classifica, ainda, esses problemas de seis maneiras distintas. Dentre eles, vale destacar os problemas-processos. Esse tipo de problema exige do estudante um maior tempo de reflexão para que o mesmo possa arquitetar uma solução ao problema proposto aguçando no discente sua criatividade para a solução de problemas semelhantes ao apresentado.

Durante a resolução de um problema, Polya (1978) sugere que o discente passe por quatro fases ao longo da resolução do problema se que haja muitas mudanças de perspectiva em relação ao problema. A primeira fase é a compreensão do problema. Nela o estudante deve compreender quais são as partes mais relevantes do problema. Nesta parte o estudante passa a formular conjecturas sobre os problemas e apresenta suas suposições.

Após a compreensão do problema o estudante, em uma segunda etapa, estabelece um plano para a solução do mesmo. Polya (1978) reforça que a duração entre a compreensão do problema e o estabelecimento de um plano pode ser grande. O professor, durante esse período, deve lembra-se do seu tempo de estudante e de como é difícil gerar uma estratégia quando se há pouco conhecimento sobre o tema. Uma boa orientação que o docente pode fornecer a seu estudante é se os mesmos se utilizaram de todas as informações contidas no enunciado.

Com uma estratégia traçada, dá-se início a terceira etapa: a de execução do plano. Nesta terceira etapa um pouco mais tranquila do que a anterior, segundo Polya (1978) o aluno irá realizar a aplicação de cada um dos passos traçados em seu plano. Caso o docente note algum erro em um dos passos é necessário orientar o aluno, não para que este apenas corrija, mas para que se sinta convicto de que é necessária a correção do percurso.

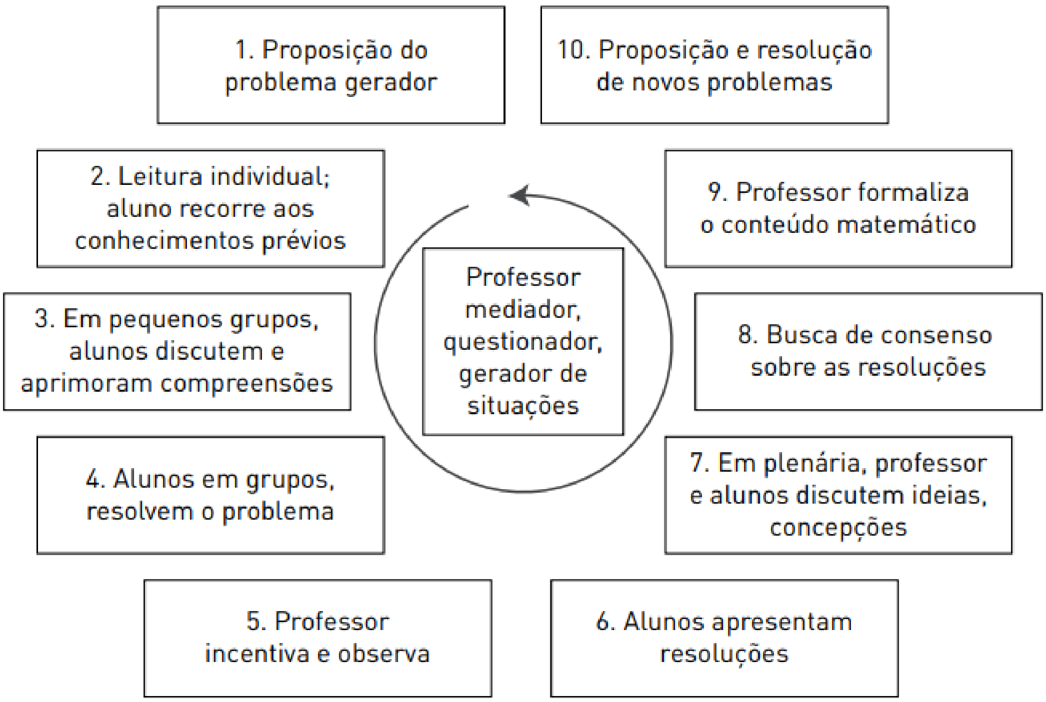
O quarto e último passo, muitas das vezes esquecido e ignorado pelos estudantes, é a retrospectiva do problema. Nessa etapa o discente deve analisar sua resolução e questiona-se se esta foi a melhor possível. Quais desdobramentos poderiam ser feitos a partir do problema apresentado e como a resolução desse problema pode auxiliar na resolução de problemas futuros.

Como podemos notar que a heurística de Polya permite ao discente solucionar problemas apresentados ao longo de seus estudos, entretanto sua aplicação tal qual uma metodologia torna-se demasiadamente complicada. Baseado na metodologia de Polya, as autoras Allevato e Onuchic (2014) propõe uma metodologia de resolução de problemas voltadas para a sala de aula e organizada em dez passos:

> “(1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas”

Esses passos podem ser esquematizados através do seguinte diagrama:

Figura 6 - Metodologia de resolução de problemas



Fonte: Allevato e Onuchic (2014)

Na primeira etapa é entregue a cada um dos alunos o problema gerador. Tais problemas devem ser muito bem selecionados pelo professor pois a partir desse pretende-se construir um novo conhecimento com os alunos. Na segunda etapa, cada aluno deve fazer uma leitura individual do problema realizando suas reflexões acerca dos dados apresentados no problema. Na terceira etapa os alunos renuem-se em pequenos grupos para realizarem a leitura e discussão dos problemas. Nessa etapa os alunos passam a traçar estratégias de resolução e sanar possíveis dúvidas que possam ter surgido durante a leitura individual. Nessa etapa, o professor pode atuar para auxiliar os grupos a sanar possíveis problemas principais ou secundários que possam ter surgido ao longo da leitura.

Na quarta e quinta etapa os grupos iniciam o processo de resolução problemas utilizando-se das mais diferentes formas de linguagem: matemática ou corrente; e das mais diferentes representações: desenhos, gráficos, tabelas, esquemas, etc. Nessa etapa o papel do professor é observar e orientar os alunos a transporem determinados obstáculos que possam vir a surgir ao longo da resolução. Na sexta, sétima e oitava etapas o representante de cada grupo de alunos apresenta as resoluções dos grupos, sejam elas precisam ou com possíveis equívocos. O papel do professor nessa etapa é estimular os alunos a apresentarem suas resoluções justificando as respostas apresentadas e gerar o debate entre os estudantes em prol de aperfeiçoar as resoluções apresentadas.

Na nona e penúltima etapa o docente formaliza, através de linguagem matemática, os conteúdos abordados no problema afim de padronizar de maneira formal o conteúdo abordado apresentando diferentes técnicas e demonstrações relacionadas a este. Por fim a última etapa da metodologia consiste na participação dos alunos na elaboração de problemas relacionados ao conteúdo apresentado. Essa etapa inclusive é reforçada pela BNCC (2018) onde a mesma afirma que essa reelaboração dos problemas para que os mesmo reflitam “sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto.” (p. 299)

Esse tipo de metodologia permite ao docente a avaliação dos alunos ao longo do processo de resolução de problemas, mas também a coavaliação dos discentes enquanto que os mesmo, reunidos em pares discutem e por vezes acabam corrigindo possíveis erros.

O papel do professor dentro da resolução de problemas é de, além de propor bons problemas que instiguem os alunos, orientar os discentes durante o processo de resolução. Tal orientação sobre quais caminhos tomar ao longo da mesma, quanto sobre a percepção e a importância que a aquele problema possui para a formação daquele discente. O professor deve reforçar com seus estudantes que o mais relevante ao longo da resolução de um problema não é o tempo gasto para que se resolva o mesmo, mas o grau de profundidade alcançado durante a resolução. Por isso, é papel do professor apresentar situações paralelas aos que os discentes estão resolvendo para orienta-los sobre possíveis situações em que as ideias dos alunos não poderiam ser aplicadas e fornecer as respostas de forma indiretas que solucionem os problemas. Dessa maneira o docente deve estimular seus alunos verbalizarem as que estão sendo produzidas e apresentar ideias que possam auxilia-los a resolver os problemas.

A metodologia de resolução de problemas esbarra em uma problemática em relação a sua estrutura. Os problemas apresentados sevem ser atrativos aos alunos e por vezes um problema textual apresentado em uma estrutura de exercícios pode desestimular o estudante a querem resolver o problema. Por isso, a gamificação, atrelada a metodologia de resolução de problemas, pode estimular aos alunos a tornarem-se mais participativos nas tarefas.

Segundo Barbosa et al (2020) a gamificação tem sido utilizada como estratégia por professores e pesquisadores com o intuito de engajar e motivar os estudantes. Dessa forma, a utilização da gamificação no ensino das propriedades de números inteiros pode ser utilizada como importante ferramenta pois “a atividade de jogar refere-se às regras e aos procedimentos sociais para a atuação e também estimula o aspecto ‘em si’ da conduta imaginária e hipotética” (Bishop, 1999)

Vale ressaltar que no presente texto o termo gamificação refere-se à utilização das dinâmicas de jogos e suas mecânicas ao qual chamaremos de elementos de gamificação. Esses elementos podem ser utilizados em diferentes atividades com o intuito de engajar os participantes na resolução de problemas.

> [...] a geração atual de discente no ambiente escolar, que já não mais exprimem uma correspondência com práticas educacionais fundamentalmente conteudistas, além da relação desta geração com a tecnologia. (BARBOSA; DE PONTES; DE CASTRO, 2020)

Os elementos de gamificação descritos anteriormente são: voluntariedade, os objetivos, as regras e os feedbacks. Este primeiro e principal tópico fará com que o aluno se veja engajado no processo tornando a atividade mais próxima possível de um jogo. Em relação aos objetivos, é necessário que estes estejam expressos de forma clara e objetiva aos jogadores. Dessa forma, caso haja dificuldade em jogar oriunda da confusão por parte dos jogadores em compreender os objetivos, é necessário subdividir os objetivos apresentando desafios menores que precisam ser alcançados a fim de atingir um objetivo maior.

As regras para alcançar esses objetivos também devem estar explicitadas aos jogadores. Caso necessário, com a presença de exemplos de casos que possam ocorrer ao longo do jogo. Dessa forma, estimula-se a autonomia dos jogadores para que estes não necessitem do auxílio/mediação do docente.

Transpassando cada objetivo, esses participantes devem receber *feedbacks* que precisam ser claros e diretos. Esses retornos que os participantes recebem sobre suas ações devem ser claros e objetivos. Dessa forma os jogadores possuem uma noção de como sua performance dentro do jogo está se desenvolvendo e, a partir desta, passa a traçar estratégias para melhorar seu desempenho ou mantê-lo dentro deste.

A presente pesquisa tem por objetivo desenvolver uma sequência didática com elementos de gamificação e matemática e pautadas sobre a metodologia de resolução de problemas. Essa sequência é umas das ferramentas que o professor de matemática poderá utilizar em suas aulas como um primeiro contato com os números inteiros de maneira que estes alunos do 7° ano EFAF sejam capazes de desenvolver os saberes sobre as propriedades operatórias do conjunto dos números inteiros sendo estes capazes de transpassar as seis barreiras epistemológicas inerentes ao conteúdo e citadas, do trabalho de Glaeser, no capítulo anterior

Segunda Zabala, temos que uma sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18). Dessa forma, não basta realizar atividades distintas a aquelas aos quais os alunos estão habituados. É necessários que haja uma conexão e um propósito entre ela, havendo dessa maneira, a construção do conhecimento por parte dos alunos.

Partindo apenas dos saberes oriundos do mundo, os alunos serão instigados, ao longo da sequência didática a resolver problemas de piso baixo e teto alto que apresentam elementos de gamificação citados anteriormente. Está técnica, de piso baixo e teto alto consiste em apresentar problemas iniciais de fácil resolução que instiguem o participante e ao decorrer da atividade elevar seu nível aos poucos apresentando mais elementos com o objetivo de envolver cada vez mais os estudantes.

Com o envolvimento de problemas das propriedades operatórias do conjunto dos números inteiros que se relacionem com situações cotidianas desses discentes, espera-se que estes sejam capazes de construir seus próprios saberes relacionados às propriedades operatórias entre os números relativos para que estes possam transpassar os obstáculos epistemológicos apresentados no capítulo anterior.

A metodologia de resolução de problemas, baseada no trabalho de Allevato e Onuchic (2014) será aplicada a esses jogos com o objetivo de norteador aqueles discentes que apresentam maiores dificuldades na construção dos saberes referentes a essas propriedades operatórias entre os números inteiros, visto que:

> “o trabalho com jogos é um dos recursos que favorece o desenvolvimento da linguagem, diferentes processos de raciocínio e de interação entre os alunos, uma vez que durante um jogo, cada jogador tem a possibilidade de acompanhar o trabalho de todos os outros, defender pontos de vista e aprender a ser crítico e confiante em si mesmo.” (BARBOSA e CARVALHO, 2008)

A proposta de utilizar jogos para o ensino de números relativos parte do conceito das representações semióticas de Duval. Segundo Duval e Thadeu (2012) “as diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias”. Essas diversas representações se dão a partir das percepções e experiências intuitivas inerentes ao sujeito. Essas representações dão-se através do emprego de diferentes signos pertencentes a um sistema de representações próprio.

O estímulo ao emprego dessas diferentes representações semióticas a problemas relacionados às propriedades operatórias do conjunto dos números inteiros faz com que haja uma interiorização e desenvolvimento das representações mentais daquilo que é percebido (VYGOTSKY, 1962; PIAGET, 1968 apud DUVAL; THADEU, 2012). Dessa forma, segundo Vygotsky, ao fazer generalizações por meio da abstração dizemos que determinados conceitos foram formados. Há três etapas nesse processo: fala social (usada para comunicar), fala egocêntrica (utilizada para mediar), e fala interna. Esta última permite um pensamento abstrato independente do concreto. Esse processo de abstração/aprendizagem ocorre dentro do que Vygotsky chama de zona de desenvolvimento proximal.

