

**COLÉGIO PEDRO II**

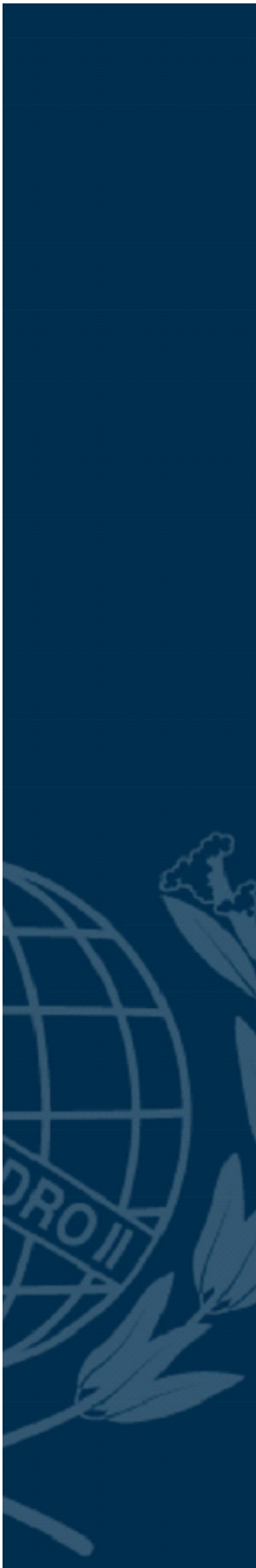
Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Raphael Medeiros

**UMA ANÁLISE DOS RASTROS DAS RODAS  
DE UMA BICICLETA A PARTIR DO ESTUDO  
DAS PARAMETRIZAÇÕES DE CURVAS PLANAS**

Rio de Janeiro

2020



Raphael Medeiros

**UMA ANÁLISE DOS RASTROS DAS RODAS DE UMA BICICLETA A  
PARTIR DO ESTUDO DAS PARAMETRIZAÇÕES DE CURVAS PLANAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Patrícia Erthal de Moraes

Rio de Janeiro

2020

**COLÉGIO PEDRO II**  
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA**  
**BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER**  
**CATALOGAÇÃO NA FONTE**

M488 Medeiros, Raphael

Uma Análise dos Rastros das Rodas de uma Bicicleta a partir do Estudo das Parametrizações de Curvas Planas / Raphael Medeiros. – Rio de Janeiro, 2020.

162 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Patrícia Erthal de Moraes.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Curvas planas. I. Patrícia Erthal de Moraes. II. Colégio Pedro II. III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Raphael Medeiros

**UMA ANÁLISE DOS RASTROS DAS RODAS DE UMA BICICLETA A  
PARTIR DO ESTUDO DAS PARAMETRIZAÇÕES DE CURVAS PLANAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 02 de abril de 2020.

Banca Examinadora:

---

Profa. Dra. Patrícia Erthal de Morais (Orientadora)  
Colégio Pedro II

---

Profa. Dra. Luciana Santos da Silva Martino  
Colégio Pedro II

---

Profa. Dra. Aline Mauricio Barbosa  
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2020

Dedico esta pesquisa primeiramente a Jesus Cristo, nosso salvador. À minha família, que sempre me apoiou e aos professores, pelo excelente conhecimento transmitido.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me permitir que chegasse a este momento tão importante da minha vida. Sou grato à minha esposa e filha por todo apoio prestado nos diversos momentos de dificuldades ao longo desses anos. E também, a minha mãe, que teve fundamental importância no meu ingresso no ensino superior. Agradeço também meus amigos do curso, que passaram por essa grande batalha ao meu lado, especialmente ao João Jefferson Faria Marinho, amigo de farda e grande colaborador neste trabalho, que me deu importantes dicas na utilização de alguns *softwares* gráficos e até mesmo na utilização do editor  $\text{\LaTeX}$ . E também a todos os professores que fazem parte do PROFMAT no Colégio Pedro II, que me proporcionaram crescimento individual através de grandes aprendizados na disciplina e até mesmo na área profissional, em especial minha orientadora, professora Patrícia Erthal de Moraes, pela grande ajuda na elaboração desta pesquisa, que me apresentou o que veio a ser o tema principal deste trabalho, os estudos dos rastros das rodas de bicicleta. Uma profissional admirável que me auxiliou em todos os momentos, compartilhando um pouco de seu conhecimento e experiência. Sou muito grato ao Thiago da Fonseca Santos, que realizou a tradução de alguns artigos que serviram de base para esta pesquisa, sem seu apoio a mesma não teria sido tão abrangente em seus diversos aspectos.

*“A minha luta é uma luta da verdade contra a mentira, do conhecimento contra a ignorância, da luz contra as trevas. Pretendo criar a era da convicção, da verdade, da decência, da dignidade, da confiança, do preparo, do conhecimento, da inteligência, da ciência e do entusiasmo.”*

---

Enéas Ferreira Carneiro

## RESUMO

MEDEIROS, Raphael. **Uma Análise dos Rastros das Rodas de uma Bicicleta a partir do Estudo das Parametrizações de Curvas Planas**. 2020. 162 f. Dissertação (Mestrado) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2020.

Em um dos casos chamado para solucionar, Sherlock Holmes tinha que decidir em que direção o ladrão havia fugido com base nos rastros deixados pelas rodas de sua bicicleta. Tal questão motivou a pesquisa que norteou este trabalho. Além de dar resposta ao problema proposto, foi criado um modelo animado de bicicleta no *software* GeoGebra, produzindo diversos exemplos gráficos que puderam ilustrar os resultados teóricos apresentados. Assim, inicialmente elaboramos uma abordagem geral das curvas planas parametrizadas, de modo a desenvolver seus processos de construção e verificar seus comportamentos, incluindo algumas curvas especiais estudadas por matemáticos ao longo da História da Matemática. Inserimos alguns tópicos de cálculo diferencial e integral, de modo a entender melhor o comportamento dessas curvas e obter outros resultados como, por exemplo, comprimento e área. Apresentamos também um apanhado de resultados da geometria diferencial aplicados às curvas planas, muitos dos quais foram utilizados no estudo dos rastros das rodas de uma bicicleta. Por fim, utilizando os assuntos adequados da análise do par de curvas gerado pelas rodas de uma bicicleta, elaboramos propostas de atividades para oficinas de matemática.

**Palavras-chave:** Curvas planas; Parametrização; Sherlock Holmes; Rastros da bicicleta.

## ABSTRACT

MEDEIROS, Raphael. **Uma Análise dos Rastros das Rodas de uma Bicicleta a partir do Estudo das Parametrizações de Curvas Planas.** 2020. 162 f. Dissertação (Mestrado) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2020.

In one of the cases called for resolution, Sherlock Holmes had to decide in which direction the thief had fled based on the tracks left by the wheels of his bicycle. This question motivated the research that guided this work. Besides answering the proposed problem, an animated bicycle model was created in GeoGebra, producing several graphic examples that could illustrate the theoretical results presented. Thus, we initially elaborated a general approach of the parameterized flat curves, in order to develop their construction processes and verify their behavior, including some special curves studied by mathematicians throughout the History of Mathematics. We inserted some differential and integral calculus topics in order to better understand the behavior of these curves and obtain other results, such as length and area. We also present a collection of results of differential geometry applied to flat curves, many of which were used in the study of wheel tracks of a bicycle. Finally, using the appropriate subjects of the analysis of the pair of bends generated by the wheels of a bicycle, we prepared proposals for activities for math workshops.

**Keywords:** Flat curves; Parameterization; Sherlock Holmes; Bike tracks.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Parâmetro $t$ . . . . .	16
Figura 2 – Círculo $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$ . . . . .	18
Figura 3 – Círculo $\mathcal{C} : (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$ . . . . .	19
Figura 4 – Círculos $\mathcal{C}_a$ e $\mathcal{C}_b$ , $a > b > 0$ . . . . .	20
Figura 5 – Construção da elipse $\mathcal{E}$ . . . . .	21
Figura 6 – Gráficos de $\sinh t$ e $\cosh t$ . . . . .	22
Figura 7 – Gráfico da hipérbole $\mathcal{H}_0 : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ . . . . .	23
Figura 8 – Parábola $\mathcal{P} : k(y - y_0) = (x - x_0)^2$ . . . . .	25
Figura 9 – Elipse no sistema de coordenadas $O\bar{X}\bar{Y}$ . . . . .	28
Figura 10 – Hipérbole no sistema de coordenadas $O\bar{X}\bar{Y}$ . . . . .	31
Figura 11 – Parábola no sistema de coordenadas $O\bar{X}\bar{Y}$ . . . . .	33
Figura 12 – Desenvolvimento da cicloide . . . . .	34
Figura 13 – Desenvolvimento da cicloide. . . . .	35
Figura 14 – Desenvolvimento da epicicloide. . . . .	36
Figura 15 – Cardioide, $R = r$ . . . . .	38
Figura 16 – Desenvolvimento da hipocicloide. . . . .	39
Figura 17 – Astroide, $r = \frac{R}{4}$ . . . . .	40
Figura 18 – Construção da curva de Agnesi. . . . .	41
Figura 19 – Curva de Agnesi. . . . .	41
Figura 20 – Curva de Bézier cúbica. . . . .	43
Figura 21 – Curva $\alpha = (t^5 - 4t^3, t^2)$ . . . . .	47
Figura 22 – Fólium de Descartes para $a = 1$ . . . . .	50
Figura 23 – Lemniscata de Bernoulli. . . . .	53
Figura 24 – Comprimento da curva $y = F(x)$ . . . . .	56
Figura 25 – Curva $\mathcal{C}_1 = (t^2/2, \sqrt{(2t+1)^3/3})$ . . . . .	58
Figura 26 – Curva $\mathcal{C}_1 = (t^2/2, \sqrt{(2t+1)^3/3})$ , com $0 \leq t \leq 4$ . . . . .	59
Figura 27 – Curva $\mathcal{C}_2 = (e^t \sin t, e^t \cos t)$ . . . . .	59
Figura 28 – Curva $\mathcal{C}_2 = (e^t \sin t, e^t \cos t)$ , com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ . . . . .	60
Figura 29 – Curva $\mathcal{C}_3 = (rt - r \sin t, r - r \cos t)$ . . . . .	61
Figura 30 – Curva $\mathcal{C}_3 = (rt - r \sin t, r - r \cos t)$ , com $0 \leq t \leq 2\pi$ . . . . .	62
Figura 31 – Corda suspensa pelos pontos $A$ e $B$ . . . . .	63
Figura 32 – Catenária com $a = 1, 2, 3, 4$ e $5$ . . . . .	64
Figura 33 – Área sob um arco da cicloide. . . . .	66
Figura 34 – Curva $\mathcal{C}_4 = (-t^3/3 + t, t^2 - 1)$ . . . . .	67
Figura 35 – Área delimitada pela curva $\mathcal{C}_4 = (-t^3/3 + t, t^2 - 1)$ . . . . .	67
Figura 36 – Curva $\mathcal{C}_5 = (t^2 + 1, t^3 + 2t)$ e reta $x = 2$ . . . . .	68

Figura 37 – Área delimitada pela curva $\mathcal{C}_5$ e a reta $x = 2$ . . . . .	69
Figura 38 – Vetor Tangente à $\alpha$ em $t_0$ . . . . .	71
Figura 39 – Vetor Tangente à $\alpha = (t^5, t^2)$ em $t = 1$ . . . . .	71
Figura 40 – Injetividade local de $\alpha$ . . . . .	72
Figura 41 – $\alpha$ restrita ao intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ . . . . .	73
Figura 42 – Reparametrização de $\alpha$ por $h(t) = -t$ . . . . .	74
Figura 43 – Campo de vetores $X(t)$ ao longo de $\alpha(t)$ . . . . .	77
Figura 44 – Variação do ângulo, com $\theta_0 > \theta_1$ . . . . .	79
Figura 45 – Espiral logarítmica $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sen t)$ . . . . .	83
Figura 46 – Representação de $\theta(t)$ . . . . .	83
Figura 47 – Representação das curvas fechadas e simples. . . . .	89
Figura 48 – Imagem do livro: A volta de Sherlock Holmes. . . . .	90
Figura 49 – Par de curvas determinadas pelas rodas da bicicleta. . . . .	91
Figura 50 – Deslocamento da bicicleta. . . . .	91
Figura 51 – Supondo o rastro marrom como o da roda traseira. . . . .	92
Figura 52 – Supondo o rastro verde como o da roda traseira. . . . .	93
Figura 53 – Rastros dianteiros quando a roda traseira percorre a parábola. . . . .	94
Figura 54 – Rastros dianteiros quando a roda traseira percorre a parábola. . . . .	94
Figura 55 – Rastros dianteiros quando a roda traseira percorre a circunferência. . . . .	95
Figura 56 – Rastros dianteiros quando $\gamma(t) = \left(t, \sqrt[3]{(3t - t^3)/4}\right)$ . . . . .	95
Figura 57 – Rastros dianteiros quando $\gamma(t) = (t, t^4 - 3t^3 + 4t - 1)$ . . . . .	96
Figura 58 – Rastros dianteiros quando $\gamma(t) = (t, \sen t)$ . . . . .	96
Figura 59 – Obtenção das equações do rastro da roda dianteira. . . . .	97
Figura 60 – Rastros dianteiros quando $\gamma(t) = (a \cos t, b \sen t)$ . . . . .	100
Figura 61 – Rastros dianteiros quando $\gamma(t) = (2r \cotg t, 2r \sen^2 t)$ . . . . .	100
Figura 62 – Rastros dianteiros quando $\gamma(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + t, t^2 - 1\right)$ . . . . .	101
Figura 63 – Rastros dianteiros quando $\gamma(t) = \left(t, a \cosh \frac{t}{a}\right)$ . . . . .	102
Figura 64 – Rastros dianteiros quando $\gamma$ é a curva cúbica de Bézier. . . . .	103
Figura 65 – Rastro dianteiro no ponto de cúspide. . . . .	104
Figura 66 – Rastros dianteiros quando $\gamma$ é uma curva não regular. . . . .	104
Figura 67 – Construção de $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ . . . . .	105
Figura 68 – Curvas $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ obtidas. . . . .	106
Figura 69 – Curva $\Gamma_1$ obtida, quando $\gamma$ é a cicloide. . . . .	107
Figura 70 – Curva $\Gamma_2$ obtida, quando $\gamma$ é a cicloide. . . . .	108
Figura 71 – Rastro dianteiro quando $\gamma(t) = (2r \cos t - r \cos 2t, 2r \sen t - r \sen 2t)$ . . . . .	109
Figura 72 – Rastros dianteiros quando $\gamma(t) = (3r \cos t + r \cos 3t, 3r \sen t - r \sen 3t)$ . . . . .	110
Figura 73 – Rastros $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ obtidos, quando $\gamma$ é a astroide. . . . .	111
Figura 74 – Curvas $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ obtidas, com $\gamma(t) = (t^5 - 4t^3, t^2)$ . . . . .	112

Figura 75 – Curva $\Gamma_1$ obtida, quando $\gamma(t) = (t^5 - 4t^3, t^2)$ . . . . .	113
Figura 76 – Curva $\Gamma_2$ obtida, quando $\gamma(t) = (t^5 - 4t^3, t^2)$ . . . . .	113
Figura 77 – Rastros dianteiros obtidos, com $\gamma(t) = (t^5, t^2)$ . . . . .	114
Figura 78 – Rastros $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ obtidos, quando $\gamma(t) = (t^5, t^2)$ . . . . .	115
Figura 79 – Relógio de bolso se deslocando sobre a Tractriz. . . . .	116
Figura 80 – Construção da tractriz. . . . .	116
Figura 81 – Tractriz como rastro da roda traseira. . . . .	119
Figura 82 – Rastros $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ quando $\gamma$ é a Tractriz. . . . .	120
Figura 83 – $\bar{\Gamma}$ obtida com $\gamma(t) = (t, \text{sen } t)$ , $\ell = 2$ e $\bar{\ell} = 3$ . . . . .	124
Figura 84 – $\bar{\Gamma}$ obtida com $\gamma(t) = (t, t^4 - 3t^3 + 4t - 1)$ , $\ell = 2, 5$ e $\bar{\ell} = 4$ . . . . .	124
Figura 85 – $\bar{\Gamma}$ obtida com $\gamma(t) = (t, e^t)$ , $\ell = 4$ e $\bar{\ell} = 3$ . . . . .	125
Figura 86 – Par de curvas ambíguas dado por círculos concêntricos. . . . .	127
Figura 87 – Área entre círculos concêntricos como par de curvas de bicicleta. . . . .	128
Figura 88 – $\gamma$ qualquer simples, fechada e convexa. . . . .	129
Figura 89 – Quadrado como rastro da roda traseira. . . . .	130
Figura 90 – Hexágono como rastro da roda traseira. . . . .	130
Figura 91 – Área entre o par de curvas, em que $\gamma$ é simples, fechada e convexa. . . . .	131
Figura 92 – Área entre o par de curvas, com $\gamma(t) = (a \cos t, b \text{sen } t)$ . . . . .	132
Figura 93 – Área entre o par de curvas da bicicleta não necessariamente fechadas. . . . .	132
Figura 94 – Obtendo a variação angular total. . . . .	134
Figura 95 – Área entre o par de curvas sendo $\gamma(t) = (t, \text{sen } t)$ . . . . .	135
Figura 96 – Área entre os rastros obtida com os recursos do GeoGebra. . . . .	136
Figura 97 – Almofadas de carimbo, miniaturas de bicicleta e cartolinas. . . . .	137
Figura 98 – Análise do sinal da curvatura. . . . .	156
Figura 99 – $\rho_0 = \frac{1}{k(t_0)}$ , $0 < \rho_1 < \rho_0 < \rho_2$ . . . . .	157
Figura 100 – Construção habilitando o rastro do ponto. . . . .	160
Figura 101 – Construção conhecendo a expressão matemática da roda dianteira. . . . .	162

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>PARAMETRIZANDO CURVAS PLANAS . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Parametrização das cônicas . . . . .</b>	<b>17</b>
2.1.1	Parametrização do círculo . . . . .	18
2.1.2	Parametrização da elipse . . . . .	20
2.1.3	Parametrização da hipérbole . . . . .	22
2.1.4	Parametrização da parábola . . . . .	24
<b>2.2</b>	<b>Parametrização das cônicas rotacionadas . . . . .</b>	<b>25</b>
2.2.1	Parametrização da elipse rotacionada . . . . .	26
2.2.2	Parametrização da hipérbole rotacionada . . . . .	28
2.2.3	Parametrização da parábola rotacionada . . . . .	31
<b>2.3</b>	<b>Curvas especiais . . . . .</b>	<b>33</b>
2.3.1	Cicloide . . . . .	33
2.3.2	Epicycloide . . . . .	35
2.3.3	Hipocicloide . . . . .	38
2.3.4	Curva de Agnesi . . . . .	40
2.3.5	Curvas de Bézier . . . . .	42
<b>3</b>	<b>ASPECTOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL APLICADOS A CURVAS PARAMETRIZADAS . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>3.1</b>	<b>Construção de gráficos . . . . .</b>	<b>44</b>
3.1.1	Utilizando noções de cálculo . . . . .	44
3.1.2	Transformando em equação cartesiana . . . . .	53
<b>3.2</b>	<b>Comprimento de arco . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>3.3</b>	<b>Catenária . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>3.4</b>	<b>Cálculo de áreas . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>4</b>	<b>INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL . . . . .</b>	<b>70</b>
<b>4.1</b>	<b>Curvas parametrizadas diferenciáveis . . . . .</b>	<b>70</b>
4.1.1	Vetor tangente . . . . .	70
4.1.2	Curva regular . . . . .	71
<b>4.2</b>	<b>Reparametrização . . . . .</b>	<b>73</b>
4.2.1	Reparametrização pelo comprimento de arco . . . . .	75
<b>4.3</b>	<b>Campo de vetores ao longo de curvas . . . . .</b>	<b>77</b>
4.3.1	Fórmulas de Frenet e curvatura . . . . .	79

4.4	<b>Teorema fundamental das curvas planas . . . . .</b>	<b>85</b>
4.5	<b>Curvas convexas . . . . .</b>	<b>87</b>
5	<b>ANÁLISE DOS RASTROS DAS RODAS DE UMA BICICLETA . . . . .</b>	<b>90</b>
5.1	<b>Para onde foi a bicicleta? . . . . .</b>	<b>90</b>
5.1.1	Alguns rastros para a roda dianteira obtidos com software GeoGebra .	93
5.2	<b>Matemática do rastro da roda dianteira . . . . .</b>	<b>97</b>
5.2.1	Aplicação em curvas regulares . . . . .	98
5.2.2	Aplicação em curvas não regulares . . . . .	103
5.2.3	Tractriz . . . . .	115
5.3	<b>Resultados importantes . . . . .</b>	<b>120</b>
5.3.1	Relação entre as curvaturas dos rastros . . . . .	120
5.3.2	Rastro dianteiro se tornando o traseiro . . . . .	123
5.3.3	Velocidade das rodas, distância percorrida pelas rodas e curvas ambíguas	125
5.4	<b>Área entre os rastros . . . . .</b>	<b>128</b>
5.5	<b>Atividades propostas para oficinas de matemática . . . . .</b>	<b>136</b>
5.5.1	Oficina I: “Para onde foi a bicicleta?” . . . . .	136
5.5.2	Oficina II: “Uma análise dos rastros das rodas de uma bicicleta” . . .	139
6	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>142</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>144</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>146</b>
	<b>APÊNDICE A – OBTENÇÃO DO TRAÇO DE UMA CURVA UTILIZANDO NOÇÕES DE CÁLCULO .</b>	<b>147</b>
	<b>APÊNDICE B – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA CUR- VATURA . . . . .</b>	<b>156</b>
	<b>APÊNDICE C – FORMA CANÔNICA LOCAL DAS CUR- VAS PLANAS . . . . .</b>	<b>158</b>
	<b>APÊNDICE D – CONSTRUÇÃO DOS RASTROS DE BI- CICLETA NO GEOGEBRA . . . . .</b>	<b>159</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento deste trabalho surge do mistério que esteve perante o famoso detetive Sherlock Holmes, em que ele devia descobrir a direção que um raptor conduzindo uma bicicleta seguiu, a partir dos rastros de suas rodas no solo, de acordo com Konhauser, Velleman e Wagon (1996, p. 63 e 64).

A utilização de equações paramétricas para descrever as curvas planas trazem consigo um meio para analisar o comportamento das mesmas e até mesmo realizar alguns processos de cálculos que as envolvem. Assim, faremos um estudo geral das curvas planas, contando também com os recursos dinâmicos do *software* GeoGebra a fim de analisar o par de curvas descrito pelas rodas de uma bicicleta. A metodologia utilizada nesta pesquisa será a revisão bibliográfica, em que os assuntos relativos aos rastros das rodas da bicicleta serão retirados de artigos.

Desse modo, no capítulo 2 trataremos as principais curvas planas estudadas no ensino básico, incluindo as cônicas, apresentando também as curvas construídas pela rotação de um círculo. Veremos também como parametrizar as cônicas que sofrem translação e rotação no eixo coordenado. Serão vistas algumas curvas especiais como as de Agnesi e Bézier.

No capítulo 3 vamos estudar métodos para construção dos gráficos de curvas parametrizadas mais generalizadas, onde analisaremos seus comportamentos com artifícios do cálculo diferencial. Implementaremos também meios de obter a forma cartesiana de algumas curvas parametrizadas, de modo a verificar outros comportamentos e propriedades das mesmas. E ainda utilizando o cálculo integral, calcularemos áreas entre as curvas e seus comprimentos para um determinado intervalo do parâmetro; e ainda, utilizaremos desses meios para encontrar a forma parametrizada de uma importante curva nos estudos da física denominada catenária.

Buscando aprofundar ainda mais nossos estudos das curvas planas parametrizadas e também utilizar tais conceitos para o que virá adiante, no capítulo 4 faremos um estudo dos principais tópicos dos conceitos iniciais da geometria diferencial para as curvas planas. Trazendo problemas que envolvem os assuntos fundamentais como os de reparametrização pelo comprimento de arco, vetores tangentes e normais, fórmulas de Frenet, curvatura, teorema fundamental e também convexidade das curvas planas.

No capítulo 5 faremos a investigação do par de curvas deixados pelas rodas de uma bicicleta no solo. Buscaremos analisar com mais detalhes o problema que esteve diante de Sherlock Holmes, implementando uma resposta matemática para o caso. E ainda, desenvolveremos um estudo de rastros da roda dianteira obtidos, quando conhecido

previamente o caminho da roda traseira. Para isso, construiremos uma animação da bicicleta no GeoGebra, que possibilitará melhor visualização e compreensão desses pares de curvas. Além disso, exploraremos outras propriedades e resultados envolvidos na relação entre esses rastros. Alguns deles são curvaturas, velocidades das rodas, distâncias percorridas pelas rodas e cálculo da área entre os rastros.

Por fim, com alguns tópicos do capítulo 5 desenvolveremos duas propostas de atividades para o ensino médio. Uma será de caráter lúdico, que não requererá tantos conhecimentos formais dos alunos. A outra mais aprofundada do ponto de vista teórico, poderá ser aplicada a grupos de alunos que, além de saber utilizar alguns recursos do GeoGebra, tenham estudado assuntos como parametrização de curvas planas, propriedade de vetores, retas tangentes à curva e derivadas. Obviamente, o leitor poderá mesclar os tópicos dessas propostas, de modo a buscar uma adequação para o grupo de alunos em que estes serão aplicados.

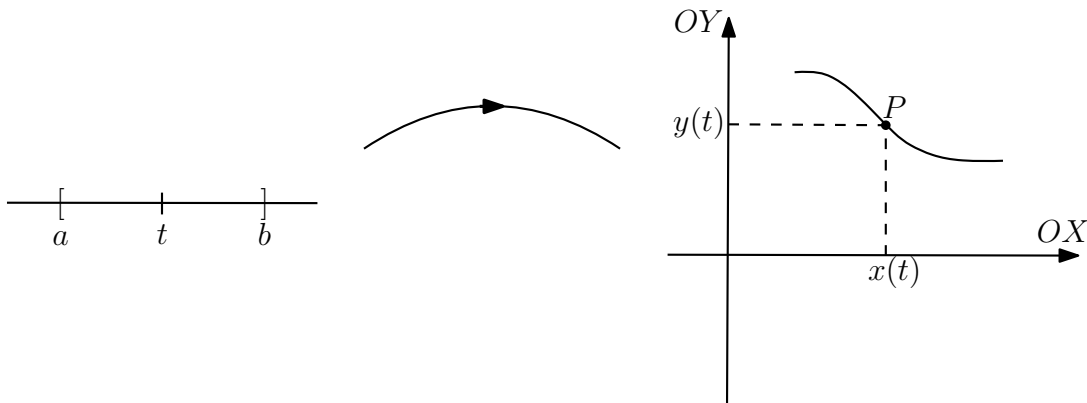
## 2 PARAMETRIZANDO CURVAS PLANAS

Parametrizar uma curva plana, consiste em escrever suas coordenadas cartesianas  $(x, y)$  em função de uma terceira variável, a qual chamaremos de parâmetro. Portanto, seja  $t$  essa variável ou parâmetro, logo teremos:

$$(x, y) = (x(t), y(t)) \quad (2.1)$$

Assim, as relações  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  serão chamadas *equações paramétricas*, conforme Flemming e Gonçalves (2006). Podemos também interpretar tal situação, como o movimento de uma partícula em cada instante  $t$ . Assim, para  $t \in [a, b]$  temos que  $(x, y) = (x(a), y(a))$  é a posição inicial e  $(x, y) = (x(b), y(b))$  é a posição final dessa partícula. Ou seja, cada valor de  $t$  em  $[a, b]$  estará atribuído um par ordenado  $(x, y)$  no plano, conforme figura 1.

Figura 1 – Parâmetro  $t$



Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 2.1.** Uma parametrização da reta  $r : 2x + y - 3 = 0$  é dada da seguinte forma: Fazemos  $x = t$ , assim,  $y = 3 - 2t$ . Obtemos assim, a reta em sua forma parametrizada:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Note, que caso queiramos que a partícula se mova no sentido contrário ao obtido acima, basta que façamos  $x = -t$ . Poderíamos também obter uma outra parametrização para essa mesma reta, fazendo  $x = 2t$ , obtendo assim  $y = 3 - 4t$ , ou seja:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - 4t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Alterando assim, a velocidade da partícula, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , podemos concluir também que uma curva possui infinitas parametrizações.

**Exemplo 2.2.** *Seja a curva dada por  $y = \sqrt{x}$ . podemos também descrevê-la pelas equações a seguir. Fazendo  $y = t \geq 0$ , temos:*

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2.$$

*Assim, uma parametrização da curva será:*

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases} ; t \geq 0$$

**Exemplo 2.3.** *Vamos parametrizar a curva  $y = e^x$ . Fazemos  $y = t > 0$ , temos portanto que*

$$e^x = t \Rightarrow x = \ln t.$$

*Portanto, temos a seguinte parametrização:*

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t \end{cases} ; t > 0$$

**Exemplo 2.4.** *Seja uma curva dada pela equação  $x^3 + 4y^3 = 3x$ . Fazemos  $x = t$ , assim temos que*

$$t^3 + 4y^3 = 3t \Rightarrow 4y^3 = 3t - t^3 \Rightarrow y^3 = \frac{t(3 - t^2)}{4} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{t(3 - t^2)}{4}}.$$

*Logo, uma parametrização da curva será:*

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt[3]{\frac{t(3 - t^2)}{4}} \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Neste capítulo, trataremos de curvas que geralmente são estudadas no ensino básico, como: círculos, parábolas, elipses, hipérboles, dentre outras. Veremos também como realizar a parametrização de algumas delas com os eixos rotacionados. E por fim, abordaremos algumas curvas especiais.

## 2.1 Parametrização das cônicas

A seguir, conforme Delgado, Frensel e Crissaff (2017) trataremos da parametrização de curvas que são vistas normalmente no ensino básico, que são obtidas através das secções cônicas.

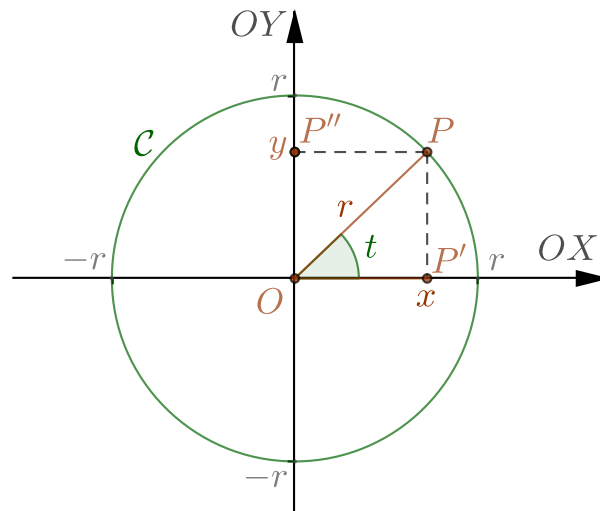
## 2.1.1 Parametrização do círculo

Seja a equação cartesiana do círculo com centro na origem do Plano  $OXY$  e raio  $r > 0$  dada por:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Conforme figura 2 a seguir, o triângulo  $OPP'$  é retângulo em  $P'$ . Assim, fazemos o ângulo  $t = \widehat{P'OP}$  variar no intervalo  $[0, 2\pi]$ , no sentido positivo.

Figura 2 – Círculo  $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$



Fonte – O autor, 2019.

Assim, obtemos  $x$  e  $y$  em função do ângulo  $t$ , que nos fornecerá uma parametrização do círculo, dada por:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

Quando  $t$  percorre a reta real, serão realizadas infinitas voltas sobre o círculo  $\mathcal{C}$ .

Sejam  $a$  e  $b$ , com  $a \neq 0$ , as equações a seguir, são também uma parametrização do círculo.

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = r \cos(at + b) \\ y = r \sin(at + b) \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

E conforme  $t$  percorre todos os valores em  $\left[-\frac{b}{a}, \frac{2\pi - b}{a}\right)$ , o ponto  $P = (r \cos(at + b), r \sin(at + b))$  percorre todos os pontos do círculo. Note, que é válida a seguinte relação:

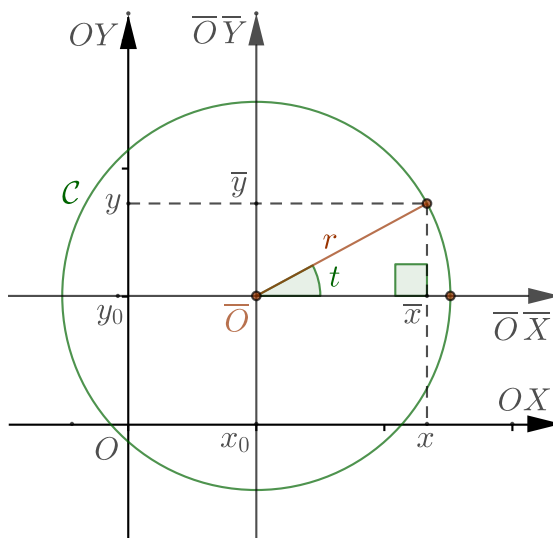
$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2(at + b) + r^2 \cdot \sin^2(at + b) = r^2(\cos^2(at + b) + \sin^2(at + b)) = r^2$$

Seja agora, o círculo de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $r > 0$ . Assim, sua equação cartesiana será:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Por uma translação do sistema de eixos  $OXY$ , obtemos um novo sistema de eixos  $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ , onde  $\overline{O} = (x_0, y_0)$  é o centro do círculo, conforme figura 3.

Figura 3 – Círculo  $\mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$



Fonte – O autor, 2019.

Nessas coordenadas a equação cartesiana do círculo será:  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2$ , pois:

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_0 \\ \bar{y} = y - y_0 \end{cases}$$

Sabendo que  $\bar{x} = r \cos t$  e  $\bar{y} = r \sin t$ , obtemos:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \bar{x} = r \cos t \Rightarrow x - x_0 = r \cos t \Rightarrow x = x_0 + r \cos t \\ \bar{y} = r \sin t \Rightarrow y - y_0 = r \sin t \Rightarrow y = y_0 + r \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

**Exemplo 2.5.** Parametrizando o círculo dado pela equação:  $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$ , devemos encontrar sua forma canônica. Manipulando algebricamente a equação, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 = 0 &\iff x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 1 - 4 + 1 = 0 \\ &\iff (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{aligned}$$

Portanto, temos um círculo com centro no ponto  $(x_0, y_0) = (-1, 2)$  e raio  $r = 2$ , cuja forma paramétrica será:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = -1 + 2 \cos t \\ y = 2 + 2 \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

### 2.1.2 Parametrização da elipse

Uma elipse com centro na origem do plano ortogonal  $OXY$  e reta focal igual ao eixo  $OX$ , tem equação cartesiana dada por:

$$\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Em que o número  $a$  é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal e  $b$  é a distância do centro aos vértices sobre a reta não focal. Fazendo  $\alpha = \frac{x}{a}$  e  $\beta = \frac{y}{b}$ , teremos:  $c : \alpha^2 + \beta^2 = 1$  que é um círculo de centro na origem e raio  $r = 1$ . Sabemos que duas possíveis parametrizações desse círculo são:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \alpha = \cos t \\ \beta = \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} : \begin{cases} \alpha = \sin t \\ \beta = \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

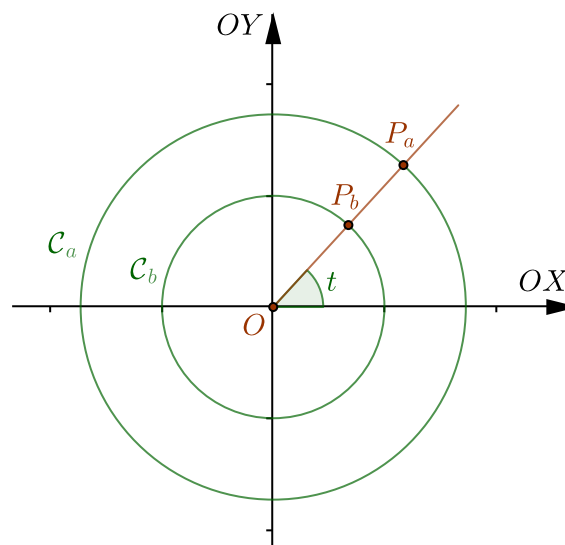
Portanto, conclui-se que

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathcal{E} : \begin{cases} x = a \sin t \\ y = b \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

são possíveis parametrizações da elipse.

O parâmetro  $t$  no caso da elipse, tem o seguinte significado geométrico:

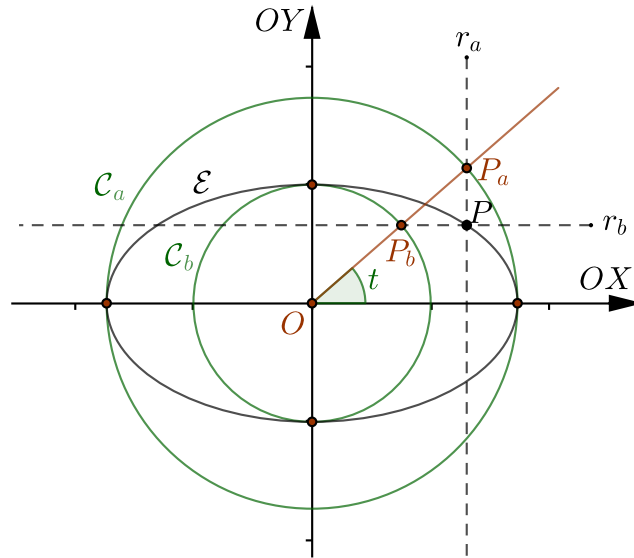
Figura 4 – Círculos  $\mathcal{C}_a$  e  $\mathcal{C}_b$ ,  $a > b > 0$ .



Fonte – O autor, 2019.

Conforme figura 4, sejam  $c_a : x^2 + y^2 = a^2$  o círculo com centro na origem e raio  $a$  e  $c_b : x^2 + y^2 = b^2$  o círculo com centro na origem e raio  $b$ , com  $a > b$ . Considere os pontos  $P_a = (a \cos t, a \sin t) \in c_a$  e  $P_b = (b \cos t, b \sin t) \in c_b$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , tais que os vetores  $\overrightarrow{OP_a}$  e  $\overrightarrow{OP_b}$  fazem um ângulo  $t$ , no sentido positivo, com o semieixo positivo  $OX$ .

Figura 5 – Construção da elipse  $\mathcal{E}$



Fonte – O autor, 2019.

Na figura 5, a interseção da reta  $r_a : x = a \cos t$  paralela ao eixo- $OY$  que passa pelo ponto  $P_a$ , com a reta  $r_b : y = b \sin t$  paralela ao eixo- $OX$  que passa por  $P_b$ , nos dá o ponto  $P = (a \cos t, b \sin t)$  que pertence a elipse  $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Agora, seja a elipse  $\mathcal{E} : \frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$ , com centro no ponto  $(x_o, y_o)$ . Por uma translação do sistema de coordenadas  $OXY$ , obtém-se o sistema  $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$  em que  $\overline{O} = (x_o, y_o)$ . Assim, teremos que neste sistema a equação da elipse será:  $\mathcal{E} : \frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1$ . Portanto:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} \overline{x} = a \cos t \\ \overline{y} = b \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathcal{E} : \begin{cases} \overline{x} = a \sin t \\ \overline{y} = b \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

são parametrizações da elipse nas coordenadas  $\overline{x}$  e  $\overline{y}$ , mas sabemos que:  $\overline{x} = x - x_o$  e  $\overline{y} = y - y_o$ , logo:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x = x_o + a \cos t \\ y = y_o + b \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathcal{E} : \begin{cases} x = x_o + a \sin t \\ y = y_o + b \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

são parametrizações da elipse nas coordenadas  $x$  e  $y$ .

**Exemplo 2.6.** Parametrizaremos a elipse  $9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 11 = 0$ . obteremos sua forma canônica a seguir:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 11 = 0 &\iff 9(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 4y + 4) = 36 \\ &\iff 9(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 36 \\ &\iff \frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1 \end{aligned}$$

Portanto, a elipse possui centro em  $\bar{O} = (1, -2)$ , tendo por parametrização:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x = 1 + 2 \cos t \\ y = -2 + 3 \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathcal{E} : \begin{cases} x = 1 + 2 \sin t \\ y = -2 + 3 \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

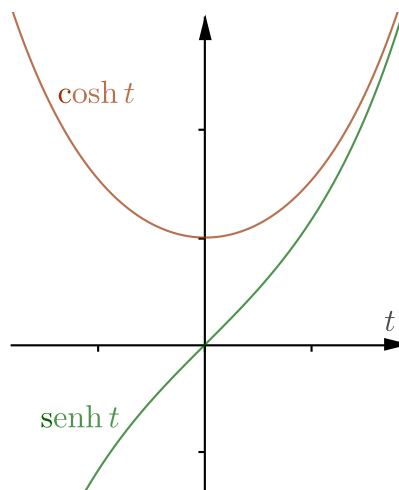
### 2.1.3 Parametrização da hipérbole

Para realizarmos a parametrização da hipérbole, precisamos conhecer as funções de seno e cosseno hiperbólicos a seguir:

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{com } t \in \mathbb{R}$$

Seus gráficos são os seguintes:

Figura 6 – Gráficos de  $\sinh t$  e  $\cosh t$



Fonte – O autor, 2019.

Note também que:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad (2.7)$$

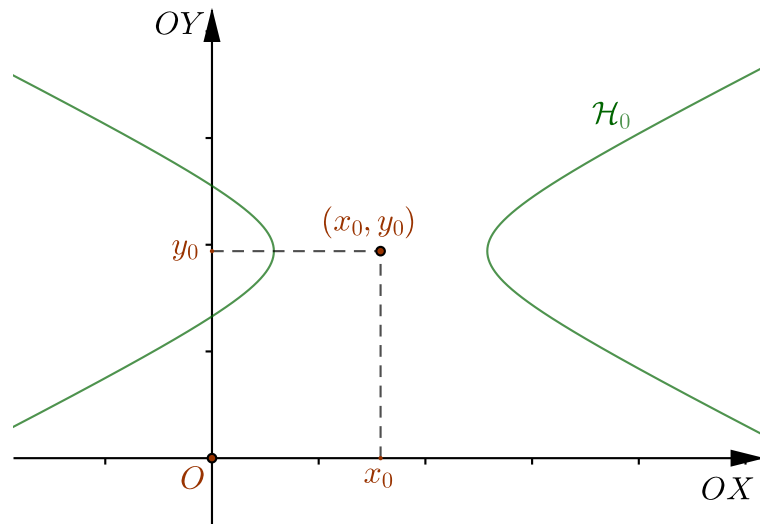
Portanto, seja a hipérbole dada por  $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$  com  $a = b = 1$ , ou seja equilátera e eixo focal  $OX$ . Temos que os pontos  $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$  e  $(x, y) = (-\cosh t, \sinh t)$  pertencem a hipérbole  $\mathcal{H}$ , pois satisfazem (2.7). Nota-se do gráfico da figura 6 que variando

$t$  em  $\mathbb{R}$ ,  $\cosh t$  percorre o intervalo  $[1, +\infty]$ , enquanto  $\sinh t$  percorre todos os reais. Logo, o ponto  $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$  nos fornece o ramo  $\mathcal{H}_+$  da hipérbole, que intersecta o semieixo positivo  $OX$ . Analogamente  $(x, y) = (-\cosh t, \sinh t)$  nos fornecerá o ramo  $\mathcal{H}_-$  da hipérbole, que intersecta o semieixo negativo  $OX$ . Assim, teremos a parametrização:

$$\mathcal{H}_+ \cup \mathcal{H}_- = \mathcal{H} : \begin{cases} x = \pm \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Agora, tomemos a hipérbole  $\mathcal{H} : \alpha^2 - \beta^2 = 1$ . Fazendo  $\alpha = \frac{x - x_0}{a}$  e  $\beta = \frac{y - y_0}{b}$ , obtemos a hipérbole  $\mathcal{H}_0 : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$  que possui centro  $(x_0, y_0)$  e eixo focal paralelo ao eixo  $OX$ , conforme figura 7.

Figura 7 – Gráfico da hipérbole  $\mathcal{H}_0 : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ .



Fonte – O autor, 2019.

Assim,  $(x, y) \in \mathcal{H}_0$  se, e só se,  $(\alpha, \beta) = \left(\frac{x - x_0}{a}, \frac{y - y_0}{b}\right) \in \mathcal{H}$ . Mas, sabemos que a parametrização de  $\mathcal{H}$  é dada por

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \alpha = \pm \cosh t \\ \beta = \sinh t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Substituindo  $\alpha = \frac{x - x_0}{a}$  e  $\beta = \frac{y - y_0}{b}$ , temos:

$$\mathcal{H}_0 : \begin{cases} \alpha = \pm \cosh t \Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = \pm \cosh t \Rightarrow x = x_0 \pm a \cosh t \\ \beta = \sinh t \Rightarrow \frac{y - y_0}{b} = \sinh t \Rightarrow y = y_0 + b \sinh t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

De modo análogo, fazendo  $\alpha = \frac{y - y_0}{a}$  e  $\beta = \frac{x - x_0}{b}$ , obtemos que a hipérbole com centro em  $(x_0, y_0)$  e eixo focal paralelo ao eixo  $OY$  tem a seguinte parametrização:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \beta = \sinh t \Rightarrow \frac{x - x_0}{b} = \sinh t \Rightarrow x = x_0 + b \sinh t \\ \alpha = \pm \cosh t \Rightarrow \frac{y - y_0}{a} = \pm \cosh t \Rightarrow y = y_0 \pm a \cosh t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

**Exemplo 2.7.** Parametrizaremos a hipérbole  $\mathcal{H} : x^2 - 2x - 4y^2 + 24y - 39 = 0$ . Precisamos encontrar sua forma canônica, portanto

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 4y^2 + 24y - 39 = 0 &\iff (x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 6y + 9) - 1 + 36 - 39 = 0 \\ &\iff (x - 1)^2 - 4(y - 3)^2 = 4 \\ &\iff \frac{(x - 1)^2}{4} - (y - 3)^2 = 1 \end{aligned}$$

Temos portanto, uma hipérbole com centro em  $(1, 3)$  com eixo focal paralelo ao eixo  $OX$  e sua parametrização será

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x = x_0 \pm a \cosh t \Rightarrow x = 1 \pm 2 \cosh t \\ y = y_0 + b \sinh t \Rightarrow y = 3 + \sinh t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

#### 2.1.4 Parametrização da parábola

A parábola se diferencia das cônicas anteriores, devido ao fato de poder ser escrita explicitando uma de suas variáveis, em função da outra. Ou seja, uma parábola com eixo focal paralelo ao eixo  $OY$  e vértice em  $(x_0, y_0)$  possui a equação cartesiana:

$$k(y - y_0) = (x - x_0)^2 \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{1}{k}(x - x_0)^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{k}(x - x_0)^2 + y_0 \quad (2.10)$$

Tomando o parâmetro  $t = x - x_0$ , obtemos a seguinte parametrização:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} t = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + t \\ y = \frac{1}{k}(x - x_0)^2 + y_0 \Rightarrow y = \frac{1}{k}t^2 + y_0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

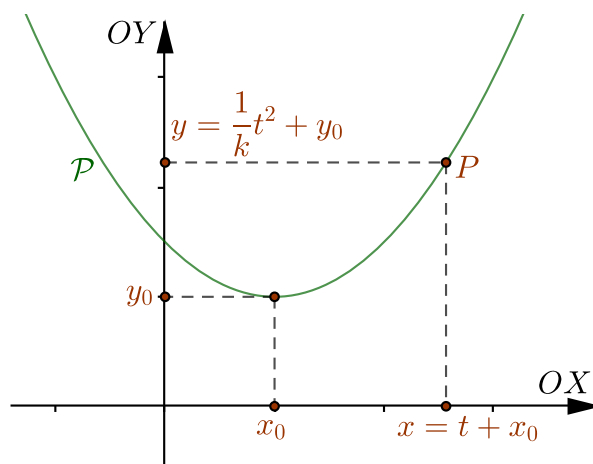
De modo análogo, a parametrização de uma parábola com eixo focal paralelo ao eixo  $OX$  e vértice no ponto  $(x_0, y_0)$  dada por  $x = \frac{1}{k}(y - y_0)^2 + x_0$ , será

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = \frac{1}{k}(y - y_0)^2 + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{k}t^2 + x_0 \\ t = y - y_0 \Rightarrow y = y_0 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

**Exemplo 2.8.** Vamos parametrizar  $\mathcal{P} : y^2 - 4x + 2y = 0$ . Portanto, completando quadrados temos

$$\begin{aligned} y^2 - 4x + 2y = 0 &\iff (y^2 + 2y + 1) - 4x - 1 = 0 \\ &\iff (y + 1)^2 = 4x + 1 \\ &\iff (y + 1)^2 = 4 \left( x + \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

Figura 8 – Parábola  $\mathcal{P} : k(y - y_0) = (x - x_0)^2$



Fonte – O autor, 2019.

Nota-se que  $\mathcal{P}$  possui vértice no ponto  $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$  e eixo focal  $y = -1$  paralelo ao eixo- $OX$ . Assim, fazendo  $t = y + 1$  obtemos sua forma parametrizada, conforme (2.12)

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = \frac{1}{4}(y + 1)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{4} \\ t = y + 1 \Rightarrow y = t - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

## 2.2 Parametrização das cônicas rotacionadas

Anteriormente vimos como parametrizar as cônicas, inclusive após uma translação. Nesta seção, ainda conforme Delgado, Frensel e Crissaff (2017), veremos como parametrizar uma cônica que, além de sofrer uma translação, ocorre também uma rotação da curva. Ou seja, as cônicas que possuem a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ com } B \neq 0. \quad (2.14)$$

Em Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 182) temos que o indicador dessa equação é dado por  $I = B^2 - 4AC$ , que nos casos não degenerados representa

$$\begin{cases} I = B^2 - 4AC > 0 \implies \text{A curva é do tipo hiperbólico.} \\ I = B^2 - 4AC < 0 \implies \text{A curva é do tipo elíptico.} \\ I = B^2 - 4AC = 0 \implies \text{A curva é do tipo parabólico.} \end{cases} \quad (2.15)$$

E também que a matriz da forma quadrática  $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$  é dada por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$$

Seja  $O\bar{X}\bar{Y}$  o sistema de eixos obtido girando os eixos  $OX$  e  $OY$  do ângulo  $\theta \in [0, 2\pi)$  no sentido positivo. Nesse sistema de coordenadas conseguimos escrever a equação dessa curva na forma canônica, através da seguinte expressão

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \langle \mathcal{B}^t(D, E), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle + F = 0. \quad (2.16)$$

Em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores da matriz  $\mathcal{A}$ , e  $\mathcal{B}^t$  é a matriz transposta da *matriz de passagem*

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

que leva o sistema de coordenadas  $O\bar{X}\bar{Y}$  no sistema de coordenadas  $OXY$ .

Sendo  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  autovetores relativos aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente. Podemos considerar  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  e tomar o autovetor unitário de  $\vec{u}_1$  ou  $\vec{u}_2$ , e gerar a seguinte igualdade

$$\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = (\cos \theta, \sin \theta) \text{ ou } \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = (\cos \theta, \sin \theta). \quad (2.18)$$

Ou seja, escolher o autovetor unitário que esteja no primeiro quadrante do sistema de coordenadas  $OXY$ . Conclui-se portanto que tais autovetores possuem mesma direção dos eixos  $O\bar{X}$  e  $O\bar{Y}$ .

Ainda na equação 2.14, tomando o ângulo  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , no sentido positivo entre o autovetor unitário obtido em 2.18 e o eixo  $OX$ , segundo Delgado, Frensel e Crissaff (2017, p. 182) temos os seguintes casos

$$A = C \iff \theta = \frac{\pi}{4} \text{ e } A \neq C \iff \operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C}.$$

Assim, nos casos em que  $A \neq C$ , basta verificar se a igualdade obtida em 2.18 satisfaz a igualdade

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{B}{A - C}. \quad (2.19)$$

Por fim, chegando a equação 2.16 e realizando sua parametrização no sistema  $O\bar{X}\bar{Y}$ , basta que voltemos ao sistema  $OXY$  utilizando a equação

$$(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} (\bar{x}, \bar{y}), \quad (2.20)$$

### 2.2.1 Parametrização da elipse rotacionada

Vamos parametrizar a elipse dada pela equação  $\mathcal{E} : 7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$ . Temos que  $A = 7$ ,  $B = -6\sqrt{3}$ ,  $C = 13$ ,  $D = 0$ ,  $E = 0$  e  $F = -16$ .