Ao estimular o jogo em equipes temos que todas essas fases são conectadas e o desenvolvimento de novos signos são estabelecidos. Dessa forma, a utilização da gamificação como método de ensino da propriedade operatória dos números inteiros apresenta seu valor de forma objetiva e embasada.

No capítulo a seguir será apresentada uma sequência didática estruturada em seis atividades que podem ser aplicadas utilizando a metodologia de resolução de problemas. Essas seis atividades visam auxiliar os alunos a transpor os seis obstáculos epistemológicos apresentados por Glaser.

5 JOGOS COM UMA ABORDAGEM PARA A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS

No presente capítulo serão apresentado o conjunto de alguns jogos e atividades que podem ser trabalhados para o ensino de números inteiros no sétimo ano do EFAF ou em outras séries que abordem os conteúdos relacionado a seguir. Essas atividades foram selecionadas a fim promover a transposição de determinados obstáculos epistemológicos elencados por Glaser (2010) e inerente ao ensino dos números relativos.

O intuito das atividades, além de permitir os estudantes transpassem determinados obstáculos epistemológicos, é também a de possibilitar a esses indivíduos a reflexão crítica do mundo além do âmbito escolar. Tais reflexões permitirão a esses discentes dispor de um escopo critico de mundo, não apenas inerente aos conceitos matemáticos, mas a forma como essa disciplina se relaciona com a sociedade e o mundo.

As atividades apresentadas a seguir deverão ser desenvolvidas em grupo. O objetivo dessa abordagem, como citamos anteriormente ao descrever a metodologia de resolução de problemas, é fornecer a estes estudantes o protagonismo de sua formação através das trocas entre pares ou com o grupo. Dessa forma, espera-se desenvolver nos discentes a autonomia intelectual destes.

O papel do professor ao longo das atividades é a de mediação. Dentro desse contexto o professor deve fornecer espaço para que seus estudantes se sintam seguros a expressar suas ideias. A expressão dessas ideias permitirá a esses estudantes, seja em grupo ou individualmente, construírem seus saberes de forma autônoma. O papel do professor é também, durante a atividade, guiar seus alunos: sejam quando esses expressão uma ideia que os levará um caminho errado, seja quando, ao longo do debate, acabam por fugir do tema sendo importante sempre tentar relacionar os novos assuntos que estão sendo citados com o tema central que está sendo debatido.

5.1 Encontro 1:

A presente atividade tem por objetivo introduzir a ideia de números inteiros de forma a transpassar os primeiros obstáculos epistemológicos apresentado por

Glaeser (2010). A operação dos números negativos, atualmente já é conceito presente no cotidiano do cidadão comum, seja por conta das notícias sobre temperaturas, seja por conta dos saldos bancários e suas operações necessárias. Entretanto, nem sempre os alunos estão habituados a operarem determinadas quantias monetárias. Essa inaptidão muita das vezes pode apresentar problemas financeiras na fase adulta desses alunos.

Baseado nesses fatores apresentados a atividade a seguir é uma adaptação do trabalho de Linardi (1998) e tem por finalidade trabalhar com os estudantes os conceitos das operações entre os números inteiros operando essas quantidades de maneira isolada. Essa atividade também trabalha a reflexão acerca dos gastos a partir da quantidade de dinheiro disponível para a operação.

Na atividade a autora trabalha um jogo semelhante ao do banco imobiliário onde os alunos são instigados a realizarem a compra de bens utilizando a melhor estratégia para vencer. No jogo, a autora sugere alterar os bens materiais, por animais como: cão, gato, cobra, etc. Entretanto, por conta do cenário carioca, recomendamos a troca desses cards por frutas típicas brasileiras afim de estimular a alimentação saudável entre os estudantes. Cada casa no tabuleiro representará uma barraca de fruta que os alunos poderão usufruir na feira livre que o tabuleiro representa.

Tabela 2 - Ficha de resumo do jogo perdas e ganhos

Atividade 1 Perdas e Ganhos	
Habilidade BNCC	(EF06MA03) (EF07MA03) (EF07MA04)
Objetivos	Debater a relação com consumismo; Debater a educação alimentar e acultura da feira livre; Realizar a interdisciplinaridade baseada no contexto social dos alunos; Retomar o conceito de probabilidade;
Objetivos de conhecimento	Resolver problemas que que envolvam cálculos mentais ou por escrito, por meio de estratégias variadas; Comparar e ordenar números inteiros, operando-os através de cálculos mentais ou por escrito;
Recursos Necessários	Tabuleiro; Fichas de títulos; Cartões de sorteio; Cédulas de dinheiro do jogo; Botões; Dado
Tempo estimado	1 hora e 40 minutos à 2 horas e 30 minutos

Desenvolvimento	Debate sobre a alimentação saudável e sobre a cultura de feira livre de rua; Realizar uma rodada teste para que os alunos possam entender o jogo; Permitir aos alunos jogarem livremente observando as dinâmicas e estratégias apresentadas pelos alunos; Pedir para os alunos que se sentirem confortáveis apresentarem as estratégias utilizadas;
Avaliação	Elaboração de um problema semelhante ao jogo para a troca entre os integrantes da turma

Fonte: O autor, 2023

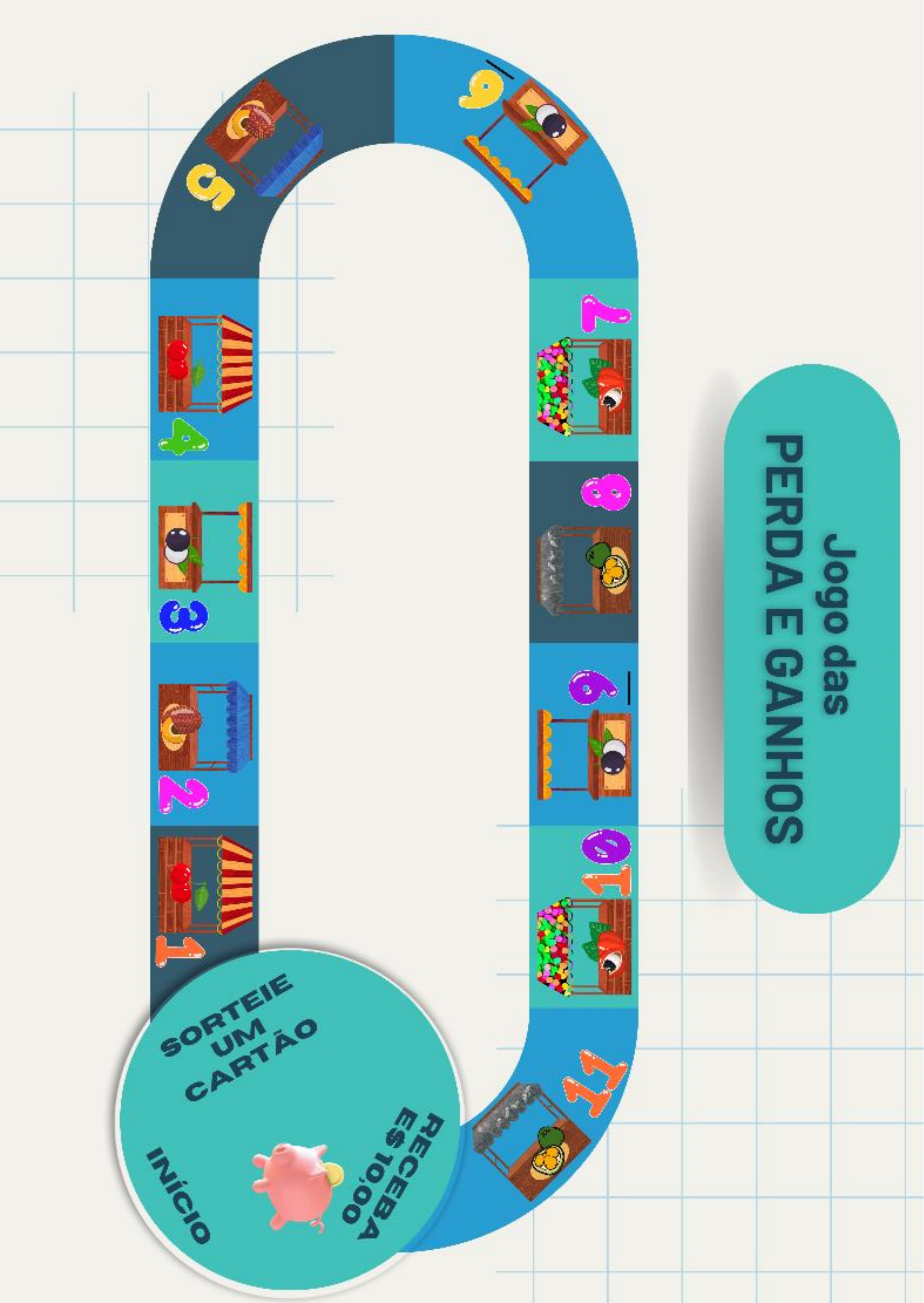
5.1.1 Explicando o jogo seus componentes:

O jogo trabalha com a ideia de compra e venda de bens. No tabuleiro estão presentes 11 casas que representam barracas de feiras. Cada barraca representa um feirante que precisa receber suprimentos de frutas locais tipicamente brasileira. O objetivo do jogo é estabelecer uma estratégia para que se possa oferecer os suprimentos necessários a todos os feirantes apenas por um único fornecedor. A escolha desses fornecedores será feita quando o jogador puder oferecer a proposta de venda presente na casa.

5.1.2. Materiais:

Um tabuleiro em papel cartão (ou se possível em PVC)

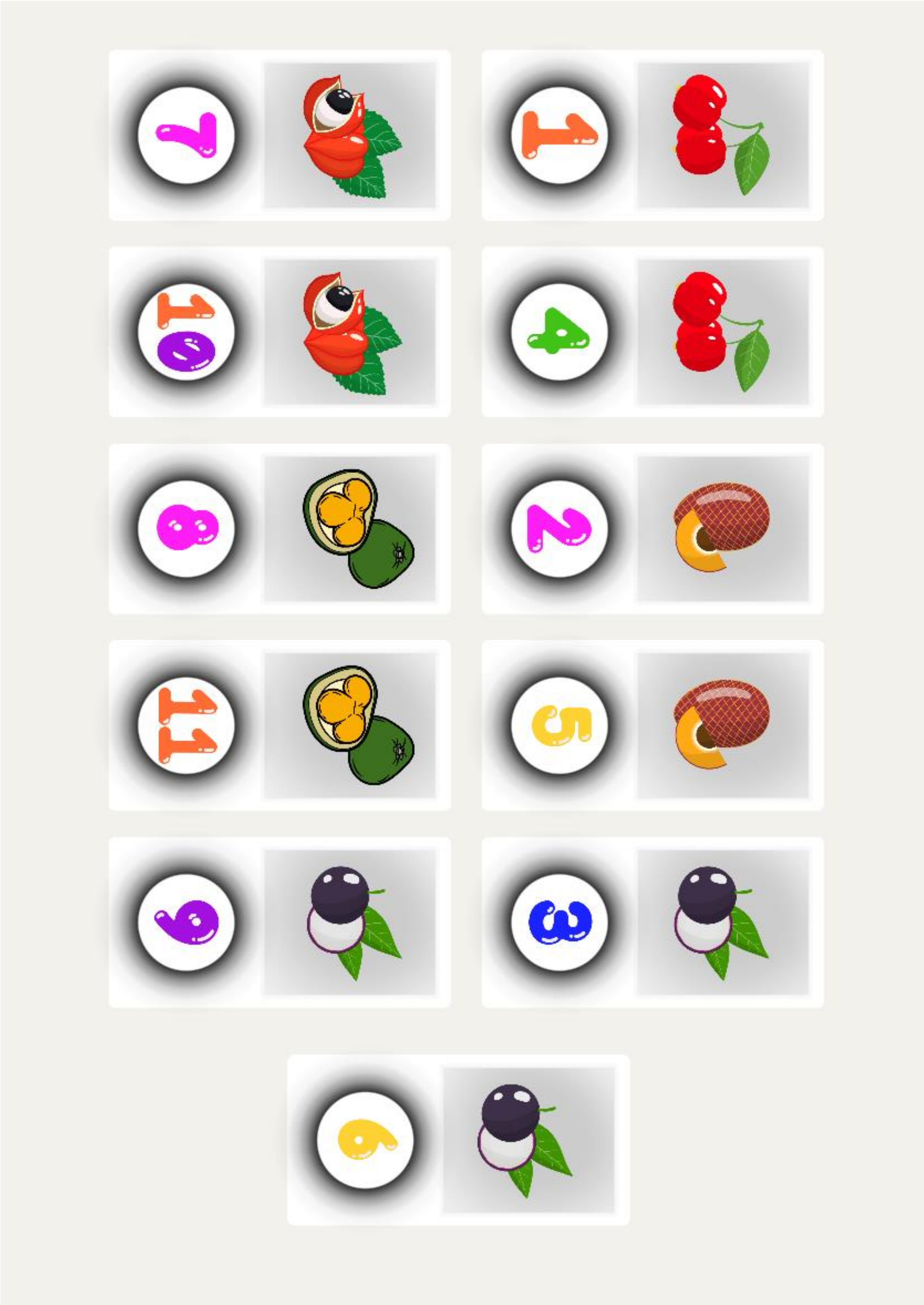
Figura 7 - Tabuleiro do jogo perdas e ganhos