Logo  $I = B^2 - 4AC = 108 - 364 = -256 < 0$ , e de fato a curva é do tipo elíptico. Temos que a matriz da forma quadrática da equação é dada por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$$

Agora, vamos encontrar os autovalores de  $\mathcal{A}$ , que serão as raízes do polinômio característico de  $\mathcal{A}$  dado por

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 7 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & \lambda - 13 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 64$$

Portanto, suas raízes serão

$$\lambda = \frac{20 \pm \sqrt{144}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{20 - 12}{2} = 4 \text{ e } \lambda_2 = \frac{20 + 12}{2} = 16.$$

Os autovetores  $\vec{u}_1 = (x, y)$  relativos ao autovalor  $\lambda_1 = 4$  serão as soluções não triviais do sistema de equações

$$\begin{cases} (\lambda_1 - 7)x + 3\sqrt{3}y = 0 \\ 3\sqrt{3}x + (\lambda_1 - 13)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + 3\sqrt{3}y = 0 \\ 3\sqrt{3}x - 9y = 0 \end{cases} \iff x = \sqrt{3}y$$

Assim, os autovetores relativos ao autovalor  $\lambda_1 = 4$  são da forma  $\vec{u}_1 = (\sqrt{3}y, y) = y(\sqrt{3}, 1)$ , com  $y \in \mathbb{R}$ . Encontrando o autovetor unitário de  $\vec{u}_1$  para  $y = 1$ , obtemos

$$\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{(\sqrt{3}, 1)}{2} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Como sabemos, os autovetores  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  têm a mesma direção dos eixos  $O\bar{X}$  e  $O\bar{Y}$ , portanto eles são perpendiculares, e podemos afirmar que um autovetor unitário relativo ao autovalor  $\lambda_2$  será

$$\frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Notemos ainda, que tomando  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  no sentido positivo, no autovetor unitário relativo à  $\lambda_1$  acima, podemos obter a igualdade

$$\left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} \right), \text{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right) \right).$$

Verificando a igualdade 2.19, obtemos

$$\text{tg } 2\theta = \text{tg} \left( \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3} = \frac{B}{A - C}.$$

Assim, nas coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ , conforme 2.16 a equação da elipse será

$$4\bar{x}^2 + 16\bar{y}^2 + \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} (0, 0), (\bar{x}, \bar{y}) \right\rangle - 16 = 0 \iff \quad (2.21)$$

$$4\bar{x}^2 + 16\bar{y}^2 - 16 = 0$$

Agora, manipulando algebricamente 2.21 vamos encontrar sua forma canônica. Logo

$$4\bar{x}^2 + 16\bar{y}^2 - 16 = 0 \iff 4\bar{x}^2 + 16\bar{y}^2 = 16 \iff \frac{\bar{x}^2}{4} + \bar{y}^2 = 1 \quad (2.22)$$

Que tem por parametrização:

$$\begin{cases} \bar{x} = 2 \cos t \\ \bar{y} = \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (2.23)$$

Precisamos entretanto, voltar as coordenadas  $(x, y)$ . Utilizando a equação 2.20, e sabendo que  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  e  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  obtemos

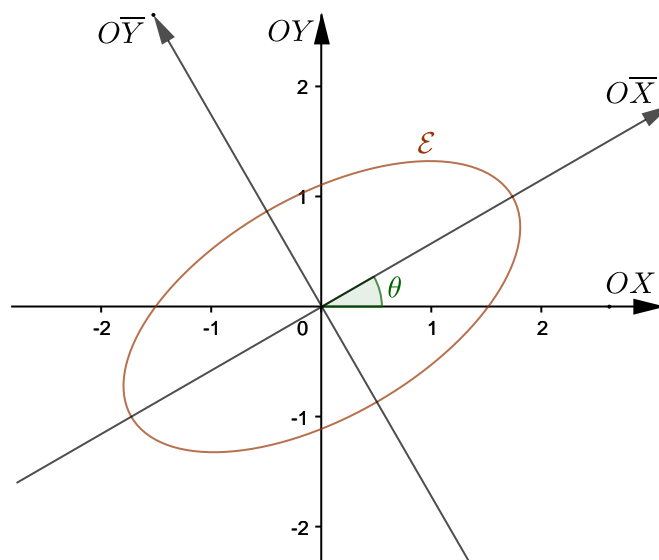
$$(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} (2 \cos t, \sin t) \iff (x, y) = \left( \frac{2\sqrt{3} \cos t - \sin t}{2}, \frac{2 \cos t + \sqrt{3} \sin t}{2} \right)$$

Conclui-se portanto, que a parametrização da elipse  $\mathcal{E}$  nas coordenadas  $(x, y)$  será:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3} \cos t - \sin t}{2} \\ y = \frac{2 \cos t + \sqrt{3} \sin t}{2} \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

Veja seu gráfico na figura a seguir.

Figura 9 – Elipse no sistema de coordenadas  $O\bar{X}\bar{Y}$ .



Fonte – O autor, 2019.

## 2.2.2 Parametrização da hipérbole rotacionada

Vamos agora, encontrar as equações paramétricas da hipérbole  $\mathcal{H} : -7x^2 + 8xy - y^2 + \sqrt{5}x + \sqrt{5}y = 0$ . Temos que  $A = -7$ ,  $B = 8$ ,  $C = -1$ ,  $D = \sqrt{5}$ ,  $E = \sqrt{5}$  e  $F = 0$ .

Assim,  $I = B^2 - 4AC = 64 - 28 = 36 > 0$  e de fato a equação representa uma hipérbole. A matriz  $\mathcal{A}$  da forma quadrática da equação  $\mathcal{H}$  é dada por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontrando os autovalores de  $\mathcal{A}$ , obtemos

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 7 & -4 \\ -4 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0 \iff \lambda = \frac{-8 \pm 10}{2}.$$

Logo,  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -9$ . Os autovetores  $\vec{u}_1 = (x, y)$  relativos a  $\lambda_1 = 1$  são as soluções não triviais do sistema de equações

$$\begin{cases} (\lambda_1 + 7)x - 4y = 0 \\ -4x + (\lambda_1 + 1)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x - 4y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases} \iff y = 2x.$$

Assim, os autovetores relativos ao autovalor  $\lambda_1 = 1$  são da forma  $\vec{u}_1 = (x, 2x) = x(1, 2)$ , com  $x \in \mathbb{R}$ . Encontrando o autovetor unitário de  $\vec{u}_1$  para  $x = 1$ , obtemos

$$\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{(1, 2)}{\sqrt{5}} = \left( \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right).$$

Agora, tendo que  $A \neq C$  e o autovetor unitário de  $\vec{u}_1$  acima pertence ao primeiro quadrante do sistema  $OXY$ , e gerando a igualdade 2.18, obtemos

$$(\cos \theta, \sin \theta) = \left( \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \implies \operatorname{tg} \theta = 2, \text{ com } \theta \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right).$$

Utilizando a propriedade trigonométrica da tangente de um arco duplo, verifiquemos a igualdade 2.19:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3} = \frac{B}{A - C}.$$

Portanto, a equação de  $\mathcal{H}$  no sistema de coordenadas  $O\bar{X}\bar{Y}$  é dada por

$$\begin{aligned} \bar{x}^2 - 9\bar{y}^2 + \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5 \\ -2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{pmatrix} (\sqrt{5}, \sqrt{5}), (\bar{x}, \bar{y}) \right\rangle &= 0 \iff \\ \bar{x}^2 - 9\bar{y}^2 + \langle (3, -1), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle &= 0 \iff \\ \bar{x}^2 - 9\bar{y}^2 + 3\bar{x} - \bar{y} &= 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Que tem por forma canônica

$$\begin{aligned}
 \bar{x}^2 - 9\bar{y}^2 + 3\bar{x} - \bar{y} = 0 &\iff \left(\bar{x}^2 + 3\bar{x} + \frac{9}{4}\right) - 9\left(\bar{y}^2 + \frac{\bar{y}}{9} + \left(\frac{1}{18}\right)^2\right) - \frac{9}{4} + \frac{1}{36} = 0 \\
 &\iff \left(\bar{x} + \frac{3}{2}\right)^2 - 9\left(\bar{y} + \frac{1}{18}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{36} = 0 \\
 &\iff \left(\bar{x} + \frac{3}{2}\right)^2 - 9\left(\bar{y} + \frac{1}{18}\right)^2 = \frac{20}{9} \\
 &\iff \frac{\left(\bar{x} + \frac{3}{2}\right)^2}{9} - \left(\bar{y} + \frac{1}{18}\right)^2 = \frac{20}{81} \\
 &\iff \frac{\left(\bar{x} + \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{20}{9}} - \frac{\left(\bar{y} + \frac{1}{18}\right)^2}{\frac{20}{81}} = 1.
 \end{aligned}$$

Assim, as equações paramétricas de  $\mathcal{H}$  no sistema  $O\bar{X}\bar{Y}$  são:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \bar{x} = -\frac{3}{2} \pm \frac{2\sqrt{5}}{3} \cosh t = \frac{-9 \pm 4\sqrt{5} \cosh t}{6} \\ \bar{y} = -\frac{1}{18} + \frac{2\sqrt{5}}{9} \sinh t = \frac{-1 + 4\sqrt{5} \sinh t}{18} \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Agora, voltemos ao sistema de coordenadas  $OXY$  utilizando a equação 2.20, e sabendo que  $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  e  $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$  teremos

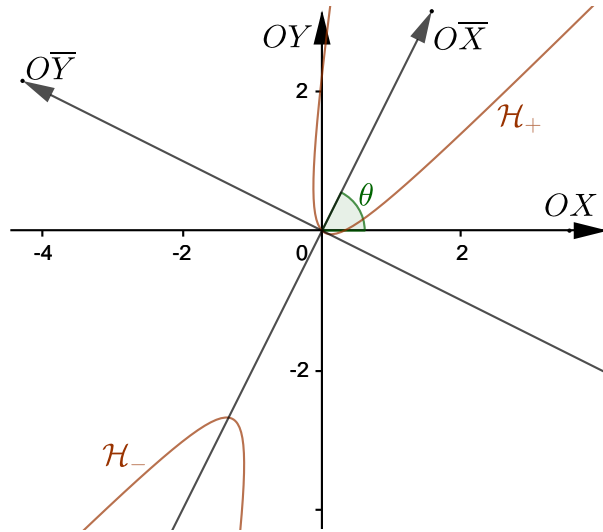
$$\begin{aligned}
 (x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-9 \pm 4\sqrt{5} \cosh t}{6}, \frac{-1 + 4\sqrt{5} \sinh t}{18} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{-9\sqrt{5} \pm 20 \cosh t}{30} + \frac{2\sqrt{5} - 40 \sinh t}{90}, \frac{-18\sqrt{5} \pm 40 \cosh t}{30} + \frac{-\sqrt{5} + 20 \sinh t}{90} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{-27\sqrt{5} \pm 60 \cosh t + 2\sqrt{5} - 40 \sinh t}{90}, \frac{-54\sqrt{5} \pm 120 \cosh t - \sqrt{5} + 20 \sinh t}{90} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{5} \pm 12 \cosh t - 8 \sinh t}{18}, \frac{-11\sqrt{5} \pm 24 \cosh t + 4 \sinh t}{18} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Logo, concluímos que a parametrização da hipérbole  $\mathcal{H}$  no sistema  $OXY$  é:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x = \frac{-5\sqrt{5} \pm 12 \cosh t - 8 \sinh t}{18} \\ y = \frac{-11\sqrt{5} \pm 24 \cosh t + 4 \sinh t}{18} \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Veja seu gráfico na figura a seguir.

Figura 10 – Hipérbole no sistema de coordenadas  $O\bar{X}\bar{Y}$ .



Fonte – O autor, 2019.

### 2.2.3 Parametrização da parábola rotacionada

Vamos parametrizar a parábola de equação  $\mathcal{P} : x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 6\sqrt{3}x + 3 = 0$ . Seus coeficientes são  $A = 1$ ,  $B = 2\sqrt{2}$ ,  $C = 2$ ,  $D = 6\sqrt{3}$ ,  $E = 0$  e  $F = 3$ . Assim  $I = B^2 - 4AC = 8 - 8 = 0$  e a equação representa de fato uma parábola. Seja  $\mathcal{A}$  a matriz da forma quadrática de  $\mathcal{P}$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $\mathcal{A}$  são as raízes de seu polinômio característico, logo

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \lambda - 2 \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 3\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda - 3) = 0.$$

Portanto,  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = 0$  são os autovalores da matriz  $\mathcal{A}$ . E os autovetores  $\vec{u}_1 = (x, y)$  relativos a  $\lambda_1 = 3$  são as soluções não triviais do sistema de equações:

$$\begin{cases} (\lambda_1 - 1)x - \sqrt{2}y = 0 \\ -\sqrt{2}x + (\lambda_1 - 2)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - \sqrt{2}y = 0 \\ -\sqrt{2}x + y = 0 \end{cases} \iff y = \sqrt{2}x$$

Desse modo, os autovetores relativos ao autovalor  $\lambda_1 = 3$  são da forma  $\vec{u}_1 = (x, \sqrt{2}x) = x(1, \sqrt{2})$ , com  $x \in \mathbb{R}$ . E para  $x = 1$  obtemos o vetor unitário

$$\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{(1, \sqrt{2})}{\sqrt{3}} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

Tomando  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , consideremos a seguinte igualdade:

$$(\cos \theta, \sin \theta) = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \iff \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{2},$$

que satisfaz a equação 2.19, pois

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{2\sqrt{2}}{1 - 2} = -2\sqrt{2} = \frac{B}{A - C}$$

Portanto, encontrando a equação de  $\mathcal{P}$  nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  obtemos

$$\begin{aligned} 3\bar{x}^2 + \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} (6\sqrt{3}, 0), (\bar{x}, \bar{y}) \right\rangle + 3 &= 0 \iff \\ 3\bar{x}^2 + \langle (6, -6\sqrt{2}), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle + 3 &= 0 \iff \\ 3\bar{x}^2 + 6\bar{x} - 6\sqrt{2}\bar{y} + 3 &= 0. \end{aligned}$$

E sua forma canônica será

$$\begin{aligned} 3\bar{x}^2 + 6\bar{x} - 6\sqrt{2}\bar{y} + 3 &= 0 \iff \bar{x}^2 + 2\bar{x} - 2\sqrt{2}\bar{y} + 1 = 0 \\ &\iff \bar{x}^2 + 2\bar{x} + 1 = 2\sqrt{2}\bar{y} \\ &\iff (\bar{x} + 1)^2 = 2\sqrt{2}\bar{y} \end{aligned}$$

Parametrizando  $\mathcal{P}$  nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , façamos  $t = \bar{x} + 1 \iff \bar{x} = t - 1$ , portanto

$$\begin{aligned} (\bar{x} + 1)^2 = 2\sqrt{2}\bar{y} &\iff t^2 = 2\sqrt{2}\bar{y} \\ &\iff \bar{y} = \frac{1}{2\sqrt{2}}t^2 \\ &\iff \bar{y} = \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 \end{aligned}$$

Logo, suas equações paramétricas são:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \bar{x} = t - 1 \\ \bar{y} = \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Agora, voltemos as coordenadas  $x$  e  $y$  utilizando a equação 2.20, e sabendo que

$$(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right),$$

temos

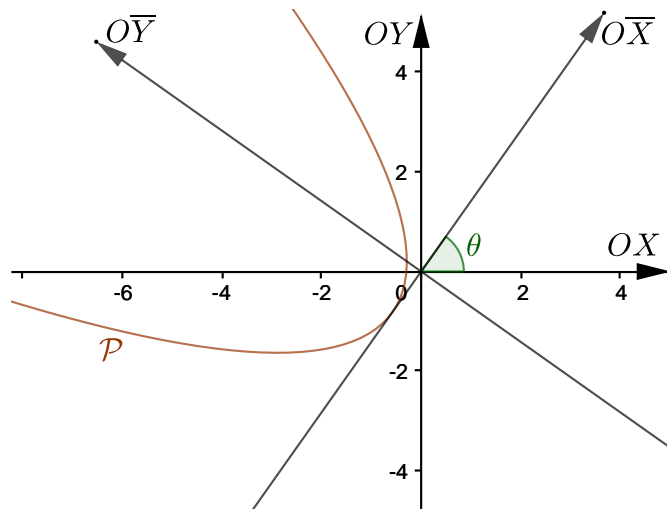
$$\begin{aligned} (x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \left( t - 1, \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 \right) \\ &= \left( \frac{\sqrt{3}t - \sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}t^2, \frac{\sqrt{6}t - \sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{12}t^2 \right) \\ &= \left( \frac{2\sqrt{3}t - 2\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}t^2, \frac{4\sqrt{6}t - 4\sqrt{6}}{12} + \frac{\sqrt{6}}{12}t^2 \right) \\ &= \left( \frac{-\sqrt{3}t^2 + 2\sqrt{3}t - 2\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}t^2 + 4\sqrt{6}t - 4\sqrt{6}}{12} \right). \end{aligned}$$

Assim, as equações paramétricas de  $\mathcal{P}$  nas coordenadas  $x$  e  $y$  são:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = \frac{-\sqrt{3}t^2 + 2\sqrt{3}t - 2\sqrt{3}}{12} \\ y = \frac{\sqrt{6}t^2 + 4\sqrt{6}t - 4\sqrt{6}}{12} \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Veja seu gráfico na figura a seguir.

Figura 11 – Parábola no sistema de coordenadas  $O\bar{X}\bar{Y}$ .



Fonte – O autor, 2019.

## 2.3 Curvas especiais

Nesta seção, abordaremos curvas que são formadas pelo movimento de um ponto fixado numa circunferência, no instante em que a mesma gira. Também estudaremos a curva de Agnesi e as de Bézier. Tais abordagens podem ser vista em (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2017) e (ALVES, 2014).

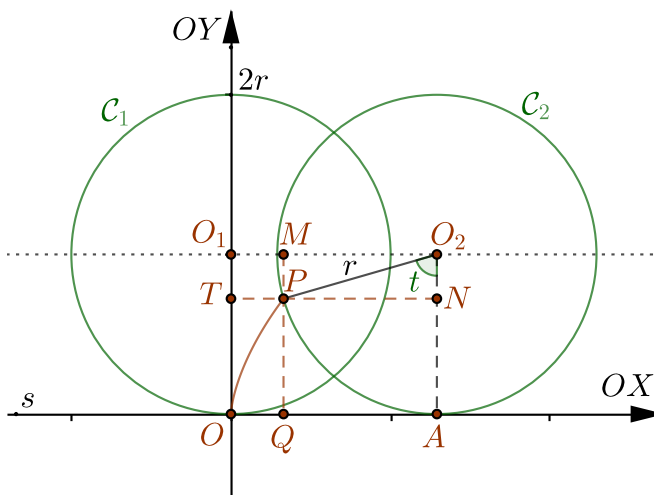
### 2.3.1 Cicloide

A cicloide é obtida por uma rotação do círculo sobre uma reta, sem deslizar, em que seu traço é realizado por um ponto fixo pertencente ao círculo. Sejam o círculo  $\mathcal{C}$ , a reta  $s$  e o ponto  $P$  tais elementos. De modo a simplificar os cálculos para obtenção de sua parametrização, passemos a considerar:

- O eixo  $OX$  como a reta  $s$ , ou seja  $s : y = 0$ ;
- O círculo  $\mathcal{C}_1$  de raio  $r$  e centro em  $(0, r)$ , representando o círculo  $\mathcal{C}$ , quando passando pela origem do plano cartesiano;
- E o ponto genérico  $P = (x, y)$  estando na origem do plano, nesse momento.

Seja  $\mathcal{C}_2$  a representação do círculo  $\mathcal{C}$  após  $\mathcal{C}_1$  rotacionar, conforme figura 12.

Figura 12 – Desenvolvimento da cicloide



Fonte – O autor, 2019.

Perceba que o segmento  $\overline{OA}$  tem o mesmo comprimento do arco de  $A$  a  $P$  sobre  $\mathcal{C}_2$ . E como o ângulo central relativo ao arco de  $A$  a  $P$  mede  $t$ , o arco de  $A$  a  $P$  tem comprimento  $rt$ . Assim, teremos:

$$\begin{aligned} |OA| = |OQ| \pm |QA| &\iff |OA| = |OQ| \pm |PN| \\ &\iff rt = |OQ| \pm |r \operatorname{sen} t| \\ &\iff x = rt \pm r |\operatorname{sen} t| \end{aligned}$$

Tem-se também que

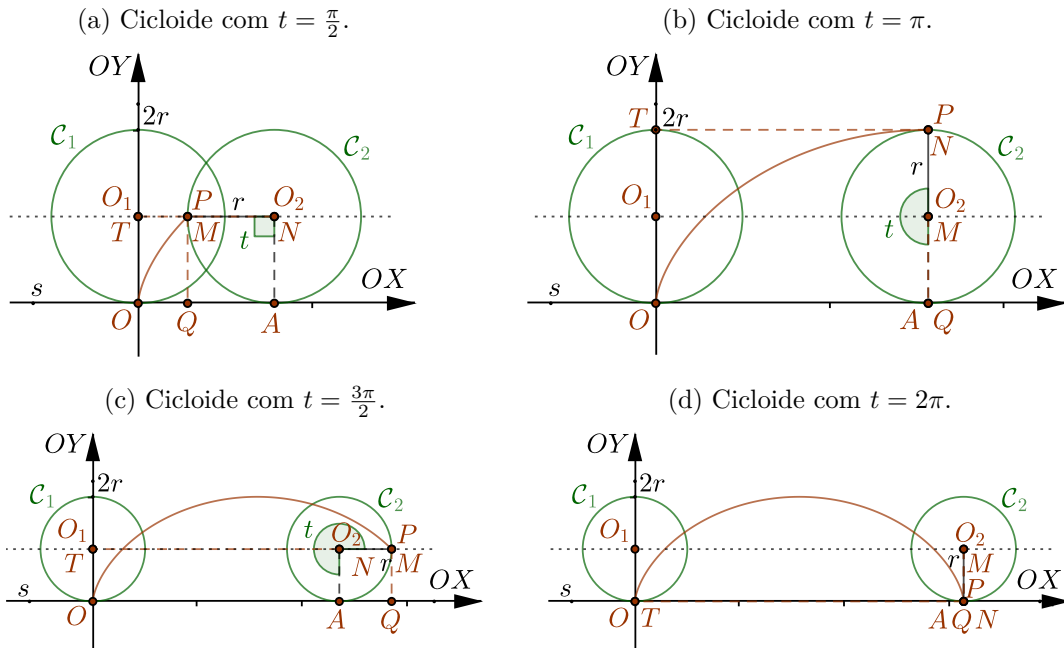
$$\begin{aligned} |OO_1| = |OT| \pm |TO_1| &\iff |OO_1| = |OT| \pm |NO_2| \\ &\iff r = |OT| \pm |r \operatorname{cos} t| \\ &\iff y = r \pm r |\operatorname{cos} t| \end{aligned}$$

Em que o sinal depende da posição de  $Q$  na semirreta  $\overrightarrow{OA}$  e da posição de  $T$  na semirreta  $\overrightarrow{OO_1}$ , que por consequência variam de acordo com o ângulo  $\widehat{AO_2P}$ . Realizando a análise de sinal do  $\operatorname{sen} t$  e  $\operatorname{cos} t$  nos intervalos  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ,  $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$  e  $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ , obtemos a parametrização da cicloide dada por

$$\begin{cases} x = rt - r \operatorname{sen} t \\ y = r - r \operatorname{cos} t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad (2.25)$$

Veja nas figuras a seguir o desenvolvimento da cicloide.

Figura 13 – Desenvolvimento da cicloide.



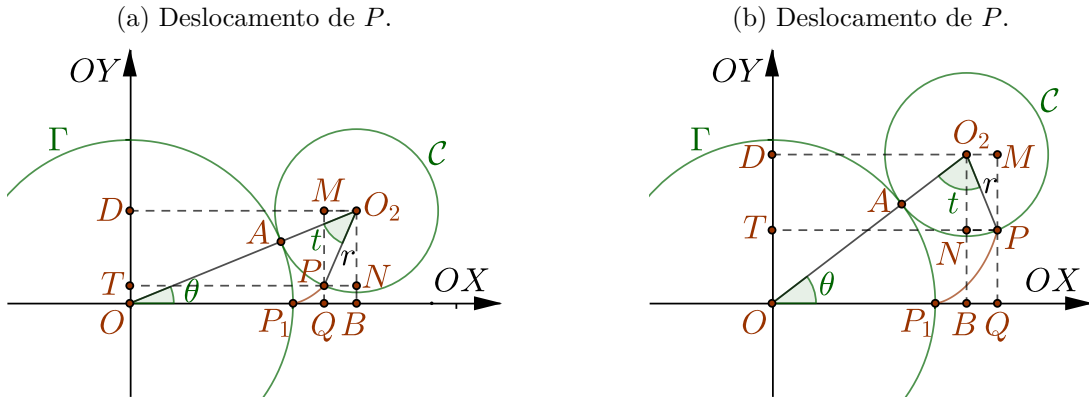
Fonte – O autor, 2019.

### 2.3.2 Epicicloide

Sejam dois círculos tangentes postos um ao lado do outro, a epicicloide é gerada quando um deles rola sobre o outro, sem deslizar e mantendo apenas um ponto comum. Sejam  $\Gamma$  e  $\mathcal{C}$  tais círculos. De modo a simplificar os cálculos, coloquemos o círculo  $\Gamma$  de raio  $R$ , tendo centro na origem do plano  $OXY$  e  $\mathcal{C}$  de raio  $r$ , tendo centro em  $(R + r, 0)$ . Seja  $P$  o ponto em que  $\Gamma$  e  $\mathcal{C}$  se tocam na posição inicial, assim, os demais pontos de  $\mathcal{C}$  diferentes de  $P$  estão no exterior de  $\Gamma$ , e a posição inicial de  $P$  será  $P_1 = (R, 0)$ . Observe as figuras 14a e 14b, temos que  $\mathcal{C}$  rola alguns instantes sobre  $\Gamma$ , no sentido positivo.

Temos os seguintes elementos:  $P = (x, y)$  é o ponto da epicicloide, que estando inicialmente na posição  $P_1$ , descreve um arco de medida  $P_1P$  quando  $\mathcal{C}$  rola um ângulo de medida  $\theta$  sobre  $\Gamma$ ;  $A$  é o ponto de tangencia entre os círculos;  $O_2$  é o centro de  $\mathcal{C}$  que tem por projeções os pontos  $B$  e  $D$  sobre os eixos  $OX$  e  $OY$ ;  $P$  tem por projeções os pontos  $Q = (x, 0)$  e  $T = (0, y)$  sobre os eixos  $OX$  e  $OY$ ; e também  $M$  e  $N$  são projeções de  $P$  sobre os segmentos  $O_2D$  e  $O_2B$ , respectivamente. Seja  $t$  o ângulo  $\widehat{AO_2P}$  descrito pelo ponto  $P$  relacionado à semirreta radial  $OO_2$ .

Figura 14 – Desenvolvimento da epicloide.



Fonte – O autor, 2019.

Queremos obter as coordenadas do ponto  $P$  dependendo de um parâmetro. Note nas figuras 14a e 14b que as posições relativas  $O$ ,  $Q$  e  $B$  e entre  $O$ ,  $T$  e  $D$  variam com o desenvolvimento da epicloide, ou seja, de acordo com o ponto  $P$ , que por sua vez, varia a medida do ângulo  $\widehat{AO_2P} = t$ . Passemos portanto, a analisar os casos em que  $T$  está entre  $O$  e  $D$ ; e  $Q$ ,  $O$  e  $B$  variam entre si. No caso em que  $Q$  está entre  $O$  e  $B$ , conforme figura 14a, temos:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| - |QB| = |OB| - |O_2M|, \\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Observe que quando  $C$  rola sobre  $\Gamma$ , o segmento  $OO_2$  de medida  $R + r$  é a hipotenusa do triângulo retângulo  $OO_2B$ , retângulo em  $B$  e ângulo  $\widehat{BOO_2} = \theta$ . Assim, obtemos que

$$|OB| = (R + r) \cos \theta \quad \text{e} \quad |OD| = |O_2B| = (R + r) \sin \theta. \quad (2.27)$$

Temos que o ângulo  $\widehat{OO_2D} = \theta$ , portanto no triângulo  $PNO_2$ , retângulo em  $N$ , o ângulo  $\widehat{PO_2N}$  mede

$$\widehat{PO_2N} = \frac{\pi}{2} - (t + \theta).$$

Assim, no triângulo  $PNO_2$  temos

$$\begin{aligned} |O_2M| &= |PN| = r \sin(\widehat{PO_2N}) = r \sin\left(\frac{\pi}{2} - (t + \theta)\right) = r \cos(t + \theta), \\ |O_2N| &= r \cos(\widehat{PO_2N}) = r \cos\left(\frac{\pi}{2} - (t + \theta)\right) = r \sin(t + \theta). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Agora, substituindo 2.27 e 2.28 em 2.26, temos

$$\begin{aligned} x &= |OB| - |O_2M| = (R + r) \cos \theta - r \cos(t + \theta), \\ y &= |OD| - |O_2N| = (R + r) \sin \theta - r \sin(t + \theta). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Note no desenvolvimento da epicloide nas figuras 14a e 14b que o comprimento do arco de  $A$  a  $P$  em  $C$  é igual ao comprimento do arco de  $A$  a  $P_1$  em  $\Gamma$ . Escolhendo o

parâmetro  $\theta$ , obtemos:

$$rt = R\theta \Rightarrow t = \frac{R\theta}{r} \quad (2.30)$$

Substituindo 2.30 em 2.29, obtemos:

$$\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{R\theta}{r} + \theta\right) = (R+r)\cos\theta - r\cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right), \\ y &= (R+r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{R\theta}{r} + \theta\right) = (R+r)\sin\theta - r\sin\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Passemos a analisar o caso em que  $B$  está entre  $O$  e  $Q$ , conforme figura 14b. Temos que

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| + |BQ| = |OB| + |PN|, \\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Em 2.27 temos os valores de  $|OB|$  e  $|OD|$ , e no triângulo  $PNO_2$ , retângulo em  $N$ , a medida do ângulo  $\widehat{PO_2N}$  é dada por

$$\widehat{PO_2N} = t - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\left(\frac{\pi}{2} - (t + \theta)\right).$$

Assim, no triângulo  $PNO_2$  temos

$$\begin{aligned} |O_2M| &= |PN| = r\sin(\widehat{PO_2N}) = r\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - (t + \theta)\right)\right) = -r\cos(t + \theta), \\ |O_2N| &= r\cos(\widehat{PO_2N}) = r\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - (t + \theta)\right)\right) = r\sin(t + \theta). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Agora, substituindo 2.27 e 2.33 em 2.32, obtemos

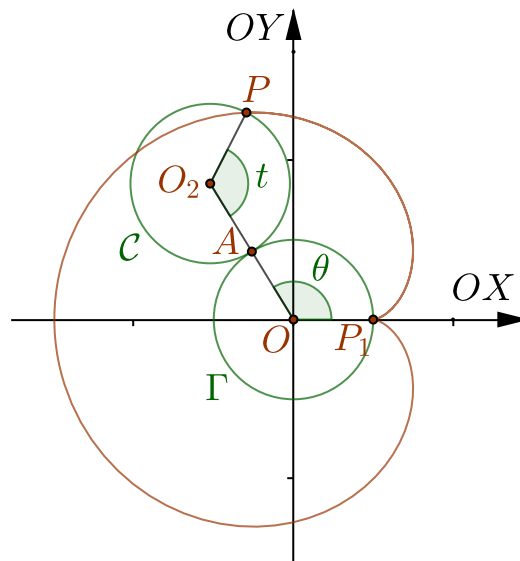
$$\begin{aligned} x &= |OB| + |PN| = (R+r)\cos\theta - r\cos(t + \theta), \\ y &= |OD| - |O_2N| = (R+r)\sin\theta - r\sin(t + \theta). \end{aligned} \quad (2.34)$$

substituindo novamente 2.30 nas equações acima, chegaremos as equações obtidas em 2.31. E nos demais casos em que  $B$  está entre  $O$  e  $Q$  e  $D$  está entre  $T$  e  $O$ , ou que  $Q$  está entre  $O$  e  $B$  e  $D$  está entre  $T$  e  $O$  chegaremos as equações 2.31. Logo, as equações paramétricas da epicloide são dadas por:

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\theta - r\cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right) \\ y = (R+r)\sin\theta - r\sin\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right) \end{cases} ; \theta \in \mathbb{R} \quad (2.35)$$

Os demais casos em que  $D$  está entre  $O$  e  $T$ , com a variação da posição relativa entre  $O$ ,  $Q$  e  $B$  resultam nas mesmas equações paramétricas para a epicloide. E ainda, quando  $R = r$  temos uma curva chamada de cardioide, conforme figura 15. E por 2.30 concluímos também que  $t = \theta$ . Assim suas equações paramétricas serão:

$$\begin{cases} x = 2r\cos\theta - r\cos(2\theta) \\ y = 2r\sin\theta - r\sin(2\theta) \end{cases} ; \theta \in \mathbb{R} \quad (2.36)$$

Figura 15 – Cardioide,  $R = r$ .


Fonte – O autor, 2019.

### 2.3.3 Hipocicloide

Consideremos dois círculos  $\Gamma$  e  $\mathcal{C}$  de raios  $R$  e  $r$ , respectivamente, tais que:

- $r < R$ ,
- $\Gamma$  e  $\mathcal{C}$  se tocam apenas em um ponto  $P$ ,
- os pontos de  $\mathcal{C}$ , diferentes de  $P$  estão no interior de  $\Gamma$ .

A hipocicloide será o lugar geométrico descrito pelo ponto  $P$ , quando  $\mathcal{C}$  rola sobre  $\Gamma$ , sem deslizar, mantendo todos os seus pontos na região limitada por  $\Gamma$ .

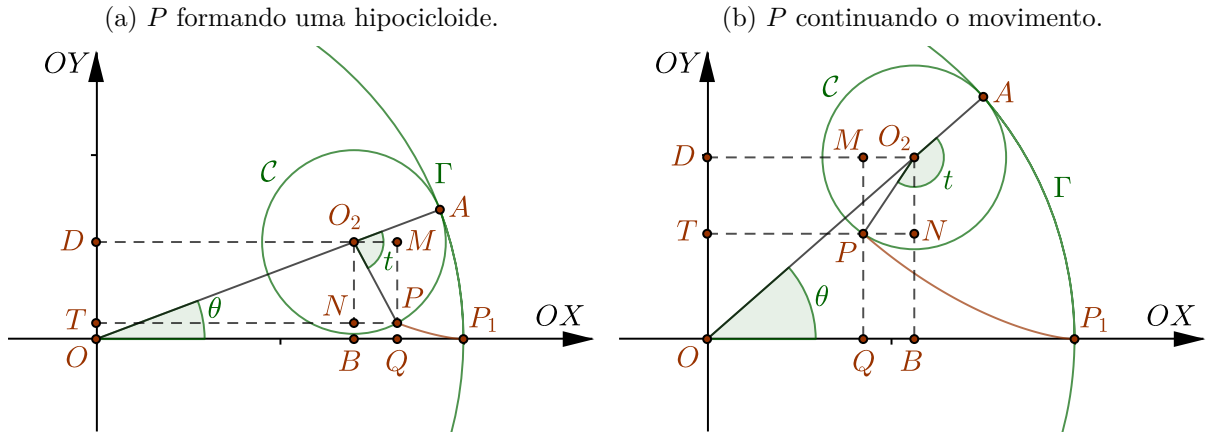
De modo a obtermos as equações paramétricas da hipocicloide, consideremos  $\Gamma$  com centro na origem,  $\mathcal{C}$  iniciando o movimento com centro no ponto  $(R - r, 0)$  e  $P$  com posição inicial  $P_1 = (R, 0)$ . Assim, vamos determinar as coordenadas do ponto  $P = (x, y)$  em termos de um parâmetro, quando  $\mathcal{C}$  rola sobre  $\Gamma$  sem deslizar.

Nas figuras 16a e 16b temos que  $A$  é o ponto de  $\mathcal{C}$  que toca  $\Gamma$ ,  $O_2$  é o centro de  $\mathcal{C}$ ,  $B$  e  $D$  são as projeções de  $O_2$  sobre os eixos  $OX$  e  $OY$ ;  $Q = (x, 0)$  e  $T = (0, y)$  as projeções de  $P$  sobre  $OX$  e  $OY$ ;  $M$  e  $N$  as projeções de  $P$  sobre  $O_2D$  e  $O_2B$ , respectivamente.

Agora, considerando esses elementos, no caso que  $B$  está entre  $O$  e  $Q$ , conforme figura 16a, temos

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| + |BQ| = |OB| + |O_2M|, \\ y &= |OT| = |OD| - |DT| = |OD| - |O_2N|. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Figura 16 – Desenvolvimento da hipocicloide.



Fonte – O autor, 2019.

Agora, sendo  $\theta$  o ângulo formado pelo semi-eixo  $OX$  positivo e o segmento de reta  $OO_2$  quando  $\mathcal{C}$  se move, no sentido anti-horário, obtemos

$$|OB| = (R - r) \cos \theta \quad \text{e} \quad |OD| = (R - r) \sin \theta. \quad (2.38)$$

Denotando por  $t$  o ângulo formado pelos segmentos  $O_2A$  e  $O_2P$ , no sentido horário, teremos

$$\widehat{OO_2P} = \pi - t \quad \text{e} \quad \widehat{OO_2P} - \widehat{NO_2P} = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Portanto,

$$\widehat{NO_2P} = \widehat{OO_2P} + \theta - \frac{\pi}{2} \implies \widehat{NO_2P} = \pi - t + \theta - \frac{\pi}{2} = (\theta - t) + \frac{\pi}{2}.$$

E assim, obtemos as seguintes relações no triângulo retângulo  $PNO_2$

$$\begin{aligned} |O_2M| &= r \sin(\widehat{NO_2P}) = r \sin\left((\theta - t) + \frac{\pi}{2}\right) = r \cos(\theta - t) = r \cos(t - \theta), \\ |O_2N| &= r \cos(\widehat{NO_2P}) = r \cos\left((\theta - t) + \frac{\pi}{2}\right) = -r \sin(\theta - t) = r \sin(t - \theta). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por fim, substituindo 2.38 e 2.39 nas equações 2.37, e considerando que  $t = \frac{R\theta}{r}$ , obtemos as equações paramétricas da hipocicloide, dadas por

$$\begin{cases} x = (R - r) \cos \theta + r \cos\left(\left(\frac{R - r}{r}\right) \theta\right) \\ y = (R - r) \sin \theta - r \sin\left(\left(\frac{R - r}{r}\right) \theta\right) \end{cases}; \theta \in \mathbb{R} \quad (2.40)$$

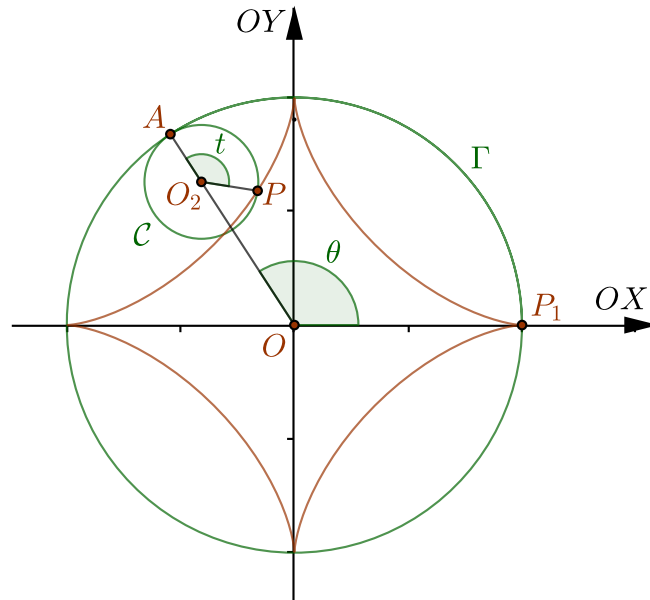
Quando  $P$  e  $O_2$  estão em outras posições, obtemos as mesmas equações paramétricas.

No caso em que  $r = \frac{R}{4}$ , obtemos uma curva denotada por astroide, que tem por equações

$$\begin{cases} x = (4r - r) \cos \theta + r \cos\left(\left(\frac{4r - r}{r}\right) \theta\right) = 3r \cos \theta + r \cos(3\theta) \\ y = (4r - r) \sin \theta - r \sin\left(\left(\frac{4r - r}{r}\right) \theta\right) = 3r \sin \theta - r \sin(3\theta) \end{cases}; \theta \in \mathbb{R}. \quad (2.41)$$

Veja seu gráfico a seguir.

Figura 17 – Astroide,  $r = \frac{R}{4}$ .



Fonte – O autor, 2019.

### 2.3.4 Curva de Agnesi

Tomemos um círculo  $\mathcal{C}$  de raio  $r$ , e sejam duas retas paralelas  $s_1$  e  $s_2$  tangentes a  $\mathcal{C}$  nos pontos  $O$  e  $A$ , respectivamente, veja a figura 18. Traçemos semirretas partindo de  $O$  em direção a reta  $s_2$ , e sejam  $R$  e  $Q$  os pontos de interseção desta semirreta com  $\mathcal{C}$  e  $s_2$ , respectivamente, e seja  $D$  a projeção do ponto  $Q$  sobre  $s_1$ . Assim, traçando uma reta  $s$  passando por  $R$  e paralela a  $s_1$ , obtemos o ponto  $P$  que é a interseção de  $s$  com o segmento  $QD$ . O conjunto formado por tais pontos é denominado Curva de Agnesi<sup>1</sup>.

Vamos encontrar suas equações paramétricas. Para isso, consideremos  $O$  a origem do plano  $OXY$ ,  $s_1$  o eixo  $OX$  e  $s_2 : y = 2r$ . Portanto  $A = (0, 2r)$ , conforme figura 18. Assim, encontremos as coordenadas do ponto  $P = (x, y)$  em que  $x = |OD|$  e  $y = |PD| = |RB|$ , com  $B$  sendo a projeção de  $R$  sobre  $s_1$ . Temos que

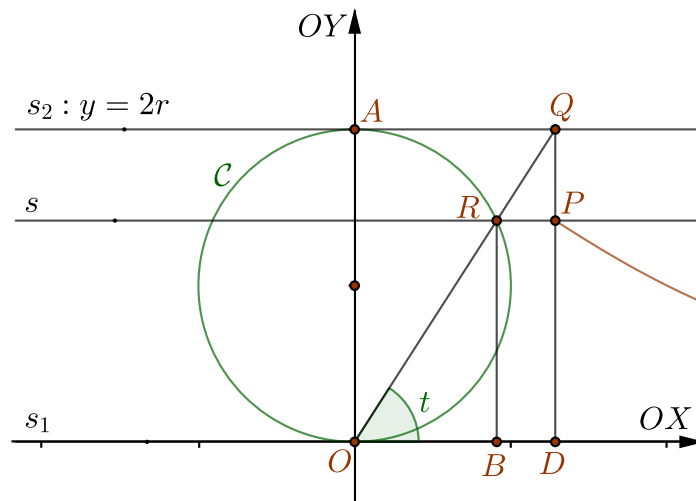
$$|OD| = |OQ| \cos t \quad \text{e} \quad |RB| = |OR| \sin t. \tag{2.42}$$

No triângulo  $ODQ$  retângulo em  $D$ , temos que  $DQ = OA = 2r$ . Logo

$$\operatorname{tg} t = \frac{2r}{|OD|} \Rightarrow |OD| = \frac{2r}{\operatorname{tg} t} \Rightarrow |OD| = 2r \operatorname{cotg} t. \tag{2.43}$$

<sup>1</sup> A curva de Agnesi também conhecida como "bruxa de Agnesi" foi estudada por Maria Agnesi em 1748 em seu livro *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (o primeiro trabalho matemático sobrevivente escrito por uma mulher). Essa curva possui outras denominações como cubique d'Agnesi ou agnésienne, sendo estudada anteriormente por Fermat e Guido Grandi em 1703, conforme (WEISSTEIN, 2005)

Figura 18 – Construção da curva de Agnesi.



Fonte – O autor, 2019.

Agora, repare que o triângulo  $ORA$  inscrito em  $\mathcal{C}$  é retângulo em  $R$  e possui ângulo  $\widehat{OAR} = t$ . Assim  $|OR| = 2r \operatorname{sen} t$ . Substituindo esse resultado na segunda equação de 2.42, obtemos:

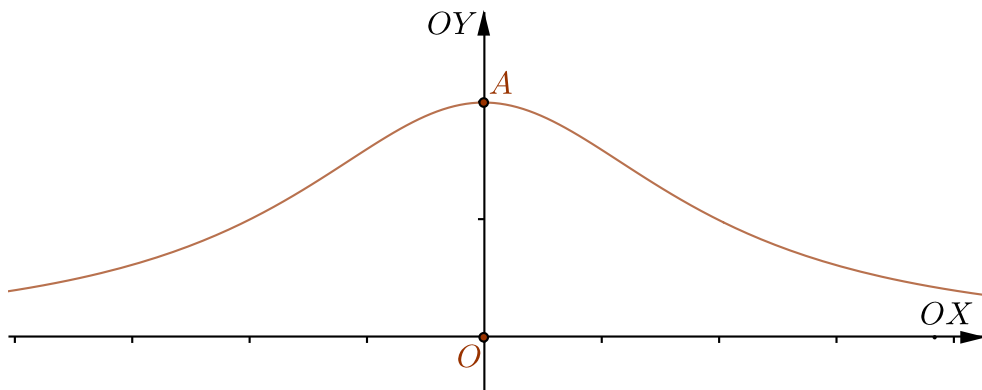
$$|RB| = 2r \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen} t \Rightarrow |RB| = 2r \operatorname{sen}^2 t. \quad (2.44)$$

Logo, das equações 2.43 e 2.44 conclui-se que a parametrização da curva de Agnesi é dada por:

$$\begin{cases} x = 2r \operatorname{cotg} t \\ y = 2r \operatorname{sen}^2 t \end{cases} ; t \in (0, \pi) \quad (2.45)$$

Veja na figura 19 o traço correspondente à curva de Agnesi.

Figura 19 – Curva de Agnesi.



Fonte – O autor, 2019.

### 2.3.5 Curvas de Bézier

As curvas de Bézier levam esse nome devido ao francês Pierre Bézier (1910 – 1999), funcionário da empresa automobilística Renault que foi o primeiro a publicá-las. E seu algoritmo torna bastante versátil a construção de curvas em computadores, facilitando assim a elaboração dos projetos de automóveis, conforme Alves (2014).

Assim, as curvas de Bézier são definidas da seguinte forma.

**Definição 2.1.** *As curvas de Bézier de grau  $n$  são dadas por*

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(t)P_i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i, \quad t \in [0, 1] \quad (2.46)$$

Em que os  $P_i$  são chamados pontos de controle e a curva é definida a partir da base formada pelos  $b_{i,n}(t)$ , chamados polinômios de Bernstein, expressos por

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

As curvas de Bézier cúbicas são bastante utilizadas na prática, pois possuem maior mobilidade devido aos seus 4 pontos de controle.

**Exemplo 2.9.** *Assim, uma curva de Bézier de grau 1, ou seja em que  $n = 1$  é dada por*

$$B(t) = \binom{1}{0} t^0 (1-t)^{1-0} P_0 + \binom{1}{1} t^1 (1-t)^{1-1} P_1 \Rightarrow B(t) = (1-t)P_0 + tP_1, \quad t \in [0, 1] \quad (2.47)$$

Logo, a curva de Bézier de grau 1 é um segmento de reta.

De modo análogo ao exemplo anterior, podemos concluir que as curvas de Bézier de graus 2 e 3, com  $t \in [0, 1]$  são dadas, respectivamente por

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \quad \text{e} \quad B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3.$$

Vamos representar uma curva de Bézier de grau 3 por suas equações paramétricas. Sejam seus pontos de controle  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  e  $P_3 = (x_3, y_3)$ . Obtemos as equações:

$$B : \begin{cases} x = x_0(1-t)^3 + 3x_1t(1-t)^2 + 3x_2t^2(1-t) + x_3t^3 \\ y = y_0(1-t)^3 + 3y_1t(1-t)^2 + 3y_2t^2(1-t) + y_3t^3 \end{cases} ; t \in [0, 1] \quad (2.48)$$

**Exemplo 2.10.** *Seja a curva de Bézier cúbica cujos pontos de controle são:  $P_0 = (3, 2)$ ,  $P_1 = (-1, 1)$ ,  $P_2 = (3, -1)$  e  $P_3 = (2, 3)$ .*

$$B : \begin{cases} x = 3(1-t)^3 - 3t(1-t)^2 + 9t^2(1-t) + 2t^3 \\ y = 2(1-t)^3 + 3t(1-t)^2 - 3t^2(1-t) + 3t^3 \end{cases} ; t \in [0, 1] \quad (2.49)$$

Podemos ainda desenvolver as equações 2.49. Assim

$$\begin{aligned} x &= 3(1-t)^3 - 3t(1-t)^2 + 9t^2(1-t) + 2t^3 \\ &= 3(1-3t+3t^2-t^3) - 3t(1-2t+t^2) + 9t^2 - 9t^3 + 2t^3 \\ &= 3-9t+9t^2-3t^3-3t+6t^2-3t^3+9t^2-9t^3+2t^3 \\ &= -13t^3 + 24t^2 - 12t + 3 \end{aligned}$$

e

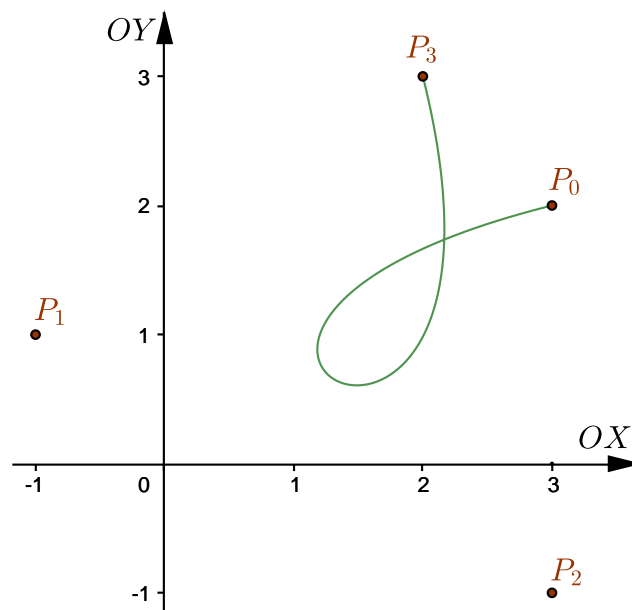
$$\begin{aligned} y &= 2(1-t)^3 + 3t(1-t)^2 - 3t^2(1-t) + 3t^3 \\ &= 2(1-3t+3t^2-t^3) + 3t(1-2t+t^2) - 3t^2 + 3t^3 + 3t^3 \\ &= 2-6t+6t^2-2t^3+3t-6t^2+3t^3-3t^2+3t^3+3t^3 \\ &= 7t^3 - 3t^2 - 3t + 2 \end{aligned}$$

Portanto, uma forma mais reduzida de 2.49 é dada por

$$B : \begin{cases} x = -13t^3 + 24t^2 - 12t + 3 \\ y = 7t^3 - 3t^2 - 3t + 2 \end{cases} ; t \in [0, 1] \quad (2.50)$$

Veja na figura 20 a curva de Bézier cúbica e seus referidos pontos de controle, determinada pelas equações 2.50.

Figura 20 – Curva de Bézier cúbica.



Fonte – O autor, 2019.

### 3 ASPECTOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL APLICADOS A CURVAS PARAMETRIZADAS

Agora, abordaremos alguns conceitos de cálculo diferencial e integral que podemos utilizar nas curvas parametrizadas, de modo a facilitar a obtenção de seus gráficos, calcular seus comprimentos e áreas.

#### 3.1 Construção de gráficos

Vamos estudar dois métodos para que através das equações paramétricas de uma curva possamos traçar seu gráfico. Estes métodos consistem em utilizar algumas noções de cálculo ou determinar a equação cartesiana a partir da equação paramétrica. Tais tópicos podem ser vistos com maior profundidade em Stewart (2013a).

##### 3.1.1 Utilizando noções de cálculo

Agora, vamos utilizar alguns conceitos de cálculo para encontrar os principais pontos de uma curva e ter uma ideia de seu comportamento, de modo a obter seu gráfico.

Seja a curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Precisamos inicialmente encontrar os pontos, dentre os quais podemos obter os valores do parâmetro  $t$  para os quais  $x(t)$  e  $y(t)$  são nulas, caso existam. Ou seja

$$x(t) = 0 \quad \text{e} \quad y(t) = 0. \quad (3.1)$$

Algumas curvas possuem pontos de auto-interseção, ou seja, pontos por onde a curva passa duas ou mais vezes. Por exemplo, sendo  $t_1$  e  $t_2$  tais instantes, podemos supor  $t_1 < t_2$  e assim

$$x(t_1) = x(t_2) \quad \text{e} \quad y(t_1) = y(t_2). \quad (3.2)$$

Podemos também, verificar os intervalos em que as equações paramétricas assumem valores positivos ou negativos, quando for possível. E além disso, analisar o comportamento da curva para valores de  $t$  indo para o infinito positivo e negativo, ou nas proximidades de algum valor específico utilizando o cálculo do limite, do seguinte modo

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \alpha(t) = \left( \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t), \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) \right) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow a} \alpha(t) = \left( \lim_{t \rightarrow a} x(t), \lim_{t \rightarrow a} y(t) \right). \quad (3.3)$$

Após isso, caso a curva possua, é necessário encontrar os pontos em que temos tangentes horizontais e verticais aplicando as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned} \text{Tangentes horizontais: } & \frac{d(y(t))}{dt} = 0, \text{ com } \frac{d(x(t))}{dt} \neq 0; \\ \text{Tangentes verticais: } & \frac{d(x(t))}{dt} = 0, \text{ com } \frac{d(y(t))}{dt} \neq 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ainda utilizando as derivadas acima, podemos obter os intervalos de crescimento e decréscimo de  $x(t)$  e  $y(t)$ , fazendo

$$\begin{aligned} \text{Crescente: } \frac{d(x(t))}{dt} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{d(y(t))}{dt} > 0; \\ \text{Decrescente: } \frac{d(x(t))}{dt} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{d(y(t))}{dt} < 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Assim, vamos aplicar tais procedimentos às seguintes curvas.

**Exemplo 3.1.** *Seja  $\alpha$  a curva com equações paramétricas*

$$\alpha : \begin{cases} x = t^5 - 4t^3 \\ y = t^2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

*Obtendo os valores do parâmetro para os quais suas equações são nulas, temos*

$$x(t) = t^5 - 4t^3 = 0 \iff t^3(t^2 - 4) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = \pm 2$$

*Note que a equação  $y(t)$  se anula no caso em que  $t = 0$ . Assim, temos os seguintes pontos*

$$t = 0 \iff (x(0), y(0)) = (0, 0), \text{ e também}$$

$$t = \pm 2 \iff (x(\pm 2), y(\pm 2)) = ((\pm 2)^5 - 4(\pm 2)^3, (\pm 2)^2) = ((\pm 32 \mp 32), 4) = (0, 4).$$

*Observe que nos instantes  $t = -2$  e  $t = 2$  a curva passa pelo ponto  $(0, 4)$ , logo esse é um ponto de auto-interseção da curva. De fato, pois sendo  $t_1 = -2$  e  $t_2 = 2$  obtemos que*

$$x(t_1) = 0 = x(t_2) \quad \text{e} \quad y(t_1) = 4 = y(t_2)$$

*Vamos agora encontrar, os intervalos em que as equações assumem valores positivos ou negativos, ou seja*

$$x(t) > 0 \iff t^5 - 4t^3 > 0 \iff t^3(t^2 - 4) > 0 \iff t > 2 \text{ ou } -2 < t < 0, \text{ e portanto}$$

$$x(t) < 0 \iff t^5 - 4t^3 < 0 \iff t^5 - 4t^3 < 0 \iff t < -2 \text{ ou } 0 < t < 2;$$

*E também  $y(t) = t^2 > 0$ , com  $t \neq 0$ .*

*Ainda, utilizando o cálculo de limites, temos*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \right) = \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} t^5 - 4t^3, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \right) = (+\infty, +\infty);$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) = \left( \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t), \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) \right) = \left( \lim_{t \rightarrow -\infty} t^5 - 4t^3, \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 \right) = (-\infty, +\infty).$$

*Encontrando as tangentes horizontais e verticais que a curva possui utilizando 3.4, teremos*

$$\begin{aligned} \frac{d(x(t))}{dt} &= \frac{d(t^5 - 4t^3)}{dt} = 5t^4 - 12t^2; \\ \frac{d(y(t))}{dt} &= \frac{d(t^2)}{dt} = 2t. \end{aligned}$$

*Assim, obtemos*

- *Tangentes Horizontais*

$$\frac{d(y(t))}{dt} = 2t = 0 \iff t = 0, \text{ que é inválido, pois } \frac{d(x(0))}{dt} = 0$$

Portanto, a curva não possui tangentes horizontais.

- *Tangentes Verticais*

$$\frac{d(x(t))}{dt} = 5t^4 - 12t^2 = t^2(5t^2 - 12) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = \pm\sqrt{\frac{12}{5}},$$

$$\text{em que } \frac{d(y(0))}{dt} = 0 \text{ e } \frac{d(y(\pm\sqrt{12/5}))}{dt} \neq 0.$$

Portanto, temos tangentes verticais nos pontos

$$\begin{aligned} \left( x\left(\pm\sqrt{\frac{12}{5}}\right), y\left(\pm\sqrt{\frac{12}{5}}\right) \right) &= \left( \left(\pm\sqrt{\frac{12}{5}}\right)^5 - 4\left(\pm\sqrt{\frac{12}{5}}\right)^3, \left(\pm\sqrt{\frac{12}{5}}\right)^2 \right) \\ &= \left( \pm\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^5} \mp 4\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^3}, \frac{12}{5} \right) \\ &= \left( \pm\frac{144}{25}\sqrt{\frac{12}{5}} \mp \frac{48}{5}\sqrt{\frac{12}{5}}, \frac{12}{5} \right); \end{aligned}$$

$$\text{E assim, obtemos } \left( -\frac{96}{25}\sqrt{\frac{12}{5}}, \frac{12}{5} \right) \text{ e } \left( \frac{96}{25}\sqrt{\frac{12}{5}}, \frac{12}{5} \right).$$

Agora, utilizando as derivadas encontradas acima, vamos verificar os intervalos de crescimento e decréscimo da curva  $\alpha$ , conforme 3.5.

- *Crescimento e decréscimo de  $x(t)$*

$$\frac{d(x(t))}{dt} > 0 \iff 5t^4 - 12t^2 > 0 \iff t^2(5t^2 - 12) > 0 \iff t < -\sqrt{\frac{12}{5}} \text{ ou } t > \sqrt{\frac{12}{5}},$$

$$\text{e portanto, } \frac{d(x(t))}{dt} < 0 \iff t^2(5t^2 - 12) < 0 \iff -\sqrt{\frac{12}{5}} < t < \sqrt{\frac{12}{5}}.$$

Logo, podemos concluir que  $x(t)$  é crescente quando  $t \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{12}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{12}{5}}, +\infty\right)$

e decrescente quando  $t \in \left(-\sqrt{\frac{12}{5}}, \sqrt{\frac{12}{5}}\right)$

- *Crescimento e decréscimo de  $y(t)$*

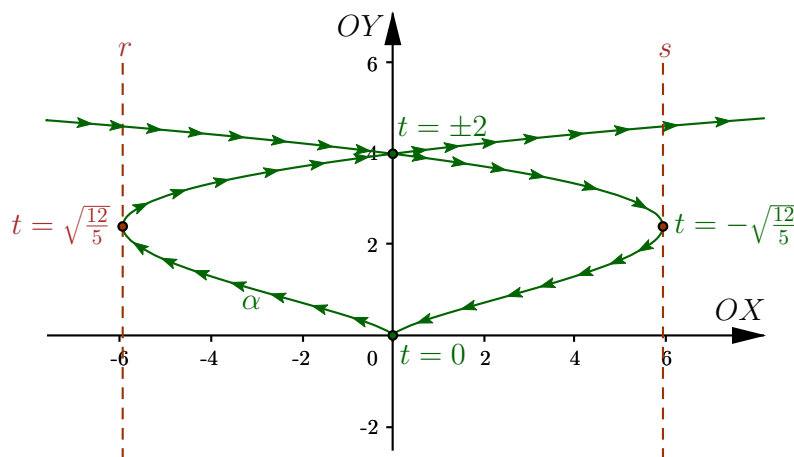
$$\frac{d(y(t))}{dt} > 0 \iff 2t > 0 \iff t > 0, \text{ e portanto,}$$

$$\frac{d(y(t))}{dt} < 0 \iff 2t < 0 \iff t < 0.$$

Logo, podemos concluir que  $y(t)$  é crescente quando  $t \in (0, +\infty)$  e decrescente quando  $t \in (-\infty, 0)$ .

Com uso das informações acima, podemos ter uma boa noção do comportamento da curva  $\alpha$ , representada no gráfico da figura 21. Nele,  $r$  e  $s$  são as tangentes verticais e seus principais pontos encontrados acima se encontram destacados.

Figura 21 – Curva  $\alpha = (t^5 - 4t^3, t^2)$ .



Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 3.2.** Seja  $a > 0$ . O Fólium de Descartes<sup>1</sup> é uma curva que tem por equações paramétricas

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} ; t \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

Vamos portanto, encontrar os pontos de interesse da curva. Logo

$$x(t) = \frac{3at}{1+t^3} = 0 \iff 3at = 0 \iff t = 0,$$

e temos também

$$y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3} = 0 \iff 3at^2 = 0 \iff t = 0.$$

Assim,  $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ . Nota-se também que para  $t = 1$  obtemos a igualdade  $x(1) = y(1) = \frac{3a}{2}$ .

Agora, sabendo que  $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$  e considerando os pontos de interesse acima, vamos verificar o comportamento da curva nos intervalos  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(0, +\infty)$ , através dos seguintes limites.

<sup>1</sup> Essa curva foi descoberta por Descartes em 1638, que acreditava erroneamente que a forma obtida no quadrante positivo, que se assemelha a uma folha, se repetia nos demais, ou seja, que a curva tivesse o formato de uma flor com quatro folhas. Conforme (O'CONNOR; ROBERTSON, 1997).

- Para  $t \in (-\infty, -1)$ ,  $x(t) > 0$  e  $y(t) < 0$  e também

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{F}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{3at}{1+t^3}, \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{3at^2}{1+t^3} \right) = (0, 0);$$

$$\lim_{t \rightarrow -1^-} \mathcal{F}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow -1^-} \frac{3at}{1+t^3}, \lim_{t \rightarrow -1^-} \frac{3at^2}{1+t^3} \right) = (+\infty, -\infty);$$

- Para  $t \in (-1, 0)$ ,  $x(t) < 0$  e  $y(t) > 0$  e também

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} \mathcal{F}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{3at}{1+t^3}, \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{3at^2}{1+t^3} \right) = (-\infty, +\infty);$$

- Para  $t \in (0, +\infty)$ ,  $x(t) > 0$  e  $y(t) > 0$  e também

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3at}{1+t^3}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3at^2}{1+t^3} \right) = (0, 0).$$

Precisamos também encontrar, as tangentes horizontais e verticais que a curva possui utilizando 3.4. Logo

$$\frac{d(x(t))}{dt} = \frac{3a \cdot (1+t^3) - 3at \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3a - 6at^3}{(1+t^3)^2};$$

$$\frac{d(y(t))}{dt} = \frac{6at \cdot (1+t^3) - 3at^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{6at - 3at^4}{(1+t^3)^2}.$$

Assim, obtemos

- *Tangentes Horizontais*

$$\frac{d(y(t))}{dt} = \frac{6at - 3at^4}{(1+t^3)^2} = 0 \iff 6at - 3at^4 = 0 \iff 3at(2 - t^3) = 0$$

$$\iff t = 0 \text{ (Inválido, pois } t \rightarrow \pm\infty; (x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)) \text{ ou } t = \sqrt[3]{2},$$

em que  $\frac{d(x(\sqrt[3]{2}))}{dt} \neq 0$ .

Portanto, temos uma tangente horizontal no ponto

$$\left( x(\sqrt[3]{2}), y(\sqrt[3]{2}) \right) = \left( \frac{3a\sqrt[3]{2}}{1+(\sqrt[3]{2})^3}, \frac{3a(\sqrt[3]{2})^2}{1+(\sqrt[3]{2})^3} \right) = (a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$$

- *Tangentes Verticais*

$$\frac{d(x(t))}{dt} = \frac{3a - 6at^3}{(1+t^3)^2} = 0 \iff 3a - 6at^3 = 0 \iff t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}},$$

em que  $\frac{d(y(\sqrt[3]{1/2}))}{dt} \neq 0$ .

Portanto, temos uma tangente vertical no ponto

$$\left(x\left(\sqrt[3]{1/2}\right), y\left(\sqrt[3]{1/2}\right)\right) = \left(\frac{3a\sqrt[3]{1/2}}{1 + \left(\sqrt[3]{1/2}\right)^3}, \frac{3a\left(\sqrt[3]{1/2}\right)^2}{1 + \left(\sqrt[3]{1/2}\right)^3}\right) = \left(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}\right)$$

Utilizando as derivadas acima, podemos obter os intervalos de crescimento e decrescimento de  $\mathcal{F}$ . Assim, temos que verificar, respectivamente, os valores de  $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$  que satisfazem as desigualdades 3.5.

Notemos inicialmente, que  $(1 + t^3)^2 > 0$  para  $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$ . Desse modo, os sinais das derivadas de  $x(t)$  e  $y(t)$  dependem dos possíveis sinais das expressões de seus numeradores.

- Crescimento e decrescimento de  $x(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d(x(t))}{dt} > 0 &\iff 3a - 6at^3 > 0 \iff t < \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \text{ e portanto,} \\ \frac{d(x(t))}{dt} < 0 &\iff 3a - 6at^3 < 0 \iff t > \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que  $x(t)$  é crescente quando  $t \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$  e decrescente quando  $t \in \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$

- Crescimento e decrescimento de  $y(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d(y(t))}{dt} > 0 &\iff 6at - 3at^4 > 0 \iff t(2 - t^3) > 0 \iff 0 < t < \sqrt[3]{2} \text{ e portanto,} \\ \frac{d(y(t))}{dt} < 0 &\iff 6at - 3at^4 < 0 \iff t(2 - t^3) < 0 \iff t < 0 \text{ ou } t > \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que  $y(t)$  é crescente quando  $t \in (0, \sqrt[3]{2})$  e decrescente quando  $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (\sqrt[3]{2}, +\infty)$ .

Temos também que o traço de  $\mathcal{F}$  está contido no semiplano  $x + y + a > 0$ , e  $u : x + y + a = 0$  é uma assíntota da curva, pois  $d((x(t), y(t)), u) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -1^\pm$ . Verificando tal fato, temos

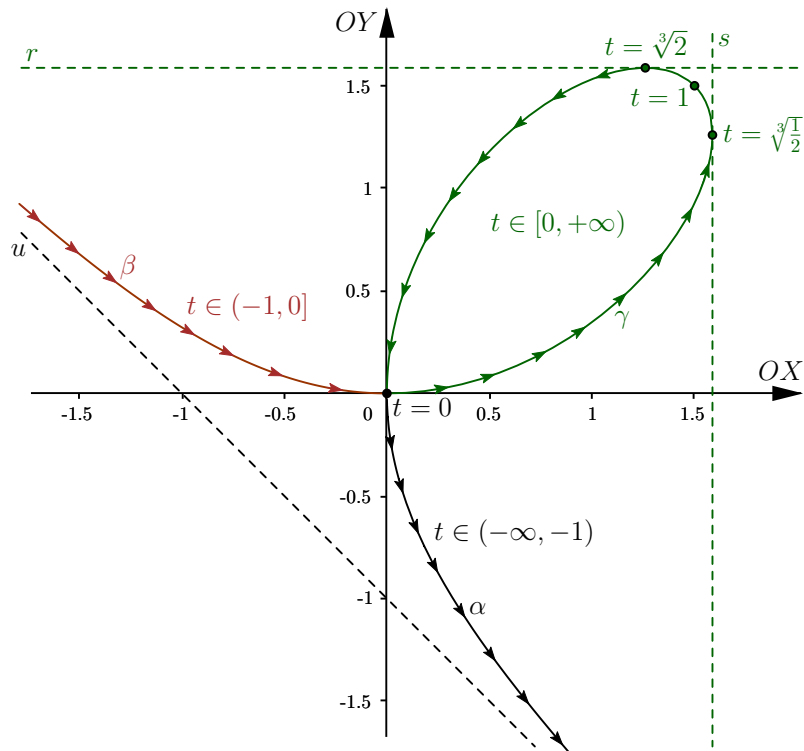
$$\begin{aligned} x(t) + y(t) + a &= \frac{3at}{1 + t^3} + \frac{3at^2}{1 + t^3} + a = \frac{3at + 3at^2 + a + at^3}{1 + t^3} \\ &= \frac{a(t + 1)^3}{(t + 1)(t^2 - t + 1)} = \frac{a(t + 1)^2}{(t^2 - t + 1)} > 0, \end{aligned}$$

pois  $(t + 1)^2 > 0$  para  $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$ , e  $(t^2 - t + 1) > 0$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -1^\pm} d((x(t), y(t)), u) &= \lim_{t \rightarrow -1^\pm} \frac{|x(t) + y(t) + a|}{\sqrt{2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow -1^\pm} \frac{a(t + 1)^2}{(t^2 - t + 1)\sqrt{2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow -1^\pm} \frac{a \cdot 0}{3\sqrt{2}} = 0. \end{aligned}$$

Com uso das informações acima, podemos ter uma boa noção do comportamento da curva  $\mathcal{F}$ , com  $a = 1$ , representada no gráfico da figura 22, em que  $r$  é a tangente horizontal,  $s$  é a tangente vertical e  $u : x + y + 1 = 0$  é a assíntota. E  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são partes da curva  $\mathcal{F}$  nos intervalos  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0]$  e  $[0, +\infty)$ , respectivamente.

Figura 22 – Fólium de Descartes para  $a = 1$



Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 3.3.** A Lemniscata de Bernoulli é uma curva que possui as equações paramétricas.

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x = \frac{t}{1 + t^4} \\ y = \frac{t^3}{1 + t^4} \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Encontrando alguns pontos de interesse, obtemos

$$x(t) = \frac{t}{1 + t^4} = 0 \iff t = 0 \text{ e } y = \frac{t^3}{1 + t^4} = 0 \iff t = 0,$$

portanto,  $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ . Temos também

$$\begin{aligned}x(1) = \frac{1}{2} = y(1) &\implies (x(1), y(1)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\x(-1) = -\frac{1}{2} = y(-1) &\implies (x(-1), y(-1)) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Agora, sabendo que  $t \in \mathbb{R}$ , vamos verificar o comportamento da curva nos intervalos  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$  e  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

- Para  $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ , temos que  $x(t) < 0$  e  $y(t) < 0$ ; E também como  $t > t^3$  quando  $t \in (-\infty, -1)$  e  $t < t^3$  quando  $t \in (-1, 0)$ , então  $x(t) > y(t)$  quando  $t \in (-\infty, -1)$  e  $x(t) < y(t)$  quando  $t \in (-1, 0)$ . Além disso

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{L}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{1+t^4}, \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^3}{1+t^4} \right) = (0, 0);$$

- Para  $t \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ , temos que  $x(t) > 0$  e  $y(t) > 0$ ; E também como  $t > t^3$  quando  $t \in (0, 1)$  e  $t < t^3$  quando  $t \in (1, +\infty)$ , então  $x(t) > y(t)$  quando  $t \in (0, 1)$  e  $x(t) < y(t)$  quando  $t \in (1, +\infty)$ . Além disso

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{1+t^4}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{1+t^4} \right) = (0, 0).$$

Precisamos também encontrar, as tangentes horizontais e verticais que a curva possui utilizando 3.4. Logo

$$\begin{aligned}\frac{d(x(t))}{dt} &= \frac{1 \cdot (1+t^4) - t \cdot 4t^3}{(1+t^4)^2} = \frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2}, \\ \frac{d(y(t))}{dt} &= \frac{3t^2 \cdot (1+t^4) - t^3 \cdot 4t^3}{(1+t^4)^2} = \frac{3t^2 - t^6}{(1+t^4)^2}.\end{aligned}$$

Assim, obtemos

- *Tangentes Horizontais*

$$\begin{aligned}\frac{d(y(t))}{dt} = \frac{3t^2 - t^6}{(1+t^4)^2} = 0 &\iff 3t^2 - t^6 = 0 \iff t^2(3 - t^4) = 0 \\ \iff t = 0 & \text{(Inválido, pois } t \rightarrow \pm\infty; (x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0) \text{) ou } t = \pm\sqrt[4]{3}, \\ \text{em que } \frac{d(x(\pm\sqrt[4]{3}))}{dt} &\neq 0.\end{aligned}$$

Portanto, temos tangentes horizontais nos pontos

$$(x(\pm\sqrt[4]{3}), y(\pm\sqrt[4]{3})) = \left( \frac{\pm\sqrt[4]{3}}{1+(\pm\sqrt[4]{3})^4}, \frac{(\pm\sqrt[4]{3})^3}{1+(\pm\sqrt[4]{3})^4} \right) = \left( \pm\frac{\sqrt[4]{3}}{4}, \pm\frac{\sqrt[4]{27}}{4} \right)$$

- *Tangentes Verticais*

$$\frac{d(x(t))}{dt} = \frac{1 - 3t^4}{(1 + t^4)^2} = 0 \iff 1 - 3t^4 = 0 \iff t = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}},$$

em que  $\frac{d(y(\pm\sqrt[4]{1/3}))}{dt} \neq 0$ .

Portanto, temos tangentes verticais nos pontos

$$\left(x\left(\pm\sqrt[4]{1/3}\right), y\left(\pm\sqrt[4]{1/3}\right)\right) = \left(\frac{\pm\sqrt[4]{1/3}}{1 + \left(\pm\sqrt[4]{1/3}\right)^4}, \frac{\left(\pm\sqrt[4]{1/3}\right)^3}{1 + \left(\pm\sqrt[4]{1/3}\right)^4}\right) = \left(\pm\frac{\sqrt[4]{27}}{4}, \pm\frac{\sqrt[4]{3}}{4}\right)$$

Utilizando as derivadas acima, podemos obter os intervalos de crescimento e decrescimento de  $\mathcal{L}$ . Assim, temos que verificar, respectivamente, os valores de  $t \in \mathbb{R}$  que satisfazem as desigualdades 3.5.

Notemos inicialmente, que  $(1 + t^4)^2 > 0$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Desse modo, os sinais das derivadas de  $x(t)$  e  $y(t)$  dependem dos possíveis sinais das expressões de seus numeradores.

- *Crescimento e decrescimento de  $x(t)$*

$$\frac{d(x(t))}{dt} > 0 \iff 1 - 3t^4 > 0 \iff -\sqrt[4]{\frac{1}{3}} < t < \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \text{ e portanto,}$$

$$\frac{d(x(t))}{dt} < 0 \iff 1 - 3t^4 < 0 \iff t < -\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \text{ ou } t > \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

Logo, podemos concluir que  $x(t)$  é crescente quando  $t \in \left(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$  e decrescente quando  $t \in \left(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$ .

- *Crescimento e decrescimento de  $y(t)$*

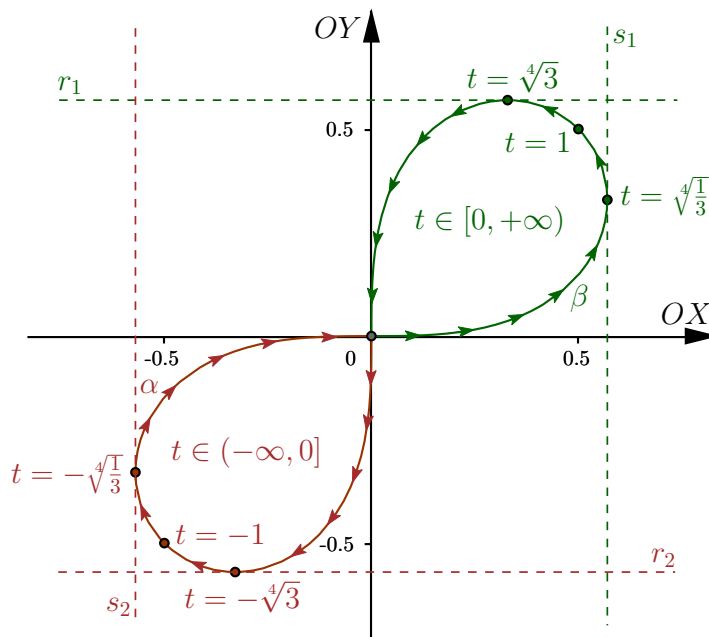
$$\frac{d(y(t))}{dt} > 0 \iff 3t^2 - t^6 > 0 \iff t^2(3 - t^4) > 0 \iff -\sqrt[4]{3} < t < \sqrt[4]{3} \text{ e portanto,}$$

$$\frac{d(y(t))}{dt} < 0 \iff 3t^2 - t^6 < 0 \iff t^2(3 - t^4) < 0 \iff t < -\sqrt[4]{3} \text{ ou } t > \sqrt[4]{3}.$$

Logo, podemos concluir que  $y(t)$  é crescente quando  $t \in (-\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3})$  e decrescente quando  $t \in (-\infty, -\sqrt[4]{3}) \cup (\sqrt[4]{3}, +\infty)$ .

Com uso das informações acima, podemos ter uma boa noção do comportamento da curva  $\mathcal{L}$ , representada no gráfico da figura 23, em que  $r_1$  e  $r_2$  são as tangentes horizontais,  $s_1$  e  $s_2$  são as tangentes verticais e  $\alpha$  e  $\beta$  são partes do traço de  $\mathcal{L}$  nos intervalos  $(-\infty, 0]$  e  $[0, +\infty)$ , respectivamente.

Figura 23 – Lemniscata de Bernoulli.



Fonte – O autor, 2019.

### 3.1.2 Transformando em equação cartesiana

Utilizando procedimentos algébricos podemos, a partir da equação paramétrica, obter a equação cartesiana de algumas curvas eliminando-se o parâmetro. Vamos constatar esse fato através dos seguintes exemplos.

**Exemplo 3.4.** *Seja a curva  $\beta$  com equações paramétricas*

$$\beta : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = \frac{1}{2t - 1} \end{cases} ; t \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Isolando  $t$  na primeira equação, obtemos  $t = \frac{x - 2}{3}$ . E substituindo esse resultado na segunda equação teremos:

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2t - 1} &\iff y = \frac{1}{2\left(\frac{x - 2}{3}\right) - 1} \iff y = \frac{1}{\frac{2x - 4}{3} - 1} \iff y = \frac{1}{\frac{2x - 7}{3}} \\ &\iff y = \frac{3}{2x - 7} \iff 2xy - 7y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, utilizando o indicador 2.15, temos  $I = B^2 - 4AC \implies I = 4 > 0$ . Logo a curva  $\beta$  é uma hipérbole rotacionada e podemos obter seu gráfico e elementos levando sua equação para as coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , conforme estudamos no capítulo 2.

Agora, vamos encontrar as equações cartesianas de algumas curvas que já vimos anteriormente.

**Exemplo 3.5.** Dado  $a > 0$ , como vimos no exemplo 3.2, o Fólium de Descartes possui as equações paramétricas

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} ; t \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

Podemos encontrar sua equação cartesiana tomando o parâmetro  $t$  como:

$$y = \frac{3at}{1+t^3}t = xt \iff t = \frac{y}{x}, \text{ com } x \neq 0 (\iff y \neq 0)$$

Assim, substituindo esse parâmetro em qualquer das equações paramétricas, concluímos:

$$\begin{aligned} x = \frac{3at}{1+t^3} &\iff x = \frac{3a\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3} \iff x = \frac{\frac{3ay}{x}}{1+\frac{y^3}{x^3}} \iff x = \frac{\frac{3ay}{x}}{\frac{x^3+y^3}{x^3}} \\ &\iff x = \frac{3axy^2}{x^3+y^3} \iff 1 = \frac{3axy}{x^3+y^3} \iff x^3+y^3 = 3axy \end{aligned}$$

**Exemplo 3.6.** Vimos na subseção 2.3.4 do capítulo 2 que a curva de Agnesi é dada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2r \cotg t \\ y = 2r \sen^2 t \end{cases} ; t \in (0, \pi) \quad (3.6)$$

Na primeira equação de 3.6 temos que:

$$x = 2r \cotg t \iff x^2 = 4r^2 \cotg^2 t \iff \cotg^2 t = \frac{x^2}{4r^2}. \quad (3.7)$$

Agora, substituindo 3.7 e a segunda equação de 3.6 na identidade trigonométrica  $1 + \cotg^2 t = \operatorname{cosec}^2 t$ , obtemos

$$1 + \cotg^2 t = \operatorname{cosec}^2 t \iff 1 + \frac{x^2}{4r^2} = \frac{2r}{y} \iff \frac{x^2 + 4r^2}{4r^2} = \frac{2r}{y} \iff x^2 y + 4r^2 y = 8r^3.$$

Que tem por forma explícita  $y = \frac{8r^3}{x^2 + 4r^2}$ .

**Exemplo 3.7.** Como vimos no exemplo 3.3, a Lemniscata de Bernoulli é uma curva que possui a seguinte parametrização:

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Note, que a partir das equações  $x(t)$  e  $y(t)$  podemos obter a relação

$$y = \frac{t^3}{1+t^4} = xt^2 \iff t^2 = \frac{y}{x}, \text{ com } x \neq 0 (\iff y \neq 0).$$

Ou seja,  $x$  e  $y$  possuem o mesmo sinal ao longo da curva. Assim

$$t = \sqrt{\frac{y}{x}}, \text{ se } x \text{ e } y \text{ são positivos ou } t = -\sqrt{\frac{y}{x}}, \text{ se } x \text{ e } y \text{ são negativos.}$$

Portanto, substituindo em qualquer das equações paramétricas de  $\mathcal{L}$ , obtemos

$$\begin{aligned} x = \frac{t}{1+t^4} &\iff x = \frac{\sqrt{\frac{y}{x}}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \iff x = \frac{\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \iff x = \frac{\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \\ &\iff \frac{x^2+y^2}{x} = \frac{y^{1/2}}{x^{1/2}} \iff x^2+y^2 = x^{1/2}y^{1/2} \iff x^2+y^2 = \sqrt{xy}, \end{aligned}$$

com  $x$  e  $y$  positivos. Ou

$$\begin{aligned} x = \frac{t}{1+t^4} &\iff x = \frac{-\sqrt{\frac{y}{x}}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \iff x = \frac{-\frac{|y|^{1/2}}{|x|^{1/2}}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \iff x = \frac{-\frac{|y|^{1/2}}{|x|^{1/2}}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \\ &\iff \frac{x^2+y^2}{x} = -\frac{|y|^{1/2}}{|x|^{1/2}} \iff x^2+y^2 = -x\frac{|y|^{1/2}}{|x|^{1/2}} \iff x^2+y^2 = |x|\frac{|y|^{1/2}}{|x|^{1/2}} \\ &\iff x^2+y^2 = |x|^{1/2}|y|^{1/2} \iff x^2+y^2 = \sqrt{|x||y|} \iff x^2+y^2 = \sqrt{xy}, \end{aligned}$$

com  $x$  e  $y$  negativos.

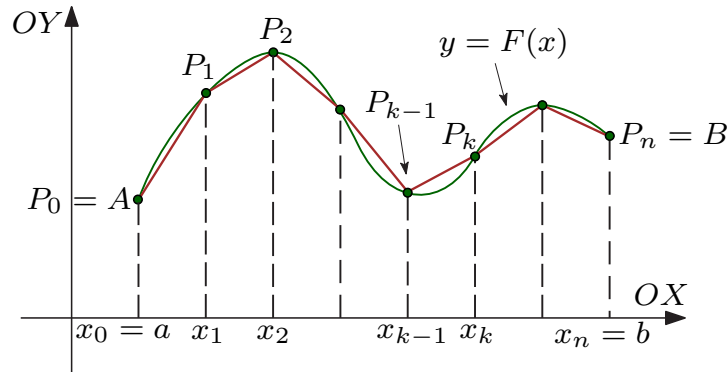
Logo, a equação cartesiana da Lemniscata de Bernoulli é  $x^2 + y^2 = \sqrt{xy}$ .

### 3.2 Comprimento de arco

É possível também, determinar o comprimento de uma curva através de suas equações paramétricas. Antes, vamos recordar o cálculo do comprimento de arco de uma curva  $\mathcal{C}$  em sua forma explícita  $y = F(x)$ . Abordaremos o assunto conforme (THOMAS; WEIR; HASS, 2012) e (STEWART, 2013a).

Seja  $\mathcal{C} : y = F(x)$ , vamos calcular seu comprimento de  $x = a$  até  $x = b$ . Assim, supomos que  $F$  seja continuamente diferenciável em cada ponto do intervalo  $[a, b]$ . Tal função é chamada lisa, e seu gráfico é uma curva lisa, pois não tem quebra, cantos ou cúspide. Particionaremos o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos com  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .

Sejam  $P_k = (x_k, y_k)$ , onde  $y_k = F(x_k)$ , pontos da curva  $\mathcal{C}$ ,  $0 < k < n$ . Unindo os pontos sucessivos  $P_{k-1}$  e  $P_k$  por segmentos de reta obtemos um caminho poligonal. Observe que à medida que aumentamos o valor de  $n$ , o comprimento de tal caminho se aproxima do comprimento da curva  $\mathcal{C}$ , conforme figura 24.

Figura 24 – Comprimento da curva  $y = F(x)$ .


Fonte – O autor, 2019.

Se  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  e  $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ , então um segmento de reta representativo no caminho tem por comprimento

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2},$$

de modo que o comprimento da curva é aproximado pela soma

$$\sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}. \quad (3.8)$$

Esperamos que a aproximação melhore à medida que tornemos mais refinada a partição de  $[a, b]$ . Assim, pelo teorema do valor médio, existe um ponto  $c_k$  que pertence ao intervalo aberto  $(x_{k-1}, x_k)$ , tal que

$$\Delta y_k = F'(c_k) \Delta x_k. \quad (3.9)$$

Agora, substituindo 3.9 em 3.8, as somas assumem a forma

$$\sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (F'(c_k) \Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (F'(c_k))^2} \Delta x_k. \quad (3.10)$$

Temos que  $\sqrt{1 + (F'(c_k))^2}$  é contínua em  $[a, b]$ , e portanto o limite da soma de Riemann da expressão obtida em 3.10 existe quando a norma da partição tende a zero, resultando em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n L_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (F'(c_k))^2} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + (F'(x))^2} dx.$$

Logo, chegamos a seguinte definição.

**Definição 3.1.** Se  $F$  é continuamente diferenciável em  $[a, b]$ , então o comprimento da curva  $\mathcal{C} : y = F(x)$  do ponto  $A = (a, F(a))$  ao ponto  $B = (b, F(b))$  é o valor da integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (F'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Agora, suponha que  $\mathcal{C} : y = F(x)$  possa ser descrita pelas equações paramétricas  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ , em que  $f$  e  $g$  são também funções diferenciáveis. Utilizando a regra da cadeia obtemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ com } \frac{dx}{dt} \neq 0. \quad (3.11)$$

Note também que podemos encontrar  $\frac{d^2y}{dx^2}$  substituindo  $y$  por  $\frac{dy}{dx}$  na equação acima, logo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}. \quad (3.12)$$

Seja  $\alpha \leq t \leq \beta$  e  $dx/dt = f'(t) > 0$ . Isso significa que a curva  $\mathcal{C}$  é percorrida uma vez, da esquerda para a direita, quando  $t$  aumenta de  $\alpha$  até  $\beta$  e  $f(\alpha) = a$ ,  $f(\beta) = b$ . Substituindo 3.11 na definição 3.1 e usando a Regra da Substituição, temos

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left( \frac{dy/dt}{dx/dt} \right)^2} \frac{dx}{dt} dt,$$

e como  $\frac{dx}{dt} > 0$  obtemos

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} dt. \quad (3.13)$$

E mesmo que  $\mathcal{C}$  não possa ser descrita na forma  $y = F(x)$ , de modo análogo, podemos demonstrar que a fórmula 3.13 permanece válida, dividindo o intervalo  $[\alpha, \beta]$  em  $n$  subintervalos de comprimentos iguais a  $\Delta t$ . Portanto, podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 3.1.** *Se uma curva  $\mathcal{C}$  é descrita por equações paramétricas  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , onde  $f'$  e  $g'$  são contínuas em  $[\alpha, \beta]$  e  $\mathcal{C}$  é percorrida exatamente uma vez quando  $t$  aumenta de  $\alpha$  até  $\beta$ , então o comprimento de  $\mathcal{C}$  é*

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} dt.$$

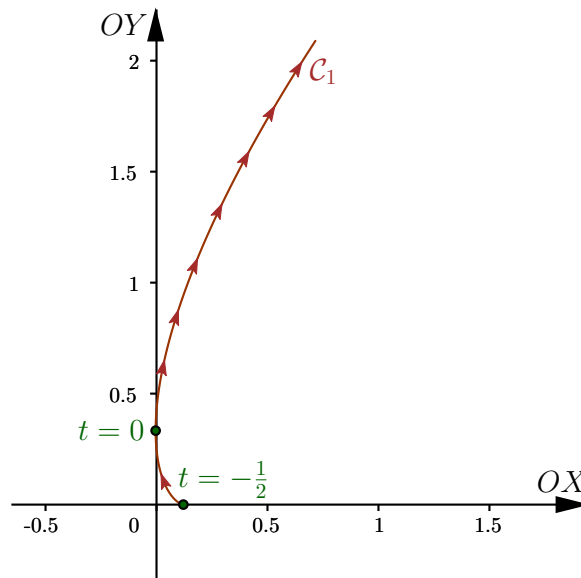
Passemos a resolver alguns exemplos envolvendo o comprimento de uma curva dada por equações paramétricas.

**Exemplo 3.8.** *Dada a curva  $\mathcal{C}_1$  abaixo, vamos calcular seu comprimento no intervalo indicado.*

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2} \\ y(t) = \frac{\sqrt{(2t+1)^3}}{3} \end{cases} ; 0 \leq t \leq 4$$

Podemos obter o traço de  $\mathcal{C}_1$  utilizando as noções de cálculo estudadas na seção 3.1.1. Isso pode ser visto com detalhes no apêndice A, resultando no gráfico da figura 25.

Figura 25 – Curva  $\mathcal{C}_1 = (t^2/2, \sqrt{(2t+1)^3/3})$ .



Fonte – O autor, 2019.

Vamos agora calcular seu comprimento no intervalo indicado, em que ambas as equações e suas derivadas são contínuas e  $\mathcal{C}_1$  está delimitada pelos pontos

$$t = 0 \iff (x(0), y(0)) = \left(0, \frac{1}{3}\right), \text{ e também}$$

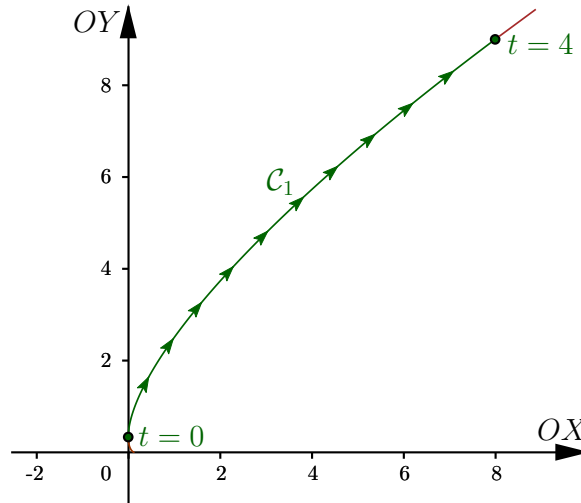
$$t = 4 \iff (x(4), y(4)) = \left(\frac{4^2}{2}, \frac{\sqrt{(2 \cdot 4 + 1)^3}}{3}\right) = (8, 9).$$

Utilizando o teorema 3.1, teremos

$$\begin{aligned} L &= \int_0^4 \sqrt{\left(\frac{2t}{2}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot (2t+1)^2 \cdot 2}{2 \cdot 3 \sqrt{(2t+1)^3}}\right)^2} dt \\ &= \int_0^4 \sqrt{t^2 + (\sqrt{2t+1})^2} dt \\ &= \int_0^4 \sqrt{t^2 + 2t + 1} dt \\ &= \int_0^4 \sqrt{(t+1)^2} dt \\ &= \int_0^4 t + 1 dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^4 \\ &= \frac{4^2}{2} + 4 - 0 = 12 \text{ u.c} \end{aligned}$$

Na figura 26 representamos a delimitação da curva  $C_1$  que obtivemos o comprimento.

Figura 26 – Curva  $C_1 = (t^2/2, \sqrt{(2t+1)^3/3})$ , com  $0 \leq t \leq 4$ .



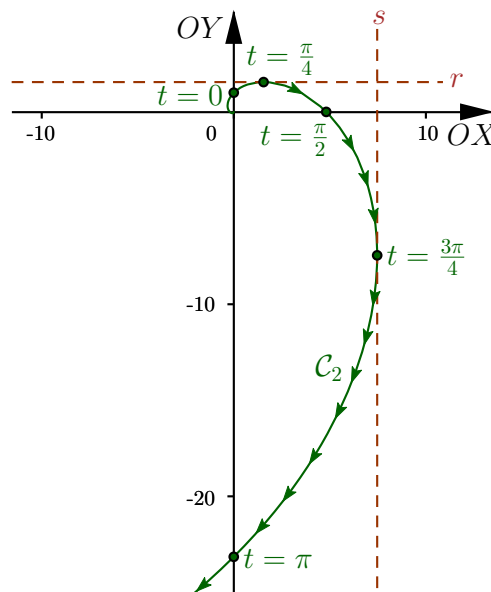
Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 3.9.** Agora, seja  $C_2$  a curva de equações

$$C_2 : \begin{cases} x(t) = e^t \operatorname{sen} t \\ y(t) = e^t \cos t \end{cases} ; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Com a análise realizada no apêndice A, podemos observar que a curva  $C_2$  tem o comportamento de espiral e seu gráfico pode ser visto na figura 27, representada no intervalo  $(-\infty, \pi]$ .

Figura 27 – Curva  $C_2 = (e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t)$ .



Fonte – O autor, 2019.

Nesse gráfico,  $r$  é a reta tangente horizontal,  $s$  é a reta tangente vertical e há alguns de seus pontos de interseção com os eixos coordenados. Vamos agora calcular seu comprimento no intervalo indicado, em que ambas as equações e suas derivadas são contínuas e  $\mathcal{C}_2$  está delimitada pelos pontos

$$t = 0 \iff (x(0), y(0)) = (0, 1), \text{ e também}$$

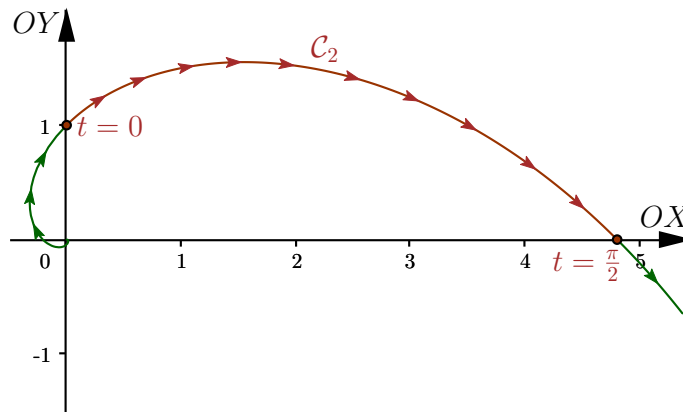
$$t = \frac{\pi}{2} \iff \left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (e^{\pi/2}, 0).$$

Utilizando o teorema 3.1, teremos

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + (e^t \cos t - e^t \sin t)^2} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2e^{2t} \sin^2 t + 2e^{2t} \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2e^{2t}(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2e^{2t}} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} e^t dt \\ &= \sqrt{2} [e^t]_0^{\pi/2} = \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1) \text{ u.c} \end{aligned}$$

Na figura 28 representamos a delimitação da curva  $\mathcal{C}_2$  que obtivemos o comprimento.

Figura 28 – Curva  $\mathcal{C}_2 = (e^t \sin t, e^t \cos t)$ , com  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .



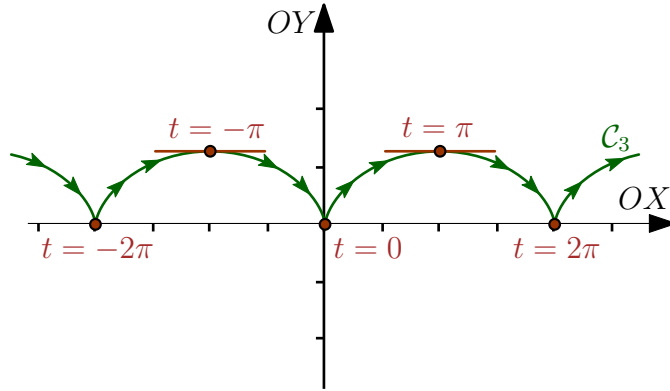
Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 3.10.** Vamos agora, calcular o comprimento da curva cicloide no intervalo  $0 \leq t \leq 2\pi$ , vista na subseção 2.3.1. Sendo  $\mathcal{C}_3$  a cicloide, com  $r > 0$ , suas equações paramétricas são

$$\mathcal{C}_3 : \begin{cases} x(t) = rt - r \sin t \\ y(t) = r - r \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Podemos ver no apêndice A outros elementos da cicloide, determinados com a utilização do cálculo diferencial, bem como o comportamento dessa curva quando  $t$  varia em  $\mathbb{R}$ . Assim, veja na figura 29 a representação gráfica da curva  $C_3$  com esses elementos.

Figura 29 – Curva  $C_3 = (rt - r \operatorname{sen} t, r - r \operatorname{cos} t)$ .



Fonte – O autor, 2019.

E portanto, calculando seu comprimento no intervalo  $[0, 2\pi]$  teremos

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(r - r \operatorname{cos} t)^2 + (r \operatorname{sen} t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 - 2r^2 \operatorname{cos} t + r^2 \operatorname{cos}^2 t + r^2 \operatorname{sen}^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 - 2r^2 \operatorname{cos} t + r^2(\operatorname{cos}^2 t + \operatorname{sen}^2 t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2r^2 - 2r^2 \operatorname{cos} t} dt \\ &= r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \operatorname{cos} t)} dt \end{aligned}$$

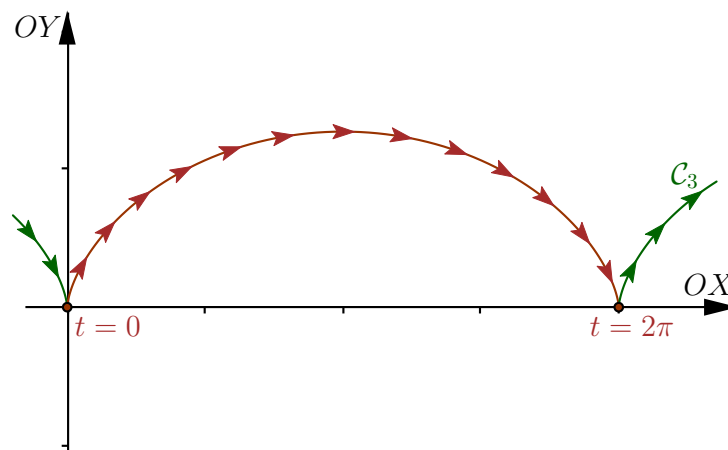
Utilizando a propriedade trigonométrica  $1 - \operatorname{cos} t = 2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{t}{2} \right)$ , e sabendo que  $\operatorname{sen} \left( \frac{t}{2} \right) \geq 0$  no intervalo  $[0, 2\pi]$  temos

$$\begin{aligned} L &= r \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{t}{2} \right)} dt \\ &= 2r \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{t}{2} \right) dt \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $u = \frac{t}{2} \iff \frac{du}{dt} = \frac{1}{2}$  encontramos

$$\begin{aligned} L &= 2r \int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen} u du \\ &= 4r [-\operatorname{cos} u]_0^{\pi} \\ &= 4r(1 - (-1)) = 8r \text{ u.c} \end{aligned}$$

Que é a medida do arco que compõe a cicloide, representado na figura a seguir.

Figura 30 – Curva  $\mathcal{C}_3 = (rt - r \sin t, r - r \cos t)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Fonte – O autor, 2019.

### 3.3 Catenária

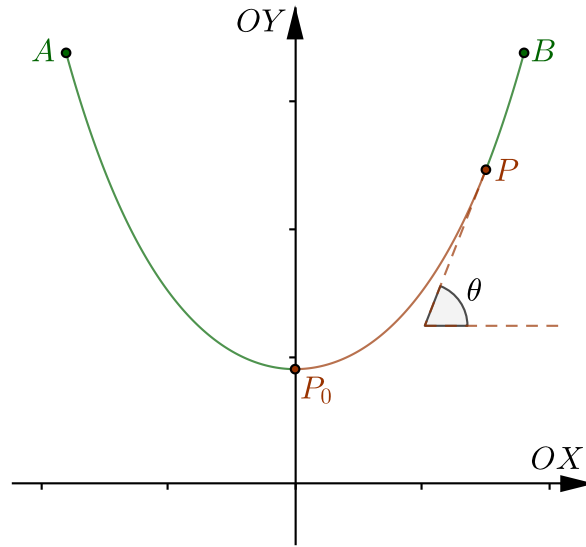
Agora que sabemos calcular o comprimento de uma curva, vamos abordar uma importante curva dos estudos de geometria plana, conhecida como catenária. Segundo Martins (2015), tal curva surgiu da necessidade de se obter uma expressão que descreva o traço formado por um fio suspenso por dois pontos sob ação apenas da gravidade. Esse problema foi proposto por Galileu Galilei, que conjecturou que o gráfico da curva seria uma parábola. Porém com apenas 17 anos de idade, Huygens provou em 1646 que a conjectura era falsa. Jakob Bernoulli, em 1690, relançou o problema à comunidade científica. Quando em 1691, a resolução do problema foi publicada independentemente por Leibniz, Huygens e o próprio Bernoulli.

Seja uma corda flexível de densidade uniforme representada no plano  $OXY$ , suspenso entre dois pontos, de onde podemos obter os seguintes elementos.

Na figura 31 temos que a parte da corda entre os pontos  $P_0$  e  $P$  está em equilíbrio estático sob a ação das forças:

- Tensão  $T_0$  em  $P_0$ ,
- Tensão  $T$  em  $P$ , que atua na direção da tangente, devido à flexibilidade da corda,
- O peso da corda, dado por  $\omega_0 \cdot S$ , em que  $S(x)$  é o comprimento da corda e  $w_0$  sua densidade.

Figura 31 – Corda suspensa pelos pontos  $A$  e  $B$ .



Fonte – O autor, 2019.

Seja  $\theta$  o ângulo que a reta tangente à curva em  $P$  faz com o eixo  $OX$ . Devido ao fato da corda estar em equilíbrio estático, obtemos as relações

$$T \cdot \text{sen } \theta = \omega_0 \cdot S \quad \text{e} \quad T \cdot \text{cos } \theta = T_0 \implies \text{tg } \theta = \frac{\omega_0 \cdot S}{T_0}.$$

Seja  $f$  a função cuja imagem é o traço da catenária. Pelo gráfico  $f$  é par e do resultado obtido nas relações acima  $f'(x) = \frac{\omega_0 \cdot S}{T_0}$ . Assim, temos que para  $0 < x < \bar{x}$ , o comprimento  $S(x)$  da curva entre os pontos  $P_0$  e  $P$  será

$$S(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

Logo, obtemos

$$f'(x) = \frac{\omega_0}{T_0} \cdot \int_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{\omega_0}{T_0} \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Na última equação fazendo  $v = f'(x)$  e  $C = \frac{\omega_0}{T_0}$ , obtemos

$$\frac{dv}{dx} = C \cdot \sqrt{1 + v^2} \implies \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} dv = C dx \implies \int \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} dv = \int C dx.$$

Resolvendo a última igualdade teremos

$$\ln |v + \sqrt{1 + v^2}| = Cx. \text{ Como } v = f'(x), \text{ logo } \ln \left| f'(x) + \sqrt{1 + (f'(x))^2} \right| = Cx,$$

e assim vamos ter

$$f'(x) + \sqrt{1 + (f'(x))^2} = e^{Cx}. \tag{3.14}$$

Mas como supomos que  $f(x)$  é par, então  $f'(x)$  será ímpar, logo

$$f'(-x) + \sqrt{1 + (f'(-x))^2} = e^{-Cx} \implies -f'(x) + \sqrt{1 + (f'(x))^2} = e^{-Cx}. \quad (3.15)$$

Fazendo a subtração 3.14 – 3.15 encontramos

$$2f'(x) = e^{Cx} - e^{-Cx} \implies f'(x) = \frac{e^{Cx} - e^{-Cx}}{2} = \sinh(Cx).$$

Integrando a última equação obtemos

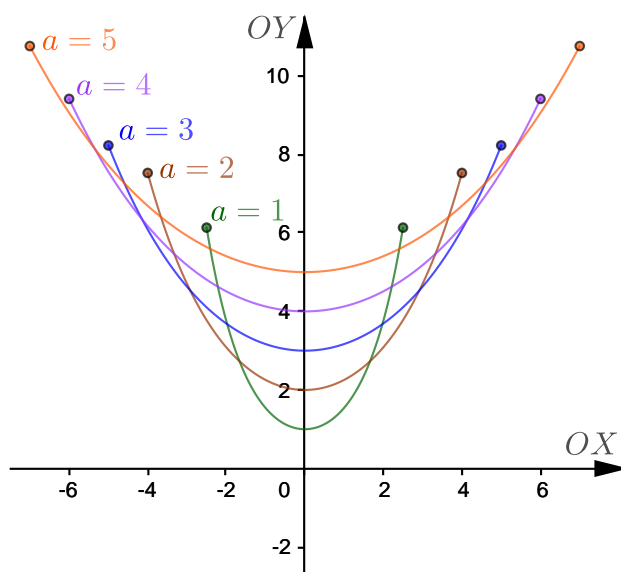
$$f(x) = \frac{1}{C} \cosh(Cx), \text{ fazendo } a = \frac{1}{C} \implies f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), a \in \mathbb{R}_+.$$

Por fim, fazendo  $x = t$  e sendo  $a$  uma constante real positiva, uma parametrização para a catenária será

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Veja seu gráfico na figura 32 para alguns valores de  $a$ .

Figura 32 – Catenária com  $a = 1, 2, 3, 4$  e  $5$ .



Fonte – O autor, 2019.

### 3.4 Cálculo de áreas

Podemos também, calcular a área sob uma curva quando esta estiver dada por equações paramétricas. Em Stewart (2013b) temos que a área sob uma curva  $y = F(x)$ , com  $a \leq x \leq b$ , sendo  $F(x) \geq 0$  é dada por

$$A = \int_a^b F(x) dx; \quad (3.17)$$

podemos deduzir uma expressão no caso em que a curva está parametrizada. Assim, se a curva  $y = F(x)$  é dada pelas equações paramétricas  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ , e queremos obter o valor da área sob a curva no intervalo  $\alpha \leq t \leq \beta$ , basta aplicarmos a regra da substituição para integrais definidas em 3.17, logo

$$x = f(t) \iff dx = f'(t) dt \implies A = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t) dt. \quad (3.18)$$

Colocando o resultado obtido em 3.18 na notação usual, temos

$$A = \int_\alpha^\beta y(t) \frac{d(x(t))}{dt} dt. \quad (3.19)$$

De modo análogo, nos casos em que tivermos  $x = G(y)$ , podemos obter a área utilizando

$$A = \int_\alpha^\beta f(t)g'(t) dt \iff A = \int_\alpha^\beta x(t) \frac{d(y(t))}{dt} dt. \quad (3.20)$$

Aproveitando que na seção anterior obtivemos os principais elementos da cicloide, vamos agora calcular a área compreendida entre um de seus arcos e o eixo  $OX$ .

**Exemplo 3.11.** *A cicloide possui as equações*

$$\mathcal{C}_3 : \begin{cases} x(t) = rt - r \operatorname{sen} t \\ y(t) = r - r \operatorname{cos} t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

*Escolhendo o arco que parte da origem do sistema de coordenadas, temos que o parâmetro  $t$  varia no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Para o cálculo dessa área utilizando 3.19, vamos determinar a derivada de  $x(t)$  que será*

$$\frac{d(x(t))}{dt} = r - r \operatorname{cos} t.$$

*Fazendo a substituição obtemos*

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} (r - r \operatorname{cos} t)(r - r \operatorname{cos} t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (r - r \operatorname{cos} t)^2 dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{cos} t)^2 dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2 \operatorname{cos} t + \operatorname{cos}^2 t dt \end{aligned} \quad (3.21)$$

*Por não ser imediata, vamos resolver separadamente a integral  $\int \operatorname{cos}^2 t dt$ . Usando a propriedade trigonométrica  $\operatorname{cos}^2 t = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{cos} 2t}{2}$  temos*

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cos}^2 t dt &= \int \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{cos} 2t}{2} dt \\ &= \int \frac{1}{2} dt + \frac{1}{2} \int \operatorname{cos} 2t dt \\ &= \frac{1}{2}t + C_1 + \frac{1}{2} \int \operatorname{cos} 2t dt. \end{aligned}$$

Agora, pelo método da substituição seja  $u = 2t \iff \frac{du}{dt} = 2$ , logo

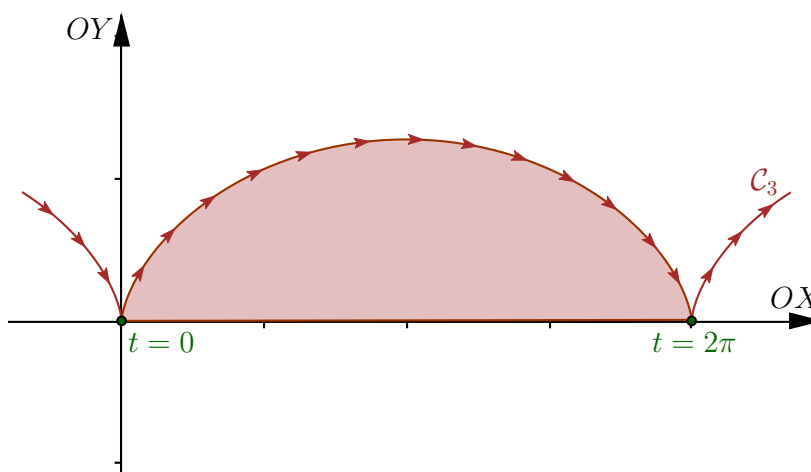
$$\begin{aligned} \int \cos^2 t \, dt &= \frac{1}{2}t + C_1 + \frac{1}{4} \int \cos u \, du \\ &= \frac{1}{2}t + C_1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen} u + C_2 \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t + C. \end{aligned} \tag{3.22}$$

E por fim, substituindo o resultado obtido em 3.22 em 3.21 encontramos

$$\begin{aligned} A &= r^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos t + \cos^2 t \, dt \\ &= r^2 \left[ t - 2 \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \right]_0^{2\pi} \\ &= r^2 \left[ \frac{\operatorname{sen} 2t - 8 \operatorname{sen} t + 6t}{4} \right]_0^{2\pi} \\ &= r^2 \left( \frac{12\pi}{4} - 0 \right) = 3\pi r^2 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Na figura 33 representamos graficamente essa área.