Fonte: O autor, 2023

11 cartões de Títulos de Fornecedor em papel cartão

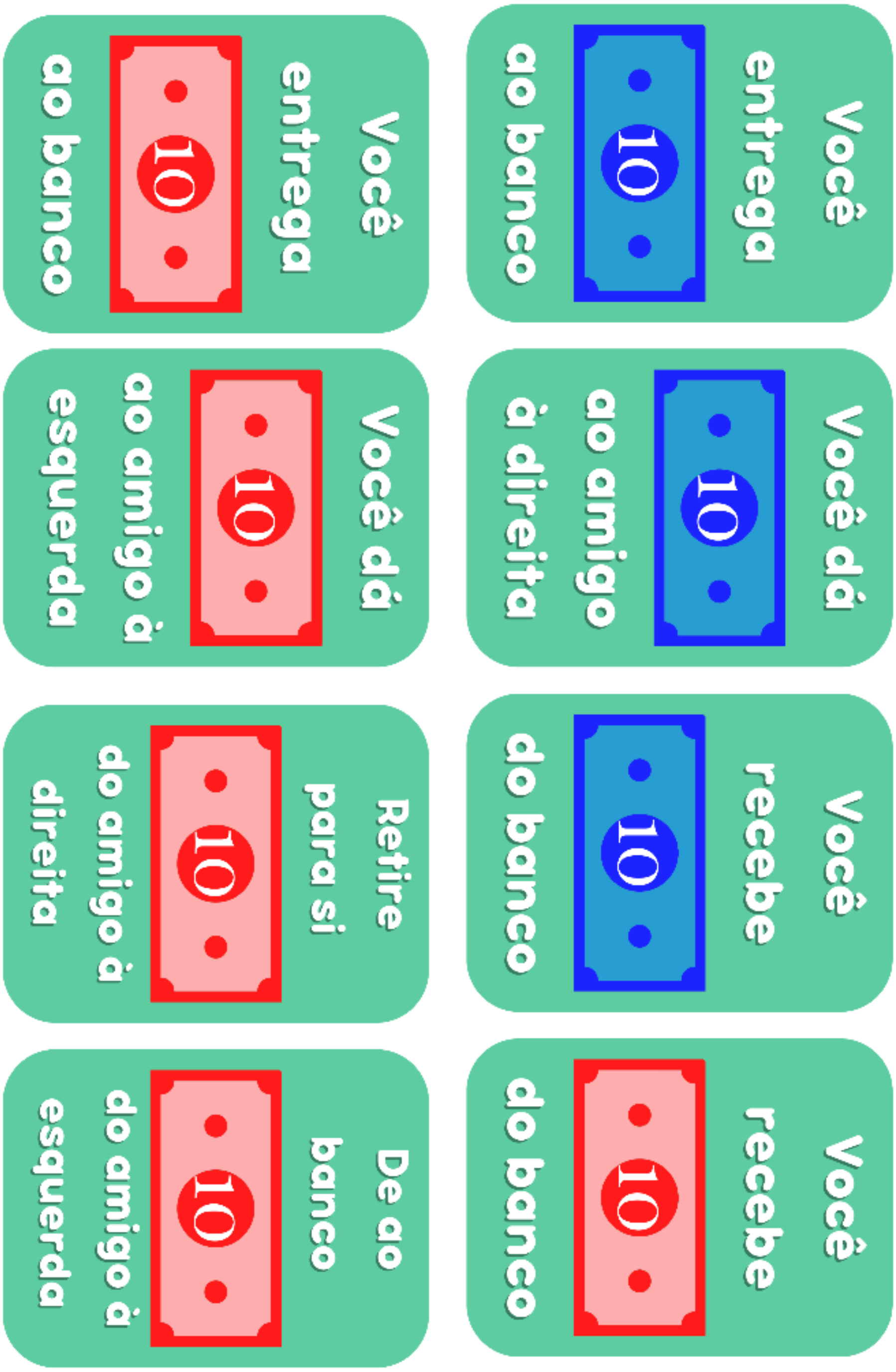
Figura 8 - Fichas do jogo perdas e ganhos



Fonte: O autor, 2023

Oito cartões de sorteios em papel cartão

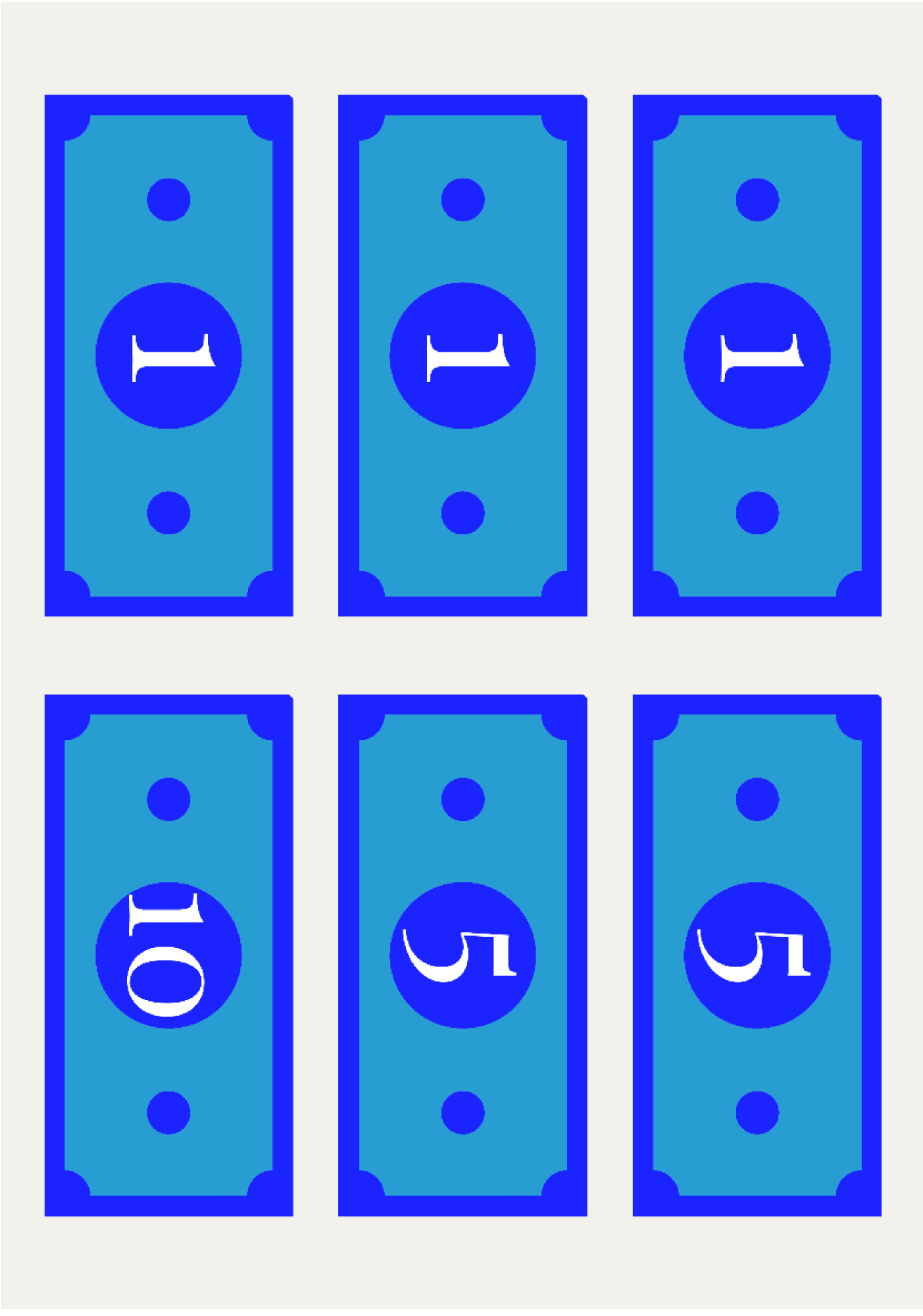
Figura 9 - Cartões do jogo perdas e ganhos



Fonte: O autor, 2023

Sessenta Cédulas Azuis de Eulereais em papel cartão, sendo: trinta de E$ 1,00, vinte de E$ 5,00 e dez de E$ 10,00

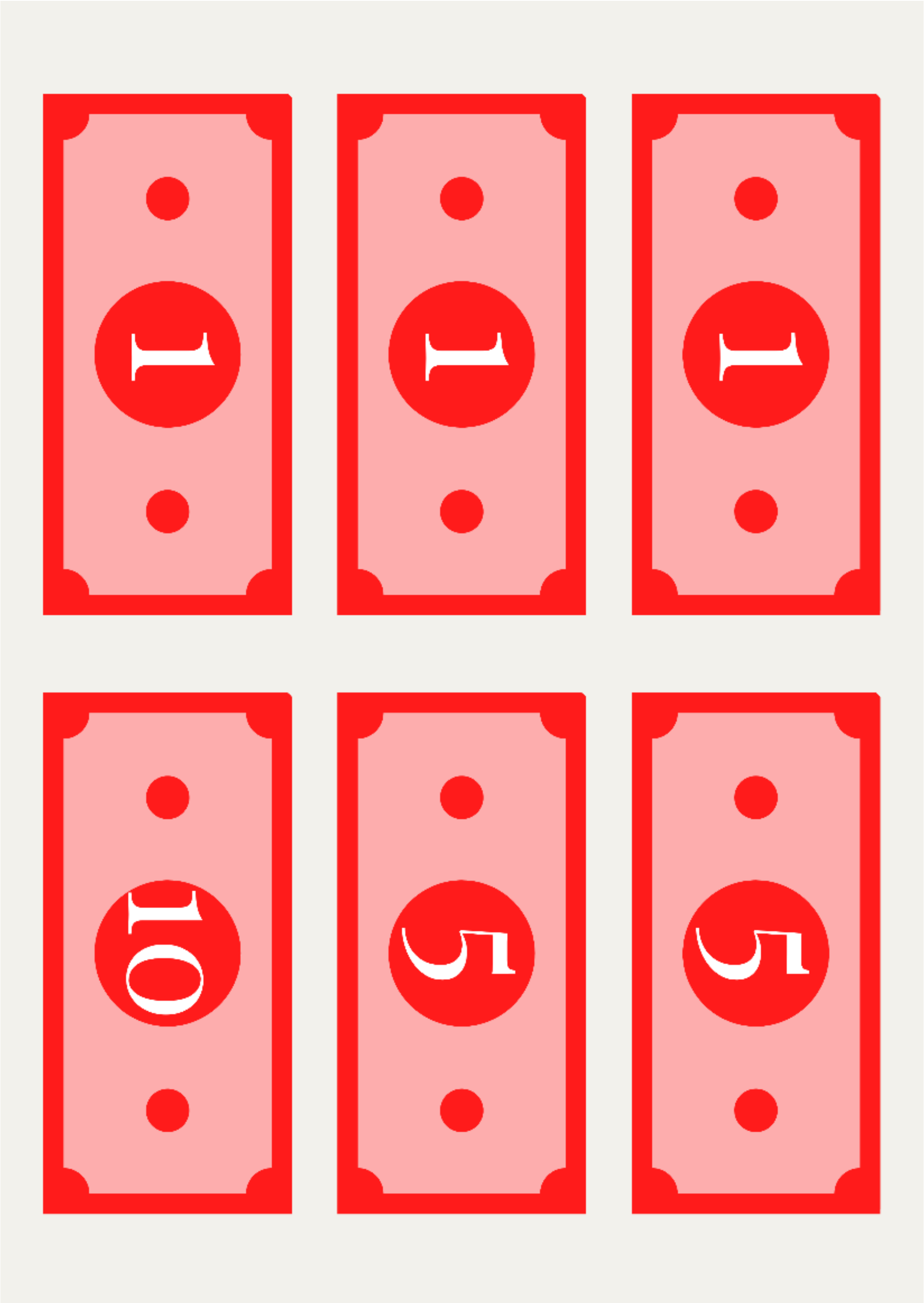
Figura 10 - Cédulas de crédito do jogo perdas e ganhos



Fonte: O autor, 2023

Sessenta Cédulas Vermelhas de Eulereais em papel cartão, sendo: trinta de E$ 1,00, vinte de E$ 5,00 e dez de E$ 10,00

Figura 11 - Cédulas de débito do jogo perdas e ganhos



Fonte: O autor, 2023

Cinco peças coloridas (botões, feijões, tampas de pasta de dente, etc.) que representem os peões;

Um dado

5.1.3. Regras do jogo:

i. Podem jogar até cinco jogadores, sendo um deles estritamente responsável pelo banco.

ii. Inicialmente cada jogador recebe E$ 10,00 azuis, que representam um crédito de E$ 10,00 na conta do jogador. A unidade monetária de Eulereais azuis representam sempre créditos ao banco e as notas vermelhas as dívidas que esse possui com o banco.

iii. Para decidir qual jogador iniciará a partida e a ordem dos jogadores, cada integrante deve lançar os dados. A ordem dos jogadores segue a daqueles que tiraram os maiores valores. Caso haja empate os jogadores empatados devem rolar os dados novamente para que haja desempate;

iv. Cada casa do tabuleiro representa uma barraca que vende um tipo específico de fruta e o banco. O tabuleiro é constituído de 11 barracas mais a casa do banco que é o ponto de partida para o jogo.

v. No inicio do jogo todos as produções são de responsabilidade dos feirantes, por isso os títulos de produtor ficam sob responsabilidade das barracas e sob a respectiva casa no tabuleiro.

vi. Ao lançar o dado o jogador deve andar o respectivo número de casas apresentado no dado. Ao chegar a casa há as seguintes possibilidades:

vii. O jogador poderá comprar os direitos de se tornar o fornecedor pagando o respectivo valor em E$ contidos na casa pagando-o com notas azuis ao banco e dessa forma tornando-se propriedade do título de produtor.

viii. Caso decida ir adiante, o titulo de produtor permanece sendo do feirante até que algum jogador caia com seu peão sobre a casa e decida comprar o título

ix. Caso o título já de uma barraca X já tenha sido vendido e um jogador caia sobre a casa onde há o número da barraca ele deve pagar o valor de XE$ presente na casa como forma de vender seus produtos ao produtor titular. O valor a ser pago é o mesmo valor da casa no tabuleiro.

x. Toda vez que o jogador passar pelo banco, este ganhará E$ 10,00 e deverá sortear um dos cartões já apresentados nos itens materiais.

xi. Nas barracas de mesmas frutas formam um único lote, dessa forma, quando o jogador adquiri os direitos de propriedade do lote, ele pode construir uma, duas, ou três barracas a mais em cada casa do tabuleiro, contanto que não haja dívida com o banco.

a. Lote das Pitangas: Barracas 1 e 4
b. Lote dos Buritis: Barracas 2 e 5
c. Lote das Jabuticabas: Barracas 3, 6 e 9
d. Lote dos Guaranás: Barracas 7 e 10
e. Lote dos Pequis: Barracas 8 e 11

xii. Para construir cada barraca nas casas de número X do tabuleiro, o jogador deve pagar o preço da barraca E$ 2X. Note que o preço da barraca é igual a duas vezes o preço da casa no tabuleiro. Após o pagamento o banqueiro lhe dá uma barraca que deve ser posicionada na casa do tabuleiro onde ela vai ser construída, nesse caso, o casa do tabuleiro de número X. As barracas não podem ser transferidas de uma casa do tabuleiro para outra, mas que sejam casas do tabuleiro pertencentes ao mesmo lote.

Tabela 3 - Preços de aluguéis do jogo perdas e ganhos

Preços e Aluguéis	
Preço do título de fornecedor	Igual ao número contido no terreno
Preço de uma barraca	Duas vezes o valor do título de fornecedor
Aluguel sem barraca	Igual ao valor do título de fornecedor
Aluguel com uma barraca	Igual a duas vezes o valor do título de fornecedor
Aluguel com duas barracas	Igual a quatro vezes o valor do título de fornecedor
Aluguel com três barracas	Igual a oito vezes o valor do título de fornecedor

Fonte: O autor, 2023

xiii. Quando um jogador se encontra em uma situação onde precisa pagar outro jogador e não possui o valor necessário, ele tem a opção de fazer um empréstimo com o banco. Nesse caso, ele fica com a dívida e recebe dinheiro azul e vermelho para lembrar do valor que deve ao banco. Por exemplo, se o jogador A precisa pagar E$ X para o jogador B e não possui o dinheiro azul suficiente, ele pode recorrer ao empréstimo do banco. O banqueiro irá fornecer ao jogador A E$ X em dinheiro azul e E$ X em dinheiro vermelho. O jogador A entregará E$ X em dinheiro azul para o jogador B e manterá os E$ X em dinheiro vermelho consigo para lembrar do valor que deve ao banco.

xiv. O jogador poderá devolver uma ou mais barracas construídas ao banco caso seja necessário, entretanto, receberá por isso apenas a metade do valor que recebeu

xv. Vence o jogador que, ao final do tempo estabelecido no início da partida, possua mais créditos consigo levando-se em considerações as barracas adquiridas, os títulos de fornecimento e a quantidade de dinheiro azul, deduzindo-se desse total o montante da dívida representada em dinheiro vermelho que esse jogador possuir.

xvi. Não é possível comprar títulos ou barracas com o dinheiro vermelho

xvii. Não é possível fazer dívida com o banco a não para pagar o aluguel a outro jogador, realizar uma instrução presente no cartão sorteado ou comprar o título de fornecedor de uma barraca que ainda esteja de posse do banco.

xviii. Após ter lançado o dado, o jogador deve finalizar suas negociações, construções e mudanças. A partir desse momento, ele só precisa avançar o botão a casa correspondente do tabuleiro.

5.1.4. Avaliações e conclusões:

Ao final do jogo professor pode solicitar aos seus alunos que criem um problema referente ao jogo para fechamento do conteúdo ou até mesmo solicitar que os mesmo produzam um resumo teórico sobre os conhecimento adquiridos com o jogo. Após essa etapa o docente deve reunir as ideias construídas e realizar um fechamento teórico a respeito do conteúdo trabalhado através do jogo.

5.2. Encontro 2

Após os alunos terem compreendido a relação entre perdas e ganhos e que é possível que haja números negativos através da diferença entre débitos que são maiores do que créditos. O segundo encontro busca transpassar a ideia do segundo obstáculo epistemológico apresentado por Glaeser que é “Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.”

Para esse segundo obstáculo epistemológico elencado por Glaeser são sugeridos duas atividades: Círculos de Zeros e Trimu da adição. Ambas as atividades partem dos conceitos construídos no último encontro para a construção do entendimento do que são os números relativos e como esses se operam entre si através da adição destes.

A primeira atividade, círculo de zeros, apresentada por Colecha (2013) tem por objetivo trabalhar a relação entre os números inteiros de forma a despertar nos alunos a compreensão sobre os números relativos. Através dessa atividade espera-se que os alunos compreendam o que são os números relativos e de que forma podemos obter eles.

A segunda atividade é o Trimu. Apresentada por Malechi (2016), o jogo consiste em uma atividade aonde os alunos, munidos de peças triangulares devem encaixar sobre um tabuleiro as peças com seus respectivos pares que são os resultados das operações contidas nas fichas. Entretanto para este jogo iremos propor uma variação deste jogo sem que haja a necessidade de um tabuleiro e uam resposta fechada.

Apesar do tempos das atividades no presente encontro serem rápidos, é importante reforçar que o tempo desse encontro possui a duração de 1 hora e 40 minutos à 2 horas e 30 minutos para o fechamento das ideias trabalhadas.

Tabela 4 - Ficha de resumo do jogo círculo de zeros

Atividade 2 Círculo de Zeros	
Habilidade BNCC	(EF06MA03) (EF07MA03) (EF07MA04) (EF08MA23)
Objetivos	Construir a ideia de números relativos a partir do conceito de valores que se anulem; Representação de conjuntos através da intersecção destes;

Objetivos de conhecimento	Resolver problemas que que envolvam cálculos mentais ou por escrito, por meio de estratégias variadas; Comparar e ordenar números inteiros, operando-os através de cálculos mentais ou por escrito; Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados
Recursos Necessários	Tabuleiro; Fichas com os números;
Tempo estimado	30 minutos à 50 minutos
Desenvolvimento	Debate sobre a última aula e sobre o que são os números relativos; Apresentação das regras do jogo, demonstrando uma rodada e em seguida permitindo que os alunos experimentem; Debater as estratégias traçadas para a resolução do problema; Fechamento sobre o conceito de números relativos e a ideia do zero
Avaliação	Elaboração de um problema semelhante ao jogo para a troca entre os integrantes da turma

Fonte: O autor, 2023

5.2.1. Explicando o jogo e os componentes dos círculos de zero:

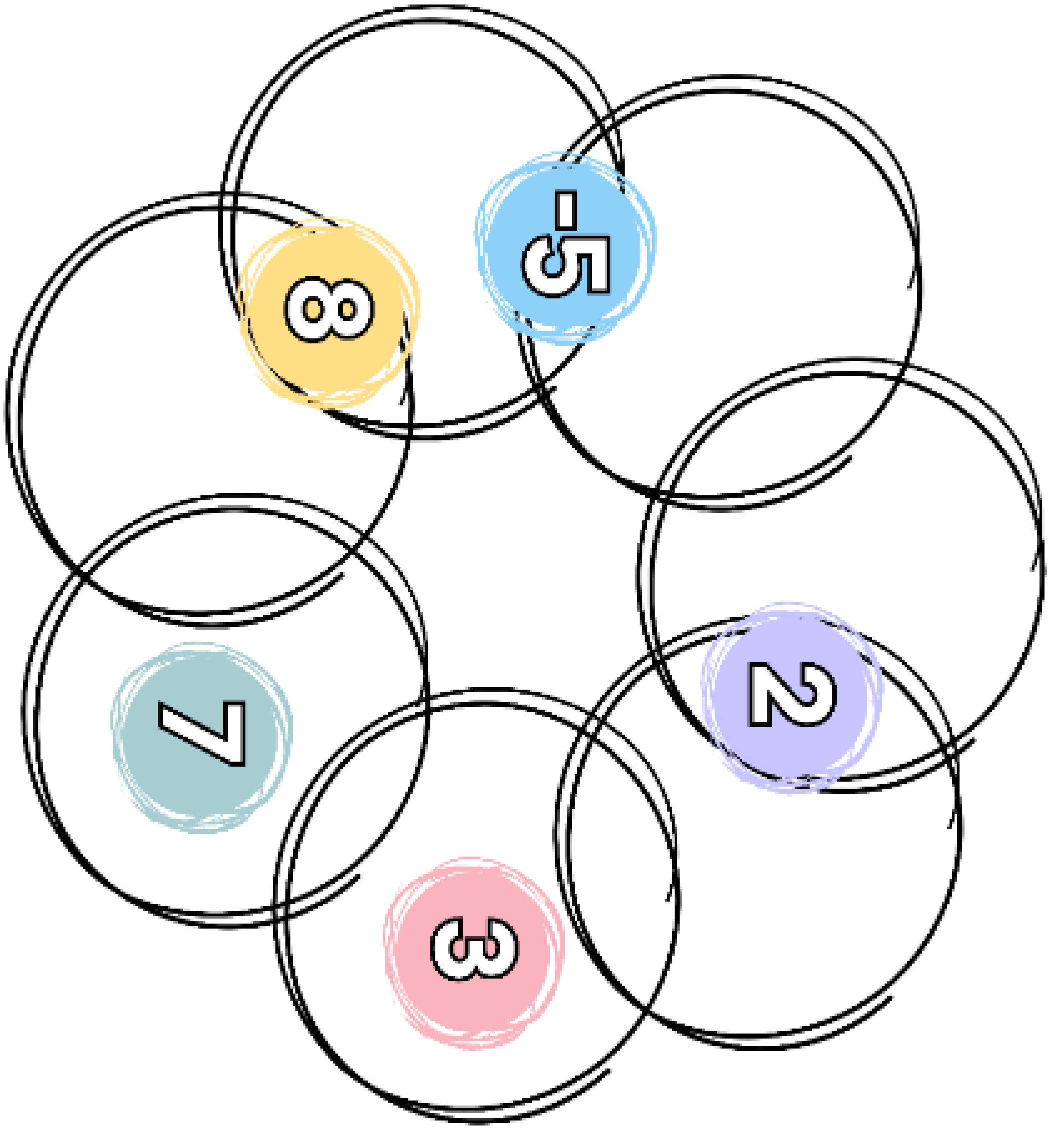
O jogo é semelhante a um quebra-cabeças e sua ideia é bem próxima do jogo matemático “quadrado mágico”. Nesta atividade o jogador deve posicionar dentro de cada círculo três fichas que estão disponíveis espalhadas fora da figura de forma que a soma dos elementos dentro de cada círculo resulte em zero.

O jogo deve ser jogado em duplas aonde cada estudante posicione um número distinto dentro círculo. O objetivo do jogo não é que haja um vencedor e sim que a dupla, ao final da atividade, seja capaz de concluir o quebra cabeça.

Materiais:

1. Tabuleiro em papel cartão aonde as fichas deverão ser posicionadas:

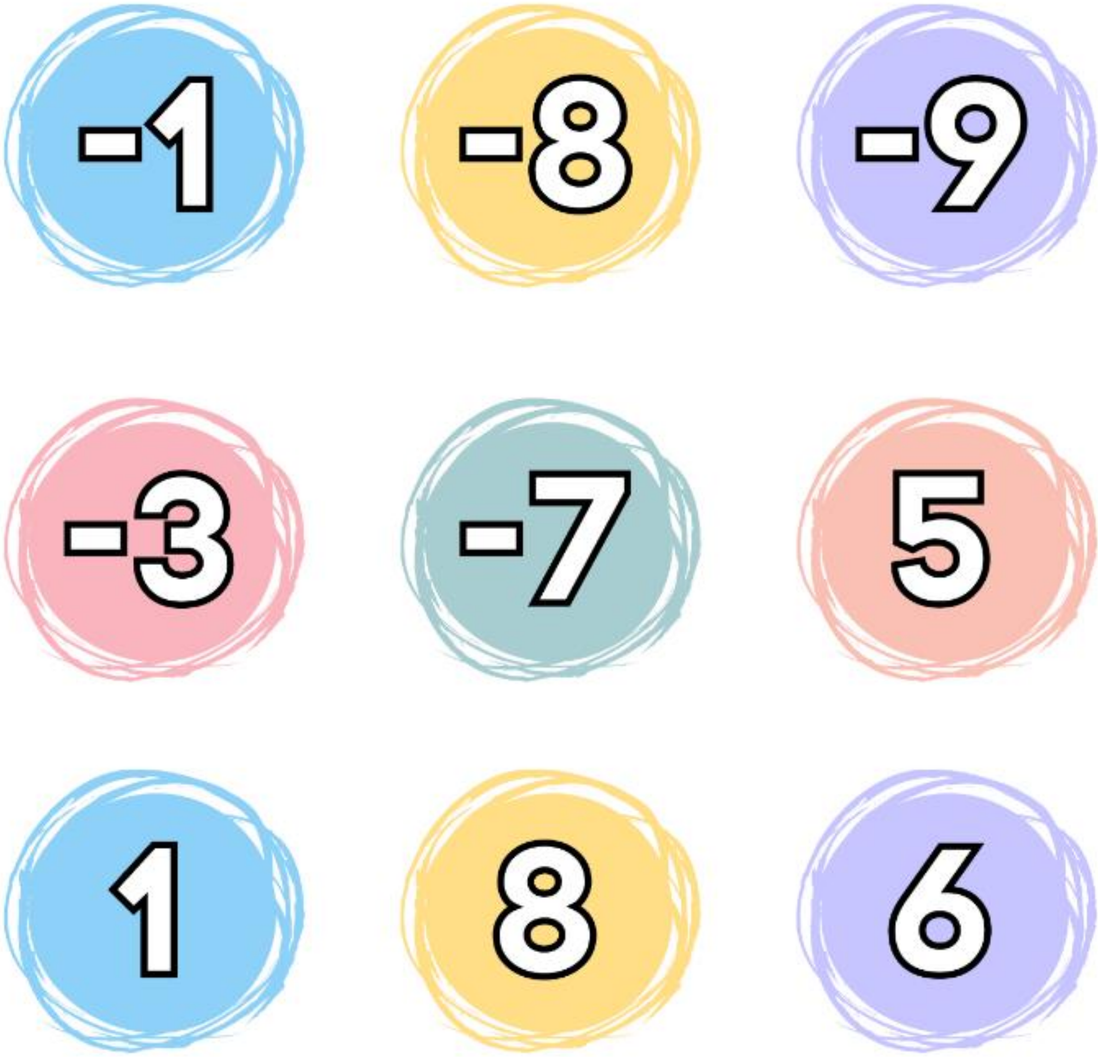
Figura 12 - Tabuleiro do jogo círculo de zeros



Fonte: O autor, 2023

2. Vinte e sete fichas em papel cartão sendo três de cada número

Figura 13 - Fichas do jogo círculo de zeros



Fonte: O autor, 2023

5.2.3. Regras do jogo Círculo de zeros:

i. A dupla deve decidir quem irá começar através do jogo par ou ímpar[1]

ii. Cada jogador vai posicionando uma peça de cada vez, compartilhando com seu colega a estratégia traçada.

iii. Ao completar o círculo os jogadores devem conferir se os resultados presentes dentro de cada círculo resultam em zero.