Figura 33 – Área sob um arco da cicloide.



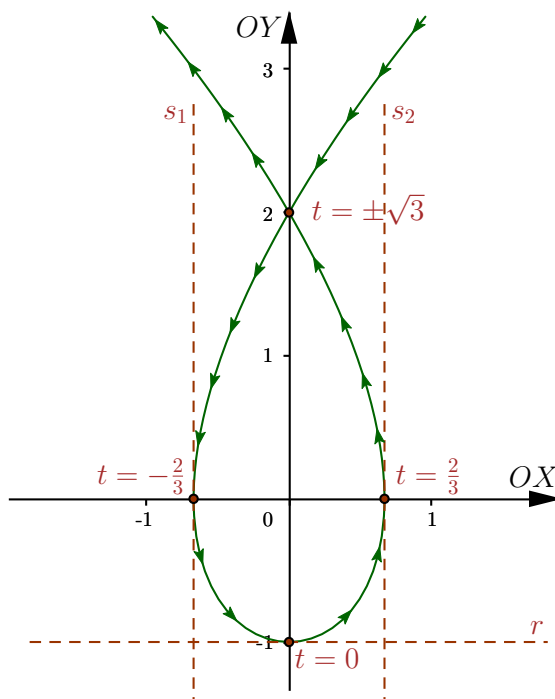
Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 3.12.** Vamos calcular a área delimitada pela curva  $C_4$  que tem as equações paramétricas

$$C_4 : \begin{cases} x(t) = -\frac{t^3}{3} + t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Utilizamos as noções de cálculo para determinar seu traço, o que pode ser visto no apêndice A. Veja o gráfico de  $C_4$  na figura 34, que tem a aparência de um laço, em que  $s_1$  e  $s_2$  são as tangentes verticais e  $r$  a tangente horizontal.

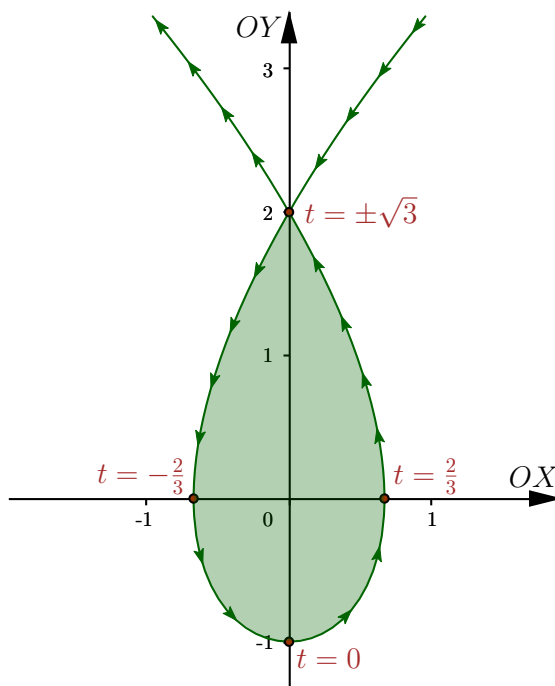
Figura 34 – Curva  $C_4 = (-t^3/3 + t, t^2 - 1)$ .



Fonte – O autor, 2019.

Observe no gráfico da figura 35 que, para calcularmos a área limitada por  $C_4$ , devido a sua simetria, basta que calculemos o dobro da área limitada entre o eixo  $OY$  e a curva em que  $t$  varia no intervalo  $[0, \sqrt{3}]$ .

Figura 35 – Área delimitada pela curva  $C_4 = (-t^3/3 + t, t^2 - 1)$ .



Fonte – O autor, 2019.

Note que nesse intervalo  $x = G(y) > 0$ , logo é adequado utilizar 3.20.

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left( -\frac{t^3}{3} + t \right) 2t \, dt \\ &= 4 \int_0^{\sqrt{3}} -\frac{t^4}{3} + t^2 \, dt \\ &= 4 \left[ -\frac{t^5}{15} + \frac{t^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 4 \left( -\frac{3\sqrt{3}}{5} + \sqrt{3} \right) = \frac{8\sqrt{3}}{5} \text{ u.a} \end{aligned}$$

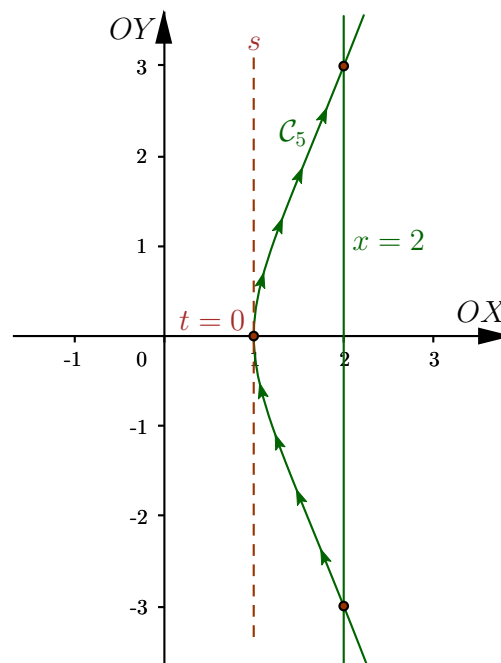
Na figura 35 representamos a área calculada.

**Exemplo 3.13.** Dada a curva  $\mathcal{C}_5$  por equações paramétricas

$$\mathcal{C}_5 : \begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = t^3 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

deseja-se calcular a área delimitada por  $\mathcal{C}_5$  e a reta  $x = 2$ . Veja no apêndice A o procedimento para obter o traço de  $\mathcal{C}_5$ . Na figura 36 temos o esboço dos gráficos da curva  $\mathcal{C}_5$ , da reta  $x = 2$  e também da tangente vertical  $s$ .

Figura 36 – Curva  $\mathcal{C}_5 = (t^2 + 1, t^3 + 2t)$  e reta  $x = 2$ .



Fonte – O autor, 2019.

Observe que para obtermos a área desejada, devemos encontrar o(s) ponto(s) de interseção entre a curva  $\mathcal{C}_5$  e a reta  $x = 2$ . Para isso, basta resolvermos a seguinte equação

$$x(t) = t^2 + 1 = 2 \iff t^2 = 1 \iff t = \pm 1.$$

Note que devido a simetria da região delimitada, podemos calcular o dobro da área quando  $t$  varia no intervalo  $[0, 1]$  ou  $[-1, 0]$ . E assim, vamos obter

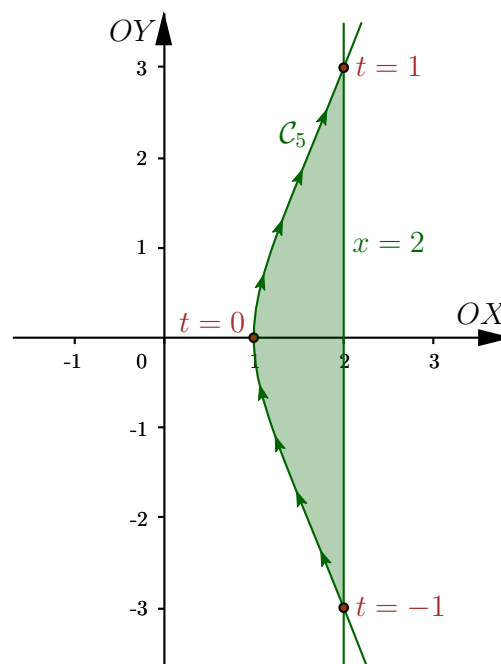
$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 (t^3 + 2t) 2t \, dt \\ &= 4 \int_0^1 t^4 + 2t^2 \, dt \\ &= 4 \left[ \frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 4 \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \right) = \frac{52}{15} \text{ u.a} \end{aligned}$$

De outra maneira, poderíamos obter essa área utilizando 3.20 como se segue

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 (2 - (t^2 + 1)) (3t^2 + 2) \, dt \\ &= 2 \int_0^1 (1 - t^2) (3t^2 + 2) \, dt \\ &= 2 \int_0^1 t^2 - 3t^4 + 2 \, dt \\ &= 2 \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{3t^5}{5} + 2t \right]_0^1 \\ &= 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + 2 \right) = \frac{52}{15} \text{ u.a} \end{aligned}$$

Veja a área obtida e os pontos de interseção entre  $C_5$  e  $x = 2$  na figura 37.

Figura 37 – Área delimitada pela curva  $C_5$  e a reta  $x = 2$ .



Fonte – O autor, 2019.

## 4 INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL

Neste capítulo faremos um breve estudo de assuntos da geometria diferencial, que serão bastante utilizados no decorrer do trabalho, tendo como principais referências as pesquisas de (CARMO, 2014) e (ALENCAR; SANTOS, 2002) nessa área.

Faremos um estudo local da curva no plano, ou seja, se  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é a equação paramétrica da curva, então fixado  $t_0$ , iremos estudar o comportamento de  $\alpha(t)$  para valores de  $t$  próximos de  $t_0$ .

### 4.1 Curvas parametrizadas diferenciáveis

Dizemos que  $\alpha$  é uma aplicação parametrizada diferenciável se, e somente se, cada função coordenada  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^\infty$ , isto é, em todo ponto de  $I$  as derivadas de qualquer ordem de  $x$  e  $y$  existem e são contínuas em  $I$ .

**Definição 4.1.** *Uma curva parametrizada diferenciável no plano  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^\infty$  que a cada  $t \in I$  associa  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ . E o conjunto-imagem de  $\alpha$ ,  $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$  é dito traço de  $\alpha$ .*

**Exemplo 4.1.** *A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t^2 + 1, t^3)$  é uma curva parametrizada diferenciável, pois as funções coordenadas  $x(t) = t^2 + 1$  e  $y(t) = t^3$  são de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}$ .*

**Exemplo 4.2.** *Seja uma aplicação  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\beta = (t, |t|)$ . Nesse caso  $\beta$  não é uma curva parametrizada diferenciável em  $\mathbb{R}$ , pois em  $t = 0$  a função coordenada  $y(t) = |t|$  não possui derivada. Note, entretanto, que podemos restringir  $\beta$  a um intervalo  $I$  que não possua  $t = 0$ , se tornando assim uma curva parametrizada diferenciável.*

#### 4.1.1 Vetor tangente

Seja  $\alpha$  uma curva parametrizada diferenciável dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , definimos o *vetor tangente* à curva  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  por

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)),$$

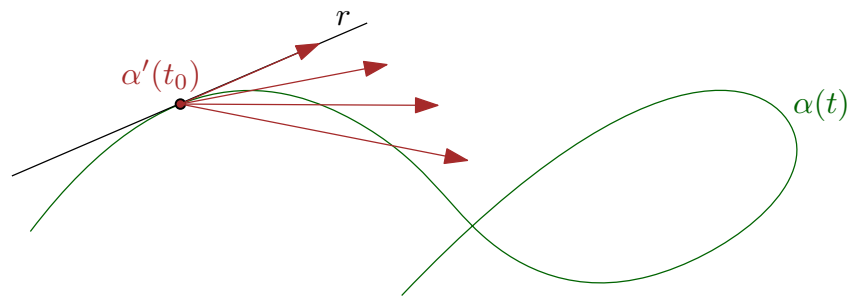
que também pode ser chamado de *vetor velocidade* da curva em  $t_0$ .

A *velocidade escalar* de  $\alpha$  em  $t_0$  será o módulo desse vetor, ou seja

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}.$$

Se  $\alpha'(t_0) \neq 0$  então o vetor tangente tem a mesma direção da reta tangente à curva  $\alpha$  em  $t_0$ . Veja a figura 38, em que  $r$  é a reta tangente.

Figura 38 – Vetor Tangente à  $\alpha$  em  $t_0$ .



Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 4.3.** Seja  $\alpha$  a curva parametrizada diferenciável dada por  $\alpha(t) = (t^5, t^2)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , seu vetor velocidade em  $t = 1$  é dado por

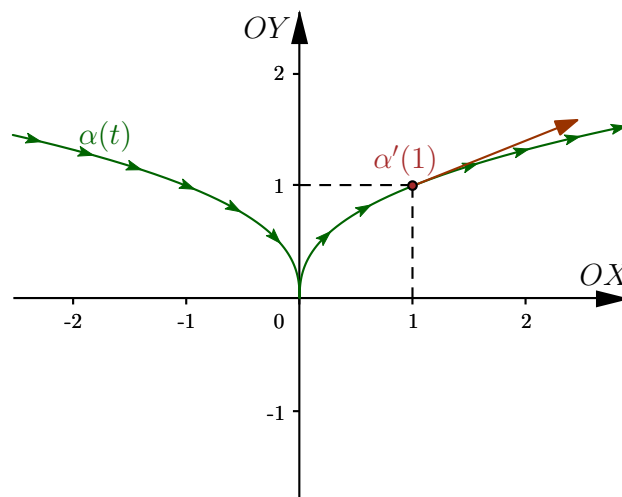
$$\alpha'(1) = (5, 2).$$

Desse modo, a velocidade escalar em  $t = 1$  é

$$\|\alpha'(1)\| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}.$$

Veja na figura 39 o traço da curva  $\alpha$  e o vetor tangente em  $t = 1$ .

Figura 39 – Vetor Tangente à  $\alpha = (t^5, t^2)$  em  $t = 1$ .



Fonte – O autor, 2019.

#### 4.1.2 Curva regular

Vamos definir uma curva parametrizada diferenciável regular.

**Definição 4.2.** Dizemos que uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é regular em  $t_0 \in I$ , se  $\alpha'(t_0) \neq 0$ , ou equivalentemente, se  $\|\alpha'(t_0)\| \neq 0$ . A curva  $\alpha$  é regular em  $I$ , se  $\alpha$  for regular para todo  $t \in I$ . Se  $\|\alpha'(t_0)\| = 0$ , dizemos que  $\alpha$  é singular em  $t_0$  e  $\alpha(t_0)$  é chamada uma singularidade de  $\alpha$ .

Assim podemos concluir que se  $\alpha$  for regular, o vetor  $\alpha'(t)$  aponta para a direção tangente à  $\alpha$  no ponto  $\alpha(t)$ . E portanto definimos a reta tangente a curva  $\alpha$  em  $\alpha(t)$  por

$$r_t(u) = \alpha(t) + u\alpha'(t), \text{ com } u \in \mathbb{R}.$$

Observe que a curva do exemplo 4.3 é parametrizada diferenciável, entretanto não é regular em  $t = 0$ , pois  $\alpha'(0) = 0$ .

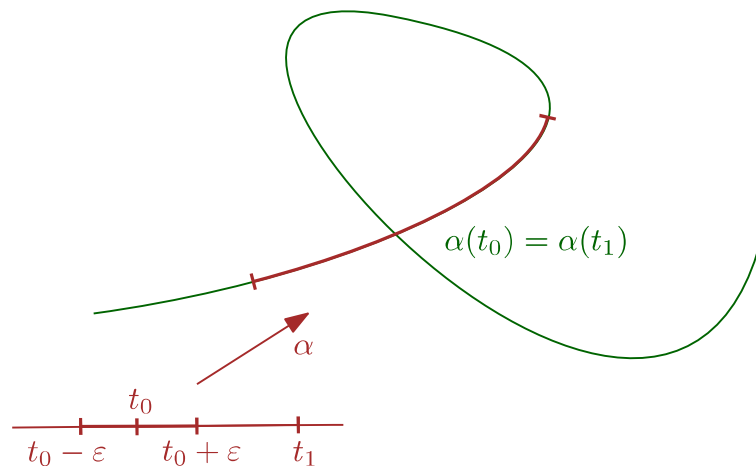
No estudo de geometria diferencial local das curvas é de suma importância a existência de uma reta tangente à curva em todos os pontos. Desse modo, nas abordagens posteriores trataremos das curvas regulares, ou seja, que não possuem pontos de singularidade. A seguir, provaremos que localmente uma curva regular não possui nem mesmo pontos de auto-interseção.

**Proposição 4.1.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada diferenciável e regular em  $t_0 \in I$ . Então existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\alpha$  é injetiva no intervalo  $I_0 = \{t \in I \mid |t - t_0| < \varepsilon\}$ .*

*Demonstração.* Como  $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$ , temos que  $x'(t_0) \neq 0$  ou  $y'(t_0) \neq 0$ . Supomos que  $x'(t_0) \neq 0$ . Logo como  $x'$  é uma função contínua, existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $x'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in I_0$ . Nesse caso,  $x$  é estritamente monótona e, portanto injetiva, o que implica que  $\alpha|_{I_0}$  é injetiva. Analogamente podemos provar o caso em que  $y'(t_0) \neq 0$ .  $\square$

Veja a representação desse fato na figura 40.

Figura 40 – Injetividade local de  $\alpha$ .



Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 4.4.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t, f(t))$  em que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável. Temos que  $\alpha$  é parametrizada diferenciável e regular, pois  $\alpha'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0)$ ,  $\forall t \in I$ . E o traço de  $\alpha$  é igual ao gráfico de  $f$ .*

A proposição a seguir afirma que localmente toda curva regular é dessa forma.

**Proposição 4.2.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada diferenciável e regular em  $t_0 \in I$ . Então existe  $\delta > 0$ , tal que, restrito ao intervalo  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , o traço de  $\alpha$  coincide com o traço de uma curva  $\beta$  da forma  $\beta = (t, f(t))$  ou  $\beta = (f(t), t)$ , para uma função diferenciável  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Sendo  $\alpha$  regular em  $t = t_0$ , vamos ter

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0).$$

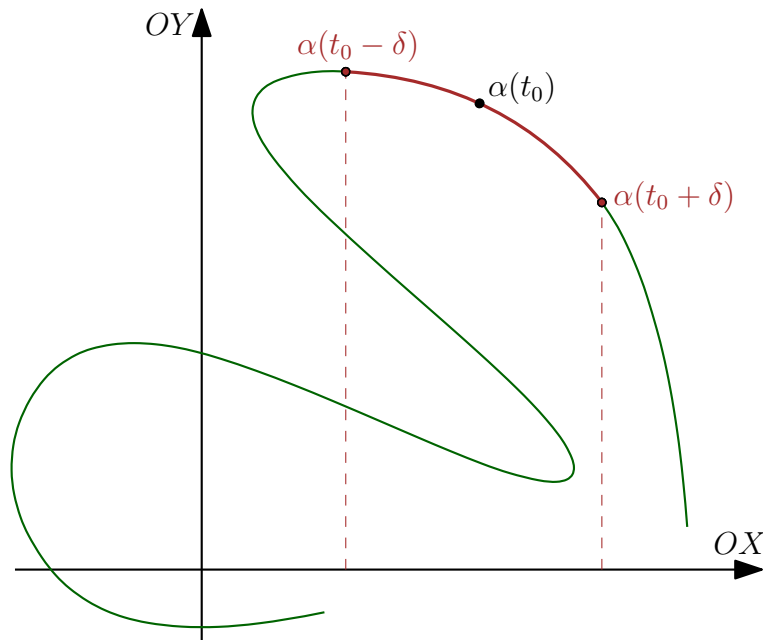
Supomos que  $x'(t_0) \neq 0$ . Assim, pelo teorema da função inversa, existe um intervalo  $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$  tal que a função  $x$  é um difeomorfismo, isto é, uma função diferenciável com inversa diferenciável sobre  $J = x((t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1))$ . Seja  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\beta(t) = \alpha(x^{-1}(t))$ . Portanto,  $\beta$  é uma curva diferenciável e

$$\beta(t) = \left( x(x^{-1}(t)), y(x^{-1}(t)) \right) = (t, f(t)),$$

em que  $f(t) = y(x^{-1}(t))$  é uma função diferenciável. De modo análogo, podemos provar o caso em que  $y'(t_0) \neq 0$ . E nesse caso, o traço de  $\alpha$  coincide localmente em  $\alpha(t_0)$  com o traço de uma curva da forma  $\beta(t) = (g(t), t)$ , onde  $g(t) = x(y^{-1}(t))$ .  $\square$

Veja a restrição de  $\alpha$  ao intervalo  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  na figura 41.

Figura 41 –  $\alpha$  restrita ao intervalo  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ .



Fonte – O autor, 2019.

## 4.2 Reparametrização

Veremos agora que um mesmo traço de curva possui inúmeras parametrizações. Seja portanto, a curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ .

Tomando uma função  $h : J \rightarrow I$  bijetiva diferenciável de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , podemos gerar uma nova curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t)) = (x(h(t)), y(h(t))).$$

A curva  $\beta$  obtida assim, é portanto parametrizada diferenciável de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Dizemos que  $\beta$  é uma reparametrização de  $\alpha$ . Utilizando a regra da cadeia em  $\beta$  temos

$$\beta'(t) = (\alpha \circ h)'(t) = \alpha'(h(t))h'(t),$$

e ainda podemos escrever

$$\beta'(t) = (x'(h(t))h'(t), y'(h(t))h'(t)).$$

Assim, a velocidade escalar de  $\beta$  será

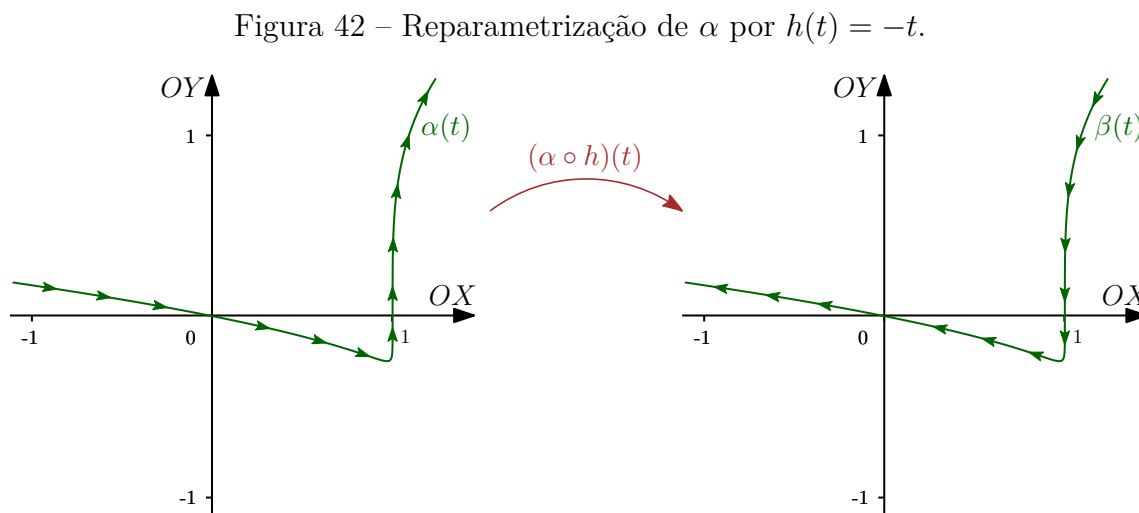
$$\|\beta'(t)\| = \|(\alpha \circ h)'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| |h'(t)|.$$

Consideraremos as reparametrizações em que a função  $h$  é estritamente monótona. Pois, sendo  $h'(t) \neq 0$  e  $\alpha$  regular em  $I$ , sua reparametrização  $\beta = \alpha \circ h$  também será regular em  $J$ . Quando  $h$  é estritamente crescente, temos que  $\beta = \alpha \circ h$  será dita uma reparametrização positiva ou própria, ou seja, que preserva a orientação de  $\alpha$ . E quando  $h$  for estritamente decrescente tal reparametrização será dita negativa ou que reverte a orientação de  $\alpha$ .

**Exemplo 4.5.** *Seja a curva parametrizada diferenciável regular  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t^5 + 1, t^2 + t)$ , sendo  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $h(t) = -t$  obtemos a reparametrização de  $\alpha$*

$$\beta = \alpha(h(t)) = ((-t)^5 + 1, (-t)^2 - t) = (-t^5 + 1, t^2 - t).$$

*Como  $h$  é estritamente decrescente, temos que a reparametrização é negativa. Conforme figura 42.*



## 4.2.1 Reparametrização pelo comprimento de arco

Vamos agora, abordar o comprimento de arco utilizando os conceitos de geometria diferencial. Inicialmente muito se assemelha ao que vimos no capítulo anterior. Ou seja, dada uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  onde  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , que a função  $L_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2} d\xi, \text{ com } t_0 \in I, \quad (4.1)$$

é chamada *comprimento de arco*.

Como  $\alpha'(t)$  é contínua, temos que sua norma também o é, assim, a função  $L_\alpha(t)$  é de classe  $\mathcal{C}^1$ , e pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|. \quad (4.2)$$

Sendo  $\alpha$  regular no intervalo  $I$ , a função  $L_\alpha$  será de classe  $\mathcal{C}^\infty$

Sejam  $t_1, t_2 \in I$ , com  $t_1 < t_2$ , o comprimento de arco da curva  $\alpha$  de  $t_1$  a  $t_2$  é o número

$$L(\alpha|_{[t_1, t_2]}) = L_\alpha(t_2) - L_\alpha(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$

A definição 4.1 não depende da escolha de  $t_0 \in I$ . De fato, seja  $\tilde{t}_0 \in I$  teremos que

$$L_\alpha(t) - \tilde{L}_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi - \int_{\tilde{t}_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$

Desse modo, a função comprimento de arco de  $\alpha$  está bem determinada, a menos de uma constante. Logo podemos definir

**Definição 4.3.** Dizemos que uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se o parâmetro  $t$  é, a menos de uma constante, igual a  $L_\alpha(t)$ , isto é

$$L_\alpha(t) = t + C.$$

Decorrente disso, podemos então enunciar a seguinte proposição.

**Proposição 4.3.** Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se

$$\|\alpha'(t)\| \equiv 1, t \in I.$$

*Demonstração.* Se tivermos  $\|\alpha'(t)\| = 1$  para todo  $t \in I$ , então

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t d\xi = t - t_0,$$

e assim,  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco. De outro modo temos que sendo  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco, temos que

$$L_\alpha(t) = t + C,$$

e por 4.2 obtemos

$$L'_\alpha(t) = 1 = \|\alpha'(t)\|.$$

□

Pode-se notar que sendo  $I = [a, b]$ , o comprimento de  $\alpha$  existe e será obtido por

$$L(\alpha) = L_\alpha(b) - L_\alpha(a)$$

**Exemplo 4.6.** Seja  $\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$  uma aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , sua função comprimento de arco, tomando  $t_0 = 0$ , será

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}e^{-t} \iff L_\alpha(t) = \sqrt{2} \int_0^t e^{-\xi} d\xi = \sqrt{2}(1 - e^{-t}).$$

Note que para valores grandes de  $t$  o comprimento se aproximará de

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} L_\alpha(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{e^t}\right) = \sqrt{2}.$$

Através do teorema a seguir, mostraremos que toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.

**Teorema 4.1.** Toda curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco. De forma mais precisa, fixado  $t_0 \in I$ , existe uma bijeção  $h : J \rightarrow I$  de classe  $C^\infty$  definida em um intervalo  $J$  sobre  $I$ , com  $0 \in J$  e  $h(0) = t_0$ , de modo que a curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ , satisfaz  $\|\beta'(s)\| = 1$ .

*Demonstração.* Seja a curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , por 4.2 temos

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\| > 0,$$

logo  $L_\alpha$  é estritamente crescente, e portanto injetiva com inversa diferenciável. Como  $L_\alpha$  é contínua, vamos tomar um intervalo  $J = L_\alpha(I)$ , obtendo assim uma inversa diferenciável de  $L_\alpha$  dada por  $h : J \rightarrow I$ . Pela definição 4.1  $L_\alpha(t_0) = 0 \in L_\alpha(I) = J$ , e portanto  $h(0) = t_0$ . Vamos agora verificar que a curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Derivando  $\beta$  obtemos

$$\beta'(s) = [\alpha(h(s))]' = \alpha'(h(s))h'(s). \quad (4.3)$$

Mas sabemos que  $h(s) = L_\alpha^{-1}$ , logo

$$h'(s) = \frac{1}{L'_\alpha(h(s))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|}, \quad (4.4)$$

e portanto, utilizando 4.4, a norma de  $\beta$  obtida em 4.3 será

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s))h'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| |h'(s)| = 1$$

□

**Exemplo 4.7.** Consideremos a aplicação  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  cujo traço é o círculo de centro na origem e raio  $R$ , ou seja  $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$ . Temos que a função comprimento de arco de  $\alpha$  será

$$\|\alpha'(t)\| = R \implies L_\alpha(t) = R \int_0^t dv = Rt.$$

Tomando sua inversa  $L_\alpha^{-1} = h : [0, 2\pi R] \rightarrow [0, 2\pi]$  dada por  $t = h(s) = \frac{s}{R}$ , e obtendo  $\beta = (\alpha \circ h) : [0, 2\pi R] \rightarrow \mathbb{R}^2$  temos

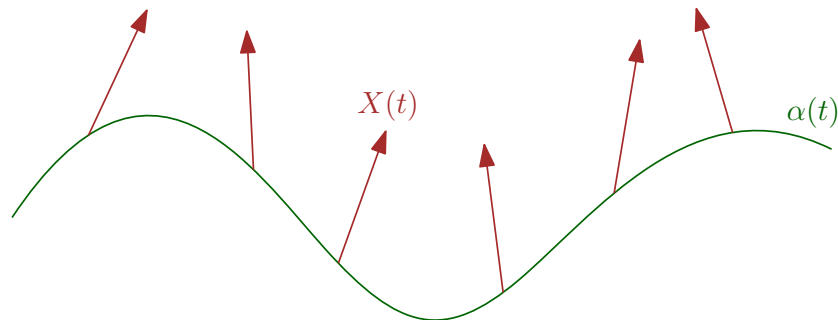
$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \left( R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right).$$

$\beta$  é uma reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco.

### 4.3 Campo de vetores ao longo de curvas

De maneira intuitiva, podemos imaginar que campos de vetores ao longo de uma curva seriam vetores cujas origens pertencem ao traço da curva. Sendo portanto um campo  $X$  de vetores ao longo de uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com  $t \in I$ , a origem de cada vetor será  $\alpha(t)$ . Assim, um campo de vetores é uma aplicação que associa cada  $t \in I$  a um vetor  $X(t)$  com origem em  $\alpha(t)$ . Veja a representação da aplicação  $X$  na figura 43.

Figura 43 – Campo de vetores  $X(t)$  ao longo de  $\alpha(t)$ .



Fonte – O autor, 2019.

E assim, para determinar o vetor  $X(t)$ , basta conhecer sua extremidade final, uma vez que, a extremidade inicial é o ponto  $\alpha(t)$ . Logo, definimos

**Definição 4.4.** Um campo de vetores de classe  $\mathcal{C}^r$  ao longo de  $\alpha$  é uma aplicação  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^r$ . Geometricamente, o campo de vetores  $X$  é dado, em cada ponto  $\alpha(t)$ , pelo vetor de extremidades  $\alpha(t)$  e  $X(t)$ .

Agora, considerando uma curva parametrizada diferenciável e regular dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , temos que  $T$  dado por  $T(t) = \alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$  é um campo de classe  $\mathcal{C}^\infty$  e será chamado *campo tangente* ao longo de  $\alpha$ . E note que quando  $\alpha$  está parametrizada

pelo comprimento de arco,  $T$  será um campo unitário, pois  $\|T(s)\| = \|\alpha'(s)\| = 1$ . E definindo o campo  $N$  dado por  $N(s) = (-y'(s), x'(s))$  ao longo de  $\alpha$ , também de classe  $C^\infty$ , observe que para todo  $s \in I$  vamos ter

$$\langle T(s), N(s) \rangle = -x'(s)y'(s) + y'(s)x'(s) = 0.$$

Ou seja,  $N$  é perpendicular a  $T$ , e portanto será chamado *campo normal*. Novamente, caso  $\alpha$  esteja parametrizada pelo comprimento de arco,  $N$  será um campo unitário.

Precisamos realizar algumas definições relacionadas aos campos de vetores, desse modo, sejam os campos  $X$  e  $Y$  ambos de classe  $C^r$ , ao longo de  $\alpha$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^r$ . Os campos  $X + Y$  e  $fX$  dados por

$$(X + Y)(t) = X(t) + Y(t) \quad \text{e} \quad (fX)(t) = f(t)X(t),$$

são de classe  $C^r$  ao longo de  $\alpha$ . Seja  $X(t)$  um campo de classe  $C^r$ ,  $r > 0$ , dado por  $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ , definimos sua derivada por

$$X'(t) = (X'_1(t), X'_2(t)),$$

em que  $X'$  é um campo de classe  $C^{r-1}$  ao longo de  $\alpha(t)$ . Desse modo, podemos obter as relações

$$(X + Y)' = X' + Y', \quad (fX)' = f'X + fX' \quad \text{e} \quad \langle X, Y \rangle' = \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle.$$

Assim, podemos enunciar a seguinte proposição.

**Proposição 4.4.** *Se  $\|X\|$  é constante, então  $X'(t)$  é perpendicular a  $X(t)$  para todo  $t \in I$ , ou seja*

$$\langle X, X' \rangle = 0. \tag{4.5}$$

*E também, se  $X$  e  $Y$  são perpendiculares, então*

$$\langle X', Y \rangle = -\langle X, Y' \rangle. \tag{4.6}$$

*Demonstração.* Se  $\|X\|$  é constante, então  $\langle X, X \rangle$  também é. Sendo  $C \in \mathbb{R}$  temos

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle = C &\implies \langle X, X \rangle' = 0 \implies \langle X', X \rangle + \langle X, X' \rangle = 0 \\ &\implies 2\langle X', X \rangle = 0 \implies \langle X', X \rangle = 0, \end{aligned}$$

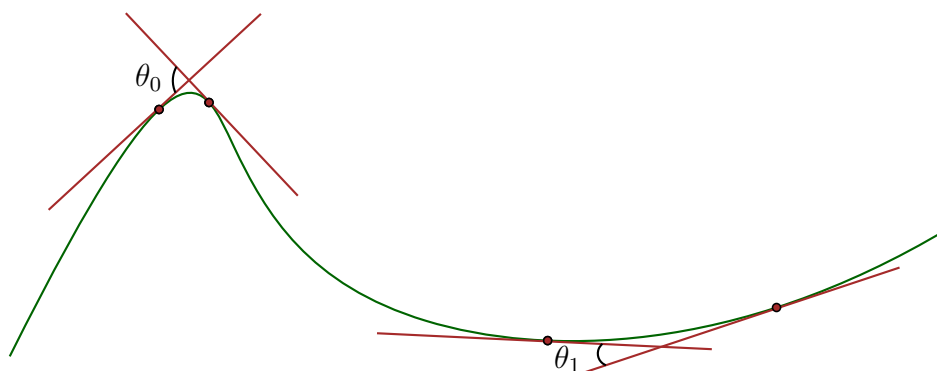
o que prova 4.5. Agora, sabendo que  $X$  e  $Y$  são perpendiculares teremos

$$\langle X, Y \rangle = 0 \implies \langle X, Y \rangle' = 0 \implies \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle = 0 \implies \langle X', Y \rangle = -\langle X, Y' \rangle,$$

provando 4.6. □

## 4.3.1 Fórmulas de Frenet e curvatura

Nesta seção, trataremos de um conceito que é um dos pilares da geometria diferencial, que é o de curvatura, nos sendo de grande valia a noção de campos de vetores vistos anteriormente. De modo intuitivo, a curvatura de uma curva diferenciável num ponto é a medida da variação da direção da reta tangente numa vizinhança desse ponto, de modo que, quanto maior for essa variação, maior será o valor absoluto da curvatura. Veja esse fato na figura 44.

Figura 44 – Variação do ângulo, com  $\theta_0 > \theta_1$ .

Fonte – O autor, 2019.

De modo a tornar essa ideia mais precisa, vamos considerar inicialmente, curvas regulares  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizadas pelo comprimento de arco. Assim, sabemos que  $\alpha'(s) \neq 0$  e como vimos anteriormente o campo  $T$  de vetores tangentes e unitários ao longo de  $\alpha$  em  $\alpha(s)$  é dado por

$$T(s) = \alpha'(s).$$

Sendo  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , então  $T(s) = (x'(s), y'(s))$ . Agora, definimos um campo  $N$  de vetores ao longo de  $\alpha$ , de modo que para  $s \in I$ ,  $\{T, N\}$  seja uma base positiva de  $\mathbb{R}^2$ , ou seja, exista uma rotação que leva  $e_1 = (1, 0)$  em  $T$  e  $e_2 = (0, 1)$  em  $N$ . Portanto

$$N(s) = (-y'(s), x'(s)),$$

sendo  $N$  um campo normal e unitário ao longo de  $\alpha$  e de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Tal aplicação que a cada  $s$  relaciona  $N(s)$  é chamada *campo normal* a curva  $\alpha$ , ou seja, para cada  $s \in I$ ,  $N(s)$  será o vetor normal a  $\alpha$  em  $\alpha(s)$ . E portanto, definimos.

**Definição 4.5.** *Seja a aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada pelo comprimento de arco. O referencial  $\{T(s), N(s)\}$  é chamado referencial de Frenet<sup>1</sup> da curva  $\alpha$ .*

<sup>1</sup> O matemático e astrônomo francês Jean Frédéric Frenet (1816-1900) descobriu em seus estudos, independentemente de seu compatriota Joseph Alfred Serret, as hoje chamadas fórmulas de Frenet-Serret das curvas planas e espaciais. Essas fórmulas de grande uso em geometria diferencial foram apresentadas em sua tese de doutorado em Toulouse (1847), de acordo com (FRENSEL; DELGADO, 2017)

Note que como  $T(s) = \alpha'(s)$ , então  $\|T(s)\| = 1$ . Pela proposição 4.4,  $T'(s)$  é perpendicular a  $T(s)$ . Como  $\{T(s), N(s)\}$  gera o  $\mathbb{R}^2$ , para cada  $s \in I$  temos que  $T'(s)$  é paralelo a  $N(s)$ . Logo existe uma função  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada  $s \in I$  associa a curvatura  $k(s)$  de  $\alpha$  no ponto  $\alpha(s)$ , de modo que

$$T'(s) = k(s)N(s), \quad s \in I. \quad (4.7)$$

**Definição 4.6.** A função  $k$ , definida pela equação 4.7, é chamada curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$ .

Notemos que a função  $k(s)$ , então será dada por

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle \text{ ou usando 4.6, } k(s) = -\langle N'(s), T(s) \rangle. \quad (4.8)$$

Note que  $k$  será uma função de classe  $C^\infty$  quando a aplicação  $\alpha$  também for. Como  $T(s) = \alpha'(s)$  e  $\alpha(s)$  está parametrizada pelo comprimento de arco, então

$$\|T(s)\| = \|\alpha'(s)\| = 1.$$

Desse modo,  $\|N(s)\| = 1$ , e assim por 4.7 temos

$$\|T'(s)\| = |k(s)| \|N(s)\| \iff \|T'(s)\| = |k(s)|.$$

E portanto, a função curvatura é uma medida da variação da direção de  $T$ , ou seja, mede a variação da direção da reta tangente a curva  $\alpha$  em  $\alpha(s)$ . Logo, podemos falar que a curvatura mede o quanto uma curva deixa de ser uma reta, o que vamos ver na proposição seguinte.

**Proposição 4.5.** A curvatura de uma curva regular  $\alpha$  é identicamente zero, se e somente se o traço de  $\alpha$  está contido em uma reta.

*Demonstração.* Sendo  $k(s) \equiv 0$ , temos que  $\|T'(s)\| = |k(s)| = 0$ , e como  $T$  está definida em uma intervalo  $I$ , conclui-se que  $T(s)$  é um vetor constante. Seja  $V_0$  tal vetor, podemos então escrever  $\alpha$  como

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \int_{s_0}^s T(\xi) d\xi = \alpha(s_0) + V_0(s - s_0).$$

E assim, o traço de  $\alpha$  está contido em uma reta que passa por  $\alpha(s_0)$  e é paralela ao vetor  $V_0$ . Reciprocamente, como o traço de  $\alpha$  está contido em uma reta e  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco temos

$$\alpha(s) = P_0 + sV_0 \implies \|\alpha'(s)\| = \|V_0\| = 1,$$

e portanto  $T(s) = V_0$  que implica  $T'(s) = (0, 0)$ . E por fim  $k(s) = 0$ .  $\square$

Analisando agora a variação do campo  $N$ , como  $\|N(s)\| = 1$  temos que  $N'(s)$  é perpendicular a  $N(s)$ , e portanto, paralelo a  $T(s)$ . Da equação 4.7 obtemos que

$$x'' = -k(s)y'(s) \quad \text{e} \quad y'' = k(s)x'(s). \quad (4.9)$$

Assim, substituindo 4.9 em  $N'(s)$  vamos ter

$$N'(s) = (-y''(s), x''(s)) = (-k(s)x'(s), -k(s)y'(s)) = -k(s)T(s). \quad (4.10)$$

Tomando 4.7 e 4.10, temos que os campos  $T$  e  $N$  satisfazem o sistema

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)T(s) \end{cases}, \quad (4.11)$$

cujas equações são denominadas *equações de Frenet* da curva  $\alpha$ . Vamos agora, definir a curvatura de uma curva regular, não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco. Como vimos no teorema 4.1, toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco, com base neste fato apresentamos a seguinte definição.

**Definição 4.7.** *Seja a aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada diferenciável e regular, e seja  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco. Definimos a curvatura de  $\alpha$  em  $t \in I$  pela curvatura de  $\beta$  no ponto  $s \in J$  que corresponde ao ponto  $t \in I$ .*

De modo mais preciso, podemos demonstrar a proposição a seguir.

**Proposição 4.6.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular, definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Então a curvatura de  $\alpha$  em  $t \in I$  é dada pela expressão*

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^3}}.$$

*Demonstração.* Seja  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma reparametrização positiva de  $\alpha$  pelo comprimento de arco, então escrevendo  $\beta(s(t)) = \alpha(t) = (x(t), y(t))$  e utilizando a *regra da cadeia* obtemos

$$(x'(t), y'(t)) = \alpha'(t) = \frac{d\beta}{ds} s'(t) \quad \text{e} \quad (4.12)$$

$$(x''(t), y''(t)) = \alpha''(t) = \frac{d^2\beta}{ds^2} (s'(t))^2 + \frac{d\beta}{ds} s''(t). \quad (4.13)$$

Da equação 4.12, e sabendo que  $s'(t) > 0$  temos

$$\|\alpha'(t)\| = \left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| |s'(t)| \iff s'(t) = \|\alpha'(t)\|.$$

Logo, ainda em 4.12, isolando  $\frac{d\beta}{ds} = T(s(t))$  teremos

$$T(s(t)) = \frac{d\beta}{ds}(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} (x'(t), y'(t)). \quad (4.14)$$

Agora, na equação 5.9 isolando  $\frac{d\beta^2}{ds}(s(t)) = \frac{dT}{ds}(s(t))$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds}(s(t)) &= \frac{d\beta^2}{ds}(s(t)) = \frac{1}{(s'(t))^2} \left[ \alpha''(t) - \frac{d\beta}{ds} s''(t) \right] \\ &= \frac{1}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} [(x''(t), y''(t)) - s''(t)T(s(t))]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pela definição de campo normal e utilizando 4.14 vamos ter

$$N(s(t)) = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} (-y'(t), x'(t)). \quad (4.16)$$

E por fim, substituindo 4.15 e 4.16 em

$$k(s(t)) = \left\langle \frac{dT}{ds}(s(t)), N(s(t)) \right\rangle,$$

e considerando o fato de  $T$  e  $N$  serem ortogonais, chegamos ao resultado desejado.  $\square$

**Exemplo 4.8.** Agora, seja a aplicação regular  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a espiral logarítmica dada por  $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ . De modo a utilizar a proposição 4.6, encontremos suas derivadas.

$$\alpha'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t), \text{ e portanto}$$

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= (e^t \cos t - e^t \sin t - e^t \sin t - e^t \cos t, e^t \sin t + e^t \cos t + e^t \cos t - e^t \sin t) \\ &= (-2e^t \sin t, 2e^t \cos t). \end{aligned}$$

Logo, a curvatura de  $\alpha$  será

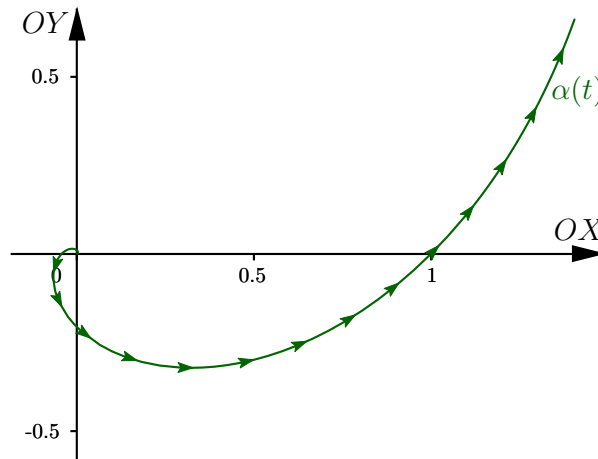
$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{(e^t \cos t - e^t \sin t)(2e^t \cos t) - (-2e^t \sin t)(e^t \sin t + e^t \cos t)}{(\sqrt{2e^{2t}})^3} \\ &= \frac{2e^{2t} \cos^2 t + 2e^{2t} \sin^2 t}{2\sqrt{2}e^{3t}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^t}. \end{aligned}$$

E assim, para valores de  $t$  tendendo para o infinito negativo e positivo temos, respectivamente

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} k(t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{2}e^t} = +\infty, \text{ e também} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}e^t} = 0. \end{aligned}$$

Veja a espiral logarítmica na figura 45.

Figura 45 – Espiral logarítmica  $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ .



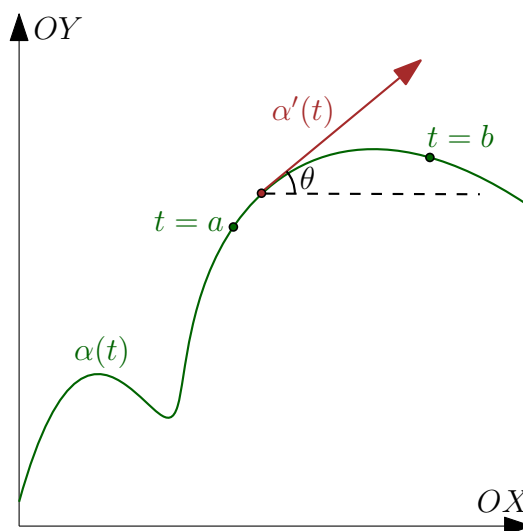
Fonte – O autor, 2019.

**Corolário 4.1.** No caso em que  $\alpha$  estiver parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja,  $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , como  $\|\alpha'(s)\| = 1$ , sua curvatura é

$$k(s) = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s).$$

Podemos definir também o ângulo que o vetor tangente à curva faz com o eixo  $OX$ . Assim, seja a aplicação  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular dada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Definimos  $0 < \theta(t) < 2\pi$  como sendo o ângulo que o vetor tangente à  $\alpha$  em  $t$  faz com o eixo  $OX$ , conforme figura 46.

Figura 46 – Representação de  $\theta(t)$ .



Fonte – O autor, 2019.

Desse modo,  $\cos(\theta(t)) = \frac{x'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$  e  $\sin(\theta(t)) = \frac{y'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ , portanto nos intervalos em

que  $x'(t) \neq 0$  teremos

$$\theta(t) = \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

e quando  $x'(t) = 0$ , podemos considerar

$$\theta(t) = \arctan \frac{x'(t)}{y'(t)}.$$

$\theta(t)$  está bem definida localmente (isto é, está bem definida em um pequeno intervalo em torno de cada  $t$ ) como uma função diferenciável. Assim, derivando  $\theta(t)$  obtemos um resultado muito importante enunciado na proposição a seguir.

**Proposição 4.7.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de classe  $C^2$ , parametrizada pelo comprimento de arco dada por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ . E seja  $\theta(s)$  o ângulo que o vetor  $\alpha'(s)$  faz com o eixo  $OX$ . Então*

$$\theta'(s) = k(s),$$

onde  $k$  é a função curvatura da curva  $\alpha$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $\theta(s) = \arctan \frac{y'(s)}{x'(s)}$ , isto é, em intervalos em que  $x'(s) \neq 0$ . Derivando  $\theta(s)$  encontramos

$$\begin{aligned} \theta'(s) &= \frac{1}{1 + (y'(s)/x'(s))^2} \cdot \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{(x'(s))^2} \\ &= \frac{(x'(s))^2}{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} \cdot \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{(x'(s))^2} \\ &= \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} \\ &= x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s). \end{aligned}$$

Agora, utilizando a proposição 4.6 e o fato de  $\alpha$  estar parametrizada pelo comprimento de arco, obtemos

$$\theta'(s) = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = k(s).$$

□

**Exemplo 4.9.** *Seja  $\alpha : [0, 2\pi R] \rightarrow \mathbb{R}^2$  o círculo parametrizado pelo comprimento de arco, com centro em  $P_0 \in \mathbb{R}^2$  e raio  $R > 0$ , dado por  $\alpha(s) = P_0 + R \left( \cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R} \right)$ . Utilizando a equação 4.8, temos que*

$$\begin{aligned} T(s) = \alpha'(s) &= R \left( -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R}, \frac{1}{R} \cos \frac{s}{R} \right) = \left( -\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R} \right), \text{ e portanto} \\ N(s) = (-y'(s), x'(s)) &= \left( -\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R} \right). \end{aligned}$$

E agora, derivando  $T(s)$  encontramos

$$T'(s) = \alpha''(s) = \left( -\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R} \right) = \frac{1}{R} \left( -\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R} \right).$$

E por fim, sua curvatura será

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \left\langle \frac{1}{R} \left( -\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R} \right), \left( -\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R} \right) \right\rangle = \frac{1}{R}.$$

Como era de se esperar a curvatura ao longo de  $\alpha$  é constante.

Doutro modo, considerando

$$\theta(s) = \arctan \frac{y'(s)}{x'(s)} = \arctan \frac{\cos(s/R)}{-\sin(s/R)}, \text{ com } s \in (0, \pi R).$$

Logo, utilizando a proposição 4.7 obtemos

$$\theta'(s) = \left( -\sin \frac{s}{R} \right) \left( -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R} \right) - \left( -\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R} \right) \left( \cos \frac{s}{R} \right) = \frac{1}{R} = k(s).$$

A proposição 4.7 sugere a definição de uma função global diferenciável  $\theta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\theta(s) = \int_0^s k(s) ds. \quad (4.17)$$

Como  $\theta' = k = x'y'' - x''y' = \left( \arctan \frac{y'(s)}{x'(s)} \right)'$ , esta função global coincide, a menos de constantes, com a função local  $\theta$  definida previamente. De modo intuitivo,  $\theta(s)$  mede a rotação total do vetor tangente, isto é, o ângulo total descrito pelo ponto  $T(s)$  da indicatriz tangente, à medida que percorremos a curva  $\alpha$  de 0 a  $s$ . Nos casos que  $\alpha$  é fechada, este ângulo é um múltiplo inteiro  $R_\alpha$  de  $2\pi$ ; ou seja,

$$\int_0^l k(s) ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi R_\alpha. \quad (4.18)$$

O número inteiro  $R_\alpha$  é chamado índice de rotação da curva  $\alpha$ . E ainda, quando uma curva fechada é simples, temos um importante resultado denotado por *teorema do índice de rotação*.

**Teorema 4.2.** *O índice de rotação de uma curva simples fechada é  $\pm 1$ , onde o sinal depende da orientação da curva.*

Ocultaremos a demonstração deste teorema por conter assuntos que estão fora do escopo deste trabalho. A mesma pode ser consultada em Carmo (2014, p. 476 e 477).

#### 4.4 Teorema fundamental das curvas planas

Na seção anterior ressaltamos a importância da curvatura nos estudos de geometria diferencial. De fato, veremos através do teorema a seguir que, de certo modo, a função curvatura determina a curva.

**Teorema 4.3.** *Seja  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^\infty$ . Então, dados  $s_0 \in I$ ,  $P = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $V_0 = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2$ , com  $\|V_0\| = 1$ , existe uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que a curvatura em cada ponto  $\alpha(s)$  é dada por  $k(s)$ ,  $\alpha(s_0) = P$  e  $\alpha'(s_0) = V_0$ .*

*Demonstração.* Vamos supor que  $\alpha$ , definida por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  seja parametrizada pelo comprimento de arco e que  $k(s)$  seja sua curvatura. Das equações de Frenet presentes no sistema 4.11, podemos retirar que as funções  $x$  e  $y$  satisfazem

$$\begin{cases} x''(s) = -k(s)y'(s), \\ y''(s) = k(s)x'(s), \end{cases} \quad (4.19)$$

que possuem as condições iniciais  $x(s_0) = P_1$ ,  $y(s_0) = P_2$ ,  $x'(s_0) = V_1$  e  $y'(s_0) = V_2$ . No caso de curvas no plano, a solução para este sistema pode ser obtida de maneira explícita por integração simples, mostrando além disso de um modo mais simples que esta solução é parametrizada por comprimento de arco. De fato, utilizando a proposição 4.7 temos

$$V_1 = x'(s_0) = \cos(\theta(s_0)), \quad V_2 = y'(s_0) = \sin(\theta(s_0)) \quad \text{e} \quad \theta(s) - \theta(s_0) = \int_{s_0}^s k(\xi) d\xi.$$

Portanto, o sistema 4.19 possui uma integral primeira, dada por

$$\begin{cases} x'(s) = \cos\left(\int_{s_0}^s k(\xi) d\xi + a\right), \\ y'(s) = \sin\left(\int_{s_0}^s k(\xi) d\xi + a\right), \end{cases} \quad (4.20)$$

em que  $a$  é determinado pelas igualdades  $\cos a = V_1$  e  $\sin a = V_2$ . Realizando a integral das equações do sistema obtido acima, teremos

$$\begin{cases} x(s) = P_1 + \int_{s_0}^s \cos\left(\int_{s_0}^{\tau} k(\xi) d\xi + a\right) d\tau, \\ y(s) = P_2 + \int_{s_0}^s \sin\left(\int_{s_0}^{\tau} k(\xi) d\xi + a\right) d\tau. \end{cases}$$

Nota-se que a curva dada  $x(s)$  e  $y(s)$  obtidas no sistema acima, ou seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , satisfaz às condições do teorema.