5.2.4. Explicando o jogo e os componentes do jogo Trimu:

O Trimu é um jogo aonde cada jogador recebe, inicialmente, três fichas de uma pilha. Em cada ficha há sempre três números relativos, seja em formato de operação, seja em formato de número inteiro. Cada jogador deve juntar os pares de um dos números relativos contidos em sua ficha com o de uma ficha que está sobre a mesa. Ao juntar esses pares, o valor relativo pareado será a pontuação que aquele participante fez naquela jogada. Vence o jogo o participante que obtiver a maior pontuação

Tabela 5 - Ficha de resumo do jogo Trimu

Atividade 3 Trimu	
Habilidade BNCC	(EF06MA03) (EF07MA03) (EF07MA04)
Objetivos	Construir a ideia de números relativos a partir da adição e subtração de número inteiro;
Objetivos de conhecimento	Resolver problemas que que envolvam cálculos mentais ou por escrito, por meio de estratégias variadas; Comparar e ordenar números inteiros, operando-os através de cálculos mentais ou por escrito; Analisar e compreender o conceito de número relativos
Recursos Necessários	Fichas com do jogo;
Tempo estimado	30 minutos à 50 minutos

[1] Jogo popular aonde cada participante aposta se o resultado da disputa será par ou ímpar, sendo que se um desses jogadores escolheu par, o outro deve escolher ímpar. Tendo cada jogador escolhido, ambos os jogadores contam até três e, em seguida, apresentam juntos um determinado número de dedos nas mãos. Em seguida contam-se os dedos das mãos de ambos os jogadores e caso a soma seja par, vence aquele que havia apostado no par; caso a soma seja ímpar, vence aquele que havia apostado no ímpar

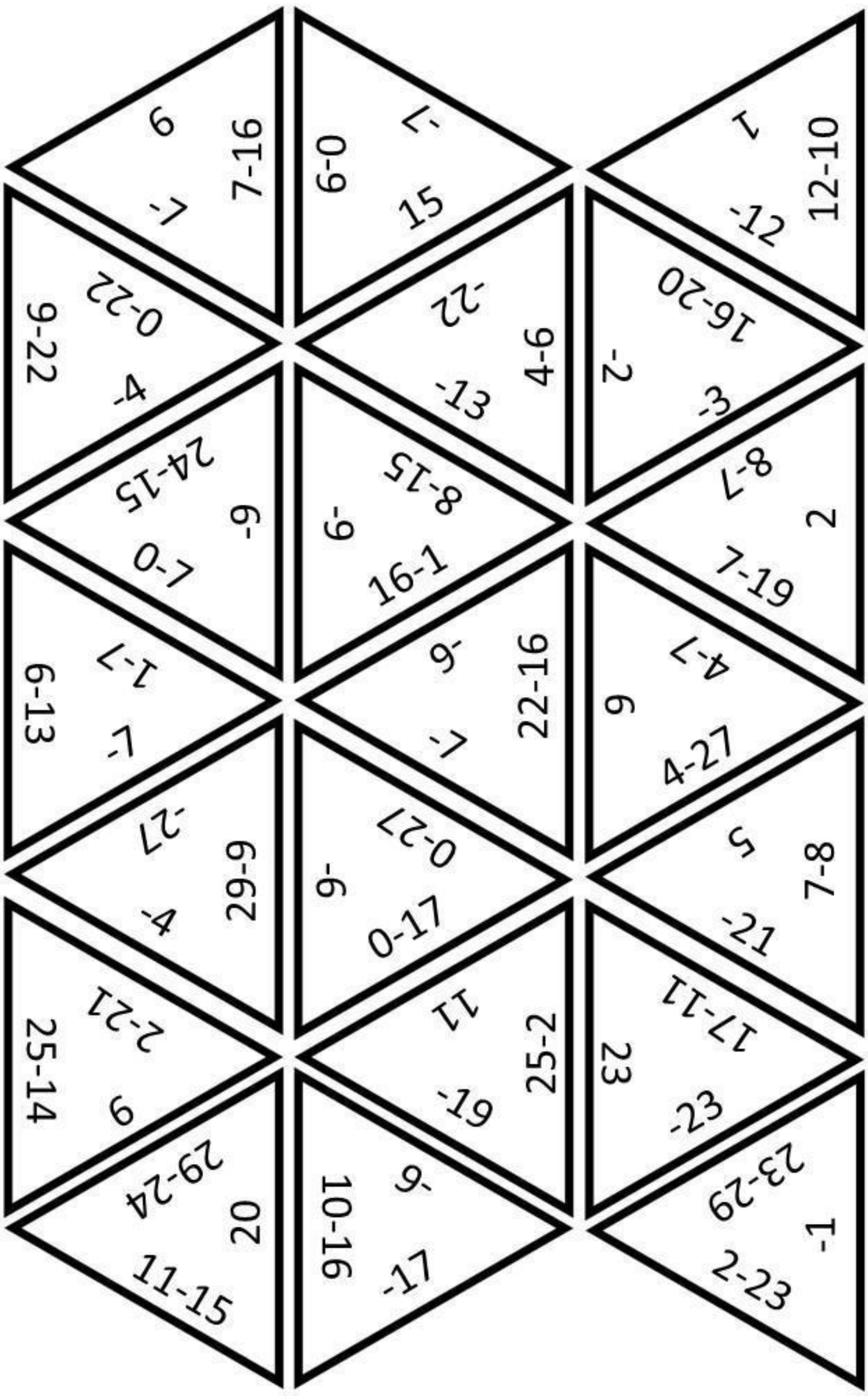
Desenvolvimento	Debate sobre a última atividade e sobre o que são os números relativos; Apresentação das regras do jogo, demonstrando uma rodada e em seguida permitindo que os alunos experimentem; Debater as estratégias traçadas para a resolução do problema; Como é possível posicionar o número relativos na reta numérica
Avaliação	Elaboração de um problema semelhante ao jogo para a troca entre os integrantes da turma

Fonte: O autor, 2023

5.2.5. Materiais do jogo Trimu:

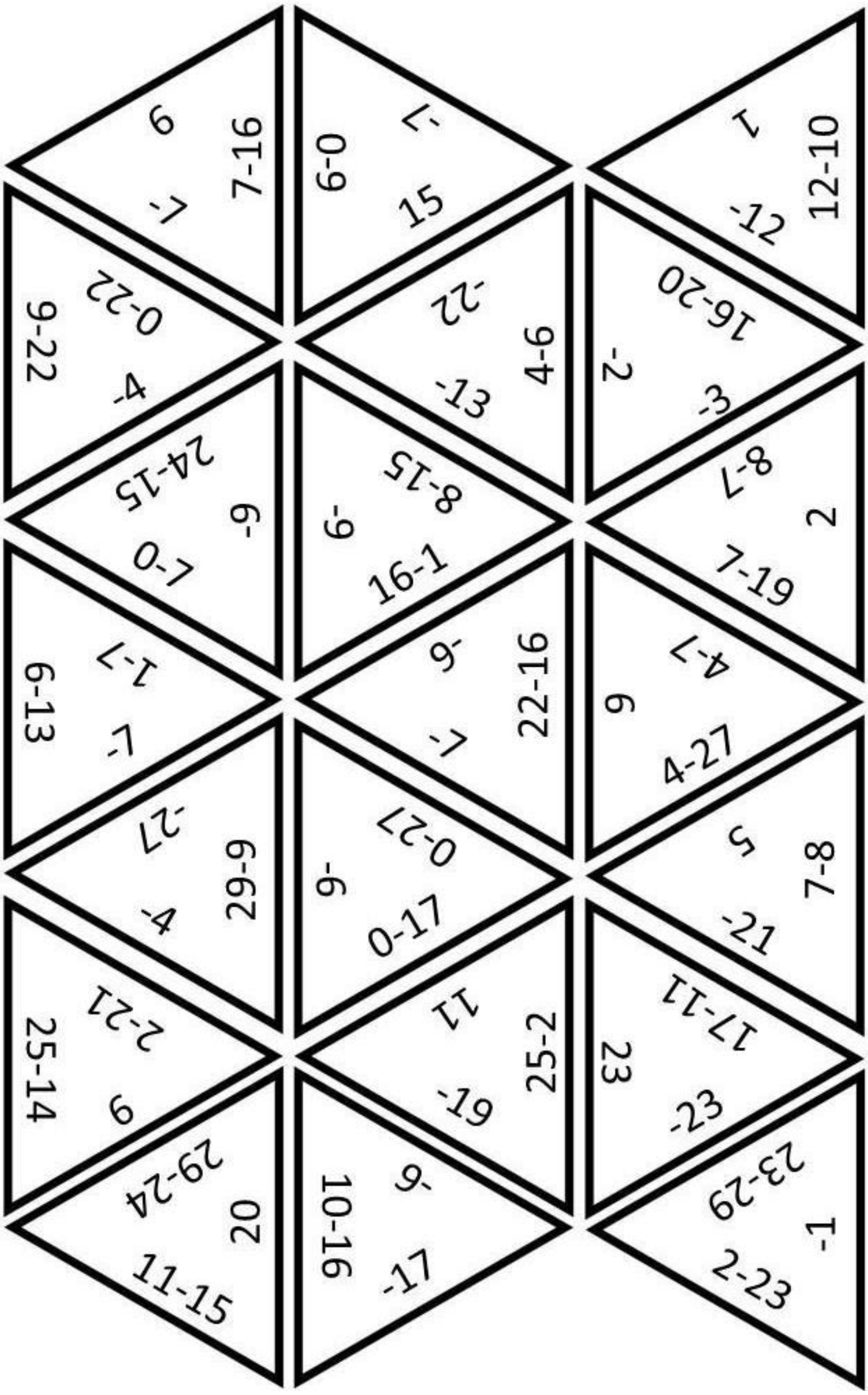
1. Quarenta e duas peças em papel cartão:

Figura 14 - Peças do jogo Trimu (Parte 1)



Fonte: O autor, 2023

Figura 15 - Peças do jogo Trimu (Parte 2)



Fonte: O autor, 2023

5.2.6. Regras do jogo Trimu:

i. Cada jogador recebe três cartas e as outras 36 cartas ficam sobre o monte de compra e viradas para baixo;

ii. A dupla deve decidir quem irá começar através do jogo par ou ímpar, o vencedor começa o jogo;

iii. O jogador vencedor retira uma carta do monte e a põe sobre a mesa. Em seguida verifica se é possível formar um par entre uma de suas cartas na mão ou com algum de seus números;

a. Caso seja possível o jogador realiza a ação e passa a vez para o próximo;
b. Caso não seja possível o jogador compra uma carta, se possível, e passa a vez para o próximo;

iv. A cada par de peças que o jogador consegue formar o jogador ganha o número de pontos igual ao valor relativo que acabou de parear. Vence a partida o jogador que conseguir o maior número de pontos.

5.2.7. Avaliações e conclusões

Ambos os jogos trabalham com a ideia sobre o que é um número relativo, o primeiro em relação a ideia de adição e subtração de números para a obtenção do zero, porém paralelamente aborda a ideia de números relativos a partir da adição ou subtração de dois números. A partir desse jogo já se é possível trabalhar a regra dos sinais como uma possível provocação após a resolução do quebra cabeça.

O segundo jogo se assemelha bastante ao primeiro e possui uma proposta mais aberta a resolução do problema. Neste segundo jogo, os alunos também trabalhando com a ideia de números relativos, entretanto, ao somar os pontos, é necessário relembrar os conceitos trabalhados no último encontro e dessa forma estabelecendo o conceito das operações de adição e subtração entre os números inteiros.

Para o fechamento dos temas abordados nesse encontro sugerimos que o docente peça a seus alunos para criarem um resumo teórico sobre o que aprenderam das atividades, apresentando problemas semelhantes a aqueles com os quais se depararam durante os jogos. Após esse resumo o docente realiza o fechamento teórico para que os alunos possam ir complementando lacunas teórico que tenham sido apresentadas em seus resumos.

5.3. Encontro 3

Neste terceiro encontro a proposta de atividade a seguir buscar transpassar o terceiro e quartos obstáculos epistemológicos apresentados por Glaeser (2010) em relação a reta numérica.

> "3. Dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semirretas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.
> 4. A ambiguidade dos dois zeros"

A atividade trabalhada com os alunos fora apresentada no caderno de atividade do município de Panambi – RS, e apresenta um trabalho sobre a ordenação dos números inteiros na reta numérica. Usando o esquema de cores semelhante a atividade apresentada no primeiro encontro, a prática a seguir trabalha também com a comparação entre números relativos, mas agora realizando a ordenação dos mesmos.

Tabela 6 - Ficha de resumo da atividade varal de inteiros

Atividade 4 Varal de inteiros	
Habilidade BNCC	(EF06MA03) (EF07MA03) (EF07MA04)
Objetivos	Construir a ideia de números relativos; Ordenação dos números inteiros; Nomear e associar cada número inteiro a um ponto na reta numérica; Localizar simétricos e determinar o módulo destes;
Objetivos de conhecimento	Resolver problemas que envolvam cálculos mentais ou por escrito, por meio de estratégias variadas; Comparar e ordenar números inteiros, operando-os através de cálculos mentais ou por escrito; Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados
Recursos Necessários	Um jogo de cartelas contendo 32 cartas preenchidas e 12 cartas em branco;

	Vinte e um pregadores numerados de -10 à 10; Canetas hidrocor azuis e vermelhas; Rolo de Barbante
Tempo estimado	50 minutos à 1 hora e 40 minutos
Desenvolvimento	Debate sobre a última aula e sobre o que são os números relativos e como estes se operam entre si; Apresentação da dinâmica da atividade Debater as estratégias traçadas para a resolução do problema; Fechamento sobre a ordenação dos números inteiros e os conceitos de módulo e simétrico
Avaliação	Elaboração de um problema baseado no conteúdo abordado na atividade

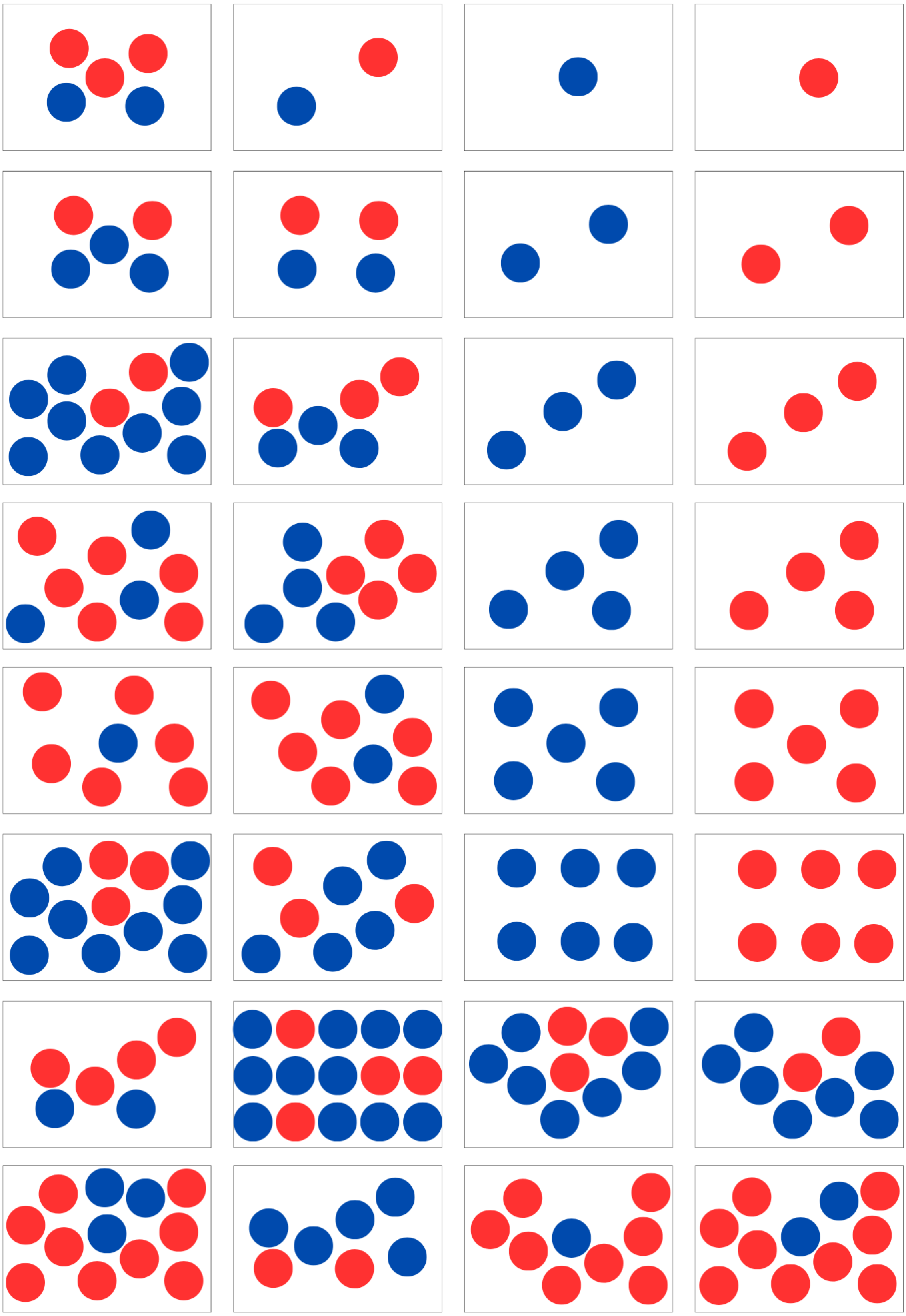
Fonte: O autor, 2023

5.3.1. Explicando a atividade e seus componente:

A atividade a seguir deve ser realizada em grupos de 4 a 6 pessoas. Na primeira etapa dessa atividade os alunos deverão seguir os seguintes passos:

i. Peça aos alunos que espalhem sobre a mesa as cartas em papel cartão e tente descreve-las a seus colegas;

Figura 16 - Cartões a serem presos no varal de inteiros



Fonte: O autor, 2023

ii. Após a descrição que os mesmos separem as fichas em três montes

a. 1° O monte das cartas que possuem mais bolinas azuis
b. 2° O monte das cartas que tem menos bolinhas azuis
c. 3° O monte das cartas que possuem mais ou menos bolinhas azuis

iii. No monte com cartas com mais bolinhas azuis formar pilhas com uma, duas ou três bolinhas a mais. De forma análogo, nos montes com menos bolinhas azuis formar montes com: uma, duas ou três bolinhas azuis a menos. Já os montes que não possuem bolinhas azuis nem a mais, nem a menos do que em relação as vermelhas formam um único monte;

iv. Tome os pregadores numerados e prenda cada monte de cartas a um respectivo pregador e note que sobrarão pregadores. Essa sobra servirá para a segunda parte da atividade.

v. Estique o varão sobre a sala e peça para que os alunos de cada grupo posicionem os pregadores numerados na mesma ordem que ordenaram em seus grupos: do menor apara o maior;

vi. Peça para que os alunos coloquem o pregador com o monte do zero no meio do varal e que localizem os pregadores com os grupos, uma a um, em ordem crescente da esquerda para a direita

vii. Peça aos alunos para que criem, nos cartões no papel cartão em branco entregues no inicio da atividade grupos para os pregadores restantes e que posicionem estes no varal

5.3.2. Avaliações e conclusões

Espera-se que através dessa atividade os consigam compreender a importância do zero para a reta numérica transpassando a ambiguidade dos dois zeros apresentadas por Glaeser (2010). Por meio desta também, os alunos puderam ter contato com os números opostos (simétricos). Espera-se que através desse, o entendimento com relação ao módulo de um número seja possível de ser compreendido de forma mais clara.

Para um fechamento da atividade o docente sugerir que os alunos representem o varal de números inteiros em seu caderno por meio de uma reta numérica posicionando os números trabalhados também na reta numérica em seu caderno. Em seguida é possível fazer alguns questionamentos aos alunos e pedir para que eles elaborem as respostas em seus cadernos e em seguida compartilhem com a turma.

a) Qual a importância do zero para a reta numérica…?]

b) Quanto números podemos posicionar a direita da reta numérica? Eles possuem um nome?

c) Quantos números podemos posicionara a esquerda da reta numérica? Eles possuem um nome?

d) Existe uma relação entre a quantidade de números a direita e a quantidade de números a esquerda? Qual o nome que você daria a essa relação?

Através dessas perguntas e do debate em turma o professor poderá fazer um fechamento teórico sobre a reta numérica. O conceito de oposto (simétrico) e sua relação(ões) com os módulos de um número, além de poder apresentar a representação do conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros através do Diagrama de Venn-Euler trabalhando a ideia de pertinência dos elementos em um conjunto.

5.4. Encontro 4

O quarto e quinto encontro abordarão as operações de multiplicação e divisão entre números inteiros. As atividades a seguir foram apresentadas no trabalho de Malechi (2016) a fim de transpassar o quarto e quinto obstáculo epistemológico apresentado por Glaeser (2010). Note que no encontro anterior a atividade do varal de inteiros buscava transpassar o quarto obstáculo epistemológico elencado por Glaeser (2010).

Por se tratar de uma sequência didática, muitos dos temas e objetivos gerais dialogam entre si e dessa forma uma ou mais atividade podem auxiliar determinados estudantes a transpassar um obstáculo epistemológico inerente ao ensino dos números relativos seguindo assim a teoria do queijo suíço[2] muito aplicada no setor da saúde.

O quarto encontro abordará em específico o jogo Trimu da multiplicação; Um pouco semelhante ao jogo hora apresentado, esse jogo será trabalhado de duas formas distintas. Em uma primeira os jogadores trabalharão com a montagem das peças sobre um tabuleiro e na segunda, com peças diferentes, os jogadores serão instigados de maneira semelhante ao encontro 2.

Tabela 7 - Ficha de resumo da atividade Trimu da multiplicação 1

Atividade 5 Trimu da multiplicação 1	
Habilidade BNCC	(EF06MA03) (EF07MA03) (EF07MA04)
Objetivos	Construir a ideia de números relativos; Operar os números inteiros através da multiplicação; Compreender a regra dos sinais.
Objetivos de conhecimento	Resolver problemas que envolvam cálculos mentais ou por escrito, por meio de estratégias variadas; Comparar e ordenar números inteiros, operando-os através de cálculos mentais ou por escrito;

[2] Teoria criada por James Reason, a imagem de um queijo suíço, cheio de furos, serve para representar que em toda camada de trabalho podem haver falhas, entretanto ao sobrepor essas camadas as chances de que essas falhas ocorram reduzem-se próximas a zero.

	Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados
Recursos Necessários	Um jogo de cartelas contendo vinte e quatro fichas triangulares; Um tabuleiro; Vinte marcadores sendo dez de cada cor
Tempo estimado	50 minutos à 1 hora e 30 minutos
Desenvolvimento	Debate sobre a última aula e sobre o que são os números relativos e a ordenação entre eles; Apresentação da dinâmica do jogo Debater as estratégias traçadas para a resolução do problema;
Avaliação	Debate sobre a estratégia para a resolução do problema.

Fonte: O autor, 2023

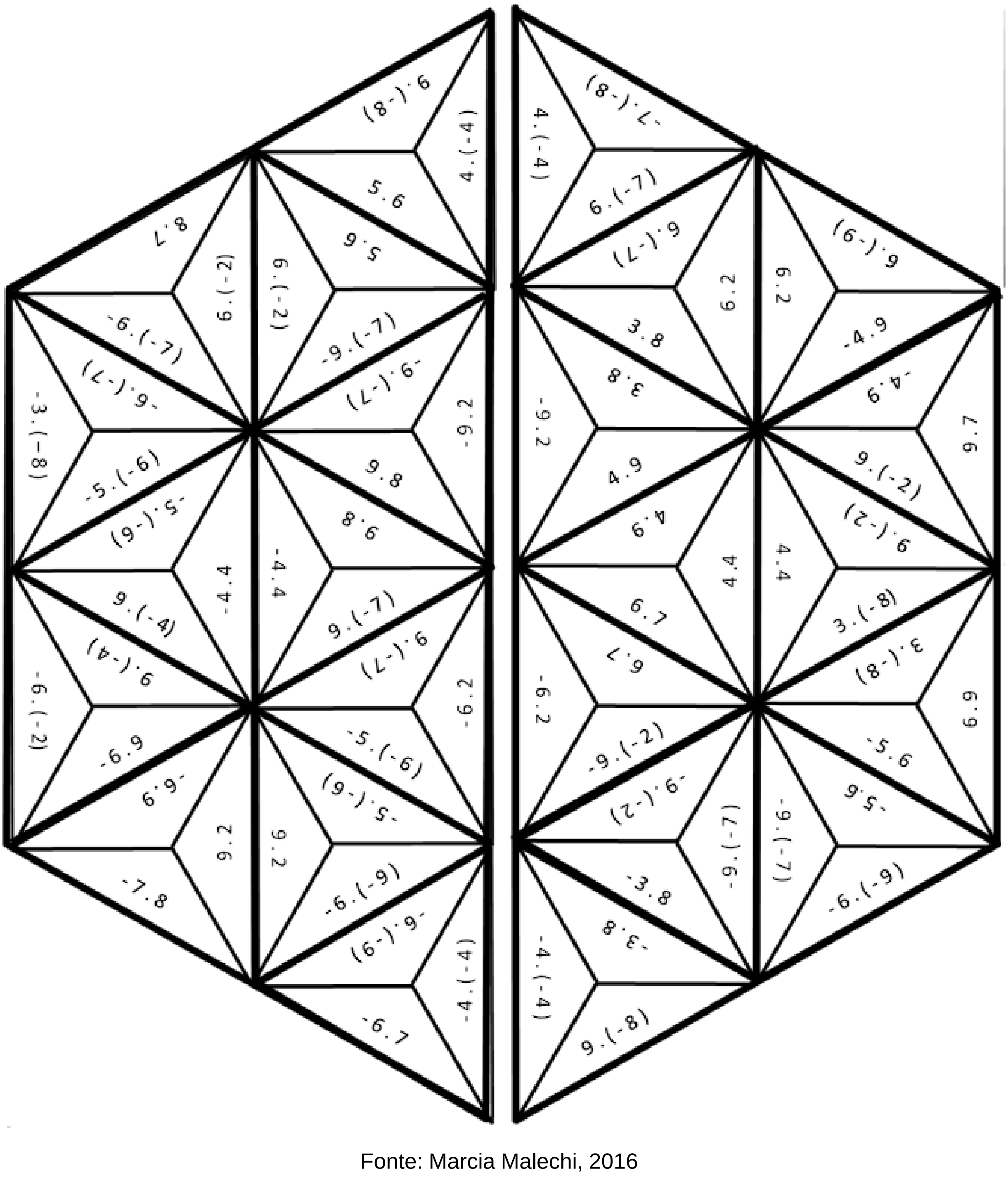
5.4.1. Explicando o jogo e os componentes do jogo Trimu da multiplicação 1:

O Trimu da multiplicação é um jogo aonde cada jogador da dupla recebe, inicialmente, três fichas de uma pilha. Em cada ficha há sempre três operações de multiplicação entre os números inteiros. Cada jogador deve posicionar uma ficha sobre o tabuleiro a fim de fechar um hexágono de multiplicação. Ao contrário do jogo de Malechi (2016) aqui decidimos inverter um pouco a ordem das operações afim de tornar o jogo um pouco mais instigante.