Precisamos agora, provar que tal curva é única. Para isso, vamos supor que existam duas curvas, dadas por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  e  $\beta(s) = (u(s), v(s))$  nas condições do teorema. Utilizando as equações de Frenet nas curvas  $\alpha$  e  $\beta$ , temos que as funções  $f(s) = x'(s) - u'(s)$  e  $g(s) = y'(s) - v'(s)$  satisfazem o sistema

$$\begin{cases} f'(s) = -k(s)g(s), \\ g'(s) = k(s)f(s). \end{cases}$$

De onde podemos obter que

$$\frac{1}{2}(f^2 + g^2)'(s) = f(s)f'(s) + g(s)g'(s) = 0,$$

e portanto  $(f^2 + g^2)$  é uma função constante. E sendo nula em  $s = s_0$ , incorre que  $(f^2 + g^2) \equiv 0$ , e assim  $f(s) = g(s) = 0$ . E portanto, obtemos que

$$\alpha'(s) = \beta'(s), \quad \forall s \in I.$$

E por fim, usando o fato de que  $\alpha(s_0) = \beta(s_0) = P_0$ , concluímos que  $\alpha(s) \equiv \beta(s)$ .  $\square$

Tal resultado revela que a curvatura determina uma curva, a menos de sua posição no plano. Assim, podemos enunciar o corolário a seguir.

**Corolário 4.2.** *Duas curvas  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizadas pelo comprimento de arco com a mesma função de curvatura  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  são congruentes, isto é, existem uma rotação  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e uma translação por um vetor  $b \in \mathbb{R}^2$ , tal que, para todo  $s \in I$ ,*

$$\beta(s) = (A \circ \alpha)(s) + b.$$

*Demonstração.* Fixemos  $s_0 \in I$ . Seja  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a rotação que leva  $\alpha'(s_0)$  em  $\beta'(s_0)$ , e também tomemos  $b = \beta(s_0) - \alpha(s_0)$ . Logo, temos que a curva  $\gamma(s) = (A \circ \alpha)(s) + b$ , é tal que  $\gamma(s_0) = \beta(s_0)$ ,  $\gamma'(s_0) = \beta'(s_0)$  e a curvatura em cada ponto  $\gamma(s)$  é  $k(s)$ . Pelo *Teorema Fundamental das Curvas Planas*, obtemos que  $\gamma(s) \equiv \beta(s)$ .

$\square$

#### 4.5 Curvas convexas

Nesta seção, estudaremos algumas propriedades geométricas das curvas regulares cuja a curvatura não troca de sinal, de acordo com Alencar e Santos (2002). Inicialmente, introduziremos o conceito de curva localmente convexa.

**Definição 4.8.** *Dizemos que uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é convexa em  $t_0 \in I$ , se existe  $\delta > 0$ , tal que  $\alpha((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$  esteja inteiramente contido num dos semi-planos determinados pela reta tangente à  $\alpha$  em  $t_0$ . A curva  $\alpha$  é dita estritamente convexa em  $t_0$ , se  $\alpha$  é convexa em  $t_0$  e existe  $\delta > 0$ , tal que  $\alpha(t_0)$  é o único ponto de  $\alpha((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$  sobre a reta tangente de  $\alpha$  em  $t_0$ .*

A definição de curva convexa em  $t_0$  é equivalente a dizer que, para todo  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  a função dada por

$$h_{t_0}(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N(t_0) \rangle, \quad (4.21)$$

não muda de sinal, onde  $N$  é o campo normal de  $\alpha$ . Utilizando essa função, podemos provar a seguinte proposição.

**Proposição 4.8.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e de classe  $\mathcal{C}^2$ . Se a curvatura de  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  é não nula, então  $\alpha$  é estritamente convexa em  $t_0$ .*

*Demonstração.* Supondo  $k(t_0) > 0$ . Precisamos provar que existe  $\delta > 0$ , tal que em  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  a função  $h_{t_0}$  seja não-negativa e  $h(t) = 0$ , se e somente se  $t = t_0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco. Com isso,

$$h'_{t_0}(t_0) = \langle \alpha'(t_0), N(t_0) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad h''_{t_0}(t_0) = k(t_0) > 0.$$

A partir desses resultados temos que  $t_0$  é um ponto de mínimo estrito local de  $h_{t_0}$ . Como  $h_{t_0}(t_0) = 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que  $h_{t_0}(t) > 0$ , para todo  $0 < |t - t_0| < \delta$ . O que conclui a prova no caso  $k(t_0) > 0$ . De modo análogo prova-se o caso em que  $k(t_0) < 0$ .

□

A proposição a seguir nos possibilita considerar o caso em que a curvatura se anula, mas não muda de sinal.

**Proposição 4.9.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular com curvatura  $k$ . Suponha que existe  $\delta > 0$ , tal que, para todo  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$ ,  $k(t) \geq 0$ . Então  $\alpha$  é convexa em  $t_0$ . Além disso, o traço de  $\alpha|_{(t_0 - \delta, t_0 + \delta)}$  está contido no semiplano determinado pela reta tangente a curva  $\alpha$  em  $t_0$  para o qual aponta o vetor  $N(t_0)$ .*

*Demonstração.* Vamos escolher um sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  de modo que  $\alpha(t_0) = (0, 0)$ ,  $T(t_0) = (1, 0)$  e  $N(t_0) = (0, 1)$ . Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $\alpha$  esteja parametrizada pelo comprimento de arco e, no sistema de coordenadas acima, seja dada por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)).$$

A prova reduz-se, nesse caso, a mostrar que existe  $\delta_1 > 0$ , tal que  $y(t) \geq 0$ , para todo  $t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$ . Utilizando a relação 4.17, considere a função  $\theta$ , definida por

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t k(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Pelas equações vistas em 4.20 temos

$$(x'(t), y'(t)) = \alpha'(t) = (\cos \theta(t), \sen \theta(t)).$$

Como  $k(t_0) \geq 0$ ,  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , existe  $0 < \delta_1 \leq \delta$ , tal que

$$y'(t) = \sen \alpha(t) \geq 0, \quad \text{se } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta_1,$$

e

$$y'(t) = \sen \alpha(t) \leq 0, \quad \text{se } t_0 - \delta_1 \leq t \leq t_0.$$

Assim, a função  $y$  é não-crescente no intervalo  $[t_0 - \delta_1, t_0]$  e não-decrescente no intervalo  $[t_0, t_0 + \delta_1]$ . Como  $y(t_0) = 0$ , conclui-se que  $y(t) \geq 0$ , para todo  $t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ .

□

Com a compreensão de convexidade de curvas nas vizinhanças de determinado ponto, podemos expandir esse assunto e definir curvas convexas em intervalos maiores.

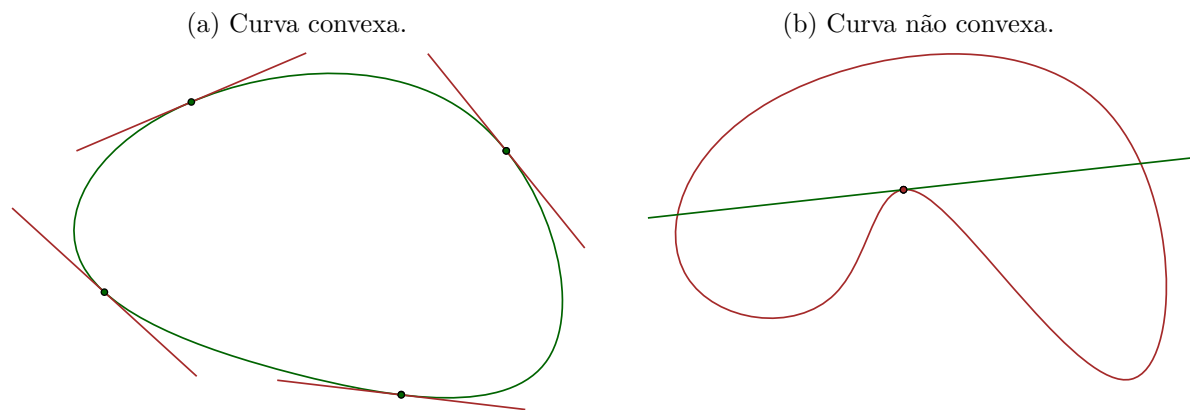
**Definição 4.9.** *Uma curva regular  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é convexa, se, para cada  $t_0 \in [a, b]$ , o traço de  $\alpha$  está inteiramente contido em um dos semiplanos determinados pela reta tangente à  $\alpha$  em  $t_0$ .*

Mais precisamente, ser convexa significa que, para todo  $t \in [a, b]$ , a função definida previamente, dada por

$$h_{t_0}(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N(t_0) \rangle,$$

não muda de sinal em  $[a, b]$ . Em particular,  $\alpha$  é convexa em todo  $t \in [a, b]$ . E ainda,  $\alpha$  é dita estritamente convexa em  $t_0$ , se seu traço, exceto pelo ponto  $\alpha(t_0)$ , está inteiramente contido no semiplano aberto determinado pela reta tangente à curva  $\alpha$  em  $\alpha(t_0)$ . Consequência desta propriedade é que a função  $h_{t_0}$ , definida acima, somente se anula em  $t = t_0$ . Veja nas figuras 47a e 47b exemplos de curvas convexas e não convexas, respectivamente.

Figura 47 – Representação das curvas fechadas e simples.



Fonte – O autor, 2019.

Com esses resultados, podemos perceber que a noção de convexidade de uma curva está fortemente ligada com a sua curvatura. De fato, quando uma curva é fechada e simples temos o seguinte teorema.

**Teorema 4.4.** *Uma curva regular, fechada e simples  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é convexa, se e somente se sua curvatura não muda de sinal.*

Ocultaremos a demonstração deste teorema por dispor de assuntos que estão fora do escopo deste trabalho. A mesma pode ser consultada nos estudos de Alencar e Santos (2002, p. 178-180).

## 5 ANÁLISE DOS RASTROS DAS RODAS DE UMA BICICLETA

Neste capítulo, vamos introduzir um dos principais pontos de estudo deste trabalho, que será uma análise dos rastros das rodas de uma bicicleta. Ou seja, imagine que numa ciclovia, em certo momento, uma bicicleta passe por uma poça d'água. Após isso, espera-se que ela passe a deixar os rastros de suas rodas no asfalto. Nosso objetivo será estudar as relações entre esse par de curvas, quando o rastro traseiro é predeterminado<sup>1</sup>, tendo como principais inspirações os escritos de (TABACHNIKOV, 2006) e (KONHAUSER; VELLEMAN; WAGON, 1996).

### 5.1 Para onde foi a bicicleta?

Em uma das aventuras de Sherlock Holmes, chamada “A Escola do Priorado”, a chave para desvendar o mistério consistia em descobrir para qual lado foi uma bicicleta. Como podemos ver no texto a seguir.

“... Este rastro, como você percebe, foi feito por um ciclista que vinha da direção da escola.”

“Ou ia em direção a ela?”

“Não, não, meu caro Watson. A impressão mais profundamente enterrada é, obviamente, a roda traseira, sobre a qual o peso repousa. Você pode perceber vários lugares onde ela passou sobre a marca mais rasa da roda da frente e a obliterou. Ela estava indubitavelmente afastando-se da escola. Pode estar ou não relacionada à nossa investigação, mas vamos segui-la de trás para diante antes de fazer qualquer avanço.” (DOYLE; KLINGER, 2011)

Figura 48 – Imagem do livro: A volta de Sherlock Holmes.



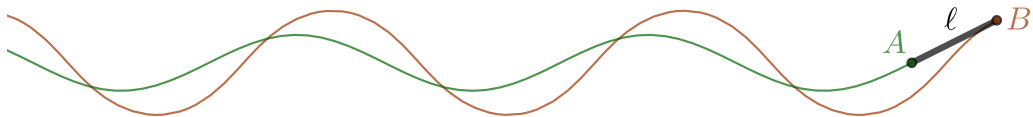
Fonte – Doyle e Klinger, 2011.

<sup>1</sup> O problema inverso é um pouco mais complexo, que através de uma forma paramétrica da trajetória do pneu dianteiro, as equações diferenciais para a trajetória do pneu traseiro são um par de equações diferenciais não lineares acopladas. Essas equações para o percurso do pneu traseiro são um exemplo simples das equações vetoriais de Riccati. Isso pode ser visto em (DUNBAR; BOSMAN; NOOIJ, 2001).

Notoriamente, o famoso detetive estava correto em suas conclusões, pois de fato uma bicicleta passando por um caminho macio, por exemplo, uma estrada com lama ou neve, o que podemos esperar é que a roda que sustenta maior peso deixe um rastro mais profundo, além disso, pela estrutura da bicicleta a única possibilidade é que o rastro da roda traseira cruze o da dianteira. Entretanto, esses elementos não são suficientes para que fosse determinada a direção que a bicicleta seguia. O que poderia ter sido contornado caso os conhecimentos em matemática de Sherlock (ou Arthur Conan Doyle) tivesse sido maior, de modo a determinar com precisão não apenas a direção do ciclista, mas também dimensões da bicicleta, o que veremos a seguir.

Veja na figura 49, a representação do par de curvas referente aos rastros das rodas de uma bicicleta, que segue da esquerda para a direita, sendo  $A$  e  $B$  os pontos onde as rodas traseira e dianteira tocam o solo, respectivamente. Assim, o rastro verde corresponde ao da roda traseira e o marrom ao da roda dianteira.

Figura 49 – Par de curvas determinadas pelas rodas da bicicleta.



Fonte – O autor, 2019.

Na figura 50 veja esses elementos geométricos numa bicicleta real. Note que a medida  $l$  é exatamente a distância entre os pontos de contato  $A$  e  $B$  das rodas traseira e dianteira com o solo, respectivamente.

Figura 50 – Deslocamento da bicicleta.

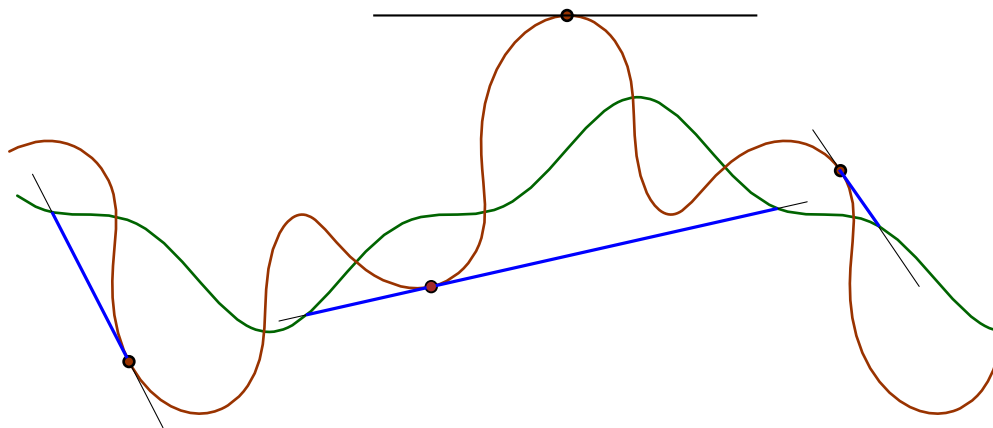


Fonte – Timothy E. Goldberg, 2010. (Modificada)

Uma análise inicial que podemos fazer através das figuras 49 e 50 é que o segmento de extremidades  $A$  e  $B$  de medida  $\ell$  é sempre tangente à curva formada pela roda traseira, pois na estrutura de uma bicicleta a roda traseira é fixada ao seu quadro, ou seja, ao segmento de medida  $\ell$ . Assim, a partir de um ponto do rastro da roda traseira traçando-se um segmento tangente e de medida  $\ell$ , este sempre intersectará a curva descrita pela roda dianteira. Perceba que com essas observações, na maioria dos casos, podemos determinar perfeitamente a direção que percorre uma bicicleta através de seus rastros, e até mesmo, a distância entre os pontos que as rodas tocam o solo (ou tamanho de seu quadro).

Por exemplo, tomemos dois rastros deixados por uma bicicleta. Vamos supor que um dos rastros é o traseiro, e então traçar algumas tangentes a essa curva. Numa primeira análise, suponhamos que o rastro marrom seja o da roda traseira, conforme figura 51. Nota-se na figura que os segmentos obtidos (azuis), entre os pontos de tangência das retas com o suposto rastro traseiro (marrom) e os pontos de interseções dessas retas com o rastro dianteiro, não possuem mesma medida em nenhum dos sentidos do par de curvas, e portanto, tal curva selecionada não pode ser o rastro da roda traseira. Além disso temos uma reta tangente que nem toca o outro rastro.

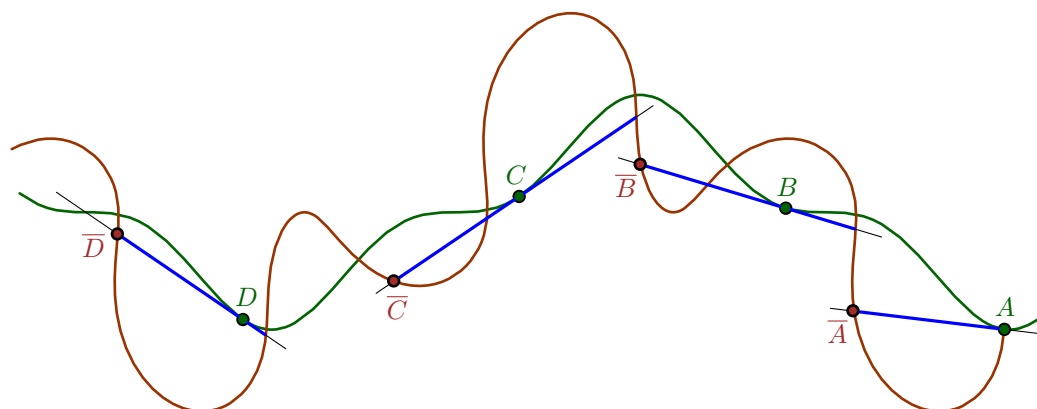
Figura 51 – Supondo o rastro marrom como o da roda traseira.



Fonte – O autor, 2019.

Agora, de modo análogo vamos traçar tangentes ao rastro verde, conforme figura 52. Podemos concluir que o sentido da trajetória da bicicleta foi da direita para a esquerda, pois foi a direção que conseguimos obter segmentos de tamanhos iguais (azuis) dados por:  $\overline{AA}$ ,  $\overline{BB}$ ,  $\overline{CC}$  e  $\overline{DD}$ , que por sua vez é a distância entre as rodas da bicicleta. É possível perceber também, através dos rastros, que a roda dianteira é a que marca a direção para onde vai a bicicleta, e a roda traseira apenas a segue. Outro fato é, que se cruzarmos o plano que define cada roda com o solo, obtemos uma linha para cada uma das rodas em cada momento e cada uma dessas linhas tem que ser tangente à curva que define o caminho da respectiva roda.

Figura 52 – Supondo o rastro verde como o da roda traseira.



Fonte – O autor, 2019.

### 5.1.1 Alguns rastros para a roda dianteira obtidos com software GeoGebra

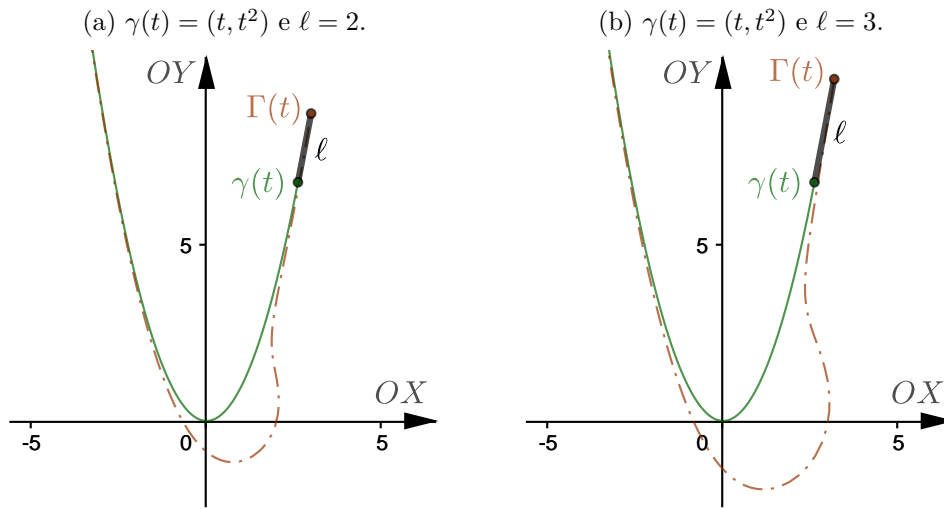
Como falamos no início, nosso objetivo neste trabalho será estudar a relação entre o par de curvas determinadas pelas rodas da bicicleta, quando o rastro traseiro é previamente definido, ou seja, verificar qual será o rastro dianteiro quando forçamos a roda traseira a seguir um caminho escolhido. Neste momento, iremos analisar alguns exemplos construídos no GeoGebra, em que faremos a roda traseira se movimentar por curvas já estudadas em capítulos anteriores.

Assim, denotemos a curva determinada pela roda traseira por  $\gamma$ , da roda dianteira por  $\Gamma$  e a distância entre as rodas por  $\ell$ . Sendo  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular, vamos analisar o comportamento do rastro dianteiro para alguns valores de  $\ell$ . Para isso, realizaremos a construção da bicicleta no GeoGebra conforme figura 49, em que  $\gamma(t)$  será o ponto sobre o rastro da roda traseira e  $\Gamma(t)$  será o ponto sobre o rastro da roda dianteira para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

Obviamente como ainda não fizemos um estudo formal desse par de curvas no plano, habilitaremos o rastro do ponto  $\Gamma(t)$  no GeoGebra<sup>2</sup>, de modo a visualizar a curva descrita. Inicialmente, vamos tomar a curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\gamma(t) = (t, t^2)$ , ou seja, uma parábola. Note que o rastro dianteiro será descrito a medida que a curva  $\gamma$  é descrita. Assim, a bicicleta se deslocará no sentido positivo do parâmetro  $t$ , o que nos fornecerá os gráficos das figuras 53a e 53b.

<sup>2</sup> O procedimento para essa construção consta no apêndice D.

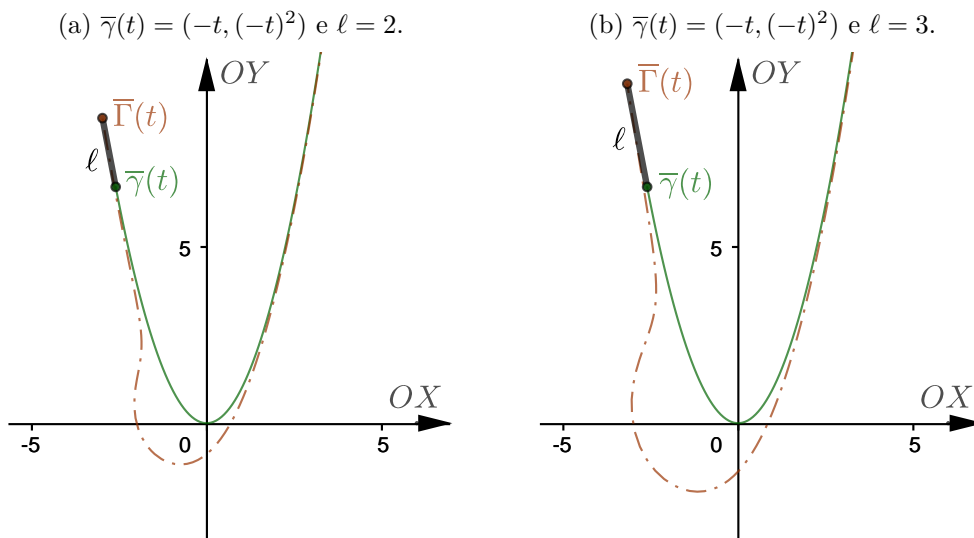
Figura 53 – Rastros dianteiros quando a roda traseira percorre a parábola.



Fonte – O autor, 2019.

Observe que fazendo uma reparametrização pela função decrescente  $h(t) = -t$ , teremos  $\bar{\gamma}(-t) = (-t, (-t)^2)$ . Nesse caso, a parábola será descrita no sentido contrário ao já visto acima. Fazendo novamente a construção da bicicleta no GeoGebra e habilitando o rastro do ponto  $\bar{\Gamma}(t)$ , obtemos os gráficos das figuras 54a e 54b. Veja que os rastros dianteiros obtidos possuem o mesmo formato, sendo apenas espelhados. Isso ocorre pois a parábola é uma figura com eixo de simetria. Logo, quando  $\gamma$  não for uma curva com eixo de simetria, teremos de fato dois rastros dianteiros distintos.

Figura 54 – Rastros dianteiros quando a roda traseira percorre a parábola.



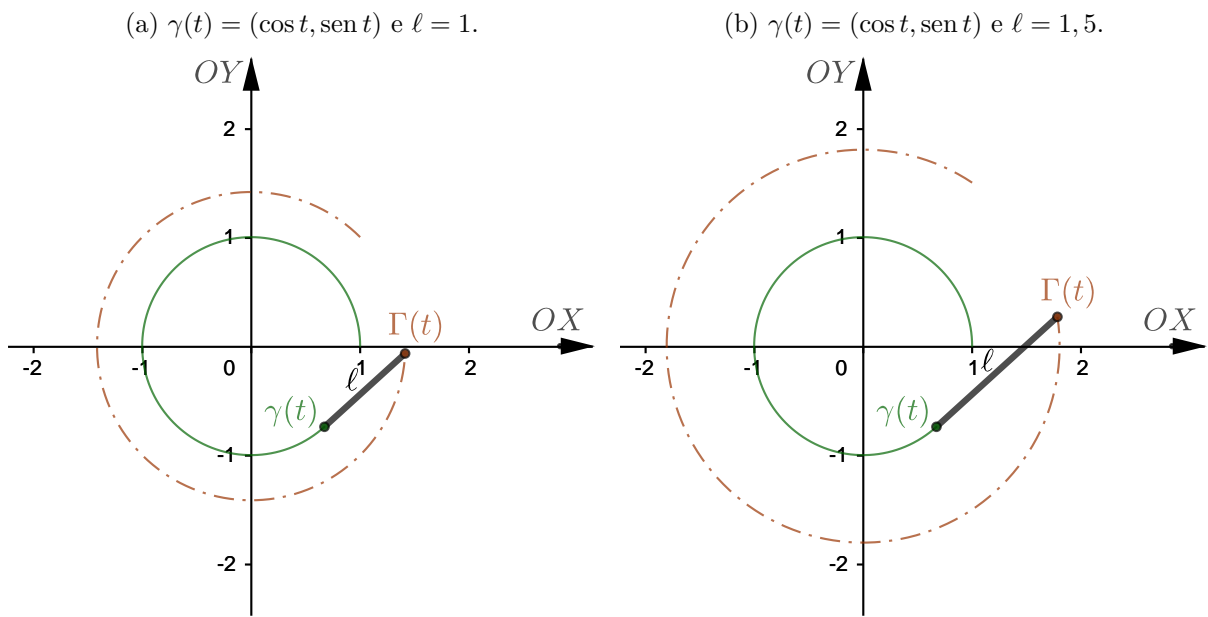
Fonte – O autor, 2020.

Entretanto, nos casos em que a curva  $\gamma$  for regular, vamos tomar apenas a curva

dianteira descrita á medida que  $\gamma$  é descrita no sentido positivo do parâmetro  $t$ , de modo a simplificar a abordagem formal que faremos nas próximas seções. Obviamente quando  $\gamma$  for uma reta, a roda dianteira percorrerá sobre a mesma reta. E quando  $\gamma$  for um círculo, a roda dianteira também descreverá um círculo, fato que veremos nos exemplos a seguir.

**Exemplo 5.1.** Seja  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  o círculo de raio unitário dado por  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ . As figuras 55a e 55b apresentam os rastros  $\Gamma$  obtidos para  $\ell = 1$  e  $\ell = 1,5$ .

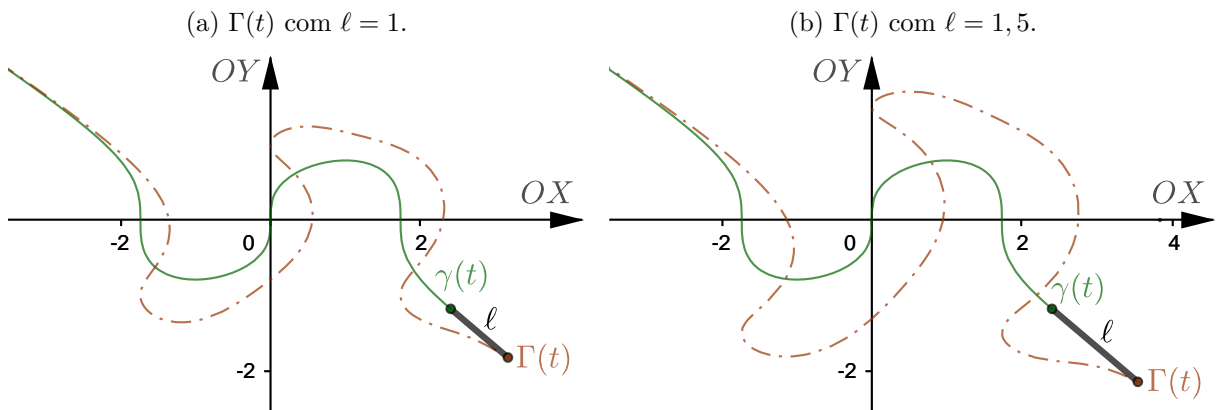
Figura 55 – Rastros dianteiros quando a roda traseira percorre a circunferência.



Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 5.2.** Dada a curva  $\gamma(t) = \left( t, \sqrt[3]{\frac{3t - t^3}{4}} \right)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , obtemos os rastros dianteiros das figuras 56a e 56b para  $\ell = 1$  e  $\ell = 1,5$ .

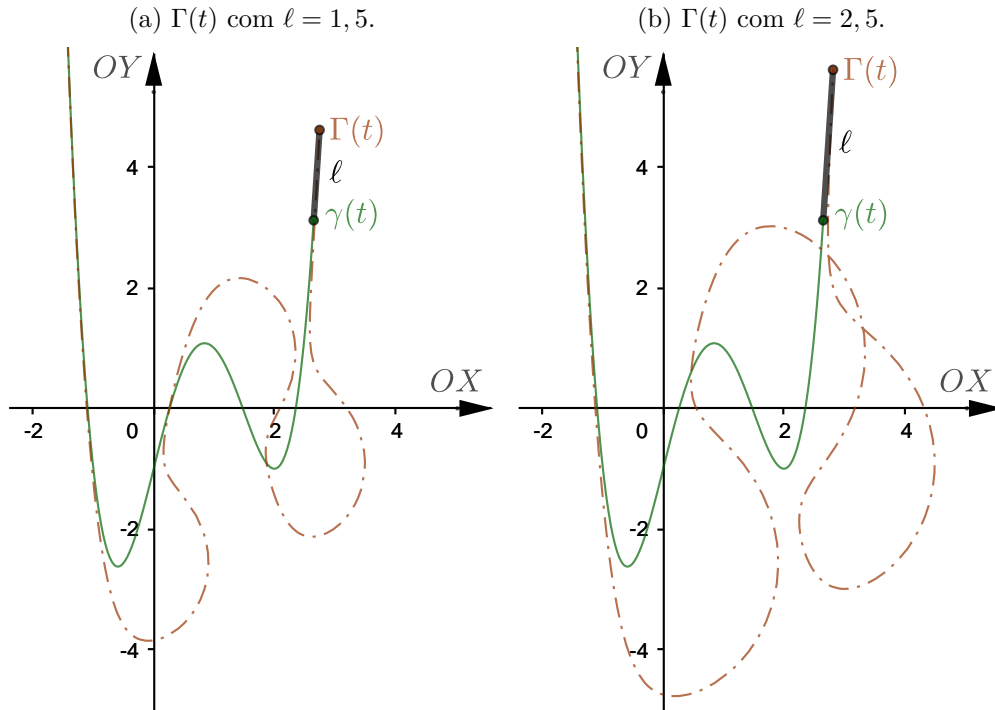
Figura 56 – Rastros dianteiros quando  $\gamma(t) = \left( t, \sqrt[3]{(3t - t^3)/4} \right)$ .



Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 5.3.** A curva  $\gamma(t) = (t, t^4 - 3t^3 + 4t - 1)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , para  $\ell = 1,5$  e  $\ell = 2,5$  terá os seguintes rastros dianteiros, conforme figuras 57a e 57b.

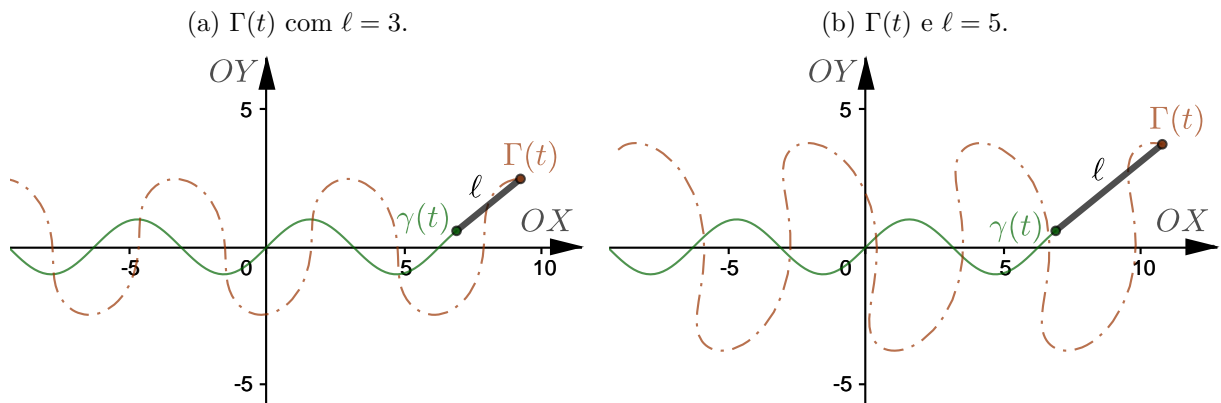
Figura 57 – Rastros dianteiros quando  $\gamma(t) = (t, t^4 - 3t^3 + 4t - 1)$ .



Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 5.4.** Seja o rastro da roda traseira a senoide  $\gamma(t) = (t, \text{sen } t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ . Para  $\ell = 3$  e  $\ell = 5$ , temos os seguintes rastros  $\Gamma$  apresentados nas figuras 58a e 58b.

Figura 58 – Rastros dianteiros quando  $\gamma(t) = (t, \text{sen } t)$ .



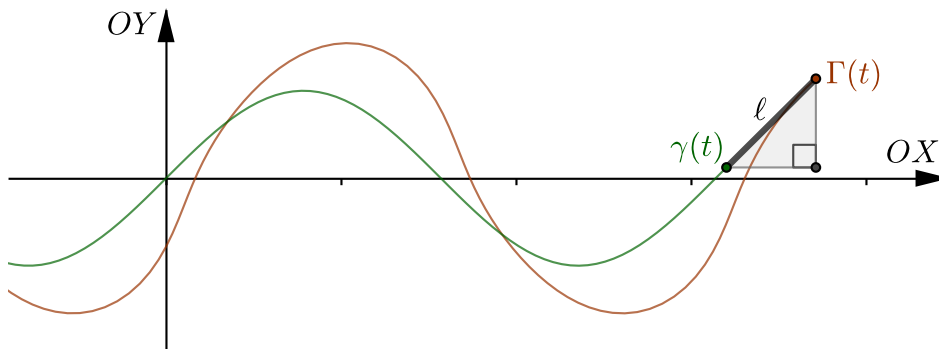
Fonte – O autor, 2019.

## 5.2 Matemática do rastro da roda dianteira

Nesta seção, vamos tratar o tema com maior formalidade, conforme os estudos de Bender (2004). Sejam  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  e  $\Gamma(t) = (X(t), Y(t))$  curvas regulares que representam os rastros das rodas traseira e dianteira, respectivamente. Suponhamos que o deslocamento da bicicleta seja no sentido positivo do eixo  $OX$ , ou seja,  $X(t) > x(t)$  e ainda  $x'(t) > 0$ , conforme figura 59. Considerando o coeficiente angular da reta tangente à curva  $\gamma$  no ponto  $\gamma(t)$  e o triângulo retângulo representado, obtemos as seguintes relações.

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{Y(t) - y(t)}{X(t) - x(t)} \quad \text{e} \quad \ell^2 = (Y(t) - y(t))^2 + (X(t) - x(t))^2.$$

Figura 59 – Obtenção das equações do rastro da roda dianteira.



Fonte – O autor, 2019.

Agora, isolando  $(Y(t) - y(t))$  na primeira relação e substituindo esse resultado na segunda, temos

$$\begin{aligned} \ell^2 &= \left( (X(t) - x(t)) \frac{y'(t)}{x'(t)} \right)^2 + (X(t) - x(t))^2 \\ &= (X(t) - x(t))^2 \left( \frac{y'(t)}{x'(t)} \right)^2 + (X(t) - x(t))^2 \\ &= (X(t) - x(t))^2 \left( \left( \frac{y'(t)}{x'(t)} \right)^2 + 1 \right) \\ &= (X(t) - x(t))^2 \left( \frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{(x'(t))^2} \right) \end{aligned}$$

Como  $X(t) > x(t)$ , então

$$(X(t) - x(t))^2 = \ell^2 \left( \frac{(x'(t))^2}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \right) \implies X(t) = x(t) + \ell \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}.$$

Agora, isolando  $(X(t) - x(t))$  na primeira relação e realizando as mesmas operações algébricas, temos

$$(Y(t) - y(t))^2 = \ell^2 \left( \frac{(y'(t))^2}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \right).$$

Observe que nos instantes do parâmetro quando  $Y(t) > y(t)$ , temos  $y'(t) > 0$ . E nos instantes do parâmetro quando  $Y(t) < y(t)$ , temos  $y'(t) < 0$ . E assim, independente da situação, obtém-se o seguinte resultado para  $Y(t)$

$$Y(t) = y(t) + \ell \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}.$$

Por fim, o rastro dianteiro  $\Gamma(t)$  é dado por

$$\Gamma(t) = \left( x(t) + \ell \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, y(t) + \ell \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right) = \gamma(t) + \ell \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Assim, provamos a seguinte proposição.

**Proposição 5.1.** *Sejam a curva regular  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  o rastro da roda traseira de uma bicicleta e  $\ell$  a distância entre os pontos  $\gamma(t)$  e  $\Gamma(t)$ . Temos que o rastro da roda dianteira relativo a  $\gamma$  e a distância  $\ell$ , no sentido positivo do parâmetro  $t \in I$  será dado por*

$$\Gamma(t) = \gamma(t) + \ell \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Observe que no caso em que  $s$  for o parâmetro de comprimento de arco de  $\gamma$ , teremos  $\|\gamma'(s)\| = 1$  e portanto o rastro dianteiro será

$$\Gamma(s) = \gamma(s) + \ell \gamma'(s).$$

### 5.2.1 Aplicação em curvas regulares

Observe que devido ao fato de agora conseguirmos determinar as equações paramétricas para o rastro da roda dianteira, não há mais a necessidade de habilitar o rastro do ponto  $\Gamma(t)$  no GeoGebra. Passemos a utilizar o resultado da proposição 5.1 para algumas curvas regulares vistas na seção anterior e ao longo deste trabalho. Antes entretanto, é importante enunciarmos a proposição a seguir.

**Proposição 5.2.** *Se  $\gamma$  é uma curva regular de classe  $\mathcal{C}^k$  com  $k \geq 1$ , então  $\Gamma$  será regular de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  para todo  $\ell > 0$*

*Demonstração.* Como do teorema 4.1 toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco. Seja  $s(t)$  uma reparametrização de  $\gamma$  pelo comprimento de arco. Utilizando a proposição 5.1  $\Gamma$  será dada por

$$\Gamma(s) = \gamma(s) + \ell \gamma'(s).$$

Por definição como  $\gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^k$  então  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . Mostraremos que  $\gamma$  sendo regular, então  $\Gamma$  também será regular: Queremos mostrar que  $\Gamma'(s) \neq 0$ , para todo  $s$ . Suponhamos que para algum  $s_0$  tem-se  $\Gamma'(s_0) = 0$ . Isto implica que  $\gamma'(s_0) = -\ell \gamma''(s_0)$ .

Porém, como vimos na seção 4.3, sendo  $\|\gamma'(s)\| = 1$ , para todo  $s$ , então  $\gamma''$  e  $\gamma'$  são ortogonais. Dessa forma, concluímos que  $\gamma'(s_0) = 0$ , o que é absurdo. Assim,  $\Gamma'(s) \neq 0$ , para todo  $s$ .

□

Vamos às aplicações.

**Exemplo 5.5.** Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a parábola dada por  $\gamma(t) = (t, t^2)$ . Derivando  $\gamma$  e determinando sua norma temos

$$\gamma'(t) = (1, 2t) \implies \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}.$$

Desse modo, a curva  $\Gamma$  é dada por

$$\Gamma(t) = (t, t^2) + \ell \frac{(1, 2t)}{\sqrt{1 + 4t^2}} = \left( t + \ell \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}, t^2 + \ell \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}} \right), t \in \mathbb{R}.$$

Seu traço pode ser visto nas figuras 53a e 53b da subseção 5.1.1 para  $\ell = 2$  e  $\ell = 3$ , respectivamente.

**Exemplo 5.6.** Seja  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  o círculo de raio  $r$  e centro na origem, dado por  $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ . Derivando  $\gamma$  e obtendo sua norma

$$\gamma'(t) = (-r \sin t, r \cos t) \implies \|\gamma'(t)\| = \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = r.$$

Assim,  $\Gamma$  é dada por

$$\Gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) + \ell \frac{(-r \sin t, r \cos t)}{r} = (r \cos t - \ell \sin t, r \sin t + \ell \cos t), t \in [0, 2\pi].$$

Observe que a curva  $\Gamma$  é um círculo com centro na origem e raio  $R = \sqrt{r^2 + \ell^2}$ . Note ainda que quando  $r = 1$ , temos o rastro dianteiro visto no exemplo 5.1 dado por

$$\Gamma(t) = (\cos t - \ell \sin t, \sin t + \ell \cos t), t \in [0, 2\pi].$$

**Exemplo 5.7.** Seja a curva regular  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  a elipse de centro na origem dada por  $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ . Derivando  $\gamma$  e determinando sua norma temos

$$\gamma'(t) = (-a \sin t, b \cos t) \implies \|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

Por fim, a curva  $\Gamma$  é dada por

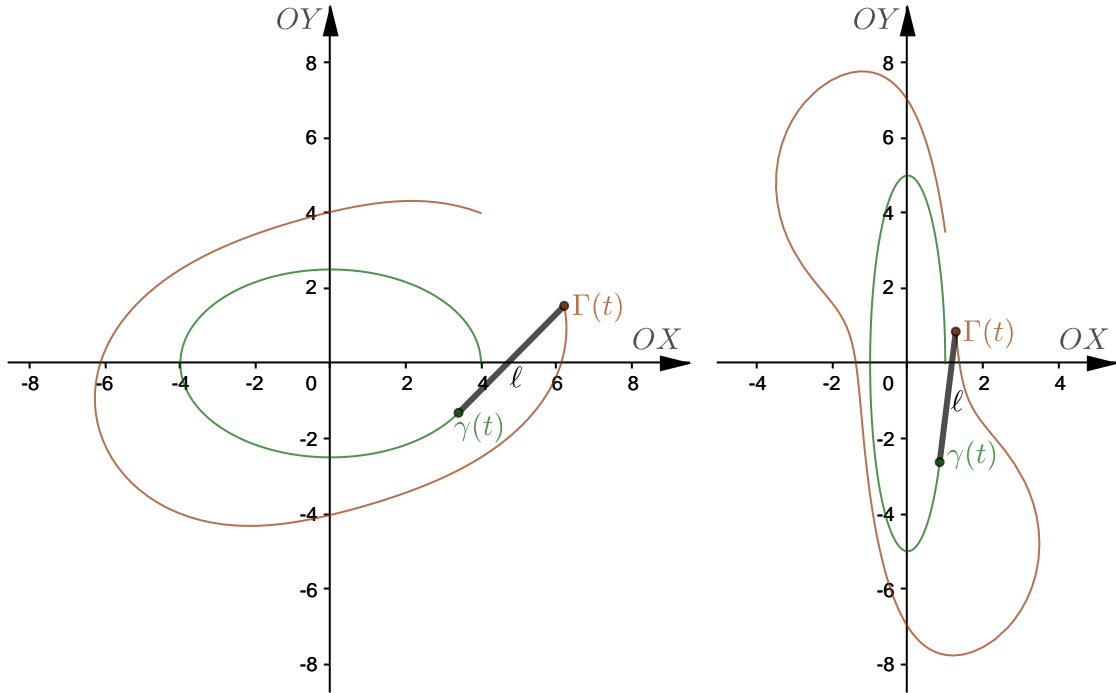
$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= (a \cos t, b \sin t) + \ell \frac{(-a \sin t, b \cos t)}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \\ &= \left( a \cos t - \ell \frac{a \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}, b \sin t + \ell \frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right), t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Assim, temos os seguintes rastros para a curva dianteira representados na figuras 60a e 60b com seus valores indicados para  $a$ ,  $b$  e  $\ell$ .

Figura 60 – Rastros dianteiros quando  $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ .

(a)  $\Gamma(t)$  com  $a = 4$ ,  $b = 2,5$  e  $\ell = 4$ .

(b)  $\Gamma(t)$  com  $a = 1$ ,  $b = 5$  e  $\ell = 3,5$ .



Fonte – O autor, 2019.

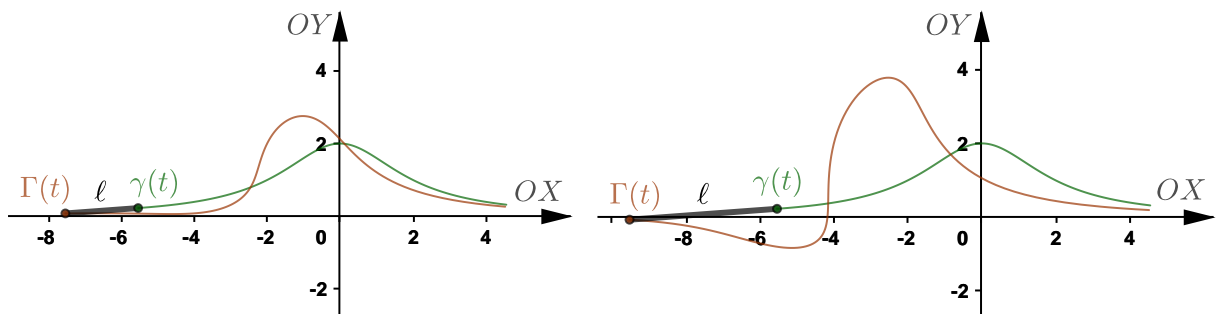
**Exemplo 5.8.** Sendo  $\gamma : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  a curva de Agnesi que vimos na subseção 2.3.4, de equação  $\gamma(t) = (2r \cotg t, 2r \sen^2 t)$ , com  $r > 0$ . Sua norma é dada por

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4r^2 \csc^4 t + 16r^2 \sen^2 t \cos^2 t}.$$

Figura 61 – Rastros dianteiros quando  $\gamma(t) = (2r \cotg t, 2r \sen^2 t)$ .

(a)  $\Gamma(t)$  com  $r = 1$  e  $\ell = 2$ .

(b)  $\Gamma(t)$  com  $r = 1$  e  $\ell = 4$ .



Fonte – O autor, 2019.

Assim, obtemos a curva  $\Gamma$  dada por

$$\Gamma(t) = (2r \cotg t, 2r \sen^2 t) + \ell \frac{(-2r \csc^2 t, 4r \sen t \cos t)}{\sqrt{4r^2 \csc^4 t + 16r^2 \sen^2 t \cos^2 t}} =$$

$$\left( 2r \cotg t - \ell \frac{2r \csc^2 t}{\sqrt{4r^2 \csc^4 t + 16r^2 \sen^2 t \cos^2 t}}, 2r \sen^2 t + \ell \frac{4r \sen t \cos t}{\sqrt{4r^2 \csc^4 t + 16r^2 \sen^2 t \cos^2 t}} \right),$$

com  $t \in (0, \pi)$ . Nas figuras 61a e 61b apresentamos determinados gráficos de  $\Gamma$

**Exemplo 5.9.** Vamos determinar o rastro dianteiro tomando a curva regular  $\gamma(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + t, t^2 - 1\right)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , vista na seção 3.2. Determinando a norma do vetor tangente, temos

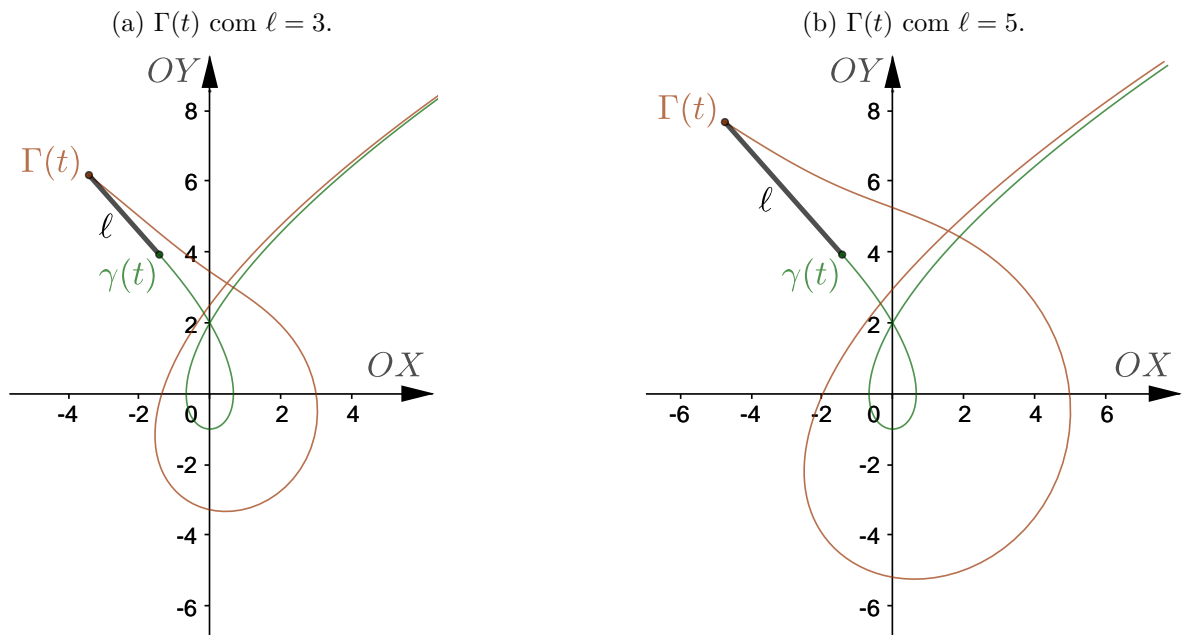
$$\gamma'(t) = (1 - t^2, 2t) \implies \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(t^2 + 1)^2} = t^2 + 1$$

Assim, a curva  $\Gamma$  é

$$\Gamma(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + t, t^2 - 1\right) + \ell \frac{(1 - t^2, 2t)}{t^2 + 1} = \left(-\frac{t^3}{3} + t + \ell \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}, t^2 - 1 + \ell \frac{2t}{t^2 + 1}\right), t \in \mathbb{R}.$$

E assim, obtemos as curvas representadas nas figuras 62a e 62b.

Figura 62 – Rastros dianteiros quando  $\gamma(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + t, t^2 - 1\right)$ .



Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 5.10.** Agora, vamos obter o rastro da roda dianteira sendo  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a catenária, vista na seção 3.3, dada por  $\gamma(t) = \left(t, a \cosh \frac{t}{a}\right)$ , com  $a \in \mathbb{R}_+$ . Calculando a norma do vetor tangente a  $\gamma$  obtemos

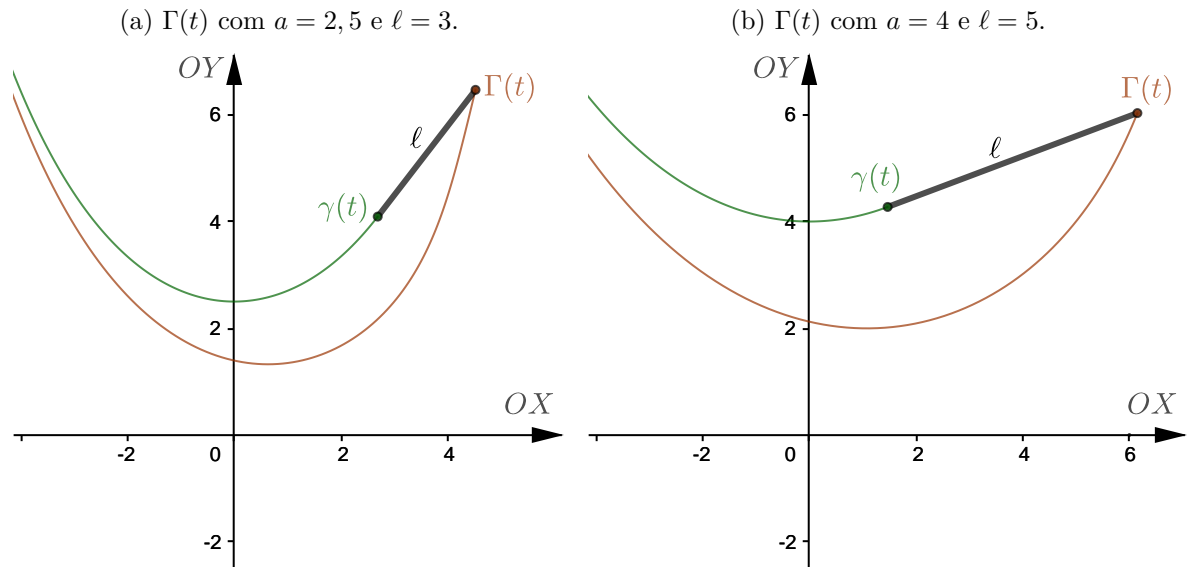
$$\gamma'(t) = \left(1, \senh \frac{t}{a}\right) \implies \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \senh^2 \left(\frac{t}{a}\right)}.$$

Por fim,  $\Gamma$  é dada por

$$\Gamma(t) = \left( t + \ell \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(t/a)}}, a \cosh \frac{t}{a} + \ell \frac{\sinh(t/a)}{\sqrt{1 + \sinh^2(t/a)}} \right), t \in \mathbb{R}.$$

Veja os gráficos obtidos com as respectivas variações para  $a$  e  $\ell$  nas figuras 63a e 63b.

Figura 63 – Rastros dianteiros quando  $\gamma(t) = \left( t, a \cosh \frac{t}{a} \right)$ .



Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 5.11.** Agora, vamos considerar o rastro traseiro como a curva cúbica de Bézier vista na seção 2.3. Considere  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\gamma(t) = (1 - t)^3 P_0 + 3t(1 - t)^2 P_1 + 3t^2(1 - t) P_2 + t^3 P_3,$$

em que  $P_0, P_1, P_2$  e  $P_3$  são pontos de controle. Derivando  $\gamma$ , obtemos

$$\gamma'(t) = -3(1 - t)^2 P_0 + 3(3t^2 - 4t + 1) P_1 + 3t(2 - 3t) P_2 + 3t^2 P_3$$

Nesse caso, podemos alterar o caminho da roda traseira através de seus pontos de controle, que por consequência alterará o trajeto da roda dianteira, obtido utilizando  $\gamma$  e  $\gamma'$  na proposição 5.1. Essa construção fica bastante interessante no GeoGebra, que pode ser feita através dos passos contidos no apêndice D. Mas, de modo a apresentar um exemplo desse par de curvas neste trabalho, tomemos a curva cúbica de Bézier dada pelos pontos de controle

$$P_0 = (6, 0), P_1 = (0, -5), P_2 = (5, 7), \text{ e } P_3 = (0, 6).$$

Substituindo em  $\gamma$  teremos

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (6(1 - t)^3 + 15t^2(1 - t), -15t(1 - t)^2 + 21t^2(1 - t) + 6t^3) \\ &= (-21t^3 + 33t^2 - 18t + 6, -30t^3 + 51t^2 - 15t). \end{aligned}$$

E assim  $\gamma'(t) = (-63t^2 + 66t - 18, -90t^2 + 102t - 15)$ , logo

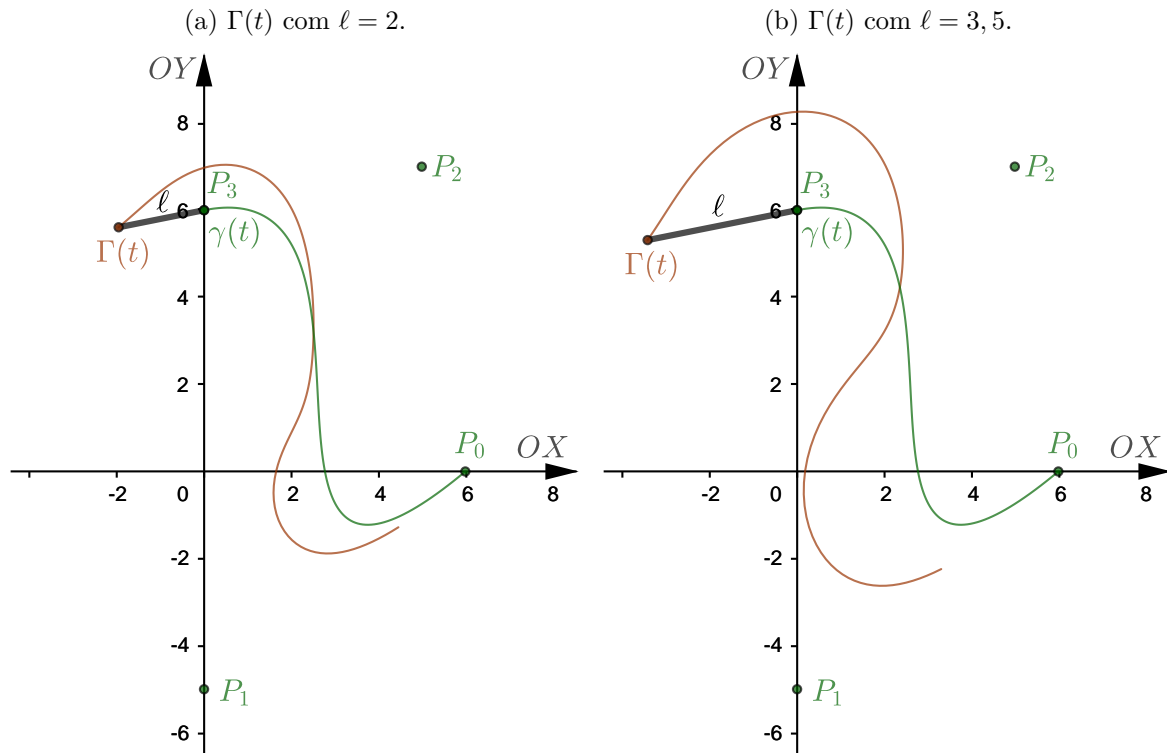
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-63t^2 + 66t - 18)^2 + (-90t^2 + 102t - 15)^2}.$$

E portanto, as equações paramétricas do rastro da roda dianteira serão

$$\Gamma(t) : \begin{cases} x(t) = -21t^3 + 33t^2 - 18t + 6 + \ell \frac{-63t^2 + 66t - 18}{\sqrt{(-63t^2 + 66t - 18)^2 + (-90t^2 + 102t - 15)^2}} \\ y(t) = -30t^3 + 51t^2 - 15t + \ell \frac{-90t^2 + 102t - 15}{\sqrt{(-63t^2 + 66t - 18)^2 + (-90t^2 + 102t - 15)^2}} \end{cases},$$

com  $t \in [0, 1]$ . Veja nas figuras 64a e 64b, as curvas  $\Gamma$  formadas, e também  $\gamma$  com seus pontos de controle.

Figura 64 – Rastros dianteiros quando  $\gamma$  é a curva cúbica de Bézier.

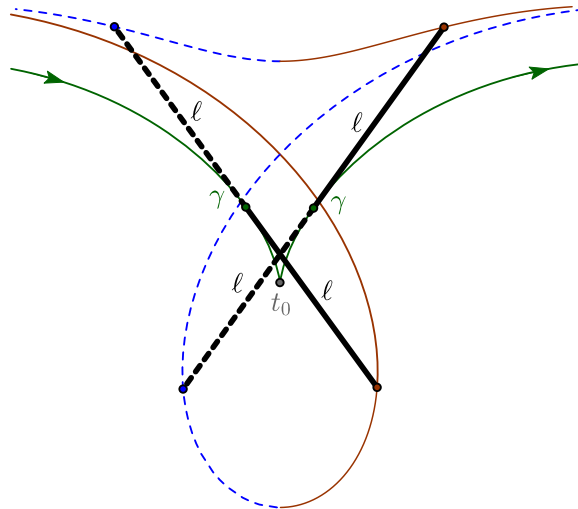


Fonte – O autor, 2019.

### 5.2.2 Aplicação em curvas não regulares

No caso das curvas não regulares, ou seja, que possuem pontos de singularidade, temos algumas considerações a fazer. Em Tabachnikov (2006) podemos ver que nos pontos de singularidade dados por cúspides, a curvatura de  $\gamma$  vai para o infinito e a mesma passa a ser descrita na direção oposta, como podemos ver na figura 65.

Figura 65 – Rastro dianteiro no ponto de cúspide.



Fonte – O autor, 2020.

Assim, sendo  $\gamma(t_0)$  um ponto de cúspide, devemos construir o rastro dianteiro como uma curva definida por sentenças. Dessa forma, temos duas possibilidades para os rastros da roda dianteira, dados por  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  como abaixo.

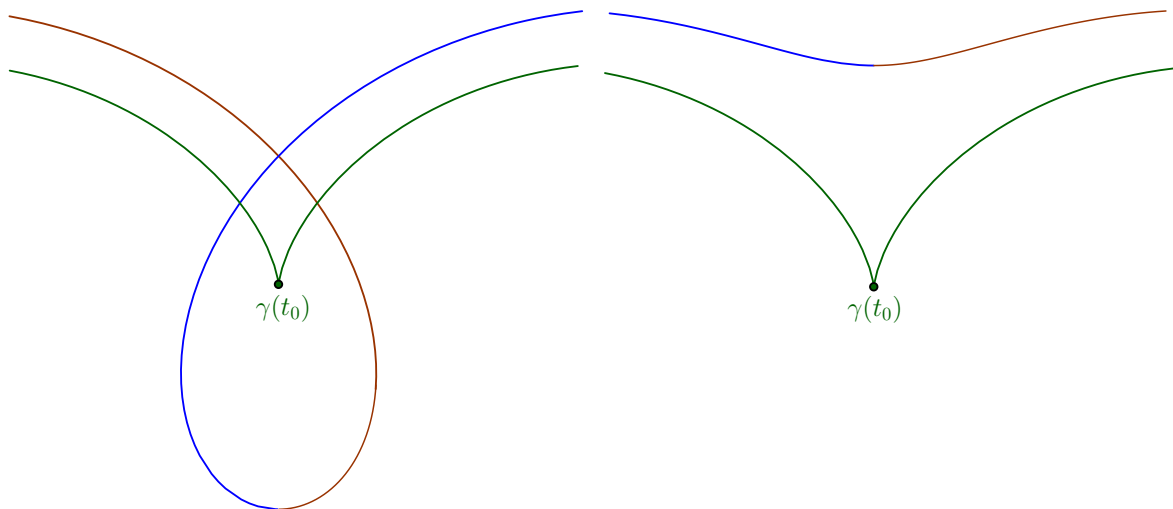
$$\Gamma_1(t) : \begin{cases} \gamma(t) + \ell \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, & t < t_0 \\ \gamma(t) - \ell \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, & t > t_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \Gamma_2(t) : \begin{cases} \gamma(t) - \ell \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, & t < t_0 \\ \gamma(t) + \ell \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, & t > t_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Portanto, veja nas figuras 66a e 66b os dois rastros dianteiros  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente.

Figura 66 – Rastros dianteiros quando  $\gamma$  é uma curva não regular.

(a) Rastro dianteiro  $\Gamma_1$ .

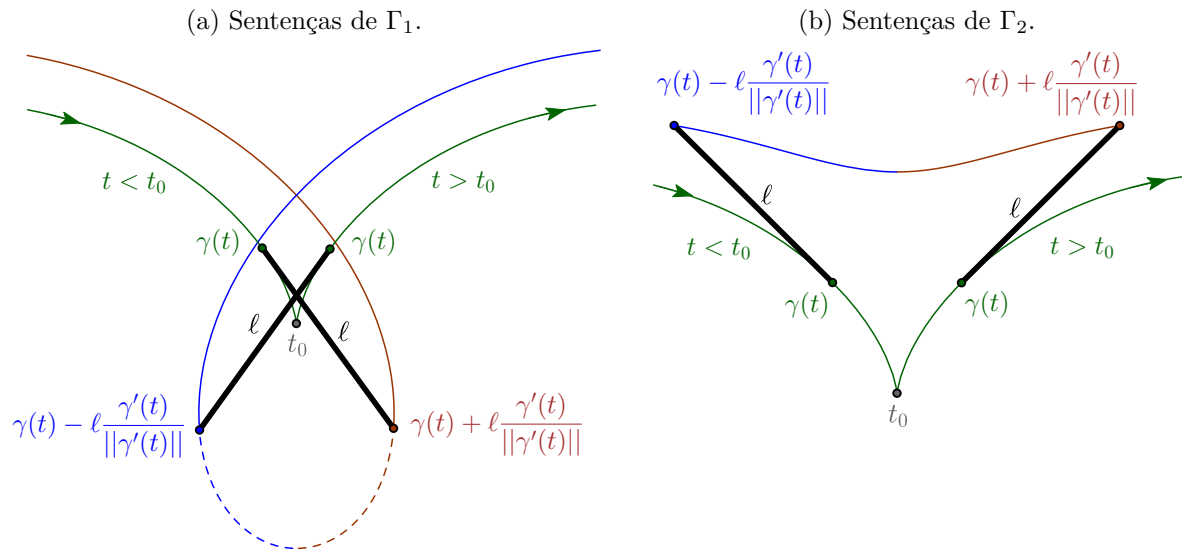
(b) Rastro dianteiro  $\Gamma_2$ .



Fonte – O autor, 2020.

Intuitivamente, note em 5.1 que as sentenças de  $\Gamma_1$  representam uma bicicleta seguindo (rastros marrom) no sentido crescente do parâmetro antes do ponto de singularidade  $\gamma(t_0)$  e seguindo (rastros azul) no sentido decrescente do parâmetro após o ponto de singularidade  $\gamma(t_0)$ , conforme figura 67a. Portanto,  $\Gamma_2$  é obtida procedendo o contrário, de acordo com a figura 67b.

Figura 67 – Construção de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .



Fonte – O autor, 2020.

Observe que nessas figuras, tanto  $\Gamma_1$  quanto  $\Gamma_2$  são curvas suaves, mesmo  $\gamma(t_0)$  sendo um ponto singular. Desse modo, vamos estudar alguns casos em que  $\gamma$  possui singularidade, de modo a compreender o comportamento dos rastros das rodas da bicicleta nesses pontos. Em especial, estudaremos pontos de singularidade de  $\gamma$  dados por cúspides. Assim, podemos definir.

**Definição 5.1.** *Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada de classe  $C^k$ , onde  $k \geq 3$ . O ponto  $\gamma(t)$  é chamado um ponto de cúspide de Whitney<sup>3</sup> se*

$$\gamma'(t) = 0, \gamma''(t) \neq 0 \text{ e } \gamma'''(t) \neq 0.$$

*E ainda  $(\gamma''(t), \gamma'''(t))$  são linearmente independentes.*

Ainda nesse sentido, temos o seguinte teorema.

**Teorema 5.1.** *Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada e não regular de classe  $C^k$ ,  $k \geq 3$ . Se seus pontos de singularidade forem cúspides de Whitney, então a curva  $\Gamma$  será suave de classe  $C^{k-1}$ .*

<sup>3</sup> Hassler Whitney (1907-1989) foi um matemático americano, um dos fundadores da teoria da singularidade, conforme (KENDIG, 2018). Esse tipo de cúspide é também denotada por *ordinária*, e no caso em que  $(\gamma''(t), \gamma'''(t))$  são paralelos, ou seja linearmente dependentes, é chamada *extraordinária* de acordo com (VILCHES, 2004).

Não apresentaremos a demonstração desse lema, pois contém assuntos que não se adequam ao escopo desse trabalho. A mesma encontra-se em (LEVI; TABACHNIKOV, 2009).

Assim, vamos ver alguns exemplos em que  $\gamma$  possua singularidades do tipo Whitney e também outros tipos mais degenerados.

**Exemplo 5.12.** Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a cicloide vista na subseção 2.3.1 dada por  $\gamma(t) = (rt - r \sin t, r - r \cos t)$ , com  $r > 0$ .

Como já sabemos sendo  $n \in \mathbb{Z}$ , a cicloide possui cúspides nos pontos com parâmetro  $t = 2\pi n$ . Verificaremos se elas são cúspides de Whitney. Temos:

$$\gamma'(t) = (r - r \cos t, r \sin t) \implies \gamma'(2\pi n) = (0, 0)$$

$$\gamma''(t) = (r \sin t, r \cos t) \implies \gamma''(2\pi n) = (0, r)$$

$$\gamma'''(t) = (r \cos t, -r \sin t) \implies \gamma'''(2\pi n) = (r, 0)$$

Veja que as condições da definição 5.1 são cumpridas, portanto as singularidades da cicloide são cúspides de Whitney e pelo lema 5.1 a curva  $\Gamma$  será suave. Assim, obtemos

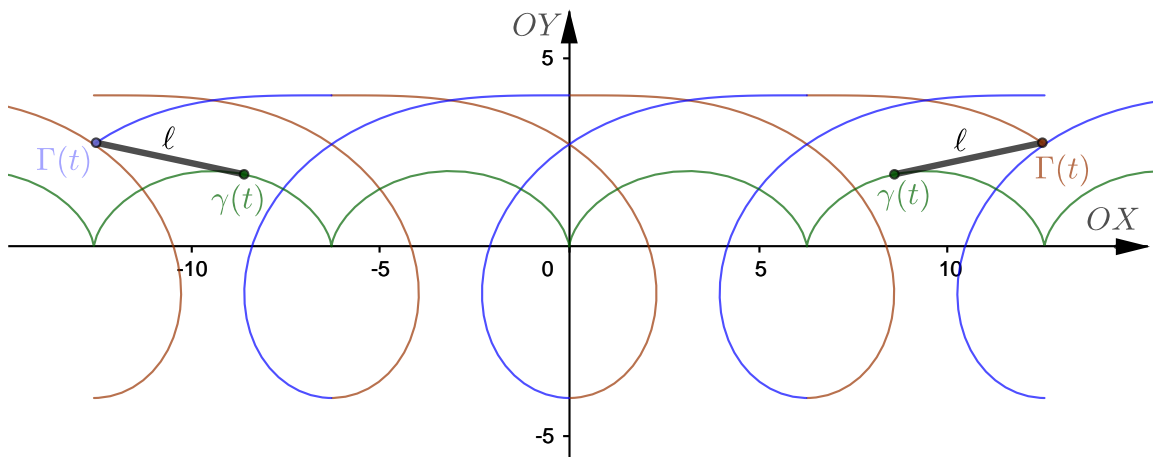
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(r - r \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} = r\sqrt{2 - 2 \cos t}.$$

Assim, as sentenças para os rastros dianteiros  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são

$$\Gamma(t) = \left( rt - r \sin t \pm \ell \frac{1 - \cos t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}}, r - r \cos t \pm \ell \frac{\sin t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}} \right)$$

Tomando  $r = 1$  e  $\ell = 4$  temos os traços para a roda dianteira apresentados na figura 68.

Figura 68 – Curvas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  obtidas.



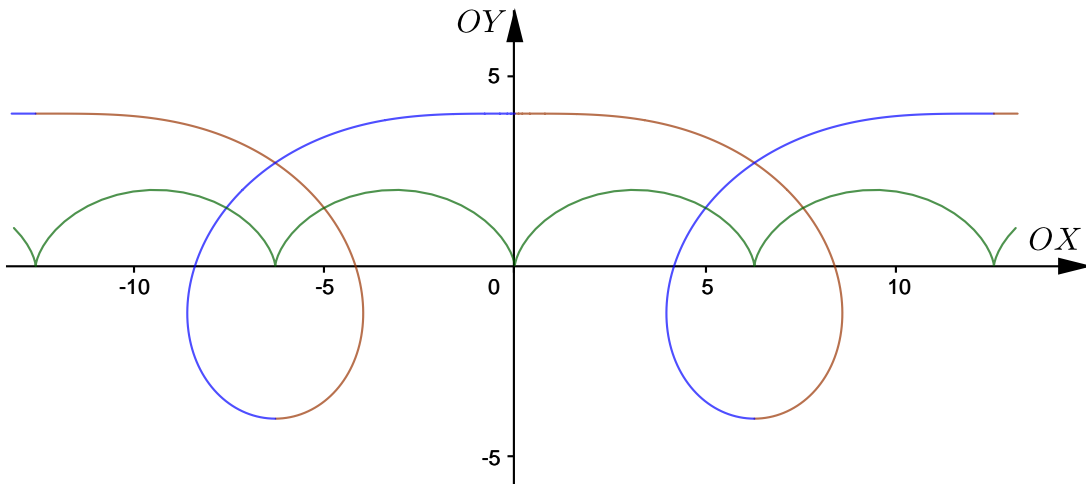
Fonte – O autor, 2019.

E portanto, os rastros dianteiros obtidos quando a roda traseira percorre a cicloide são dados por

$$\Gamma_1(t) : \left\{ \begin{array}{l} \left( rt - r \operatorname{sen} t - \ell \frac{1 - \cos t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}}, r - r \cos t - \ell \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}} \right) \\ \left( rt - r \operatorname{sen} t + \ell \frac{1 - \cos t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}}, r - r \cos t + \ell \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}} \right) \end{array} \right.$$

Em que a primeira sentença pertence ao intervalo  $\dots \cup (-10\pi, -8\pi) \cup (-6\pi, -4\pi) \cup (-2\pi, 0) \cup (2\pi, 4\pi) \cup (6\pi, 8\pi) \cup \dots$ , ou seja, a união dos intervalos  $((4n + 2)\pi, (4n + 4)\pi)$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . E a segunda sentença pertence ao intervalo  $\dots \cup (-8\pi, -6\pi) \cup (-4\pi, -2\pi) \cup (0, 2\pi) \cup (4\pi, 6\pi) \cup (8\pi, 10\pi) \cup \dots$ , ou seja, a união dos intervalos  $(4n\pi, (4n + 2)\pi)$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . Veja na figura 69 a curva  $\Gamma_1$  e seu respectivo intervalo.

Figura 69 – Curva  $\Gamma_1$  obtida, quando  $\gamma$  é a cicloide.



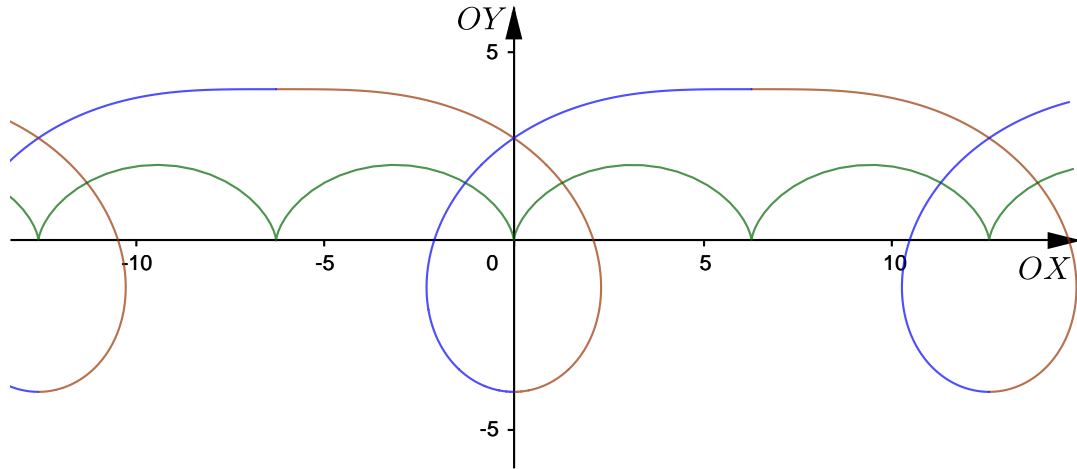
Fonte – O autor, 2019.

Temos também a curva

$$\Gamma_2(t) : \left\{ \begin{array}{l} \left( rt - r \operatorname{sen} t + \ell \frac{1 - \cos t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}}, r - r \cos t + \ell \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}} \right) \\ \left( rt - r \operatorname{sen} t - \ell \frac{1 - \cos t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}}, r - r \cos t - \ell \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2 - 2 \cos t}} \right) \end{array} \right.$$

Em que a primeira sentença pertence ao intervalo  $\dots \cup (-10\pi, -8\pi) \cup (-6\pi, -4\pi) \cup (-2\pi, 0) \cup (2\pi, 4\pi) \cup (6\pi, 8\pi) \cup \dots$ , ou seja, a união dos intervalos  $((4n + 2)\pi, (4n + 4)\pi)$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . E a segunda sentença pertence ao intervalo  $\dots \cup (-8\pi, -6\pi) \cup (-4\pi, -2\pi) \cup (0, 2\pi) \cup (4\pi, 6\pi) \cup (8\pi, 10\pi) \cup \dots$ , ou seja, a união dos intervalos  $(4n\pi, (4n + 2)\pi)$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . Veja na figura 70 a curva  $\Gamma_2$  e seu respectivo intervalo.

Figura 70 – Curva  $\Gamma_2$  obtida, quando  $\gamma$  é a cicloide.



Fonte – O autor, 2020.

**Exemplo 5.13.** Consideremos  $\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  como a cardioide vista na subseção 2.3.2 dada por  $\gamma(t) = (2r \cos t - r \cos 2t, 2r \sin t - r \sin 2t)$ , com  $r > 0$ . Sendo  $n \in \mathbb{Z}$  sabemos que a cardioide possui singularidades em  $t = 2\pi n$ , vamos verificar se tal ponto é cúspide de Whitney.

$$\gamma'(t) = (-2r \sin t + 2r \sin 2t, 2r \cos t - 2r \cos 2t) \implies \gamma'(2\pi n) = (0, 0)$$

$$\gamma''(t) = (-2r \cos t + 4r \cos 2t, -2r \sin t + 4r \sin 2t) \implies \gamma''(2\pi n) = (2r, 0)$$

$$\gamma'''(t) = (2r \sin t - 8r \sin 2t, -2r \cos t + 8r \cos 2t) \implies \gamma'''(2\pi n) = (0, 6r)$$

Note que os resultados obtidos acima satisfazem a definição 5.1, e portanto a cúspide da cardioide é do tipo Whitney. Desse modo, pelo lema 5.1 a curva  $\Gamma$  será suave. Efetuando a norma de  $\gamma'$  teremos

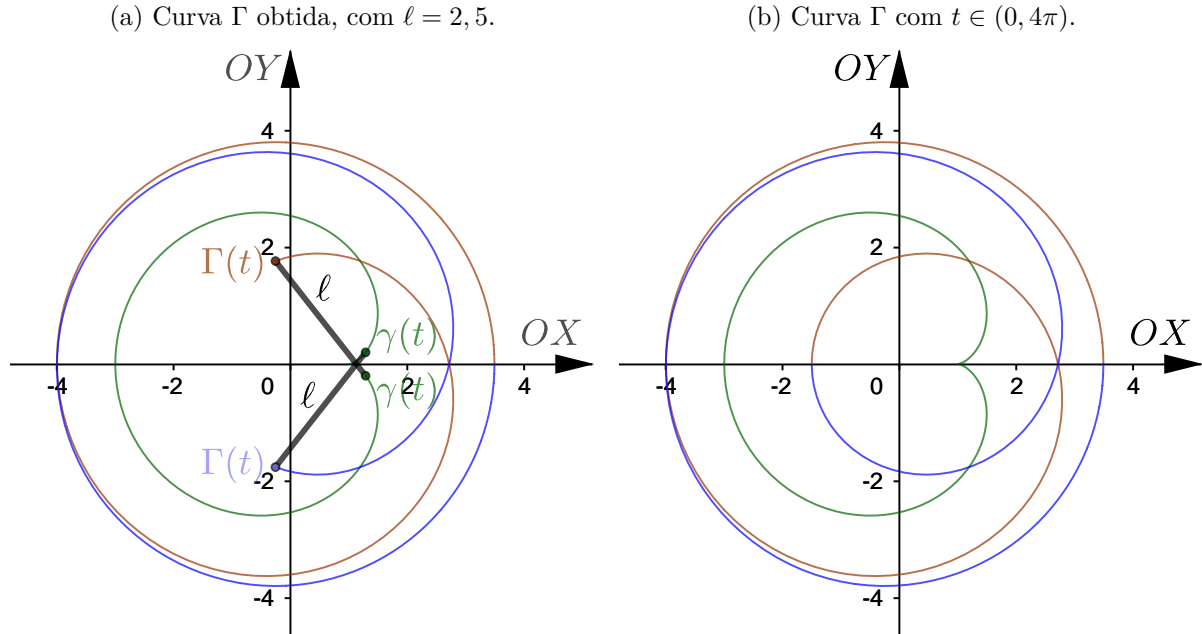
$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(-2r \sin t + 2r \sin 2t)^2 + (2r \cos t - 2r \cos 2t)^2} \\ &= \sqrt{8r^2 - 8r^2 \sin t \sin 2t - 8r^2 \cos t \cos 2t} \\ &= \sqrt{4r^2(2 - 2 \sin t \sin 2t - 2 \cos t \cos 2t)} \\ &= 2r \sqrt{2 - 2 \sin t \sin 2t - 2 \cos t \cos 2t} \end{aligned}$$

Logo, obtemos o seguinte rastro para a roda dianteira

$$\Gamma(t) : \begin{cases} \begin{cases} x = 2r \cos t - r \cos 2t + \ell \frac{-\sin t + \sin 2t}{\sqrt{2 - 2 \sin t \sin 2t - 2 \cos t \cos 2t}} \\ y = 2r \sin t - r \sin 2t + \ell \frac{\cos t - \cos 2t}{\sqrt{2 - 2 \sin t \sin 2t - 2 \cos t \cos 2t}} \end{cases}, & \text{se } t \in (0, 2\pi) \\ \begin{cases} x = 2r \cos t - r \cos 2t - \ell \frac{-\sin t + \sin 2t}{\sqrt{2 - 2 \sin t \sin 2t - 2 \cos t \cos 2t}} \\ y = 2r \sin t - r \sin 2t - \ell \frac{\cos t - \cos 2t}{\sqrt{2 - 2 \sin t \sin 2t - 2 \cos t \cos 2t}} \end{cases}, & \text{se } t \in (2\pi, 4\pi) \end{cases}$$

Desse modo, tomando  $\ell = 2,5$  e  $r = 1$ , temos o gráfico da figura 71a. Veja na figura 71b, a curva  $\Gamma$  obtida no intervalo  $(0, 4\pi)$ .

Figura 71 – Rastro dianteiro quando  $\gamma(t) = (2r \cos t - r \cos 2t, 2r \sin t - r \sin 2t)$ .



Fonte – O autor, 2019.

Observe que, como a cardioide é uma curva fechada que possui um único ponto singularidade que se localiza no ponto onde a curva inicia e termina seu ciclo, o rastro dianteiro obtido é uma única curva fechada no intervalo  $(0, 4\pi)$ .

**Exemplo 5.14.** Agora, seja  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  a astroide vista na subseção 2.3.3 dada por  $\gamma(t) = (3r \cos t + r \cos 3t, 3r \sin t - r \sin 3t)$ . Seu traço possui 4 cúspides em  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{2}$ ,  $t = \pi$  e  $t = \frac{3\pi}{2}$ . Verificando esses tipos de singularidade temos

$$\gamma'(t) = (-3r \sin t - 3r \sin 3t, 3r \cos t - 3r \cos 3t)$$

$$\gamma''(t) = (-3r \cos t - 9r \cos 3t, -3r \sin t + 9r \sin 3t)$$

$$\gamma'''(t) = (3r \sin t + 27r \sin 3t, -3r \cos t + 27r \cos 3t)$$

E assim obtemos

$$t = 0 \implies \gamma'(0) = (0, 0), \gamma''(0) = (-12r, 0) \text{ e } \gamma'''(0) = (0, 24r)$$

$$t = \pi/2 \implies \gamma'(\pi/2) = (0, 0), \gamma''(\pi/2) = (0, -12r) \text{ e } \gamma'''(\pi/2) = (-24r, 0)$$

$$t = \pi \implies \gamma'(\pi) = (0, 0), \gamma''(\pi) = (12r, 0) \text{ e } \gamma'''(\pi) = (0, -24r)$$

$$t = 3\pi/2 \implies \gamma'(3\pi/2) = (0, 0), \gamma''(3\pi/2) = (0, 12r) \text{ e } \gamma'''(3\pi/2) = (24r, 0)$$

De acordo com a definição 5.1 as 4 cúspides da astroide são de Whitney e pelo lema 5.1 a curva  $\Gamma$  será suave. De modo a verificar esse fato, calculando a norma de  $\gamma'$  temos

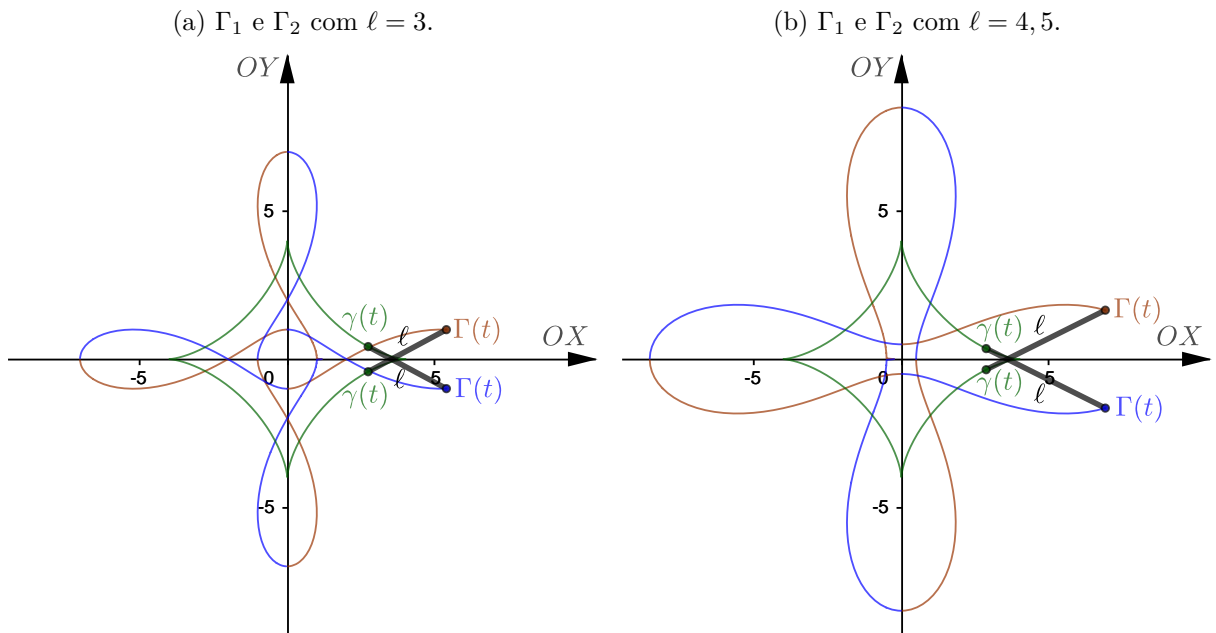
$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(-3r \operatorname{sen} t - 3r \operatorname{sen} 3t)^2 + (3r \operatorname{cos} t - 3r \operatorname{cos} 3t)^2} \\ &= \sqrt{18r^2 + 18r^2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t - 18r^2 \operatorname{cos} t \operatorname{cos} 3t} \\ &= 3r\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t - 2 \operatorname{cos} t \operatorname{cos} 3t} \end{aligned}$$

E portanto, obtemos as seguintes sentenças para os rastros  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$

$$\Gamma(t) : \begin{cases} x(t) = 3r \operatorname{cos} t + r \operatorname{cos} 3t \pm \ell \frac{-\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t - 2 \operatorname{cos} t \operatorname{cos} 3t}} \\ y(t) = 3r \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} 3t \pm \ell \frac{\operatorname{cos} t - \operatorname{cos} 3t}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t - 2 \operatorname{cos} t \operatorname{cos} 3t}} \end{cases}$$

Tomando  $r = 1$ , nas figuras 72a e 72b podemos ver os rastros dianteiros obtidos para  $\ell = 3$  e  $\ell = 4, 5$ , respectivamente.

Figura 72 – Rastros dianteiros quando  $\gamma(t) = (3r \operatorname{cos} t + r \operatorname{cos} 3t, 3r \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} 3t)$ .



Fonte – O autor, 2019.

Portanto,  $\Gamma_1$  é dada pelas sentenças

$$\Gamma_1(t) : \begin{cases} \begin{cases} x = 3r \operatorname{cos} t + r \operatorname{cos} 3t - \ell \frac{-\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t - 2 \operatorname{cos} t \operatorname{cos} 3t}} \\ y = 3r \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} 3t - \ell \frac{\operatorname{cos} t - \operatorname{cos} 3t}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t - 2 \operatorname{cos} t \operatorname{cos} 3t}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3r \operatorname{cos} t + r \operatorname{cos} 3t + \ell \frac{-\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t - 2 \operatorname{cos} t \operatorname{cos} 3t}} \\ y = 3r \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} 3t + \ell \frac{\operatorname{cos} t - \operatorname{cos} 3t}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t - 2 \operatorname{cos} t \operatorname{cos} 3t}} \end{cases} \end{cases}$$

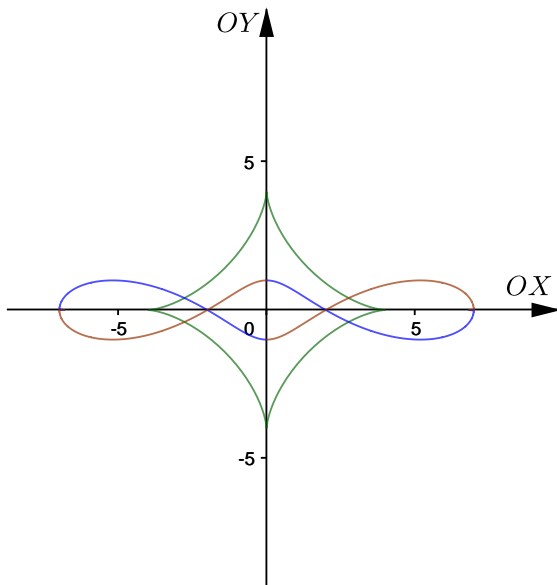
Em que na primeira sentença,  $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$  e na segunda sentença,  $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ . Agora, determinado  $\Gamma_2$  temos

$$\Gamma_2(t) : \begin{cases} \begin{cases} x = 3r \cos t + r \cos 3t + \ell \frac{-\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t - 2 \cos t \cos 3t}} \\ y = 3r \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} 3t + \ell \frac{\cos t - \cos 3t}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t - 2 \cos t \cos 3t}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3r \cos t + r \cos 3t - \ell \frac{-\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t - 2 \cos t \cos 3t}} \\ y = 3r \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} 3t - \ell \frac{\cos t - \cos 3t}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 3t - 2 \cos t \cos 3t}} \end{cases} \end{cases}$$

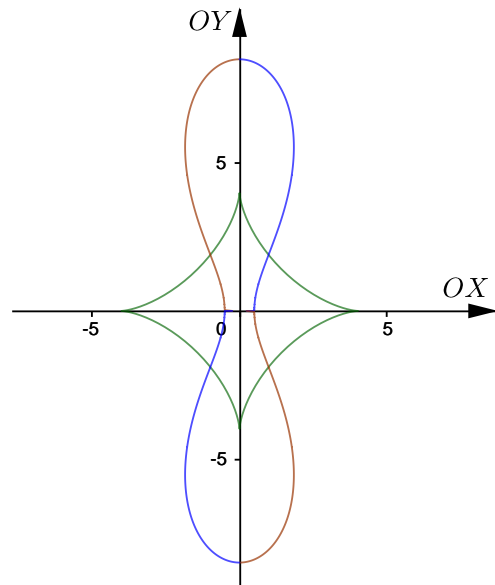
Em que na primeira sentença,  $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$  e na segunda sentença,  $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ . Veja nas figuras 73a e 73b representações das curvas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .

Figura 73 – Rastros  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  obtidos, quando  $\gamma$  é a astroide.

(a)  $\Gamma_1$  com  $\ell = 3$ .



(b)  $\Gamma_2$  com  $\ell = 4, 5$ .



Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 5.15.** Sendo  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a curva do exemplo 3.1 dada por  $\gamma(t) = (t^5 - 4t^3, t^2)$ , que possui singularidade em  $t = 0$ . Portanto, verificando seu tipo teremos

$$\gamma'(t) = (5t^4 - 12t^2, 2t) \implies \gamma'(0) = (0, 0)$$

$$\gamma''(t) = (20t^3 - 24t, 2) \implies \gamma''(0) = (0, 2)$$

$$\gamma'''(t) = (60t^2 - 24, 0) \implies \gamma'''(0) = (-24, 0)$$

E assim, de acordo com a definição 5.1 a singularidade de  $\gamma$  é uma cúspide de Whitney, e conforme o lema 5.1 a curva  $\Gamma$  será suave. Logo, encontrando a norma de  $\gamma'$  de modo a obter o rastro da roda dianteira.

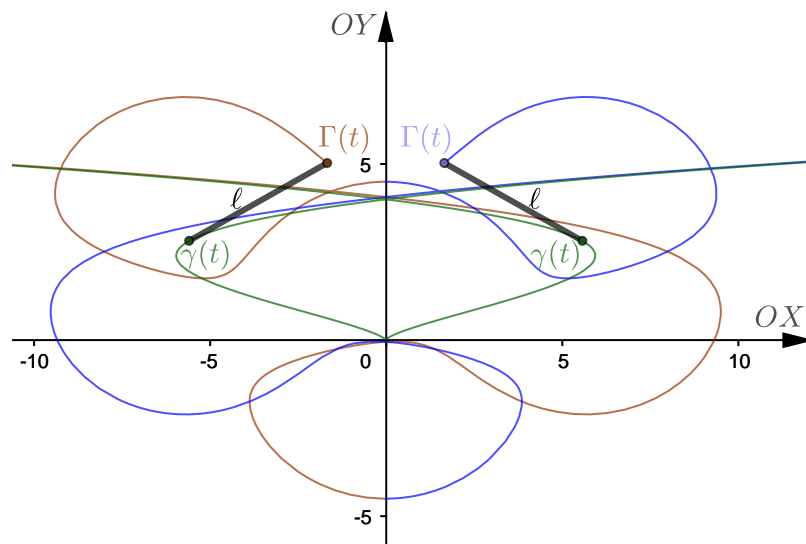
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(5t^4 - 12t^2)^2 + 4t^2}$$

Logo, temos as sentenças

$$\Gamma(t) = \left( t^5 - 4t^3 \pm \ell \frac{5t^4 - 12t^2}{\sqrt{(5t^4 - 12t^2)^2 + 4t^2}}, t^2 \pm \ell \frac{2t}{\sqrt{(5t^4 - 12t^2)^2 + 4t^2}} \right)$$

Assim, tomando  $\ell = 4, 5$  teremos os seguintes gráficos.

Figura 74 – Curvas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  obtidas, com  $\gamma(t) = (t^5 - 4t^3, t^2)$ .



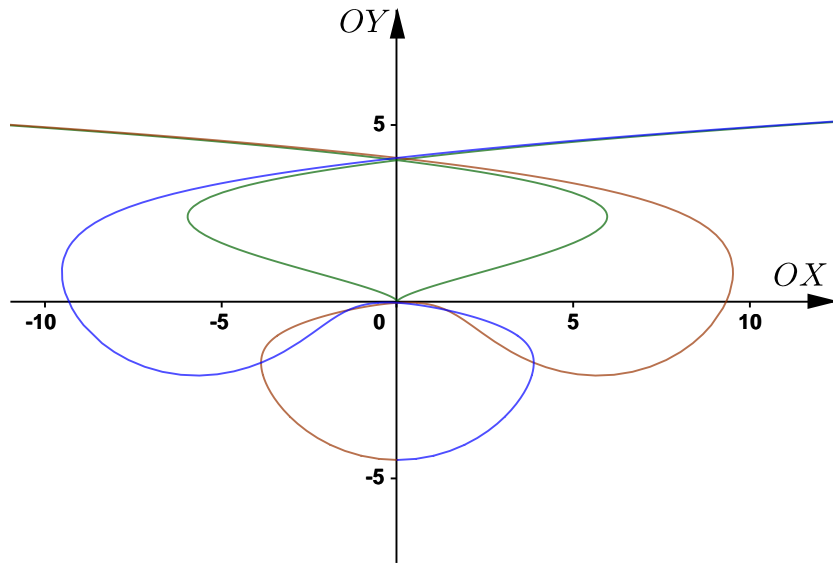
Fonte – O autor, 2019.

Logo, a curva  $\Gamma_1$  é dada por

$$\Gamma_1(t) : \begin{cases} \left( t^5 - 4t^3 + \ell \frac{5t^4 - 12t^2}{\sqrt{(5t^4 - 12t^2)^2 + 4t^2}}, t^2 + \ell \frac{2t}{\sqrt{(5t^4 - 12t^2)^2 + 4t^2}} \right), & \text{se } t \in (-\infty, 0) \\ \left( t^5 - 4t^3 - \ell \frac{5t^4 - 12t^2}{\sqrt{(5t^4 - 12t^2)^2 + 4t^2}}, t^2 - \ell \frac{2t}{\sqrt{(5t^4 - 12t^2)^2 + 4t^2}} \right), & \text{se } t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Veja na figura 75 a curva  $\Gamma_1$

Figura 75 – Curva  $\Gamma_1$  obtida, quando  $\gamma(t) = (t^5 - 4t^3, t^2)$ .



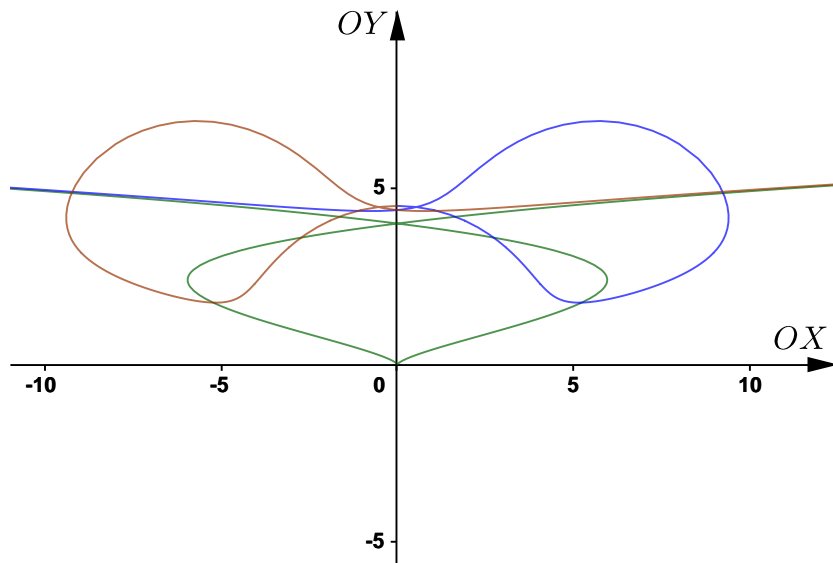
Fonte – O autor, 2019.

E  $\Gamma_2$  é determinada por

$$\Gamma_2(t) : \begin{cases} \left( t^5 - 4t^3 - \ell \frac{5t^4 - 12t^2}{\sqrt{(5t^4 - 12t^2)^2 + 4t^2}}, t^2 - \ell \frac{2t}{\sqrt{(5t^4 - 12t^2)^2 + 4t^2}} \right), & \text{se } t \in (-\infty, 0) \\ \left( t^5 - 4t^3 + \ell \frac{5t^4 - 12t^2}{\sqrt{(5t^4 - 12t^2)^2 + 4t^2}}, t^2 + \ell \frac{2t}{\sqrt{(5t^4 - 12t^2)^2 + 4t^2}} \right), & \text{se } t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Na figura 76 temos a curva  $\Gamma_2$ .

Figura 76 – Curva  $\Gamma_2$  obtida, quando  $\gamma(t) = (t^5 - 4t^3, t^2)$ .



Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 5.16.** Seja o rastro da roda traseira a curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  vista no exemplo 4.3 dada por  $\gamma(t) = (t^5, t^2)$ , que também possui singularidade em  $t = 0$ . Verificando se é de Whitney temos

$$\gamma'(t) = (5t^4, 2t) \implies \gamma'(0) = (0, 0)$$

$$\gamma''(t) = (20t^3, 2) \implies \gamma''(0) = a(0) = (0, 2)$$

$$\gamma'''(t) = (60t^2, 0) \implies \gamma'''(0) = a'(0) = (0, 0)$$

Notemos que dessa vez os vetores  $(\gamma''(t), \gamma'''(t))$  não são linearmente independentes, e portanto, nesse caso não garantimos que a curva  $\Gamma$  seja suave. Observe entretanto, que essa é uma cúspide extraordinária. Calculando a norma de  $\gamma'$  temos

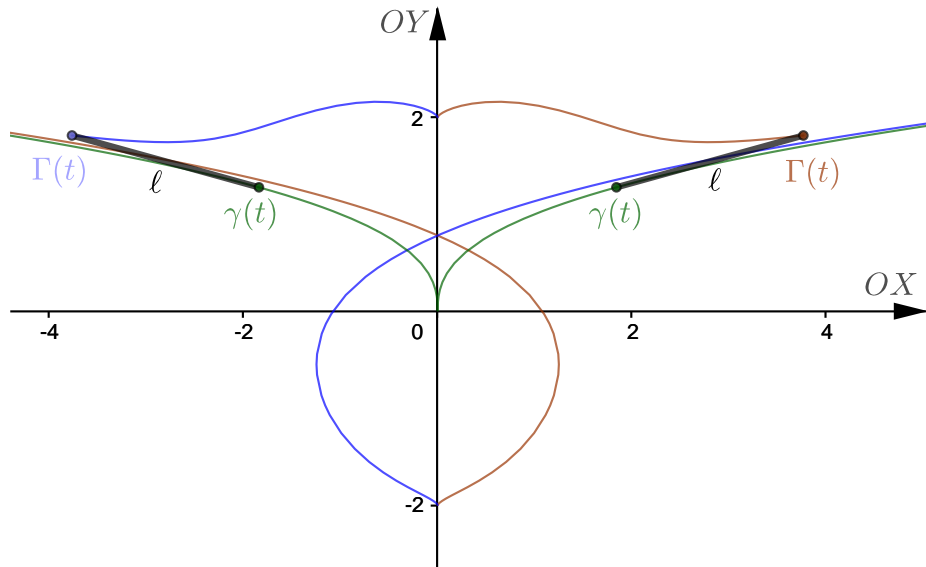
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{25t^8 + 4t^2},$$

Assim, as sentenças de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são dadas por

$$\Gamma(t) = \left( t^5 \pm \ell \frac{5t^4}{\sqrt{25t^8 + 4t^2}}, t^2 \pm \ell \frac{2t}{\sqrt{25t^8 + 4t^2}} \right)$$

Logo, tomando  $\ell = 2$  temos os rastros da figura 77 para a roda dianteira.

Figura 77 – Rastros dianteiros obtidos, com  $\gamma(t) = (t^5, t^2)$ .



Fonte – O autor, 2019.

Assim, podemos tomar  $\Gamma_1$

$$\Gamma_1(t) : \begin{cases} \left( t^5 + \ell \frac{5t^4}{\sqrt{25t^8 + 4t^2}}, t^2 + \ell \frac{2t}{\sqrt{25t^8 + 4t^2}} \right), & \text{se } t \in (-\infty, 0) \\ \left( t^5 - \ell \frac{5t^4}{\sqrt{25t^8 + 4t^2}}, t^2 - \ell \frac{2t}{\sqrt{25t^8 + 4t^2}} \right), & \text{se } t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

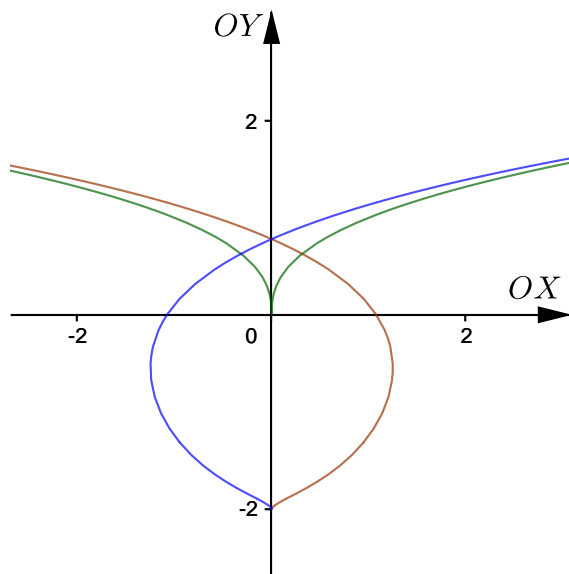
Desse modo,  $\Gamma_2$  é determinada por

$$\Gamma_2(t) : \begin{cases} \left( t^5 - \ell \frac{5t^4}{\sqrt{25t^8 + 4t^2}}, t^2 - \ell \frac{2t}{\sqrt{25t^8 + 4t^2}} \right), & \text{se } t \in (-\infty, 0) \\ \left( t^5 + \ell \frac{5t^4}{\sqrt{25t^8 + 4t^2}}, t^2 + \ell \frac{2t}{\sqrt{25t^8 + 4t^2}} \right), & \text{se } t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

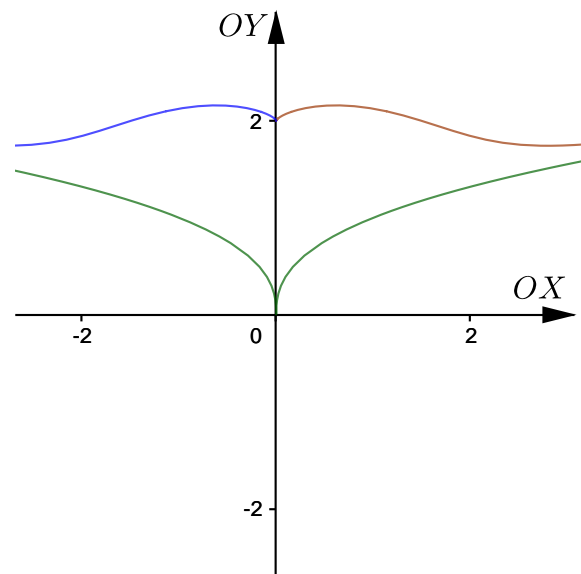
Por fim, veja nas figuras 78a e 78b os rastros  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente.

Figura 78 – Rastros  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  obtidos, quando  $\gamma(t) = (t^5, t^2)$ .

(a)  $\Gamma_1$  com  $\ell = 2$ .



(b)  $\Gamma_2$  com  $\ell = 2$ .



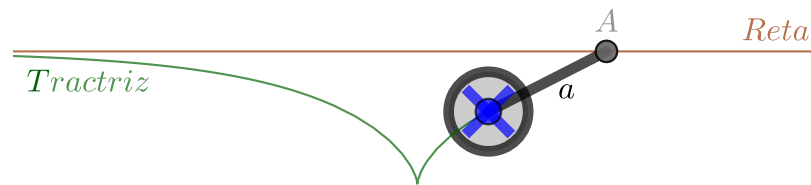
Fonte – O autor, 2019.

Observe também que em ambos os casos, o rastro dianteiro possui cúspide quando  $t$  se aproxima de zero. O que verifica o fato da cúspide de  $\gamma$  não ser de Whitney.

### 5.2.3 Tractriz

A abordagem dessa curva se dará com base nos estudos de Martins (2015). Em 1670, o arquiteto francês Claude Perrault propôs a Leibniz o problema da Tractriz (do latim *trahere*, que significa puxar, arrastar), em que ele observou que, colocando o relógio de bolso sobre uma mesa e estendendo sua corrente, a trajetória formada pelo relógio ao ser arrastado quando a extremidade oposta da corrente se move em linha reta é uma curva denominada Tractriz, conforme figura 79. Tal problema foi posteriormente estudado por Isaac Newton em 1676 e Christiaan Huygens em 1692. Em algumas literaturas esse é um exemplo dos chamados Problemas de Perseguição.

Figura 79 – Relógio de bolso se deslocando sobre a Tractriz.