5.4.2. Materiais do jogo Trimu:

1. Tabuleiro em papel cartão;

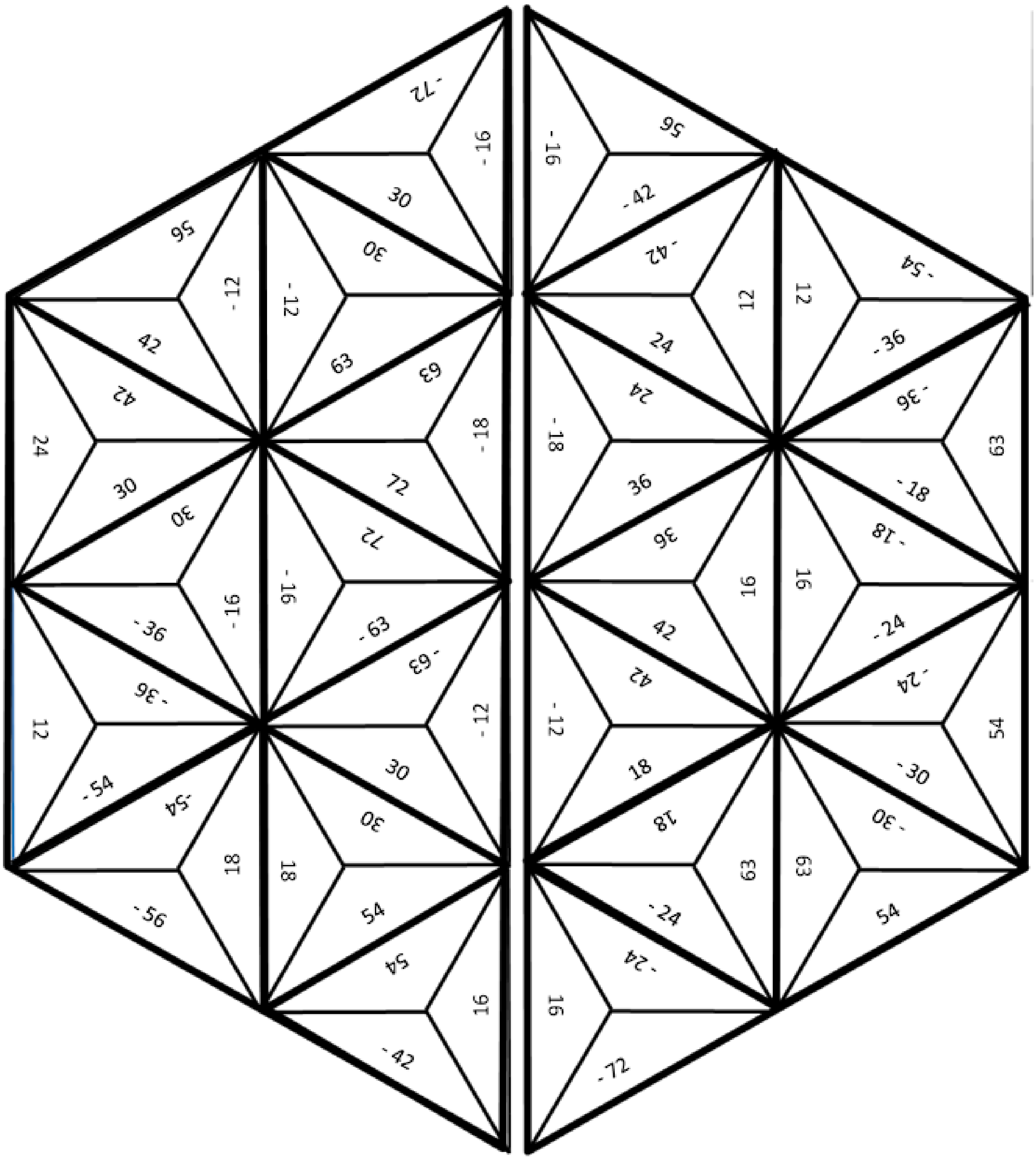
Figura 17 - Fichas do jogo Trimu da multiplicação 1



Fonte: Marcia Malechi, 2016

2. Vinte e quatro peças triangulares em papel cartão;

Figura 18 - Tabuleiro do jogo Trimu da multiplicação 1



Fonte: Marcia Malechi, 2016

3. Vinte marcadores de duas cores sendo dez de cada cor.

5.4.3. Regras do jogo Trimu da multiplicação 1:

i. Cada jogador recebe três cartas e as outras dezoito cartas ficam sobre o monte de compra e viradas para baixo;

ii. A dupla deve decidir quem irá começar através do jogo par ou ímpar, o vencedor começa o jogo;

iii. Cada jogador deve posicionar uma carta sobre o tabuleiro combinando as três operações contidas no tabuleiro com os respectivos resultados contidos nas cartas;

iv. A cada hexágono preenchido no tabuleiro o discente posiciona um marcado no centro deste, ou seja, no ponto de encontro dos seis triângulos.

v. A cada meio hexágono posicionado nas pontas o discente posicionada um marcado no ponto de encontro dos três triângulos.

5.4.4. Explicando o jogo e os componentes do jogo Trimu da multiplicação 2:

O Trimu, como explicado anteriormente é um jogo aonde cada jogador recebe, inicialmente, três fichas de uma pilha. Em cada ficha há sempre três números relativos, seja em formato de operação, seja em formato de número inteiro. Cada jogador deve juntar os pares de um dos números relativos contidos em sua ficha com o de uma ficha que está sobre a mesa. Ao juntar esses pares, o valor relativo pareado será a pontuação que aquele participante fez naquela jogada. Vence o jogo o participante que obtiver a maior pontuação

Tabela 8 - Ficha de resumo do jogo Trimu da multiplicação 2

Atividade 6 Trimu da multiplicação 2	
Habilidade BNCC	(EF06MA03) (EF07MA03) (EF07MA04)
Objetivos	Construir a ideia de números relativos; Operar os números inteiros através da multiplicação; Compreender a regra dos sinais.
Objetivos de conhecimento	Resolver problemas que que envolvam cálculos mentais ou por escrito, por meio de estratégias variadas; Comparar e ordenar números inteiros, operando-os através de cálculos mentais ou por escrito;

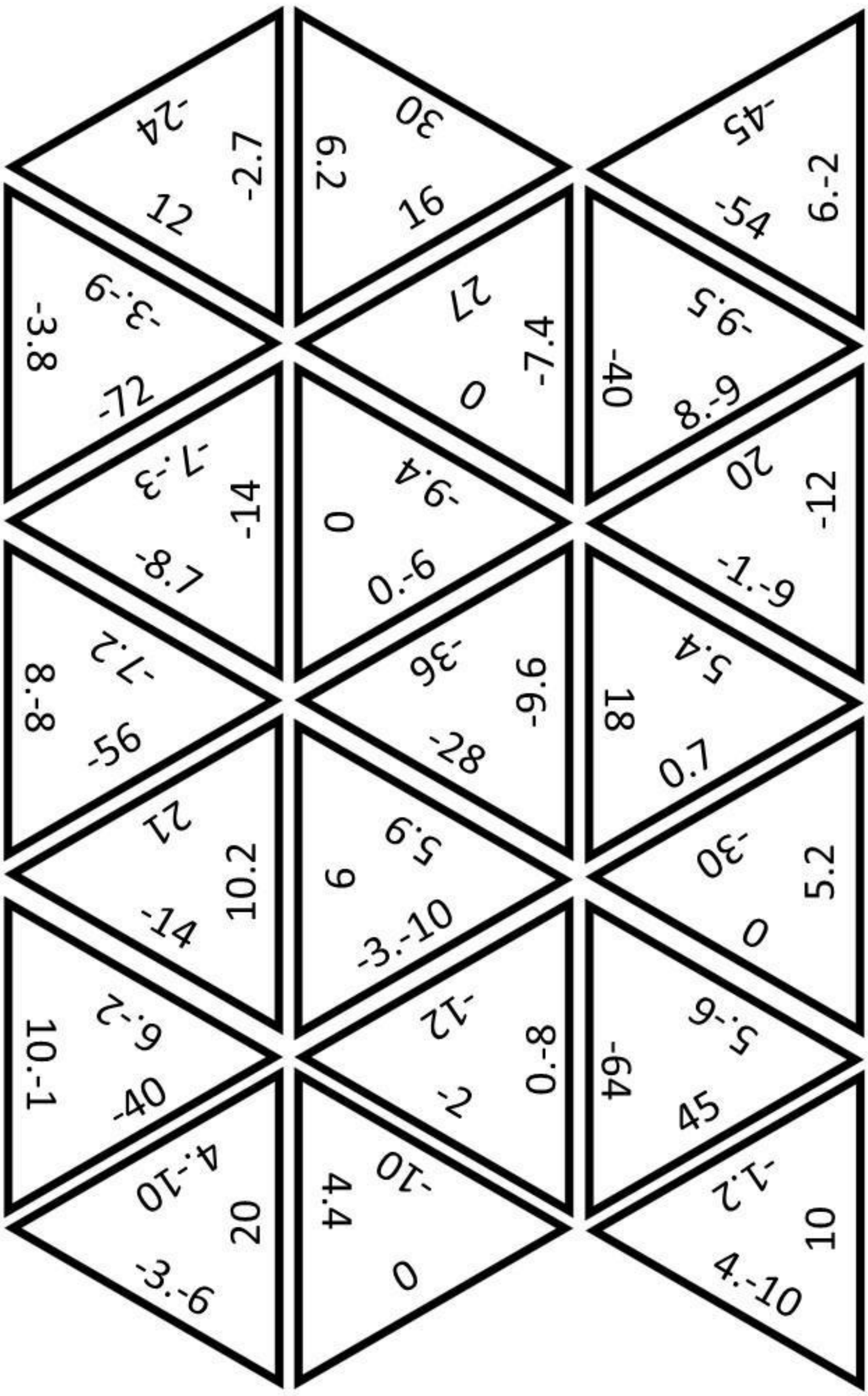
	Analisar e compreender o conceito de número relativos
Recursos Necessários	Fichas com do jogo;
Tempo estimado	30 minutos à 50 minutos
Desenvolvimento	Debate sobre a última atividade e sobre as estratégias traçadas para posicionar os números relativos sobre o tabuleiro; Apresentação das regras do jogo, demonstrando uma rodada e em seguida permitindo que os alunos experimentem; Debater as estratégias traçadas para a resolução do problema;
Avaliação	Elaboração de um problema semelhante ao jogo para a troca entre os integrantes da turma

Fonte: O autor, 2023

5.4.5. Materiais do jogo Trimu da multiplicação 2:

1. vinte e uma peças em papel cartão:

Figura 19 - Peças do jogo Trimu da multiplicação 2



Fonte: O autor, 2023

5.4.6. Regras do jogo Trimu da multiplicação 2:

i. Cada jogador recebe três cartas e as outras quinze cartas ficam sobre o monte de compra e viradas para baixo;
ii. A dupla deve decidir quem irá começar através do jogo par ou ímpar, o vencedor começa o jogo;
iii. O jogador vencedor retira uma carta do monte e a põe sobre a mesa. Em seguida verifica se é possível formar um par entre uma de suas cartas na mão ou com algum de seus números seja ela um valor ou o produto de dois valores;
    a. Caso seja possível o jogador realiza a ação e passa a vez para o próximo;
    b. Caso não seja possível o jogador compra uma carta, se possível, e passa a vez para o próximo;
iv. A cada par de peças que o jogador consegue formar o jogador ganha o número de pontos igual ao valor relativo que acabou de parear. Vence a partida o jogador que conseguir o maior número de pontos.

5.4.7. Avaliações e conclusões

Ambos os jogos apresentados apresentam um trabalho com relação a multiplicação de números relativos. O primeiro deles apresenta uma proposta um pouco mais fechada, entretanto mais desafiadora pois o aluno precisa conferir se todos os três valores contados na carta em sua mão est5ão presente nos resultados das operações sobre o tabuleiro;

O segundo jogo apresenta uma proposta uma pouco mais aberta, entretanto menos desafiadora. Apesar disso, esse segundo jogo tem por objetivo consolidar as ideia construídas com relação a multiplicação de números inteiros e aplicados no primeiro jogo. Caso a ordem das atividades fosse alterada o aluno poderia ter problemas com relação a regra dos sinais.