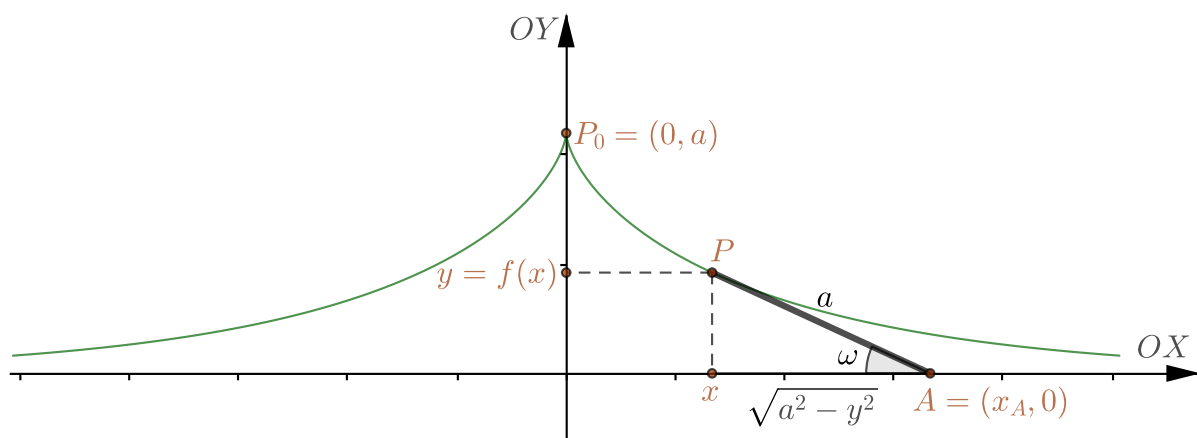
Fonte – O autor, 2019.

Nessa seção mostraremos que a Tractriz e a reta é um par de curvas que pode ser relacionado aos rastros das rodas de uma bicicleta, onde o rastro da roda traseira é a Tractriz e o da roda dianteira, a reta, sendo  $a = \ell$ . Veja com mais profundidade em Hart (2013).

Passemos a determinar as equações paramétricas da Tractriz representada na figura 80. Consideremos as seguintes hipóteses.

- Em cada ponto  $P$  da Tractriz, a reta suporte do segmento  $\overline{AP}$  é tangente a Tractriz em  $P$ .
- A distância do ponto  $A = (x_A, 0)$  ao ponto  $P = (x, y)$  é constante de medida  $a$ .
- A cúspide da Tractriz é o ponto  $P_0 = (0, a)$ .

Figura 80 – Construção da tractriz.



Fonte – O autor, 2019.

Agora, seja a imagem da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  o traço da tractriz. A reta que passa pelos pontos  $A = (x_A, 0)$  e  $P = (x, y)$  é dada por

$$y - 0 = m(x - x_A) \implies y = f'(x)(x - x_A) \tag{5.2}$$

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo obtido na figura 80, temos

$$a^2 = y^2 + (x - x_A)^2 \implies x - x_A = \pm \sqrt{a^2 - y^2}, \quad (5.3)$$

sendo (+) quando  $P$  pertence ao segundo quadrante e (-) quando  $P$  pertence ao primeiro quadrante. Logo substituindo 5.3 em 5.2 obtemos

$$y = \pm f'(x) \cdot \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Desse modo, a função  $f$  será a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \pm \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \\ y(0) = a \end{cases}$$

E portanto, resolvendo a EDO acima por separação de variáveis.

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \implies dx = \pm \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy \implies x = \pm \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy$$

Reparametrizando  $y$ , ainda no triângulo retângulo da figura 80, temos  $y = a \sin \omega$ , com  $0 < \omega \leq \frac{\pi}{2}$ , assim

$$y = a \sin \omega \implies \frac{dy}{d\omega} = a \cos \omega, \text{ logo } x = \pm \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \omega}}{a \sin \omega} a \cos \omega d\omega = \pm a \int \frac{\cos^2 \omega}{\sin \omega} d\omega.$$

Desse modo, obtemos

$$x = \pm a \int \frac{\cos^2 \omega}{\sin \omega} d\omega \implies x = \pm a \int \frac{1 - \sin^2 \omega}{\sin \omega} d\omega = \pm a \left( \int \frac{1}{\sin \omega} d\omega - \int \sin \omega d\omega \right) \quad (5.4)$$

Resolvendo  $\int \frac{1}{\sin \omega} d\omega$  encontramos

$$\begin{aligned} \sin \omega &= 2 \sin(\omega/2) \cos(\omega/2) \implies \frac{1}{\sin \omega} = \frac{1}{2 \sin(\omega/2) \cos(\omega/2)} \implies \\ \frac{1}{\sin \omega} &= \frac{\cos(\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \cdot \frac{1}{2 \cos^2(\omega/2)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\omega/2)} \cdot \frac{1}{2 \cos^2(\omega/2)}. \end{aligned}$$

Mas, como sabemos  $\frac{d}{d\omega} \ln(\operatorname{tg}(\omega/2)) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\omega/2)} \cdot \frac{\sec^2(\omega/2)}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\omega/2)} \cdot \frac{1}{2 \cos^2(\omega/2)}$ , logo

$$\frac{1}{\sin \omega} = \frac{d}{d\omega} \ln(\operatorname{tg}(\omega/2)).$$

E portanto, substituindo esse resultado em 5.4 obtemos

$$x = \pm a [\ln(\operatorname{tg}(\omega/2)) + \cos \omega] + C$$

Por fim, tomando o valor inicial  $y(0) = a \implies a = a \sin \omega \implies \omega = \frac{\pi}{2}$ , vamos ter

$$0 = \pm a [\ln(\operatorname{tg}(\pi/4)) + \cos(\pi/2)] + C \implies C = 0.$$

Conclui-se portanto, que as equações da tratriz são

$$\mathcal{T} : \begin{cases} x = \pm a [\ln(\operatorname{tg}(\omega/2)) + \cos \omega] \\ y = a \operatorname{sen} \omega \end{cases}, \quad \omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ainda na figura 80 temos que

$$\operatorname{sen} \omega = \frac{y}{a}, \quad \cos \omega = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Portanto, utilizando propriedades trigonométricas obtemos

$$\operatorname{tg}(\omega/2) = \frac{1 - \cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} = \frac{1 - \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}}{\frac{y}{a}} = \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$

E assim, a equação cartesiana da Tratriz será

$$x = \pm a \left[ \ln \left( \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right) + \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a} \right].$$

Considerando a forma cartesiana acima e utilizando a trigonometria hiperbólica, podemos obter uma reparametrização mais simplificada para a tratriz. Lembrando que

$$\operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{cosh} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

tomemos a reparametrização  $y = a \operatorname{sech} t$  para  $t \geq 0$ , assim

$$x = \pm a \left[ \ln \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 t}}{\operatorname{sech} t} \right) + \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 t} \right].$$

Usando as propriedades  $\operatorname{tgh}^2 t = 1 - \operatorname{sech}^2 t$ ,  $\operatorname{sech} t = \frac{1}{\operatorname{cosh} t}$  e  $\operatorname{tgh} t = \frac{\operatorname{senh} t}{\operatorname{cosh} t}$ , temos

$$\begin{aligned} x &= \pm a \left[ \ln \left( \frac{1 - \operatorname{tgh} t}{\operatorname{sech} t} \right) + \operatorname{tgh} t \right] \iff x = \pm a [\ln(\operatorname{cosh} t - \operatorname{senh} t) + \operatorname{tgh} t] \iff \\ x &= \pm a [\ln(e^{-t}) + \operatorname{tgh} t] \iff x = \pm a [-t + \operatorname{tgh} t] \end{aligned}$$

Por fim, obtemos a reparametrização

$$\mathcal{T} : \begin{cases} x = \pm a [-t + \operatorname{tgh} t] \\ y = a \operatorname{sech} t \end{cases}, \quad t \in [0, +\infty)$$

Agora, seja  $a = \ell$ . Consideremos a Tratriz o rastro da roda traseira de uma bicicleta dada por

$$\gamma : \begin{cases} x = \ell [-t + \operatorname{tgh} t] \\ y = \ell \operatorname{sech} t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Calculando a derivada de  $\gamma$ , de modo a obter as equações para os possíveis rastros dianteiros, temos

$$\gamma'(t) = (\ell[-1 + \operatorname{sech}^2 t], -\ell \operatorname{tgh} t \operatorname{sech} t) = (-\ell \operatorname{tgh}^2 t, -\ell \operatorname{tgh} t \operatorname{sech} t),$$

e assim a norma de  $\gamma'$  é dada por

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\ell^2 \operatorname{tgh}^4 t + \ell^2 \operatorname{tgh}^2 t \operatorname{sech}^2 t} = \ell \sqrt{\operatorname{tgh}^4 t + \operatorname{tgh}^2 t (1 - \operatorname{tgh}^2 t)} = \ell |\operatorname{tgh} t|.$$

Por fim, as equações para os possíveis rastros dianteiros de bicicleta quando o rastro traseiro é a Tractriz são dadas por

$$\Gamma_1(t) : \begin{cases} \left( \ell[-t + \operatorname{tgh} t] - \ell \frac{-\operatorname{tgh}^2 t}{|\operatorname{tgh} t|}, \ell \operatorname{sech} t - \ell \frac{-\operatorname{tgh} t \operatorname{sech} t}{|\operatorname{tgh} t|} \right), & \text{se } t \in (-\infty, 0) \\ \left( \ell[-t + \operatorname{tgh} t] + \ell \frac{-\operatorname{tgh}^2 t}{|\operatorname{tgh} t|}, \ell \operatorname{sech} t + \ell \frac{-\operatorname{tgh} t \operatorname{sech} t}{|\operatorname{tgh} t|} \right), & \text{se } t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

e também

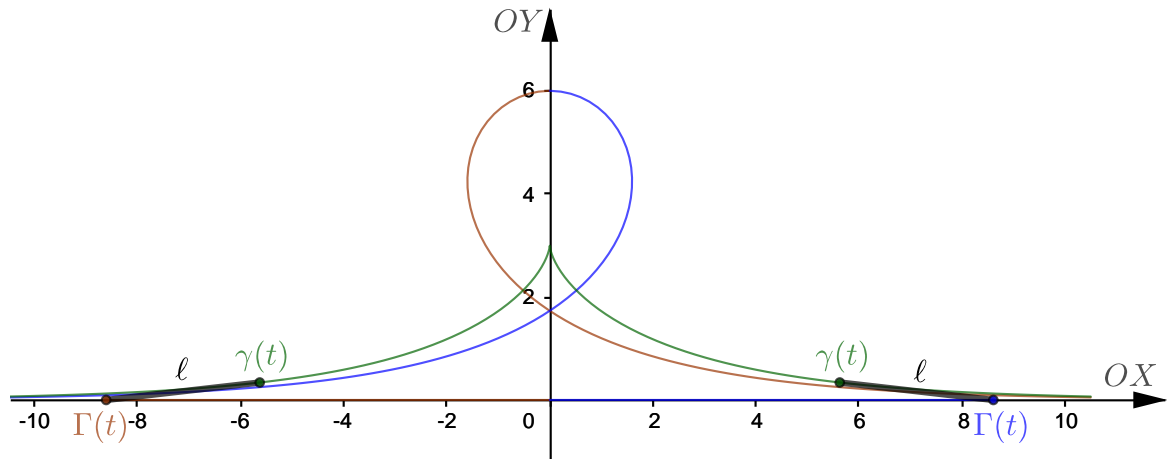
$$\Gamma_2(t) : \begin{cases} \left( \ell[-t + \operatorname{tgh} t] + \ell \frac{-\operatorname{tgh}^2 t}{|\operatorname{tgh} t|}, \ell \operatorname{sech} t + \ell \frac{-\operatorname{tgh} t \operatorname{sech} t}{|\operatorname{tgh} t|} \right), & \text{se } t \in (-\infty, 0) \\ \left( \ell[-t + \operatorname{tgh} t] - \ell \frac{-\operatorname{tgh}^2 t}{|\operatorname{tgh} t|}, \ell \operatorname{sech} t - \ell \frac{-\operatorname{tgh} t \operatorname{sech} t}{|\operatorname{tgh} t|} \right), & \text{se } t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Lembrando que  $\begin{cases} \operatorname{tgh} t < 0, & \text{se } t < 0 \\ \operatorname{tgh} t > 0, & \text{se } t > 0 \end{cases}$ , podemos simplificar as equações de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , obtendo

$$\Gamma_1(t) = (-\ell t, 0), \text{ com } t \neq 0 \quad \text{e} \quad \Gamma_2(t) = (-\ell t + 2\ell \operatorname{tgh} t, 2\ell \operatorname{sech} t), \text{ com } t \neq 0$$

Veja as curvas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  formadas na figura a seguir para  $\ell = 3$ .

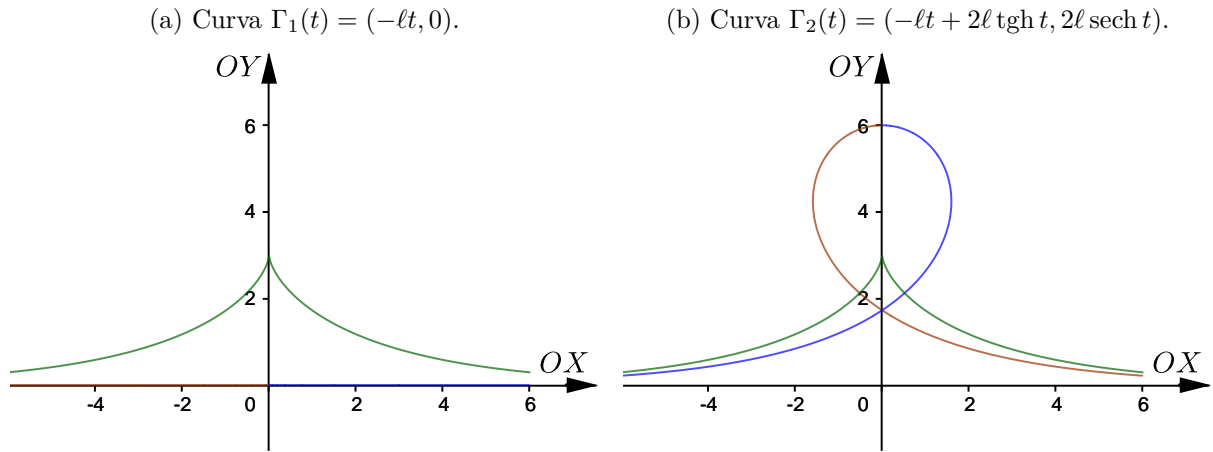
Figura 81 – Tractriz como rastro da roda traseira.



Fonte – O autor, 2019.

De fato, uma das possibilidades para o rastro dianteiro é uma reta, representada pela equação  $\Gamma_1$ , o que mostra a relação do problema da Tractriz com os rastros das rodas de uma bicicleta. Veja detalhadamente a curva  $\Gamma_1$  na figura 82a e  $\Gamma_2$  na figura 82b.

Figura 82 – Rastros  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  quando  $\gamma$  é a Tractriz.



Fonte – O autor, 2019.

Observe ainda que a cúspide da tractriz localizada no ponto  $(0, a)$  é de Whitney, pois

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (-\ell \operatorname{tgh}^2 t, -\ell \operatorname{tgh} t \operatorname{sech} t) \implies \gamma'(0) = (0, 0) \\ \gamma''(t) &= (-2\ell \operatorname{tgh} t \operatorname{sech}^2 t, -\ell \operatorname{sech}^3 t + \ell \operatorname{tgh}^2 t \operatorname{sech} t) \implies \gamma''(0) = (0, -\ell) \\ \gamma'''(t) &= (-2\ell \operatorname{sech}^4 t + 4\ell \operatorname{sech}^2 t \operatorname{tgh}^2 t, 3\ell \operatorname{tgh} t \operatorname{sech}^3 t + 2\ell \operatorname{tgh} t \operatorname{sech}^3 t - \ell \operatorname{tgh}^3 t \operatorname{sech} t) \\ &\implies \gamma'''(0) = (-2\ell, 0) \end{aligned}$$

O que comprova o fato de ambas as curvas serem suaves.

### 5.3 Resultados importantes

A seguir veremos alguns fatos importantes consequentes dos estudos anteriores.

#### 5.3.1 Relação entre as curvaturas dos rastros

Podemos obter relações entre as curvaturas dos rastros das rodas dianteira e traseira, conforme Tabachnikov (2006). Consideremos duas curvas regulares  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  e  $\Gamma(s(t)) = (X(t), Y(t))$  que se relacionam de acordo com a proposição 5.1. Sejam  $t$  e  $s$  os parâmetros de comprimento de arco em  $\gamma$  e  $\Gamma$ , respectivamente. Note ainda que  $\Gamma$  está reparametrizada pela função  $s(t)$ . Mediante isso, a correspondência entre as duas curvas é dada por

$$\Gamma(s(t)) = \gamma(t) + \ell \gamma_t(t). \tag{5.5}$$

Em que  $\gamma_t$  é a derivada de  $\gamma$  com relação a  $t$ , notação que utilizaremos nesta seção, de modo a simplificar os próximos desenvolvimentos. Logo, teremos o lema.

**Lema 1.** *Sejam  $k$  e  $K$  as curvaturas de  $\gamma$  e  $\Gamma$ , respectivamente. Denotando por  $\alpha(t)$  o ângulo entre os vetores tangentes às curvas nos respectivos pontos  $\gamma(t)$  e  $\Gamma(s(t))$ , em que  $s(t)$  é uma reparametrização por comprimento de arco de  $\Gamma(t)$  e  $t$  é o parâmetro de comprimento de arco da curva  $\gamma$ . Nessas condições são válidas as seguintes relações*

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha(t) < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad k = \frac{\text{tg } \alpha}{\ell}, \quad K = \frac{\text{sen } \alpha}{\ell} + \frac{d\alpha}{ds} \quad \text{e} \quad K = \frac{k + \ell k' + \ell^2 k^3}{(1 + \ell^2 k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*Demonstração.* Como  $t$  é o parâmetro de comprimento de arco de  $\gamma$ , o vetor  $\gamma''$  tem norma  $|k|$  e é ortogonal à  $\gamma'(t)$ . Derivando 5.5, temos

$$\Gamma_t = \gamma_t + \ell \gamma_{tt} \tag{5.6}$$

Devido ao fato de  $\langle \gamma_t, \gamma_t \rangle = \|\gamma_t\|^2 = 1$  e  $\langle \gamma_{tt}, \gamma_t \rangle = 0$ , podemos obter que  $\langle \Gamma_t, \gamma_t \rangle = \langle \gamma_t, \gamma_t \rangle + \ell \langle \gamma_{tt}, \gamma_t \rangle = 1$ . Portanto  $\langle \Gamma_t, \gamma_t \rangle = \|\Gamma_t\| \|\gamma_t\| \cos \alpha(t) = 1$ , e assim  $\cos \alpha(t) > 0$  para todo  $t$  resultando que

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha(t) < \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \|\Gamma_t\| \cos \alpha(t) = 1.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_t\| &= \|\gamma_t + \ell \gamma_{tt}\| \\ &= \langle \gamma_t + \ell \gamma_{tt}, \gamma_t + \ell \gamma_{tt} \rangle^{1/2} \\ &= \left( \langle \gamma_t, \gamma_t \rangle + 2\ell \langle \gamma_t, \gamma_{tt} \rangle + \ell^2 \langle \gamma_{tt}, \gamma_{tt} \rangle \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{1 + \ell^2 k^2}, \end{aligned}$$

e portanto obtemos

$$\|\Gamma_t\| = \sqrt{1 + \ell^2 k^2} = \frac{1}{\cos \alpha(t)}. \tag{5.7}$$

Quanto a  $\alpha(t)$ , adotaremos a seguinte convenção, se de  $\gamma'(t)$  a  $\Gamma'(t)$ , a rotação se dá no sentido anti-horário então diremos que  $\alpha(t)$  é positivo. Caso contrário, diremos que  $\alpha(t)$  é negativo. Intuitivamente temos que

$$\alpha > 0 \iff k > 0, \quad \alpha < 0 \iff k < 0 \quad \text{e} \quad \alpha = 0 \iff k = 0,$$

onde  $k$  é a curvatura de  $\gamma$ . Logo, em 5.7 obtemos

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \ell^2 k^2 \iff \sec^2 \alpha - 1 = \ell^2 k^2 = \text{tg}^2 \alpha \iff \ell |k| = |\text{tg } \alpha| \iff k = \frac{\text{tg } \alpha}{\ell}.$$

Como  $\Gamma_t = \Gamma_s \frac{ds}{dt}$ , temos  $\|\Gamma_t\| = \frac{1}{\cos \alpha} = \|\Gamma_s\| \left| \frac{ds}{dt} \right| \iff \frac{1}{\cos \alpha} = \left| \frac{ds}{dt} \right|$ . Como, sempre podemos obter uma reparametrização  $s(t)$  tal que  $s'(t) > 0$  então  $\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{ds}{dt}$ .

Sabemos que pela proposição 4.6, a curvatura de  $\Gamma$  é dada por

$$K = \frac{X'Y'' - X''Y'}{((X'^2 + Y'^2)^{\frac{3}{2}})}. \quad (5.8)$$

Sejam  $T(t)$  e  $N(t)$  os campos tangente e normal a  $\gamma$ , em que  $t$  é o seu parâmetro de comprimento de arco, temos pelas fórmulas de Frenet que  $T'(t) = \gamma_{tt} = kN(t)$ , ou seja  $\frac{\gamma_{tt}}{k} = N(t)$ . Tomando também  $N'(t) = -kT(t)$ , obtemos derivando  $\gamma_{tt}$

$$\gamma_{ttt} = k'N + kN' = k'\frac{\gamma_{tt}}{k} - k^2T = k'\frac{\gamma_{tt}}{k} - k^2\gamma_t.$$

Agora, derivando 5.6 temos

$$\Gamma_{tt} = \gamma_{tt} + \ell\gamma_{ttt} = \gamma_{tt} + \ell\left(k'\frac{\gamma_{tt}}{k} - k^2\gamma_t\right) = \gamma_{tt} + \ell k'\frac{\gamma_{tt}}{k} - \ell k^2\gamma_t = \gamma_{tt}\left(1 + \ell\frac{k'}{k}\right) - \ell k^2\gamma_t.$$

Podemos reescrever esse resultado, do seguinte modo

$$\Gamma_{tt} = (X''(t), Y''(t)) = \left(x''\left(1 + \ell\frac{k'}{k}\right) - \ell k^2x', y''\left(1 + \ell\frac{k'}{k}\right) - \ell k^2y'\right). \quad (5.9)$$

Analogamente, temos também

$$\Gamma_t = (X'(t), Y'(t)) = (x' + \ell x'', y' + \ell y''). \quad (5.10)$$

Substituindo 5.7, 5.9 e 5.10 em 5.8 obtemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{(x' + \ell x'')\left(y''\left(1 + \ell\frac{k'}{k}\right) - \ell k^2y'\right) - \left(x''\left(1 + \ell\frac{k'}{k}\right) - \ell k^2x'\right)(y' + \ell y'')}{(\sqrt{1 + \ell^2k^2})^3} \\ &= \frac{x'y''\left(1 + \ell\frac{k'}{k}\right) - \ell^2k^2x''y' - x''y'\left(1 + \ell\frac{k'}{k}\right) + \ell^2k^2x'y''}{(\sqrt{1 + \ell^2k^2})^3} \\ &= \frac{\left(1 + \ell\frac{k'}{k}\right)(x'y'' - x''y') + \ell^2k^2(x'y'' - x''y')}{(\sqrt{1 + \ell^2k^2})^3} \\ &= \frac{\left(1 + \ell\frac{k'}{k} + \ell^2k^2\right)(x'y'' - x''y')}{(\sqrt{1 + \ell^2k^2})^3} = \frac{k + \ell k' + \ell^2k^3}{(1 + \ell^2k^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Por fim, como  $k = \frac{\operatorname{tg} \alpha(t)}{\ell}$ ,  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \ell^2k^2$  e  $\cos \alpha = \frac{dt}{ds}$  obtemos em 5.11

$$\begin{aligned} K &= \frac{k + \ell k' + \ell^2k^3}{(1 + \ell^2k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k(1 + \ell^2k^2)}{(1 + \ell^2k^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\ell k_t}{(1 + \ell^2k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\ell(1 + \ell^2k^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\ell \alpha_t(t) \sec^2 \alpha(t)}{\ell \sec^3 \alpha(t)} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\ell \sec \alpha} + \frac{\alpha_t(t)}{\sec \alpha(t)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\ell \sec \alpha} + \alpha_t(t) \cos \alpha(t) = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\ell} + \alpha_t(t) \frac{dt}{ds} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\ell} + \frac{d\alpha}{ds}. \end{aligned}$$

□

Vamos a alguns exemplos.

**Exemplo 5.17.** Seja  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  o círculo de raio  $r$  parametrizado por comprimento de arco, com equações  $\gamma(t) = \left( r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r} \right)$ . Utilizando o corolário 4.1 para obter sua curvatura temos

$$\gamma'(t) = \left( -\sin \frac{t}{r}, \cos \frac{t}{r} \right) \text{ e } \gamma''(t) = \frac{1}{r} \left( -\cos \frac{t}{r}, -\sin \frac{t}{r} \right), \text{ e assim}$$

$$k(t) = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = \frac{1}{r} \sin^2 \frac{t}{r} + \frac{1}{r} \cos^2 \frac{t}{r} = \frac{1}{r} \left( \sin^2 \frac{t}{r} + \cos^2 \frac{t}{r} \right) = \frac{1}{r}.$$

Desse modo, usando 5.11 a curvatura  $K$  do rastro da roda dianteira  $\Gamma$  será

$$K(t) = \frac{k + \ell k' + \ell^2 k^3}{(1 + \ell^2 k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1/r + \ell^2/r^3}{(1 + \ell^2/r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r^2 + \ell^2}{(r^2 + \ell^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \ell^2}}$$

Note que a curvatura do rastro da roda dianteira será um valor constante. De fato, pois como vimos anteriormente o rastro dianteiro obtido será também um círculo.

### 5.3.2 Rastro dianteiro se tornando o traseiro

Obviamente podemos reuplicar o processo de encontrar o rastro dianteiro relativo à curva  $\gamma$  para obter o rastro dianteiro relativo à curva  $\Gamma$ . Seja portanto  $\bar{\Gamma}$  esse rastro, logo será dado por

$$\bar{\Gamma}(t) = \Gamma(t) + \bar{\ell} \frac{\Gamma'(t)}{\|\Gamma'(t)\|} \tag{5.12}$$

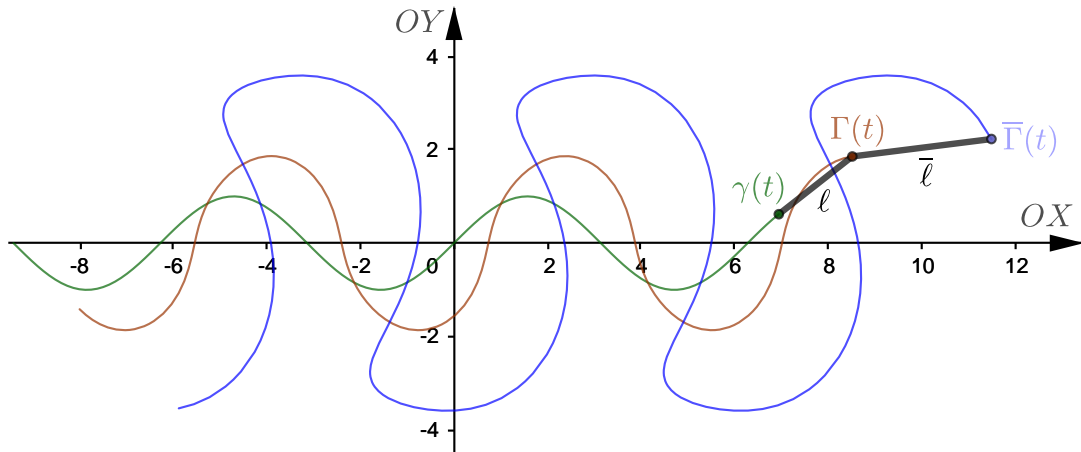
Note que as três curvas no plano são semelhantes aos rastros deixados por um caminhão do tipo bitrem, obviamente desconsiderando alguns fatores físicos. Vejamos os exemplos a seguir.

**Exemplo 5.18.** Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a curva seno com equações  $\gamma(t) = (t, \sin t)$ . Desse modo  $\Gamma$  será

$$\begin{aligned} \gamma'(t) = (1, \cos t) &\implies \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \cos^2 t}, \text{ portanto} \\ \Gamma(t) = (t, \sin t) + \ell \frac{(1, \cos t)}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} &= \left( t + \ell \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}, \sin t + \ell \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \right), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

E assim,  $\bar{\Gamma}$  será obtida tomando a curva  $\Gamma$  acima e aplicando a equação 5.12, o que não faremos aqui devido aos longos cálculos envolvidos. Mas na figura 83 podemos ver as curvas geradas, sendo  $\ell = 2$  e  $\bar{\ell} = 3$ .

Figura 83 –  $\bar{\Gamma}$  obtida com  $\gamma(t) = (t, \text{sen } t)$ ,  $\ell = 2$  e  $\bar{\ell} = 3$ .



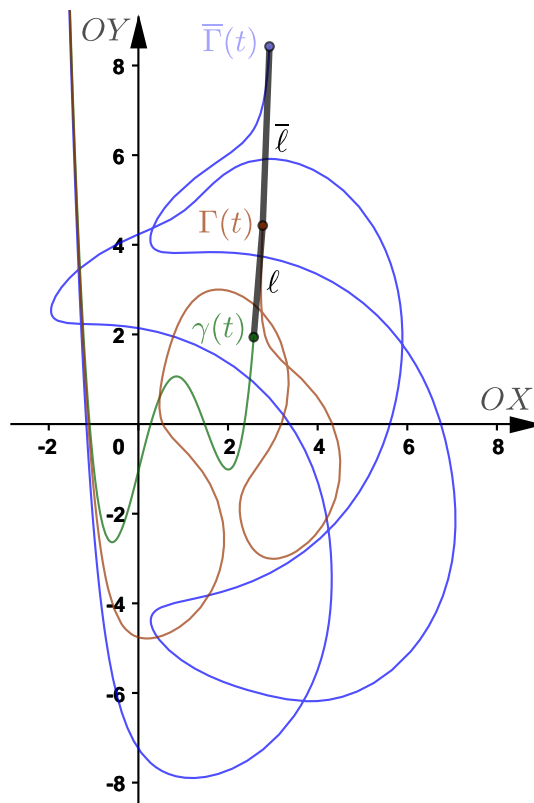
Fonte – O autor, 2019.

**Exemplo 5.19.** Agora, seja  $\gamma$  a curva do exemplo 5.3 dada por  $\gamma(t) = (t, t^4 - 3t^3 + 4t - 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Desse modo,

$$\gamma'(t) = (1, 4t^3 - 9t^2 + 4) \implies \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + (4t^3 - 9t^2 + 4)^2},$$

e assim obtemos

Figura 84 –  $\bar{\Gamma}$  obtida com  $\gamma(t) = (t, t^4 - 3t^3 + 4t - 1)$ ,  $\ell = 2,5$  e  $\bar{\ell} = 4$ .



Fonte – O autor, 2019.

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= (t, t^4 - 3t^3 + 4t - 1) + \ell \frac{(1, 4t^3 - 9t^2 + 4)}{\sqrt{1 + (4t^3 - 9t^2 + 4)^2}} \\ &= \left( t + \ell \frac{1}{\sqrt{1 + (4t^3 - 9t^2 + 4)^2}}, t^4 - 3t^3 + 4t - 1 + \ell \frac{4t^3 - 9t^2 + 4}{\sqrt{1 + (4t^3 - 9t^2 + 4)^2}} \right), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

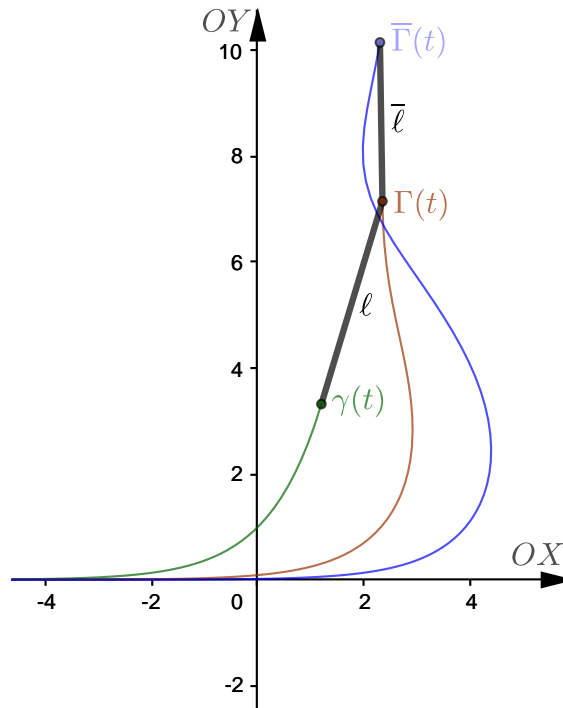
E assim, encontramos  $\bar{\Gamma}$  através da equação 5.12, que omitiremos por envolver cálculos longos.

**Exemplo 5.20.** Por fim, seja a curva exponencial dada por  $\gamma(t) = (t, e^t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , temos que seu rastro dianteiro será

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (1, e^t) \implies \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + e^{2t}}, \text{ e portanto} \\ \Gamma(t) &= (t, e^t) + \ell \frac{(1, e^t)}{\sqrt{1 + e^{2t}}} = \left( t + \ell \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2t}}}, e^t + \ell \frac{e^t}{\sqrt{1 + e^{2t}}} \right), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Novamente, utilizando 5.12 e encontrando  $\bar{\Gamma}$ , teremos o gráfico a seguir.

Figura 85 –  $\bar{\Gamma}$  obtida com  $\gamma(t) = (t, e^t)$ ,  $\ell = 4$  e  $\bar{\ell} = 3$ .



Fonte – O autor, 2019.

### 5.3.3 Velocidade das rodas, distância percorrida pelas rodas e curvas ambíguas

Seja a curva regular  $\gamma = (x(t), y(t))$  parametrizada pelo comprimento de arco, o rastro da roda traseira. Assim, a derivada da curva descrita pela roda dianteira é dada por

$$\Gamma_t = \gamma_t + \ell \gamma_{tt}.$$

Como  $\gamma_t$  e  $\gamma_{tt}$  são ortogonais, temos que  $\gamma_t$ ,  $\ell\gamma_{tt}$  e  $\Gamma_t$  formam um triângulo retângulo, uma vez que  $\Gamma_t$  é obtido por meio da soma vetorial  $\gamma_t + \ell\gamma_{tt}$ . Desta forma, podemos aplicar o teorema de Pitágoras obtendo a desigualdade

$$\|\Gamma_t\|^2 = \|\gamma_t\|^2 + \ell^2\|\gamma_{tt}\|^2 \geq \|\gamma_t\|^2.$$

Logo,  $\|\Gamma_t\|^2 \geq \|\gamma_t\|^2$ , o que garante que  $\|\Gamma_t\| \geq \|\gamma_t\|$ . O que significa que a velocidade da roda dianteira é maior que ou igual a da roda traseira. De onde podemos concluir também que a roda dianteira sempre percorrerá uma trajetória mais longa ou igual a da roda traseira, pois  $\int_{t_1}^{t_2} \|\Gamma_t\| dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma_t\| dt$ .

A seguir abordaremos alguns resultados decorrentes do fato da bicicleta percorrer curvas suaves e fechadas.

Como vimos anteriormente a roda dianteira sempre percorrerá uma distância maior que ou igual a roda traseira. Nos casos em que esse par de curvas for suave e fechado temos o seguinte corolário, conforme (TABACHNIKOV, 2006).

**Corolário 5.1.** *Seja  $k$  a curvatura de  $\gamma$ , considerando  $t$  e  $s$  os parâmetros de comprimento de arco de  $\gamma$  e  $\Gamma$ , respectivamente. Tomando os comprimentos percorridos pelas rodas traseira e dianteira no intervalo  $t \in [0, t]$ , e tais curvas relacionadas como no lema 1 temos a relação*

$$0 < \text{comprimento}(\Gamma) - \text{comprimento}(\gamma) < \ell \int_0^t |k| dt.$$

*Em particular, se  $\gamma$  é convexa, então*

$$\text{comprimento}(\Gamma) - \text{comprimento}(\gamma) < 2\pi\ell.$$

*Demonstração.* Tomando a desigualdade  $0 \leq \sqrt{1 + \ell^2 k^2} \leq \sqrt{\ell^2 k^2} + 1$ , sabemos que

$$\|\Gamma_t\| = \sqrt{1 + \ell^2 k^2} \quad \text{e} \quad \|\gamma_t\| = 1.$$

Portanto, manipulando e integrando a desigualdade acima obtemos

$$\int_0^t \sqrt{1 + \ell^2 k^2} dt - \int_0^t 1 dt \leq \int_0^t \sqrt{\ell^2 k^2} dt \implies \int_0^t \|\Gamma_t\| dt - \int_0^t \|\gamma_t\| dt \leq \ell \int_0^t |k| dt$$

Note que no caso em que a curvatura  $k$  de  $\gamma$  não for nula, obtemos a desigualdade estrita a seguir.

$$0 < \int_0^t \|\Gamma_t\| dt - \int_0^t \|\gamma_t\| dt < \ell \int_0^t |k| dt$$

Quando  $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva convexa, sua curvatura  $k$  mantém o mesmo sinal, conforme o teorema 4.4. Supondo  $k > 0$ , ou seja,  $\gamma$  sendo descrita no sentido anti-horário, utilizando o teorema 4.2 temos

$$\int_0^t k(u) du = \theta(t) - \theta(0) = 2\pi$$

O que nos leva a concluir o segundo resultado.

$$0 < \int_0^t \|\Gamma_t\| dt - \int_0^t \|\gamma_t\| dt < 2\pi\ell$$

□

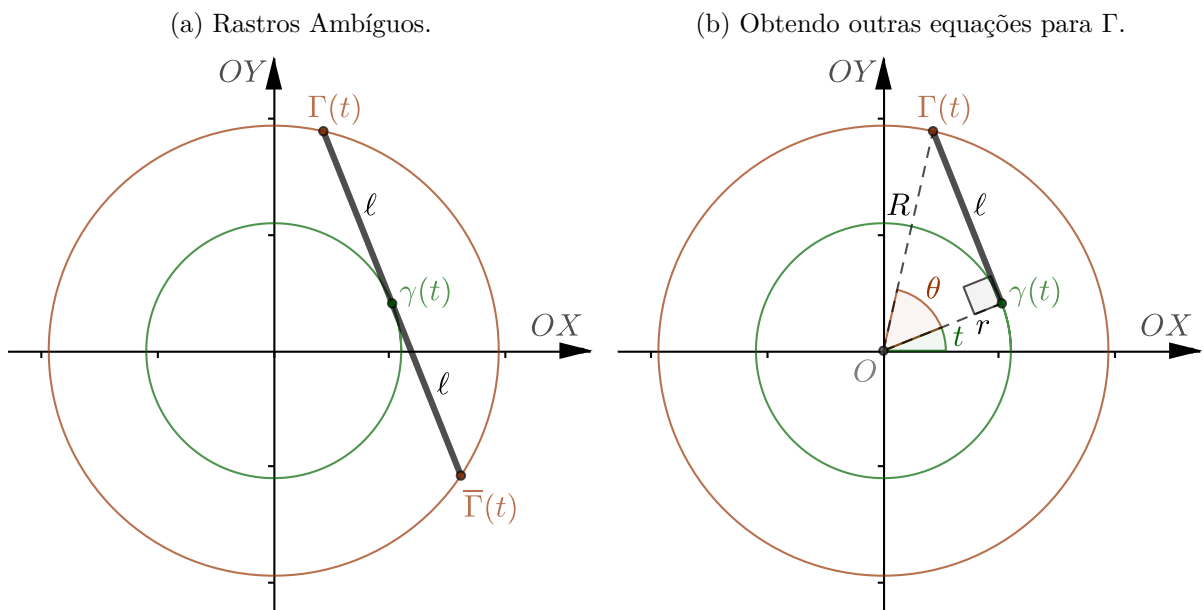
Nem sempre é possível determinar a direção para qual uma bicicleta se desloca analisando seu par de curvas, mesmo utilizando os métodos vistos anteriormente. Tais curvas são denominadas ambíguas e podem ser vistas com maior profundidade em (FINN, 2004). Em nosso trabalho trataremos especificamente de dois casos, que são as situações em que uma bicicleta consegue trilhar perfeitamente sobre uma reta, e quando o par de rastros são círculos concêntricos.

No caso da reta é trivial que o rastro dianteiro também será uma reta, o que não gera resultados importantes. Mas quando os rastros são círculos concêntricos temos algumas peculiaridades. Veja os rastros da figura 86a que são círculos concêntricos, e observe que, de fato, analisando esse par de curvas, seria impossível determinar se a bicicleta movia-se no sentido horário ou anti-horário.

Explorando o caso, consideremos que a curva  $\gamma$  seja um círculo de raio  $r$  com equações  $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Como já constatado no exemplo 5.1, o rastro dianteiro  $\Gamma$  também será um círculo. Seja portanto  $R$  o raio do círculo  $\Gamma$ , analisando o triângulo retângulo gerado pelos pontos  $O$ ,  $\gamma(t)$  e  $\Gamma(t)$  na figura 86b podemos extrair a relação

$$R^2 = \ell^2 + r^2 \implies R = \sqrt{\ell^2 + r^2}. \tag{5.13}$$

Figura 86 – Par de curvas ambíguas dado por círculos concêntricos.



Ainda na figura 86b, utilizando 5.13 pense que o ângulo  $\theta$  é dado por

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\ell}{R} = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + r^2}} \implies \theta = \operatorname{arcsen} \left( \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + r^2}} \right) \quad (5.14)$$

Assim, usando as equações 5.13 e 5.14, uma alternativa para representar a curva  $\Gamma$  obtida no exemplo 5.6 é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= (R \cos(\theta + t), R \operatorname{sen}(\theta + t)) \\ &= \left( \sqrt{\ell^2 + r^2} \cos \left( \operatorname{arcsen} \left( \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + r^2}} \right) + t \right), \sqrt{\ell^2 + r^2} \operatorname{sen} \left( \operatorname{arcsen} \left( \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + r^2}} \right) + t \right) \right). \end{aligned}$$

Observe ainda que a diferença entre os comprimentos percorridos pelas rodas traseira e dianteira pode ser tão pequena quanto desejarmos. De fato, temos que nas condições acima a curva  $\gamma$  percorrerá  $2\pi r$ , enquanto  $\Gamma$  percorrerá  $2\pi R$ . Logo, utilizando 5.13 temos

$$\text{comprimento } (\Gamma) - \text{comprimento } (\gamma) = 2\pi R - 2\pi r = 2\pi(R - r) = 2\pi(\sqrt{r^2 + \ell^2} - r),$$

o que diminui a medida que  $r$  aumenta.

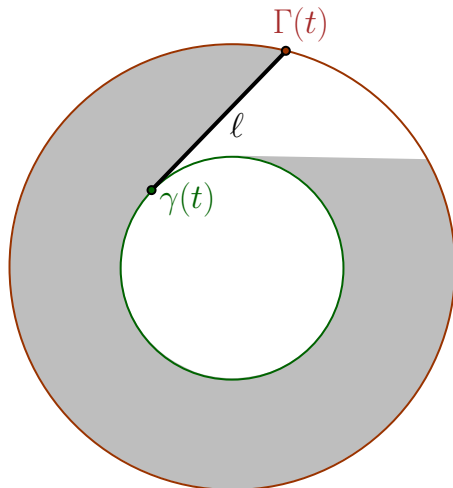
#### 5.4 Área entre os rastros

Nesta seção abordaremos as áreas entre o par de curvas de uma bicicleta, assunto esse estudado pelos professores Tanton (2019) e Goldberg (2010). Trataremos inicialmente dos casos em que  $\gamma$  é simples, fechada e convexa. Para uma análise inicial considere o círculo da figura 86b. Notemos que nesse caso a área está limitada por dois círculos concêntricos e será  $\pi R^2 - \pi r^2$ . Utilizando 5.13 encontramos o seguinte resultado

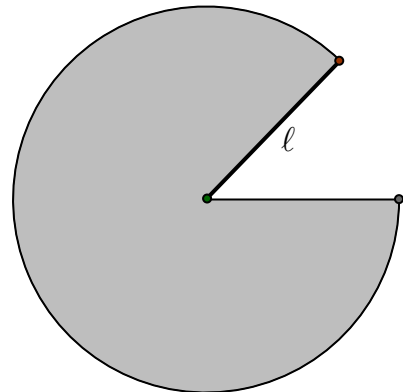
$$\pi R^2 - \pi r^2 \implies \pi(R^2 - r^2) = \pi \ell^2.$$

Figura 87 – Área entre círculos concêntricos como par de curvas de bicicleta.

(a) Deslocamento da bicicleta.

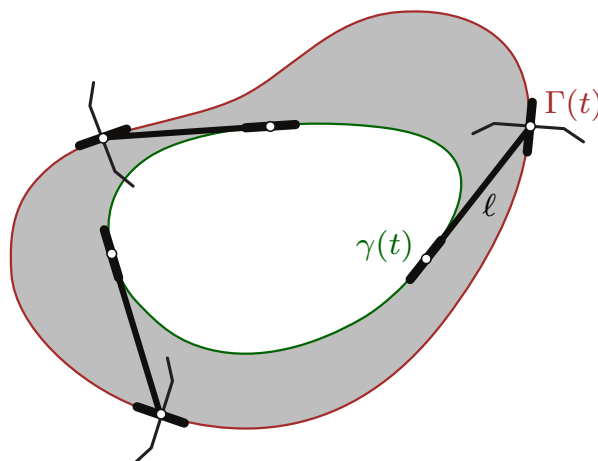


(b) Área de um círculo de raio  $\ell$ .



Assim, a área entre os rastros de bicicleta dados por círculos concêntricos depende exclusivamente da distância  $\ell$  entre as rodas, sendo a mesma área de um círculo de raio  $\ell$ , conforme figura 87. Mas, e nos casos em que  $\gamma$  for uma curva suave, fechada e convexa mais generalizada como o da figura 88 a seguir, podemos determinar essa área?

Figura 88 –  $\gamma$  qualquer simples, fechada e convexa.



Fonte – O autor, 2019.

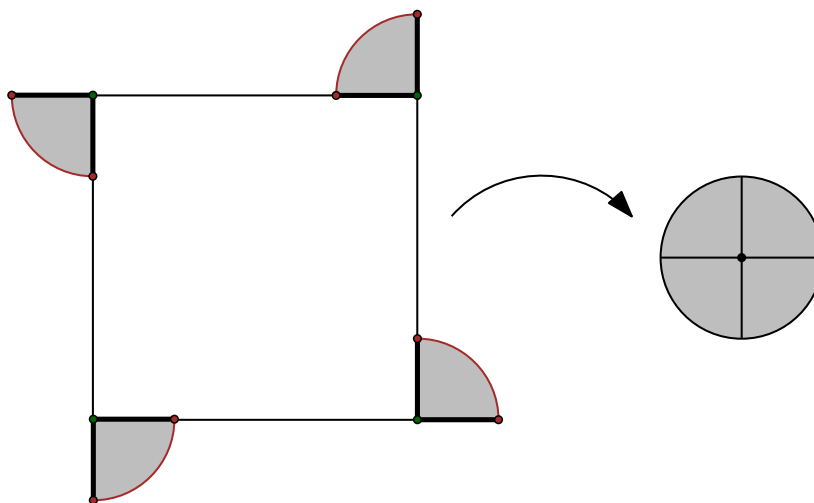
Surpreendentemente, a resposta para o questionamento acima é novamente  $\pi\ell^2$ , o que se dá pelo fato dessa situação representar um dos casos do teorema de Mamikon<sup>4</sup>, que pode ser visto com mais detalhes em Lodovici e Junior (2017).

De modo a verificar tal resultado, consideremos o rastro da roda traseira como polígonos convexos e vamos analisar a área obtida entre os rastros quando a bicicleta se desloca em determinado sentido.

Assim, seja o rastro da roda traseira o quadrado da figura 89. Obviamente, temos que enquanto a bicicleta se desloca sobre os lados do polígono, não obtemos nenhuma área entre os rastros.

<sup>4</sup> O também conhecido como cálculo visual foi desenvolvido em 1959 pelo físico Mamikon Mnatsakanian, ainda como estudante de graduação. O que foi aperfeiçoado em conjunto com o matemático Tom Apostol algumas décadas depois. (LODOVICI; JUNIOR, 2017)

Figura 89 – Quadrado como rastro da roda traseira.

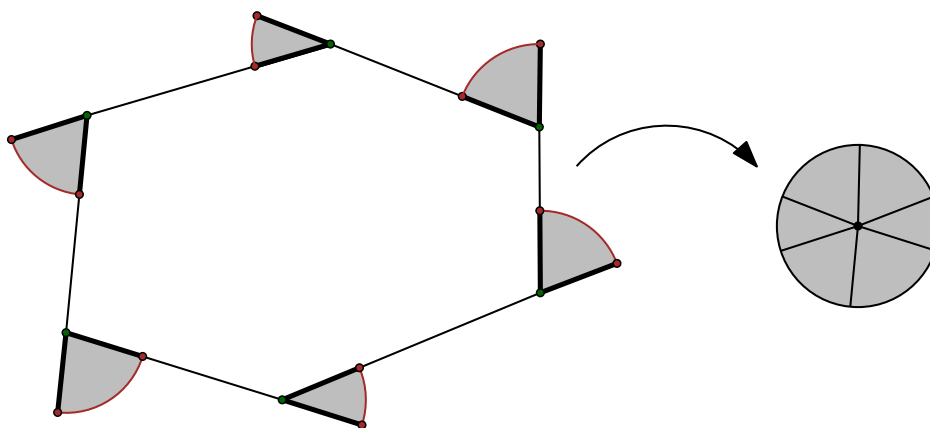


Fonte – O autor, 2020.

Quando a roda traseira passa pelo vértice do polígono é gerada uma região que tem a mesma medida do ângulo externo do polígono no referido vértice. Além disso, notemos que tais regiões são setores circulares de raio  $\ell$ , que podem ser justapostos num círculo de mesmo raio. Logo, a área entre os rastros será  $\pi\ell^2$ .

O que nos leva a concluir que em qualquer caso que a roda traseira percorra os lados de um polígono convexo, a área obtida será a soma das regiões dos ângulos externos de tal polígono, que serão dadas por setores circulares de raio  $\ell$ . Temos que essas regiões completam um ciclo de uma volta, cuja a área é dada por  $\pi\ell^2$ . Veja esse fato se repetindo no hexágono convexo da figura 90.

Figura 90 – Hexágono como rastro da roda traseira.



Fonte – O autor, 2020.

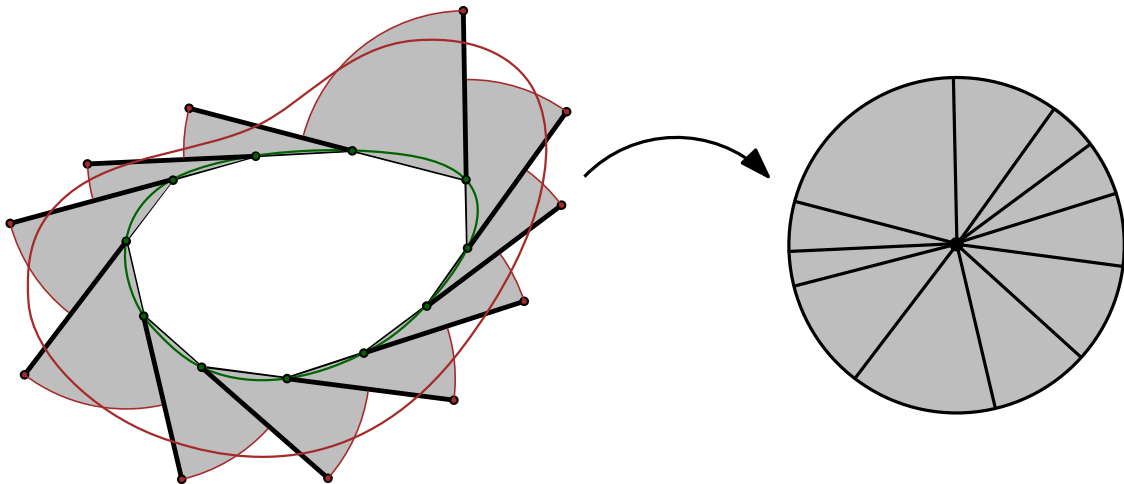
Tais construções geométricas são análogas às desenvolvidas para provar o teorema

de Mamikon para coroas ovais<sup>5</sup>, onde considerando a área da região definida por uma tangente de uma forma oval qualquer como o limite das áreas descritas por polígonos convexos inscritos cujo número de lados tende ao infinito e cujos comprimentos tendem a zero é enunciado do seguinte modo.

**Teorema 5.2. (Teorema de Mamikon para coroas ovais)** *A área de uma coroa oval obtida por uma tangente de comprimento  $\ell$  de uma forma oval qualquer é sempre igual a  $\pi\ell^2$ .*

Nesse caso, a tangente de comprimento  $\ell$  é a distância entre as rodas da bicicleta. Logo a área entre os pares de curvas, quando  $\gamma$  é uma curva generalizada simples, fechada e convexa como o da figura 88 será também  $\pi\ell^2$ . Veja essa representação na figura a seguir.

Figura 91 – Área entre o par de curvas, em que  $\gamma$  é simples, fechada e convexa.

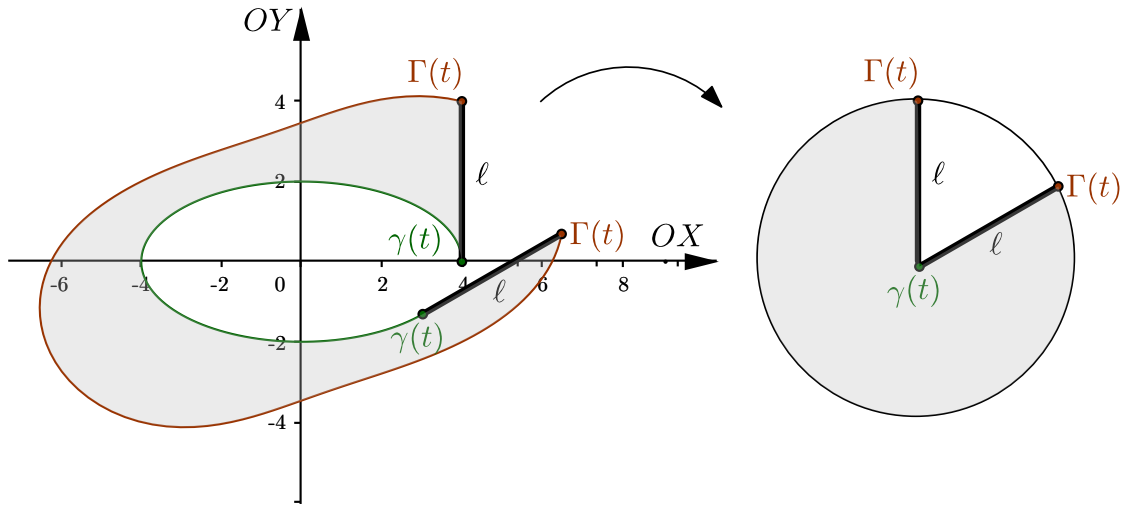


Fonte – O autor, 2020.