O primeiro jogo apresenta a ideia do regra dos sinais de maneira intrínseca, enquanto que no segundo jogo essa ideia já precisa estar bem consolidada para que a atividade possa fluir perfeitamente.

Para o fechamento dessa atividade sugerimos que o docente peça a seus alunos quais foram as conclusões dos mesmos por meio dessas atividades e construa junto com estes um arcabouço teórico que sustente as ideias apresentadas.

5.5. Encontro 5

Como descrito no último subtópico, o quinto encontro tem por objetivo consolidar a transposição do quarto e quintos obstáculos epistemológicos elencados por Glaeser (2010). É importante reforçar que o sexto obstáculo epistemológico que resume-se em um “desejo de um modelo unificador” apenas só é possível de ser transpassado por meio de manipulações algébricas da matemática moderna. Por conta disso, ao longo dos encontros não fora apresentado uma atividade que aborda-se a transposição desse obstáculo epistemológico.

O quinto encontro abordará em especifico o jogo baralho da divisão. Esse jogo foi apresentado no trabalho de Salgado (2011) e tem por objetivo trabalhar a regra dos sinais associado a divisão entre números inteiros. É importante ressaltar que o jogo aplicado a seguir foi adaptado para que fosse trabalhado a regra dos sinais apenas nas divisões.

Tabela 9 - Ficha de resumo da atividade baralho da divisão

Atividade 7 Baralho da divisão	
Habilidade BNCC	(EF06MA03) (EF07MA03) (EF07MA04)
Objetivos	Construir a ideia de números relativos; Operar os números inteiros através da divisão; Compreender a regra dos sinais aplicado a divisão de números inteiros.
Objetivos de conhecimento	Resolver problemas que envolvam cálculos mentais ou por escrito, por meio de estratégias variadas; Comparar e ordenar números inteiros, operando-os através de cálculos mentais ou por escrito;
Recursos Necessários	Um jogo de cartelas contendo sessenta cartas em papel cartão;
Tempo estimado	50 minutos à 1 hora e 30 minutos
Desenvolvimento	Debate sobre a última aula sobre a regras dos sinais aplicada a multiplicação dos números inteiros Apresentação da dinâmica do jogo Debater as estratégias traçadas para a resolução do problema;

Avaliação	Debate sobre a estratégia para a resolução do problema e as conclusões sobre as regras dos sinais que cada aluno obteve através do jogo

Fonte: O autor, 2023

5.5.1. Explicando o jogo e os componentes:

O baralho da divisão é um jogo que busca auxiliar os alunos a transpassar os obstáculos epistemológicos referentes a regra dos sinais. Sua presença como última atividade da sequência didática busca utilizar e consolidar todos os conceitos construídos por meio dessa sequência didática até o presente instante.

Sugerimos que esse jogo seja realizado em grupos de quatro pessoas apensar de cada um dos participantes do grupo joga-lo individualmente.

5.5.2. Materiais do jogo baralho da divisão:

1. Sessenta e quatro cartas de baralho em papel cartão;

Figura 20 - Peças do jogo baralho da divisão (Parte 1)

Fonte: O autor, 2023

Figura 21 - Peças do jogo baralho da divisão (Parte 2)

Fonte: O autor, 2023

Figura 22 - Peças do jogo baralho da divisão (Parte 3)

Fonte: O autor, 2023

Figura 23 - Peças do jogo baralho da divisão (Parte 4)

Fonte: O autor, 2023

5.5.3. Regras do jogo baralho da divisão:

i. Um dos alunos irá embaralhar as cartas e distribuir seis cartas a cada um dos integrantes do grupo. As cartas restantes ficaram sobre a mesa, no centro do grupo e viras para baixo. Esse conjunto de cartas restante será chamado de: monte de compras;
ii. Os participantes devem decidir entre si qual deles irá iniciar e qual a ordem de jogada: sentido horário ou sentido anti-horário.
iii. O primeiro aluno a jogar deve verificar sua mão e ver se todas as cartas disponíveis conseguem formar pares entre si, ou seja, se para cada carta em sua mão com uma expressão com números inteiros há um resultado para ela. Caso contrário, o aluno compra uma carta do monte de cartas e decide se pretende ficar com ela, ou descartá-la em um monte de chamaremos de: lixo. Caso opte por ficar com ela o jogador deve descartar alguma outra carta que esteja em sua mão e passar a vez ao próximo jogador.
iv. Cada jogador fará o mesmo processo: verificar sua mão; comprar uma carta; decidir se fica com ela ou não; e descartar uma carta (podendo ser a comprada ou uma que estivesse em sua mão).
v. Ganha o jogo o primeiro aluno que conseguir formar primeiro os três pares corretamente.

5.5.4. Avaliações e conclusões

Após a realização das atividades espera-se que alunos tenham consolidado plenamente o conceito de números relativos, seu posicionamento na reta numérica e a regra dos sinais para as operações de adição e subtração, multiplicação e divisão.

Para o fechamento dessa sequência didática sugerimos ao professor que realize em sala uma recapitulação com os alunos afim de compreender o que esses entenderam e conforme ocorre o debate vá realizando um fechamento teórico no quadro com estes para que os mesmos tenham os conteúdos trabalhados registrados em seus cadernos.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa buscou mostrar um panorama sobre o ensino de número inteiros e seus principais obstáculos epistemológicos. A partir do entendimento geral sobre a construção do conjunto dos números inteiros de dois pontos de vista teóricos, pudemos notar as complexidades que esse conjunto apresenta. Os pontos de vistas por meio da matemática moderna e da estrutura mais visual apresentaram duas maneiras distintas de se trabalhar os conceitos intrínsecos ao conjunto dos números inteiros.

A partir desse entendimento estrutural foi possível traçar um paralelo histórico com os pensamentos dos principais matemáticos na história apresentando desde os grandes matemáticos egípcios e chineses que chegaram a trabalhar com os números negativos mesmo que essas sociedades não aceitassem os mesmos. Com a chegada números negativos a Europa medieval, pudemos notar através do levantamento histórico feito por Glaeser uma série de obstáculos epistemológicos inerentes aos números relativos. É possível deduzir através da obra do autor que boa parte desses entraves apenas foram transpassados após o período renascentistas, com o desenvolvimento da matemática moderna e o cálculo.

Esses mesmos obstáculos apresentados pelos grandes matemáticos antigos e modernos, também são apresentados atualmente pelos nossos estudantes brasileiros muito em detrimento pela forma como estes discentes desenvolvem conjecturas a cerca do tema de maneira muito prática e próxima das realidades dos mesmos.

Em vista disso, esse trabalho de conclusão de curso buscou apresentar uma proposta de sequência didática que possa ser aplicada pelo docente com seus alunos de forma a auxiliá-los a transpassar os obstáculos epistemológicos apresentados. Essa sequência buscou em sua essência afastar esses estudantes do pensamento e aplicação prática sobre o tema e, de forma gradual, aproxima-lo da matemática mais teórica.

O trabalho apresentado foi pautado sobre a metodologia de resolução de problemas aplicada com elementos de gamificação de forma que a resolução desses problemas se tornasse mais atrativos aos alunos. Utilizando-se desses elementos os discentes são instigados e resolvem problemas abertos com o objetivo de definir quem será o vencedor de cada partida.

Espera-se que através da sequência didática proposta para cinco encontros, o que estima-se pelo autor aproximadamente um mês e meio para se trabalhar o tema com os alunos alternando-se entre prática (através dos encontros) e teoria (através da formalização dos conteúdos e resolução de exercícios) os alunos sejam capazes de construir os saberes referentes aos números inteiros de forma coletiva e/ou individual. Uma das possíveis propostas posterior a essa pesquisa é a aplicação da mesma a fim de mensurar a construção dos saberes que esses estudantes podem obter a partir dessa sequência didática visto que essa pesquisa pautou-se apenas sobre os aspectos teóricos qualitativos.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas. **Resolução de problemas: teoria e prática.** Jundiaí: Paco Editorial, n. 35, 2014.

BARBOSA, Sandra Lucia Piola; CARVALHO, TO de. Jogos matemáticos como metodologia de ensino aprendizagem das operações com números inteiros. **Projeto de Intervenção Pedagógica na Escola apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional da Universidade Estadual de Londrina (UEL)**, p. 1948-8, 2008.

BARBOSA, Francisco Ellivelton; DE PONTES, Márcio Matoso; DE CASTRO, Juscileide Braga. A utilização da gamificação aliada às tecnologias digitais no ensino da matemática: um panorama de pesquisas brasileiras. **Revista Prática Docente**, v. 5, n. 3, p. 1593-1611, 2020.

BACHELARD, G. La formation de l'esprit scientifique seizième tirage. **Paris, Librairie Philosophique J. Vrin**, 1938.

BACHELARD, Gaston; RAMOS, Joaquim José Moura. **A filosofia do não: filosofia do novo espírito científico.** 1987.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/ Acesso em: 23 de out. 2022

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Relatório de resultados do Saeb 2019**: volume 1: 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e séries finais do Ensino Médio. Brasília, DF: Inep, 2022. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2019/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2019_volume_1.pdf Acesso em: 23 de out. 2022

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática.** 1. ed. [S. l.]: Lisboa: Sá da Costa, 1984. 318 p.

COLECHA, Lucimara. **O Uso de Jogos na abordagem de Números Inteiros**.. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE: Produção Didático-pedagógica, 2013. Curitiba: SEED/PR., 2016. V.2. (Cadernos PDE). Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=20. Acesso em 09 de jan. 2023. ISBN 978-85-8015-075-9.

DE LA ROSA ONUCHIC, Lourdes. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos?. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 20, n. 1, 2013.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética.** 1. ed. SP: Atual, 1991. 297 p. ISBN 85-7056-342-6.

DUVAL, Raymond; THADEU, Méricles. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

GLAESER, Georges. Epistemologia dos números relativos. **Boletim Gepem**, n. 57, 2010.

GODOY, Elenilton Vieira. **Currículo, cultura e educação matemática: uma aproximação possível?**. 2011. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A noção de "obstáculo epistemológico" e a educação matemática. **Educação Matemática: uma introdução**, p. 155-196, 1999.

LIMA, Elon Lages. **O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO**, 2004. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~mat0829/A.Peano.htm. Acesso em: 27 de mai. de 2023.

LIMA, E. L. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. v. 1.

LINARDI, Patrícia Rosana. **Quatro jogos para números inteiros: uma análise**. 1998. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução.** 3. ed. revista. São Paulo: EDUC, 2008. p. 167-188.

MALECHI, Marcia. **Os Inteiros no mundo dos Jogos**. 2016. 2013. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. Programa de Desenvolvimento Educacional. – Curitiba

MARTZLOFF, Jean-Claude. **A history of Chinese mathematics**. Springer, 2007.

MOREIRA, Marco Antonio. **A TEORIA DO DESENVOLVIMENTO COGNITIVO DE PIAGET**. 1995. Monografia n° 6 da Série Enfoques Teóricos. Porto Alegre, Instituto de Física da UFRGS.

Oliveira, R. R., Andrade, M. H., Sales, G. L., Silva, J. B., Lencastre, J. A., & Alves, F.R. (2017). OA “Decifrando enigmas com os Inteiros": um Objeto de Aprendizagem e sua concepção para o ensino de Matemática. In J. Sánchez (Ed.), **Atas da XXII Conferência Internacional sobre Informática na Educação - TISE2017 - Nuevas Ideas en Informática Educativa**, Volumen 13, (pp. 614–619). Fortaleza: Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.

PAIVA, Marlla Rúbya Ferreira et al. Metodologias ativas de ensino-aprendizagem: revisão integrativa. **SANARE-Revista de Políticas Públicas**, v. 15, n. 2, 2016.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p.

Quadros-Flores, P. M. ., Mascarenhas, D., & Machado, M. (2020). O método de Polya e a Gamificação como estratégias na resolução de problemas. *Revista Practicum*, *5*(2), 47–64. Disponível em: https://doi.org/10.24310/RevPracticumrep.v5i2.10227. Acesso em: 27 mai. 2023

ROMANATTO, M. C. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA. **Revista Eletrônica de Educação**, *[S. l.]*, v. 6, n. 1, p. 299–311, 2012. DOI: 10.14244/19827199413. Disponível em: https://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/413. Acesso em: 27 mai. 2023.

SALGADO, Rosângela Cruz da Silva. **O ensino de números inteiros por meio de atividades com calculadora e jogos**. Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá. 2011. 307 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2011.

SANTOS, Marta Figueiredo dos. **A difícil aceitação dos números negativos: um estudo da teoria dos números de Peter Barlow (1776-1862)**. 2008. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

SILVA, Benedito Antonio da. Contrato Didático. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Educação matemática:** uma introdução. São Paulo: Educ, 1999. p. 43-64.

SOUZA, Joana et al. Obstáculos Epistemológicos com números inteiros negativos. **Anais do Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão**, v. 5, n. 2, 2013.

SOUZA, Joana Tatsch da Silva *et al*. OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS COM NÚMEROS INTEIROS NEGATIVOS DE ESTUDANTES DE 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL. **Anais do 4o EIEMAT e 2o Encontro Nacional PIBID Matemática.**, Santa Maria, v. 1, n. 1, 2014. Disponível em: https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/534/2020/03/CC_Tatsch_Joana.pdf Acesso em: 27 mai. 2023.

THOMPSON, A. G. Learning to Teach Mathematical Problem Solving: Changes in

Teachers' Conceptions and Beliefs. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving.** Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre, RS: Artmed, 1998. 224 p. ISBN: 8573074264.

ANEXO A – HABILIDADES BNCC

(EF06MA03): Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.

(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

(EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.