Como exemplo tomemos  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  a elipse dada por  $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ . Sendo  $a = 4$ ,  $b = 2$  e  $\ell = 4$  teremos a seguinte área entre a elipse e a curva  $\Gamma$ .

<sup>5</sup> Nesse teorema, o rastro da roda traseira e a região entre o par de curvas da bicicleta são denotadas, respectivamente, por *forma oval* e *coroa oval*.

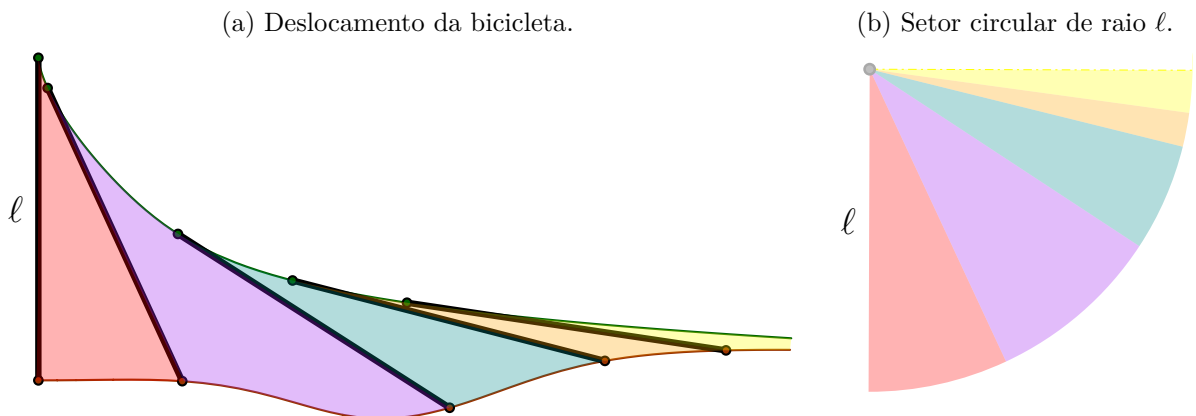
Figura 92 – Área entre o par de curvas, com  $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ .



Fonte – O autor, 2020.

Por fim, tratemos do caso geral em que  $\gamma$  é uma curva suave não necessariamente fechada, mas que não possua pontos de inflexão. Ou seja, vamos tratar de curvas obtidas quando o rastro da roda traseira não muda de concavidade. Sendo portanto  $\gamma$  a curva descrita pela roda traseira, a reunião de todos os segmentos tangentes de comprimento constante  $\ell$  define uma região que é cercada por  $\gamma$  e pelo rastro da roda dianteira  $\Gamma$ . Como  $\Gamma$  é construída através de  $\gamma$  e  $\ell$ , obviamente a forma dessa região também dependerá da curva  $\gamma$  e da medida  $\ell$  dos segmentos tangentes. Vamos nos referir a essa região por *região definida pela tangente*. Quando cada segmento de comprimento  $\ell$  é transladado paralelamente de modo que o ponto de tangência de todos seja trazido a um ponto comum, teremos a região definida como feixe de segmentos tangentes. Veja na figura 93.

Figura 93 – Área entre o par de curvas da bicicleta não necessariamente fechadas.



Fonte – O autor, 2019.

Observe que poderíamos ter trazido a outra extremidade de cada segmento a um

ponto comum, gerando um feixe de tangentes simétrico ao anterior. Como cada segmento tem comprimento constante, o feixe de tangentes pode se transformar isométricamente num setor circular cujo raio é o comprimento do segmento denotado por  $\ell$ , conforme figura 93b. Percebe-se que área descrita pela tangente sobre uma curva suave simples sem inflexões pode ser vista como uma parte de uma coroa oval, assim decorre imediatamente do teorema 5.2 o seguinte resultado.

**Teorema 5.3. (Teorema de Mamikon para tangentes de comprimento constante)** *A área descrita pela tangente sobre uma curva suave simples sem inflexões  $\gamma$  é igual à área do setor circular que forma o feixe de tangentes correspondente. Tal setor independe da forma da curva, dependendo apenas da variação angular total descrita pela tangente durante o percurso ao longo da curva. Ou seja, se as tangentes de comprimento  $\ell$  nos pontos inicial e final descrevem ângulo  $\theta$ , então a área da região definida por uma tangente é*

$$\frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi\ell^2 = \frac{1}{2}\theta\ell^2.$$

Doutro modo, conclui-se que a região descrita pela união dos segmentos de medida constante e tangentes a  $\gamma$ , desde que o percurso da roda traseira não cruze com o percurso da roda dianteira, tem área igual a um setor circular, dependendo apenas do comprimento  $\ell$  da bicicleta e da variação do ângulo  $\theta$  entre a posição inicial e a posição final em um determinado intervalo.

Veja que considerando a curva da roda traseira suave, fechada e convexa, de modo que seu rastro não cruze o rastro da roda dianteira, utilizando a fórmula do teorema 5.3 verificamos o resultado já visto anteriormente

$$\theta = 2\pi \implies \frac{1}{2}2\pi\ell^2 = \pi\ell^2.$$

Vejamos o exemplo a seguir.

**Exemplo 5.21.** *Seja o rastro traseiro determinado pela curva  $\gamma(t) = (t, \sin t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ . Vamos encontrar a área aproximada entre os rastros descritos no intervalo limitado pelos pontos de inflexão de  $\gamma$ . Logo, utilizando 3.12 temos que  $\gamma$  possui pontos de inflexão para os seguintes valores de  $t$ .*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{1} = \cos t \implies \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(\cos t)}{1} = -\sin t,$$

$$\text{assim } -\sin t = 0 \implies t = n\pi, \text{ com } n \in \mathbb{Z}.$$

E ainda, sendo  $n \in \mathbb{Z}$ , temos que  $-\sin t < 0$  quando  $t \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$  e  $-\sin t > 0$  quando  $t \in ((2n+1)\pi, (2n+2)\pi)$ . E portanto,  $\gamma$  possui concavidade para baixo nos intervalos  $(2n\pi, (2n+1)\pi)$  e concavidade para cima nos intervalos  $((2n+1)\pi, (2n+2)\pi)$ .

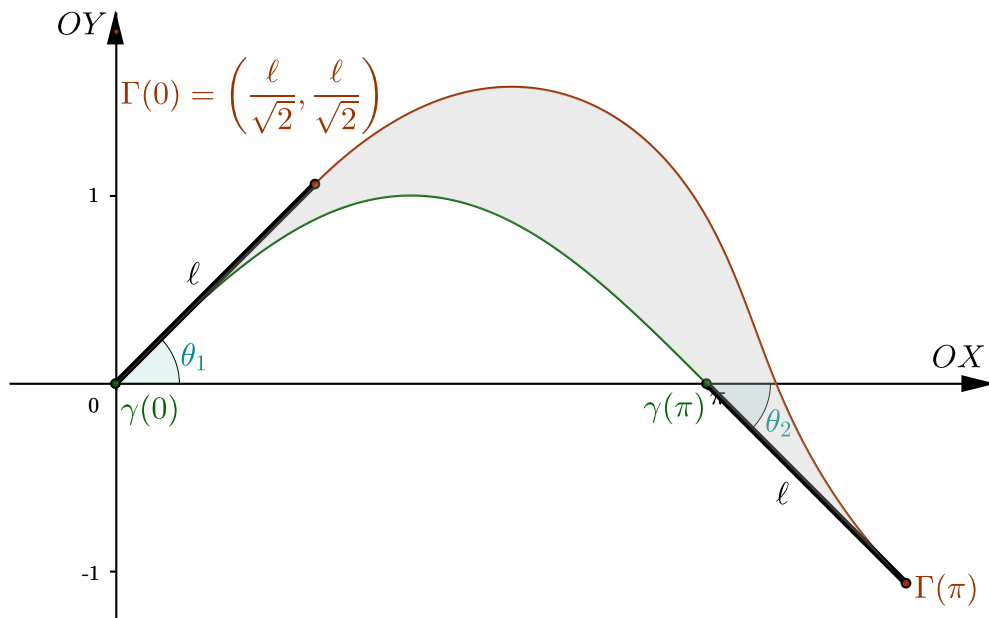
Cabe ressaltar que se  $\gamma$  é periódica com período  $x$ , então  $\Gamma$  também será. De fato, pois

$$\Gamma(t+x) = \gamma(t+x) + \ell \frac{\gamma'(t+x)}{\|\gamma'(t+x)\|} = \gamma(t) + \ell \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \Gamma(t)$$

Agora, escolhendo o intervalo em que  $n = 0$  e  $n = 1$ , ou seja  $t \in [0, \pi]$ , devemos determinar a variação do ângulo  $\theta$  que o segmento de medida  $\ell$  tangente a  $\gamma$  percorre nesse intervalo. Notemos na figura 94 que quando a tangente encontra-se na posição inicial,  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ , pois

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{\ell/\sqrt{2}}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Figura 94 – Obtendo a variação angular total.

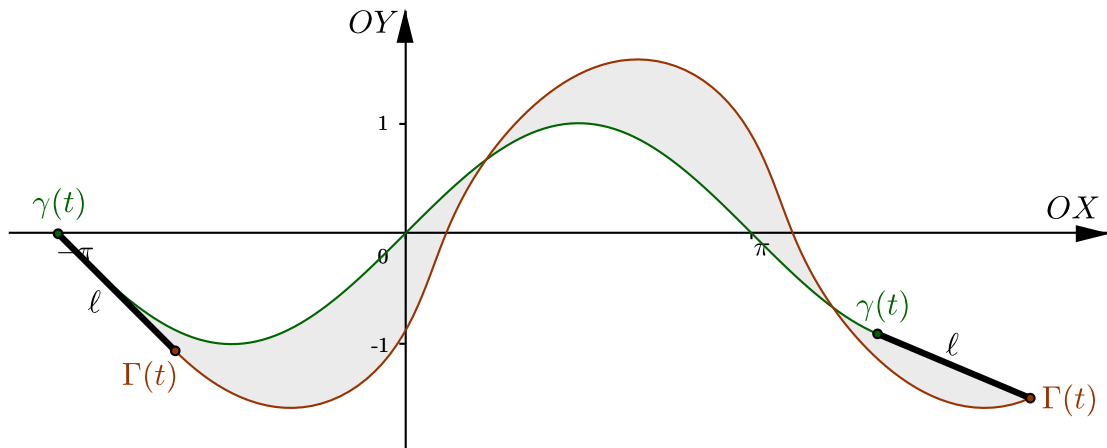


Fonte – O autor, 2020.

Logo, pela simetria da senoide, o ângulo  $\theta_2$  terá mesma medida. Observe que o segmento  $\ell$  percorrerá o ângulo de medida  $\theta_1$  no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , em que  $t = \frac{\pi}{2}$  é um máximo local, e portanto nesse instante o segmento  $\ell$  será paralelo ao eixo  $OX$ . A partir de então, o segmento percorrerá o ângulo  $\theta_2$ , e assim, a variação angular total descrita pela tangente nesse intervalo da curva será  $\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ . E assim, a área aproximada entre os rastros desse par de curvas no intervalo indicado será dada por  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \ell^2 = \frac{\pi \ell^2}{4}$  u.a.

Observe também que, nesse caso, mesmo que a curva  $\gamma$  possua pontos de inflexão, ou seja os rastros se cruzem, podemos tomar intervalos da mesma entre esses pontos de inflexão e calcular as áreas dessas regiões. E somando essas áreas, obtemos uma aproximação da área total entre os rastros após a bicicleta percorrer  $n$  regiões como a da figura 94, que é dada por  $\frac{n\pi\ell^2}{4}$ . Veja essas áreas na figura 95.

Figura 95 – Área entre o par de curvas sendo  $\gamma(t) = (t, \sin t)$ .



Fonte – O autor, 2019.

Veremos agora, que além de ser possível determinarmos a área entre os rastros obtidos, quando conhecemos o ângulo que o segmento de medida  $\ell$  varre enquanto percorre a curva  $\gamma$ . Podemos também, utilizar os recursos do GeoGebra a fim de obtermos o ângulo de varredura do segmento de medida  $\ell$ , e assim, calcularmos a área entre os rastros em casos mais gerais. Veja o exemplo a seguir.

**Exemplo 5.22.** *Vamos obter a área entre o par de curvas da bicicleta utilizando os recursos do GeoGebra, em que  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a parábola de equações  $\gamma(t) = (t, t^2)$ , no intervalo  $(-3, 3)$ . Como vimos no exemplo 5.5,  $\Gamma$  é dada por*

$$\Gamma(t) = (t, t^2) + \ell \frac{(1, 2t)}{\sqrt{1 + 4t^2}} = \left( t + \ell \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}, t^2 + \ell \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}} \right), t \in \mathbb{R}.$$

*Para realizar a construção desse par de curvas no intervalo indicado, de modo que não tenha atraso no deslocamento da bicicleta, devemos reparametrizar esse par de curvas através de funções periódicas como estudamos na subseção ???. Assim, vamos tomar a função seno definida por*

$$-1 < \sin t < 1 \implies -3 < 3 \sin t < 3 \implies h(t) = 3 \sin t.$$

*Note que  $h$  é estritamente crescente no intervalo  $h'(t) = 3 \cos t > 0 \implies \left( \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right)$ . Agora, fazendo a construção desses rastros seguindo os passos apresentados no apêndice D, através das reparametrizações*

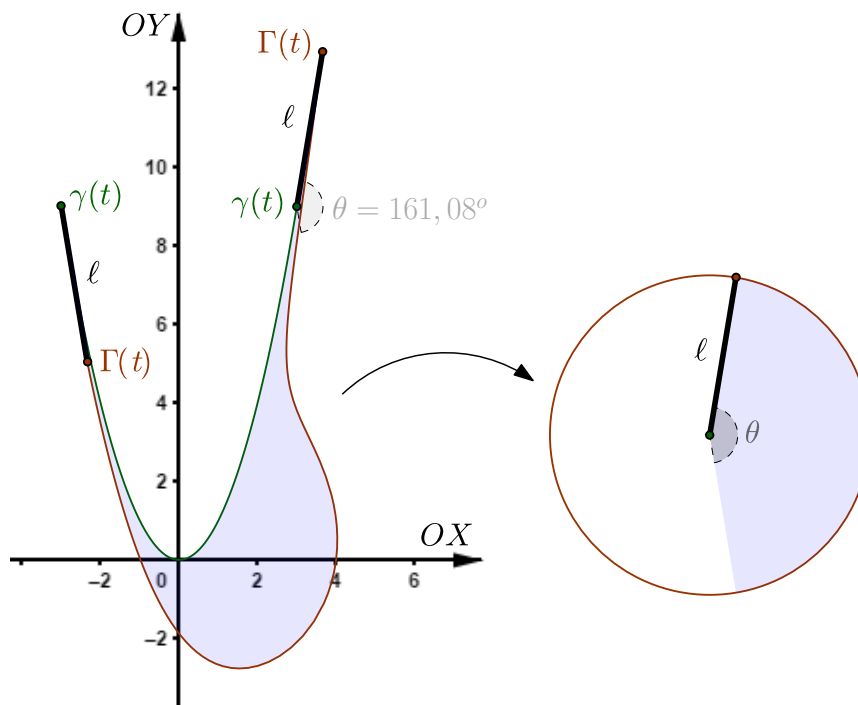
$$\bar{\gamma}(t) = (3 \sin t, 9 \sin^2 t) \quad e \quad \bar{\Gamma}(t) = \left( 3 \sin t + \ell \frac{1}{\sqrt{1 + 36 \sin^2 t}}, 9 \sin^2 t + \ell \frac{6 \sin t}{\sqrt{1 + 36 \sin^2 t}} \right).$$

*Temos que ao utilizar os recursos do GeoGebra, o segmento de medida  $\ell$  varre um ângulo de aproximadamente  $161,08^\circ$ . Assim, convertendo esse ângulo para radianos e calculando a área entre os rastros por meio do teorema 5.3, considerando  $\ell = 4$ , temos*

$$\frac{1}{2} \theta \ell^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,81 \cdot 4^2 \approx 22,49 \text{ u.a}$$

Veja na figura 96 que a área obtida é de fato a mesma de um setor circular de raio  $\ell = 4$  e ângulo central  $\theta = 161,08^\circ$ .

Figura 96 – Área entre os rastros obtida com os recursos do GeoGebra.



Fonte – O autor, 2020.

## 5.5 Atividades propostas para oficinas de matemática

Pensando no ensino da matemática e com o objetivo de desenvolver o espírito investigativo, apresentando a matemática de uma forma dinâmica, vamos, a seguir, propor duas atividades pra serem trabalhadas com alunos de diferentes níveis de formação.

Algumas construções que vimos no decorrer deste capítulo, podem ser utilizadas em oficinas de matemática. Detalharemos essas atividades e especificaremos em quais grupos de alunos elas podem ser aplicadas. Obviamente, fica a critério do leitor analisar o grupo de alunos que possui e utilizar a proposta mais adequada. Claro que, dependendo do caso, pode-se mesclar tópicos de ambas as atividades.

### 5.5.1 Oficina I: “Para onde foi a bicicleta?”

A utilização do problema da bicicleta como atividade lúdica, ou experimental, não requer muita formalidade matemática, ou seja, pode ser utilizada com qualquer grupo de alunos. Para isso, sugerimos os passos abaixo.

- Figurativamente, os alunos devem ser levados a cena de um crime em que deparados com os rastros das rodas da bicicleta do fugitivo, devem descobrir para qual direção

ele seguiu.

- Neste momento é bom deixar que os alunos pensem no problema. Para que eles tenham uma visualização melhor da situação, apresente duas curvas com cores distintas que representem os rastros das rodas da bicicleta. Provavelmente a priori, eles vão tentar determinar qual das rodas descreveu cada rastro.
- Após os alunos debaterem sobre o par de curvas e possíveis formas de determinar a direção que seguiu a bicicleta, torna-se necessário revelar algumas consequências que a estrutura geométrica da bicicleta causa nesse par de curvas.
  - Uma bicicleta pode ser colocada diante dos alunos ou até mesmo apresentar a projeção de uma no quadro, e então deve-se mostrá-los os principais elementos geométricos envolvidos nesse estudo. Que são os pontos onde as rodas tocam o solo, o segmento de medida constante que liga esses dois pontos, e também, o fato da roda traseira estar presa ao quadro da bicicleta.
  - Agora, conhecidos esses elementos da bicicleta, cabe analisar junto aos alunos os comportamentos dos rastros das rodas traseira e dianteira, enquanto a bicicleta se desloca. Ainda utilizando os rastros apresentados, mostre aos alunos que espera-se que o rastro da roda traseira sofra variações menores que o da roda dianteira. E ainda, devido a estrutura geométrica da bicicleta já mencionada, o rastro da roda traseira quase sempre intersectará o da roda dianteira.
  - Nesta ocasião, os alunos terão um visão mais clara da relação entre o par de curvas descritos no quadro, e assim, determinarão com facilidade o rastro da roda traseira. Mas e o principal questionamento do problema, que consiste em determinar a direção que a bicicleta se deslocou ?
- Assim, uma das formas de se fazer isso é utilizar os seguintes materiais: miniaturas de bicicletas, almofadas de carimbo com cores diferentes e cartolinas. Veja esses objetos na figura 97.

Figura 97 – Almofadas de carimbo, miniaturas de bicicleta e cartolinas.



Fonte – Imagens compiladas da internet, 2020.

- Passe as rodas de uma das miniaturas de bicicleta nas almofadas de carimbo, escolhendo cores distintas para cada roda. Após isso, desloque a bicicleta sobre uma cartolina, fazendo um caminho qualquer, por fim, cole essa cartolina no quadro.
  - Explique aos alunos que o fato da roda traseira ser fixada ao quadro da bicicleta, durante o deslocamento da mesma, o segmento de medida constante que liga os pontos que as rodas tocam o solo, em cada instante, está contido na reta tangente a curva descrita pela roda traseira. Isso faz com que ao traçando retas tangentes a curva descrita pela roda traseira, possamos determinar a direção que a bicicleta se deslocou.
  - Por fim, trace algumas retas tangentes a curva da roda traseira, e constate junto aos alunos que para um dos possíveis sentidos de deslocamento da bicicleta, sempre consegue-se obter o exato segmento que tem a mesma medida da distância entre os pontos das rodas da bicicleta que tocam o solo. E assim, está determinada a direção para qual a bicicleta se deslocou.
- Um questionamento interessante de se fazer para os alunos é, se sempre será possível, utilizando os conhecimentos adquiridos até então, determinar a direção para qual uma bicicleta se deslocou a partir de seus rastros.
    - Espera-se que os alunos concluam imediatamente, que quando a bicicleta se desloca perfeitamente sobre uma reta, é impossível determinar sua direção. Neste instante deve-se indagá-los se conseguem descobrir mais um caso.
    - Revele para a turma que outro caso em que não podemos determinar a direção que uma bicicleta seguiu a partir de seus rastros, é quando o par de curvas são círculos concêntricos.
    - Explore juntos aos alunos as propriedades do par de curvas dado por círculos concêntricos, como a relação entre os raios dos círculos e o segmento de medida constante tangente ao rastro da roda traseira. E também, mostre que a área da coroa circular, ou seja, da região compreendida entre os rastros é igual a de um círculo cujo raio possui mesma medida do segmento constante e tangente ao rastro da roda traseira.
  - Agora que os alunos conhecem as propriedades desse par de curvas, forme grupos em sala de aula distribuindo miniaturas de bicicletas, almofadas de carimbo e cartolinas para cada grupo. Peça que esses grupos criem rastros de bicicleta numa cartolina. Após isso, sugira que cada grupo analise os rastros feitos por outro grupo, de modo a determinar a direção que a bicicleta se deslocou, e com a utilização de régua, a medida do segmento constante que liga os pontos que as rodas tocam o solo.

Além da atividade acima feita em sala de aula, pode-se também realizar uma em um espaço maior, utilizando-se uma bicicleta para adulto ou adolescente. Basta passar tinta guache em suas rodas e percorrer uma cartolina mais comprida. No próprio lugar da experiência verificar a direção de deslocamento da bicicleta e sua dimensão, com uso de fita métrica.

### 5.5.2 Oficina II: “Uma análise dos rastros das rodas de uma bicicleta”

A análise dos rastros das rodas de uma bicicleta com finalidade de oficina matemática requer que o grupo de alunos, além de ter mínima afinidade com o GeoGebra, possua conhecimentos teóricos como: parametrização de curvas planas, propriedade de vetores, retas tangentes à curva e derivadas. A seguir são apresentados os passos para sua elaboração.

- Inicialmente deve-se apresentar aos alunos, de modo informal, a geometria da bicicleta e a forma como os rastros de suas rodas se relacionam. Explicando também que a atividade consiste em obter o rastro da roda dianteira, quando o rastro da roda traseira é previamente definido.
- Como o assunto não foi visto de maneira formal ainda, faça a construção animada da bicicleta no GeoGebra, em que é habilitado o rastro do ponto referente a roda dianteira, conforme apresentada no apêndice D. Para essa construção, utilize algumas curvas que os alunos já estudaram como a parábola, a elipse, a circunferência, dentre outras.
  - Mostre que para algumas curvas temos dois rastros dianteiros possíveis, que são quando a roda traseira percorre essas curvas nos dois sentidos. Isso pode ser feito através de uma reparametrização da curva da roda traseira, que faça com que ela seja descrita no sentido contrário ao anterior, conforme exemplo da parábola visto na subseção 5.1.1.
  - Cabe ressaltar que, devido a um erro do GeoGebra o ponto relativo ao rastro da roda traseira, sofre um atraso em relação a curva no momento que ela é descrita. Uma forma de desfazer esse atraso é realizar uma reparametrização da curva utilizando funções periódicas.
  - Como exemplo, no caso da parábola com equações  $\gamma(t) = (t, t^2)$ , para que ela seja descrita no intervalo  $[-3, 3]$  basta reparametrizá-la através da função  $h(t) = 3 \cos t$  no intervalo  $[\pi, 2\pi]$ .
- Após os alunos compreenderem melhor a relação entre esses rastros, através de visualizações e construções realizadas no GeoGebra, chegou a hora de formalizar a

análise desse par de curvas. Para isso, demonstre a expressão que fornece o rastro dianteiro a partir do traseiro, conforme vimos na seção 5.2.

- Agora que os alunos conhecem a expressão que fornece as equações paramétricas do rastro da roda dianteira a partir das equações paramétricas do rastro da roda traseira. Determine as equações dos rastros dianteiros para as curvas da roda traseira utilizadas anteriormente no GeoGebra.
- Utilizando as equações dos rastros das rodas traseira e dianteira, faça a animação da bicicleta no Goegebra, que também está representada no apêndice D. Nos casos em que os pontos das rodas sofrerem atraso em relação a sua respectiva curva, realize o procedimento de reparametrização por funções periódicas em ambas as curvas, visto anteriormente.
- Mostre aos alunos que o par de curvas de bicicleta dado por círculos concêntricos, isto é, quando a roda traseira percorre a circunferência, resulta num caso em que não é possível determinar a direção que a bicicleta seguiu. E que nesses casos, o par de curvas é denominado como ambíguo. É trivial que outro par de curvas ambíguo é dado por retas.
  - Aproveite para explorar matematicamente o par de curvas dado por círculos concêntricos, determinando a relação entre os raios dos círculos e a medida do segmento constante entre os pontos das rodas, que tocam o solo. E também, mostre uma outra alternativa de parametrização do círculo descrito pela roda dianteira, como vimos na subseção 5.3.3.
  - Ainda utilizando a reta e o círculo como rastros da roda traseira, aborde a distância percorrida pelas rodas. Novamente, é trivial que na reta ambas as rodas percorrem a mesma distância. Já no círculo, a roda dianteira percorre uma distância maior que da roda traseira. Essa análise pode ser feita também no GeoGebra, através do recurso que calcula o comprimento de uma curva ao passo que ela é descrita.
- Introduza a noção de área entre os rastros, utilizando o par de curvas dado por círculos concêntricos. Mostre que nesse caso, como também no da elipse, a área entre os rastros será a mesma de um círculo cujo raio mede a distância entre os pontos de contato entre as rodas e o solo. Como vimos na seção 5.4.
  - Aborde que também é possível, calcular a área entre os rastros para os casos em que o rastro da roda traseira não possua pontos de inflexão. O que resultará na área de um setor circular cujo ângulo central será o mesmo ângulo de varredura do segmento que tem por extremidades os pontos que tocam o solo de cada roda.

- Obviamente, mesmo que determinada curva possua pontos de inflexão, ela pode ser limitada a um intervalo que não mude a concavidade. Podendo enfim, ser determinada a área entre os rastros nesse intervalo, conforme o exemplo 5.21.
- Todos os casos acima podem ser construídos no GeoGebra, de modo que, a utilização de seus recursos possibilite a visualização dessas áreas através da habilitação do rastro do segmento que tem por extremidades os pontos de contato das rodas com o solo. E ainda, a análise de casos mais gerais, por meio dos recursos que limitam curvas a qualquer intervalo e calculam o ângulo de varredura de determinado segmento, como fizemos no exemplo 5.22.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o propósito de analisar o par de curvas geradas pelas rodas de uma bicicleta, procuramos apresentar ao longo do trabalho os principais tópicos sobre as curvas planas parametrizadas, utilizando-se de recursos gráficos e desenvolvendo cada tema detalhadamente. De modo a facilitar o entendimento, buscamos desenvolver exemplos em grande parte dos assuntos.

Trouxemos a abordagem de curvas importantes como a catenária, tractriz e também a de Bézier, esta última que é menos vista em trabalhos do tipo; mas que sendo tomada posteriormente como rastro traseiro do par de curvas de bicicleta, obtivemos a vantagem de poder alterar seu traço por meio de seus pontos de controle e assim mudar também a trajetória da roda dianteira.

Fizemos um estudo mais abrangente de construção dos gráficos das curvas dadas na forma paramétrica, onde fornecemos meios de verificação de seus comportamentos para determinados intervalos do parâmetro, tal como encontrar pontos de auto-interseção, intervalos de crescimento e decrescimento e também as tangentes verticais e horizontais.

De modo a fazer uma abordagem mais aprofundada das curvas planas, fizemos um estudo de alguns conceitos fundamentais da geometria diferencial. Introduzimos alguns exemplos e construímos gráficos no *software* GeoGebra para facilitar a compreensão do conteúdo. Tais conceitos também foram fundamentais para construir a abordagem do par de curvas gerados pelas rodas dianteira e traseira da bicicleta.

Ainda utilizando o GeoGebra, construímos a animação de uma bicicleta a partir da curva percorrida pela roda traseira, obtendo assim o trajeto da roda dianteira. As curvas que usamos para a roda traseira foram as que analisamos seus gráficos nos capítulos 2 e 3. Excetuando-se a tractriz, que além de determinarmos suas equações no capítulo 5, mostramos que de fato um dos possíveis rastros para a roda dianteira é uma reta.

Determinamos também que tanto a velocidade quanto a distância percorrida da roda dianteira são maiores ou iguais que a da roda traseira. Também, relacionamos as curvaturas dos rastros de modo a encontrar a curvatura da curva descrita pela roda dianteira através da traseira. Encontramos outras relações entre o ângulo determinado pelos vetores tangentes aos rastros e suas respectivas curvaturas num dado valor do parâmetro. Outros resultados importantes surgiram quando analisamos pares de curvas ambíguas e as áreas das regiões definidas entre os rastros das rodas.

Ao final do capítulo 5, elaboramos duas propostas de oficinas, uma mais experimental e outra de caráter mais investigativo. Ambas podem ser aplicadas para grupos de alunos no ensino médio. Selecionamos os conteúdos referentes ao estudo da bicicleta que

são mais adequados a alunos desse nível. Para a primeira oficina buscamos elaborar uma atividade lúdica, fugindo um pouco da formalidade de modo que seja de fato exequível. A Outra atividade elaborada foi a oficina II, que busca aprofundar o estudo do tema, e portanto, sendo necessário que o grupo de alunos tenha determinado conhecimento matemático, além de saber utilizar alguns recursos do GeoGebra.

Portanto, acreditamos que realizamos o proposto inicialmente, que era apresentar uma investigação matemática dos rastros descritos pelas rodas de uma bicicleta. Vimos que, na maioria dos casos, podemos determinar a direção que a bicicleta se desloca, apresentando uma solução geral para o problema que foi colocado diante do saudoso detetive Sherlock Holmes.

Este trabalho abriu um horizonte vasto de conteúdos que podem ser aprofundados nesse meio, como a verificação se uma bicicleta pode percorrer o mesmo caminho que um unicyclo, outros casos de cálculo da área entre os rastros e análises geométricas das evolutas e involutas desse par de curvas. Assim, este autor pretende seguir os estudos nesse ramo, buscando cada vez mais conhecimentos para pesquisas futuras.

## REFERÊNCIAS

- ALENCAR, H.; SANTOS, W. **Geometria diferencial das curvas planas**. 1. ed. Goiânia: XII Escola de Geometria Diferencial, UFG, 2002.
- ALVES, F. R. V. **A curva de Bézier e os polinômios de Berstein: aplicações com os softwares GeoGebra e o CAS Maple**. Alagoas: Universidade Federal de Alagoas-UFAL, 2014. Disponível em: <<https://im.ufal.br/evento/bsbm/download/minicurso/analise.pdf>>. Acesso em: 13 jun. 2019.
- BENDER, E. A. **Sherlock Holmes and the bicycle tracks**. California: University of California San Diego-UCSD, 2004. Disponível em: <<http://www.math.ucsd.edu/~ebender/87/>>. Acesso em: 26 Ago. 2019.
- CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. 608 p.
- DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2017. 373 p.
- DOYLE, A. C.; KLINGER, L. S. **A volta de Sherlock Holmes**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2011. v. 3.
- DUNBAR, S. R.; BOSMAN, R. J. C.; NOOIJ, S. **The track of a bicycle back tire**, Mathematics Magazine, v. 74, p. 273–287, out. 2001.
- FINN, D. L. **Which way did you say that bicycle went?**, Mathematics Magazine-MAA, v. 77, n. 5, p. 357–367, dez. 2004. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/3219200>>.
- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. Rio de Janeiro: Pearson, 2006.
- FRENSEL, K.; DELGADO, J. **Geometria diferencial I**. 2017. Disponível em: <<http://www.professores.uff.br/katiafrensel/2017/08/30/disciplina-geometria-diferencial-i/>>. Acesso em: 25 Jul. 2019.
- GOLDBERG, T. E. **Bicycle math**, Olivetti Club - Cornell University - Department of Mathematics, Ithaca, NY, mar. 2010. Disponível em: <<http://pi.math.cornell.edu/~goldberg/>>.
- HART, G. **Mathematical impressions: bicycle tracks**. New York: [s.n.], 2013. Disponível em: <<https://www.simonsfoundation.org/2013/04/16/mathematical-impressions-bicycle-tracks/>>. Acesso em: 10 set. 2019.
- KENDIG, K. **Never a dull moment: Hassler Whitney, mathematics pioneer**. State of Ohio: American Mathematical Society, 2018. v. 93. 385 p.
- KONHAUSER, J. D. E.; VELLEMAN, D. J.; WAGON, S. **Which way did the bicycle go? : and other intriguing mathematical mysteries**. [S.l.: s.n.], 1996.

LEVI, M.; TABACHNIKOV, S. **On bicycle tire tracks geometry, hatchet Planimeter, Menzin's conjecture, and oscillation of unicycle tracks**, *Experimental Mathematics - A K Peters, Ltd*, v. 18, n. 2, p. 173–186, 2009. Disponível em: <<https://projecteuclid.org:443/euclid.em/1259158427>>.

LODOVICI, S. D. B.; JUNIOR, E. N. **Uma apresentação do teorema de Mamikon**, *Revista Ciências Exatas e Naturais - RECEN, Paraná-PR*, v. 19, n. 2, p. 188–206, dez. 2017. Disponível em: <<https://revistas.unicentro.br/index.php/RECEN/issue/view/290>>.

MARTINS, R. M. **Tratriz e Catenária - modelos e métodos matemáticos**, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, p. 16, 2015. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~rmiranda/wordpress/wp-content/uploads/2015/12/Tratriz.pdf>>.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Folium of Descartes**. 1997. Disponível em: <<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Foliumd.html>>. Acesso em: 15 jul. 2019.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2.

\_\_\_\_\_. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1.

TABACHNIKOV, S. **Tire track geometry: variations on a theme**, *Israel Journal of Mathematics - Springer New York*, v. 151, p. 1–28, mai. 2006.

TANTON, J. **Global math project experiences**. Washington DC: G'Day Math, 2019. 1.8 - 1.9 p. Disponível em: <<https://gdaymath.com/courses/gmp/>>. Acesso em: 7 Set. 2019.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. v. 1.

VILCHES, M. A. **Contacto e curvas planas**, *Cadernos do IME - Série Matemática - UERJ*, v. 16, p. 55–68, 2004. Disponível em: <<https://www.e-publicacoes.uerj.br/index.php/cadmat/issue/view/818>>.

WEISSTEIN, E. W. **Witch of Agnesi**. 2005. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/WitchofAgnesi.html>>. Acesso em: 30 jun. 2019.

## APÊNDICES

**APÊNDICE A – OBTENÇÃO DO TRAÇO DE UMA CURVA  
UTILIZANDO NOÇÕES DE CÁLCULO**

$$\text{Construção do traço da curva } \mathcal{C}_1 : \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2} \\ y(t) = \frac{\sqrt{(2t+1)^3}}{3} \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

De modo a determinar seus pontos de interesse temos

$$x(t) = \frac{t^2}{2} = 0 \iff t = 0 \text{ e também}$$

$$y(t) = 0 \iff \frac{\sqrt{(2t+1)^3}}{3} = 0 \iff 2t+1 = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$$

Logo, obtemos os pontos

$$(x(0), y(0)) = \left( \frac{0^2}{2}, \frac{\sqrt{(2 \cdot 0 + 1)^3}}{3} \right) = \left( 0, \frac{1}{3} \right)$$

$$\left( x\left(-\frac{1}{2}\right), y\left(-\frac{1}{2}\right) \right) = \left( \frac{(-1/2)^2}{2}, \frac{\sqrt{(2 \cdot (-1/2) + 1)^3}}{3} \right) = \left( \frac{1}{8}, 0 \right).$$

Note que  $x(t) > 0$  e  $y(t) > 0$  no intervalo  $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , em que ambas as equações existem, assim, vamos verificar o seguinte limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{2}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(2t+1)^3}}{3} \right) = (+\infty, +\infty).$$

Derivando as equações para encontrar suas tangentes horizontais e verticais temos

$$\frac{d(x(t))}{dt} = \frac{2t}{2} = t \text{ e também}$$

$$\frac{d(y(t))}{dt} = \frac{3 \cdot (2t+1)^2 \cdot 2}{2 \cdot 3 \sqrt{(2t+1)^3}} = \sqrt{2t+1}.$$

Portanto, temos as seguintes tangentes.

- Tangentes horizontais

$$\frac{d(y(t))}{dt} = \sqrt{2t+1} = 0 \iff t = -\frac{1}{2}, \text{ com } \frac{d(x(-1/2))}{dt} = -\frac{1}{2} \neq 0;$$

Logo, temos uma tangente horizontal no ponto  $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ , que é a reta  $y = 0$ , e portanto coincidente com o eixo  $OX$ .

- Tangentes verticais

$$\frac{d(x(t))}{dt} = t = 0, \text{ com } \frac{d(y(0))}{dt} = \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 1 \neq 0;$$

Logo, temos uma tangente vertical no ponto  $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ , que é a reta  $x = 0$ , e portanto coincidente com o eixo  $OY$ .

Analisando o crescimento e decrescimento de  $x(t)$  e  $y(t)$  através das derivadas obtidas acima, temos

- Crescimento e decrescimento de  $x(t)$

$$\frac{d(x(t))}{dt} > 0 \iff t > 0, \text{ e portanto } \frac{d(x(t))}{dt} < 0 \iff -\frac{1}{2} < t < 0$$

Portanto,  $x(t)$  é crescente quanto  $t \in (0, +\infty)$  e decrescente quanto  $t \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ .

- Crescimento e decrescimento de  $y(t)$

Observe que  $\sqrt{2t + 1} > 0$  para qualquer  $t \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , logo  $y(t)$  é sempre crescente.

$$\text{Construção do traço da curva } \mathcal{C}_2 : \begin{cases} x(t) = e^t \sen t \\ y(t) = e^t \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

Dado que suas equações apresentam as funções periódicas seno e cosseno, temos que os eixos  $OX$  e  $OY$  serão intersectados quando  $t$  assume os valores

$$x(t) = e^t \sen t = 0 \iff \sen t = 0 \iff t = 2k\pi \text{ ou } t = \pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z};$$

$$y(t) = e^t \cos t = 0 \iff \cos t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Assim, temos que o eixo  $OY$  será intersectado nos pontos

$$(x(2k\pi), y(2k\pi)) = (0, e^{2k\pi}) \text{ e } (x(\pi + 2k\pi), y(\pi + 2k\pi)) = (0, -e^{\pi+2k\pi}), \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

e  $OX$  nos pontos

$$\begin{aligned} (x(\pi/2 + 2k\pi), y(\pi/2 + 2k\pi)) &= (e^{(\pi/2+2k\pi)}, 0) \text{ e} \\ (x(3\pi/2 + 2k\pi), y(3\pi/2 + 2k\pi)) &= (-e^{(3\pi/2+2k\pi)}, 0) \text{ com } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Verificando os sinais das equações enquanto  $t$  varia, notemos que  $e^t > 0$  para todo  $t \in \mathcal{R}$ . Assim, seus sinais dependem das funções seno e cosseno. Logo

$$x(t) = e^t \sen t > 0 \iff \sen t > 0 \iff 2k\pi < t < \pi(2k + 1) \text{ com } k \in \mathbb{Z}, \text{ e portanto}$$

$$x(t) = e^t \sen t < 0 \iff \sen t < 0 \iff \pi(2k + 1) < t < 2\pi(k + 1) \text{ com } k \in \mathbb{Z};$$

E analisando  $y(t)$

$$y(t) = e^t \cos t > 0 \iff \cos t > 0 \iff 2k\pi < t < \pi(2k + 1) \text{ com } k \in \mathbb{Z}, \text{ e portanto}$$

$$y(t) = e^t \sin t < 0 \iff \sin t < 0 \iff \pi(2k + 1) < t < 2\pi(k + 1) \text{ com } k \in \mathbb{Z};$$

Derivando as equações a fim de encontrar suas tangentes horizontais e verticais, temos

$$\frac{d(x(t))}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t), \text{ e também}$$

$$\frac{d(y(t))}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t).$$

- Tangentes horizontais

$$\frac{d(y(t))}{dt} = e^t(\cos t - \sin t) = 0 \iff (\cos t - \sin t) = 0 \iff \cos t = \sin t$$

$$\iff t = \frac{\pi}{4} + k\pi = \frac{\pi}{4}(4k + 1), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, temos tangentes horizontais nos pontos

$$(x(\pi/4 + k\pi), y(\pi/4 + k\pi)) = (e^{(\pi/4+k\pi)} \sin(\pi/4 + k\pi), e^{(\pi/4+k\pi)} \cos(\pi/4 + k\pi))$$

- Tangentes verticais

$$\frac{d(x(t))}{dt} = e^t(\sin t + \cos t) = 0 \iff (\sin t + \cos t) = 0 \iff \sin t = -\cos t$$

$$\iff t = \frac{3\pi}{4} + k\pi = \frac{\pi}{4}(4k + 3), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, temos tangentes verticais nos pontos

$$(x(3\pi/4 + k\pi), y(3\pi/4 + k\pi)) = (e^{(3\pi/4+k\pi)} \sin(3\pi/4 + k\pi), e^{(3\pi/4+k\pi)} \cos(3\pi/4 + k\pi))$$

E agora, utilizando as derivadas de  $x(t)$  e  $y(t)$  para encontrar seus intervalos de crescimento e decrescimento, temos

- Crescimento e decrescimento de  $x(t)$

$$\frac{d(x(t))}{dt} = e^t(\sin t + \cos t) > 0 \iff (\sin t + \cos t) > 0 \iff \sin t > -\cos t, \text{ e}$$

$$\frac{d(x(t))}{dt} = e^t(\sin t + \cos t) < 0 \iff (\sin t + \cos t) < 0 \iff \sin t < -\cos t$$

Assim, temos que  $x(t)$  é crescente nos intervalos:

$$\left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right), \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

E decrescente nos intervalos:

$$\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right) \cup \left(\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right), \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

- Crescimento e decrescimento de  $y(t)$

$$\frac{d(y(t))}{dt} = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) > 0 \iff (\cos t - \operatorname{sen} t) > 0 \iff \cos t > \operatorname{sen} t, \text{ e}$$

$$\frac{d(y(t))}{dt} = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) < 0 \iff (\cos t - \operatorname{sen} t) < 0 \iff \cos t < \operatorname{sen} t$$

Assim, temos que  $y(t)$  é crescente nos intervalos:

$$\left(2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right), \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

E decrescente nos intervalos:

$$\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right) \cup \left(\pi + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right), \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

**Construção do traço da curva  $\mathcal{C}_3$  :** 
$$\begin{cases} x(t) = rt - r \operatorname{sen} t \\ y(t) = r - r \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Sendo  $r > 0$ , temos os pontos de interesse

$$x(t) = rt - r \operatorname{sen} t = 0 \iff r(t - \operatorname{sen} t) = 0 \iff t - \operatorname{sen} t = 0 \iff \operatorname{sen} t = t \iff t = 0,$$

$$y(t) = r - r \cos t = 0 \iff r(1 - \cos t) = 0 \iff \cos t = 1 \iff t = 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,  $\mathcal{C}_3$  intersecta o eixo  $OY$  no ponto

$$t = 0 \iff (x(0), y(0)) = (r \cdot 0 - r \operatorname{sen} 0, r - r \cos 0) = (0, 0),$$

e intersepta o eixo  $OX$  nos pontos

$$t = 2k\pi \iff (x(2k\pi), y(2k\pi)) = (2kr\pi - r \operatorname{sen}(2k\pi), r - r \cos(2k\pi)) = (2kr\pi, 0).$$

Analisando os intervalos em que  $x(t)$  é positiva e negativa temos

$$x(t) = r(t - \operatorname{sen} t) > 0 \iff (t - \operatorname{sen} t) > 0 \iff t > \operatorname{sen} t \iff t > 0, \text{ logo}$$

$$x(t) = r(t - \operatorname{sen} t) < 0 \iff (t - \operatorname{sen} t) < 0 \iff t < \operatorname{sen} t \iff t < 0.$$

Em  $y(t)$  temos que

$$-1 < \cos t < 1 \iff 1 > -\cos t > -1 \iff 2 > 1 - \cos t > 0, \text{ e como } r > 0 \text{ obtemos}$$

$$2r > r - r \cos t > 0, \text{ e portanto } 0 < y(t) < 2r.$$

E agora, calculando os limites das equações com  $t$  indo para o infinito positivo e negativo, temos que como  $y(t)$  é limitada, entretanto oscila no intervalo  $[0, 2r]$ , seu limite

diverge. Já para  $x(t)$  obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} rt - r \operatorname{sen} t &= r \cdot \lim_{t \rightarrow \pm\infty} t - \operatorname{sen} t \\ &= r \cdot \lim_{t \rightarrow \pm\infty} t \left(1 - \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) \\ &= r \cdot \lim_{t \rightarrow \pm\infty} t \cdot \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) \\ &= r \cdot \pm\infty \cdot 1 = \pm\infty \end{aligned}$$

Derivando as equações, de modo a obter suas tangentes horizontais e verticais, encontramos

$$\frac{d(x(t))}{dt} = r - r \cos t \quad \text{e} \quad \frac{d(y(t))}{dt} = r \operatorname{sen} t.$$

E assim vamos ter

- Tangentes horizontais

$$\begin{aligned} \frac{d(y(t))}{dt} = r \operatorname{sen} t = 0 &\iff = 0 \iff t = 2k\pi \text{ ou } t = \pi + 2k\pi, \text{ mas temos que} \\ \frac{d(x(2k\pi))}{dt} = r - r \cos(2k\pi) = 0 &\text{ e } \frac{d(x(\pi + 2k\pi))}{dt} = r - r \cos(\pi + 2k\pi) = 2r \end{aligned}$$

Portanto, temos tangentes horizontais nos pontos

$$\begin{aligned} (x(\pi + 2k\pi), y(\pi + 2k\pi)) &= (r(\pi + 2k\pi) - r \operatorname{sen}(\pi + 2k\pi), r - r \cos(\pi + 2k\pi)) \\ &= ((\pi + 2k\pi), 2r), \text{ com } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- Tangentes verticais

$$\begin{aligned} \frac{d(x(t))}{dt} = r - r \cos t = 0 &\iff r \cos t = r \iff \cos t = 1 \iff t = 2k\pi, \text{ mas temos que} \\ \frac{d(y(2k\pi))}{dt} = r \operatorname{sen}(2k\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Logo, a curva não possui tangentes verticais.

Utilizando as derivadas acima, vamos analisar o crescimento e decréscimo de  $x(t)$  e  $y(t)$ . Logo

- Crescimento e decréscimo de  $x(t)$

Temos que  $\frac{d(x(t))}{dt} = r - r \cos t$ , em que  $r > 0$ ; e manipulando algebricamente a expressão  $-1 < \cos t < 1$ , obtemos

$$-1 < \cos t < 1 \iff 1 > -\cos t > -1 \iff 2 > 1 - \cos t > 0 \iff 0 < r - r \cos t < 2r$$

Portanto,  $\frac{d(x(t))}{dt} = r - r \cos t$  é não negativa, desse modo  $x(t)$  será sempre crescente.

- Crescimento e decrescimento de  $y(t)$

$$\frac{d(y(t))}{dt} = r \operatorname{sen} t > 0 \iff \operatorname{sen} t > 0 \iff 2k\pi < t < \pi + 2k\pi, \text{ e portanto}$$

$$\frac{d(y(t))}{dt} = r \operatorname{sen} t < 0 \iff \operatorname{sen} t < 0 \iff \pi + 2k\pi < t < 2\pi + 2k\pi.$$

E assim  $y(t)$  é crescente no intervalo  $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$  e decrescente no intervalo  $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Construção do traço da curva  $\mathcal{C}_4$  :** 
$$\begin{cases} x(t) = -\frac{t^3}{3} + t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

Vamos encontrar os pontos de interesse, fazendo

$$x(t) = -\frac{t^3}{3} + t = 0 \iff -t \left( \frac{t^2}{3} - 1 \right) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = \pm\sqrt{3},$$

e também

$$y(t) = t^2 - 1 = 0 \iff t = \pm 1.$$

Assim, os pontos de interseção com o eixo  $OX$  são

$$t = \pm 1 \iff (x(\pm 1), y(\pm 1)) = \left( -\frac{(\pm 1)^3}{3} \pm 1, (\pm 1)^2 - 1 \right) = \left( \mp \frac{1}{3} \pm 1, 0 \right) = \left( \pm \frac{2}{3}, 0 \right),$$

e os de interseção com o eixo  $OY$  são

$$t = 0 \iff (x(0), y(0)) = \left( -\frac{0^3}{3} + 0, 0^2 + 1 \right) = (0, 1) \text{ e}$$

$$t = \pm\sqrt{3} \iff (x(\pm\sqrt{3}), y(\pm\sqrt{3})) = \left( -\frac{(\pm\sqrt{3})^3}{3} \pm \sqrt{3}, (\pm\sqrt{3})^2 - 1 \right) = (0, 2).$$

Note que nos instantes  $t = -\sqrt{3}$  e  $t = \sqrt{3}$  a curva passa pelo mesmo ponto, desse modo, por 3.2 a curva  $\mathcal{C}_4$  possui uma auto-interseção em  $(0, 2)$ . De fato, pois

$$x(-\sqrt{3}) = 0 = x(\sqrt{3}) \text{ e } y(-\sqrt{3}) = 2 = y(\sqrt{3}).$$

Agora, verificando os intervalos em que as equações são positivas e negativas teremos

$$x(t) = -\frac{t^3}{3} + t > 0 \iff t \left( -\frac{t^2}{3} + 1 \right) > 0 \iff 0 < t < \sqrt{3} \text{ ou } t < -\sqrt{3}, \text{ portanto}$$

$$x(t) = -\frac{t^3}{3} + t < 0 \iff t \left( -\frac{t^2}{3} + 1 \right) < 0 \iff -\sqrt{3} < t < 0 \text{ ou } t > \sqrt{3}.$$

E para  $y(t)$  temos

$$y(t) = t^2 - 1 > 0 \iff t < -1 \text{ ou } t > 1, \text{ portanto}$$

$$y(t) = t^2 - 1 < 0 \iff -1 < t < 1.$$

Agora, verificando os comportamentos de  $x(t)$  e  $y(t)$  para  $t$  indo ao infinito positivo e negativo iremos obter

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{C}_4 = \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t^3}{3} + t, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 - 1 \right) = (-\infty, +\infty), \text{ e também}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{C}_4 = \left( \lim_{t \rightarrow -\infty} -\frac{t^3}{3} + t, \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 - 1 \right) = (+\infty, +\infty).$$

Derivando as equações de modo a obter as tangentes horizontais e verticais da curva encontramos

$$\frac{d(x(t))}{dt} = -t^2 + 1 \quad \text{e} \quad \frac{d(y(t))}{dt} = 2t.$$

E assim, vamos ter

- Tangentes horizontais

$$\frac{d(y(t))}{dt} = 2t = 0 \iff t = 0, \text{ com } \frac{d(x(0))}{dt} = 1 \neq 0,$$

e portanto temos uma reta tangente horizontal no ponto  $(x(0), y(0)) = (0, -1)$ ,

- Tangentes verticais

$$\frac{d(x(t))}{dt} = -t^2 + 1 = 0 \iff t = \pm 1, \text{ com } \frac{d(y(\pm 1))}{dt} = \pm 2 \neq 0;$$

e portanto temos retas tangentes verticais nos pontos  $(x(\pm 1), y(\pm 1)) = \left(\pm \frac{2}{3}, 0\right)$ .

Utilizando as derivadas acima, vamos encontrar os intervalos de crescimento e decrescimento de  $x(t)$  e  $y(t)$ .

- Crescimento e decrescimento de  $x(t)$

$$\frac{d(x(t))}{dt} = -t^2 + 1 > 0 \iff -1 < t < 1, \text{ e portanto}$$

$$\frac{d(x(t))}{dt} = -t^2 + 1 < 0 \iff t < -1 \text{ ou } t > 1.$$

Desse modo,  $x(t)$  é crescente quando  $t \in (-1, 1)$  e decrescente quando  $t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

- Crescimento e decrescimento de  $y(t)$

$$\frac{d(y(t))}{dt} = 2t > 0 \iff t > 0, \text{ e portanto } \frac{d(y(t))}{dt} = 2t < 0 \iff t < 0.$$

Assim,  $y(t)$  é crescente quando  $t \in (0, +\infty)$  e decrescente quando  $t \in (-\infty, 0)$ .

$$\text{Construção do traço da curva } \mathcal{C}_5 : \begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = t^3 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Note que verificando se  $x(t)$  se anula obtemos

$$x(t) = t^2 + 1 = 0 \iff t \notin \mathbb{R},$$

logo a curva não intercepta o eixo  $OY$ . Já para  $y(t)$  encontramos

$$y(t) = t^3 + 2t = 0 \iff t(t^2 + 2) = 0 \iff t = 0,$$

assim o eixo  $OX$  é interceptado no ponto

$$t = 0 \iff (x(0), y(0)) = (0^2 + 1, 0^3 + 2 \cdot 0) = (1, 0).$$

Agora, analisando os intervalos em que as equações são positivas e negativas temos que  $x(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . E para  $y(t)$  temos

$$y(t) = t(t^2 + 2) > 0 \iff t > 0, \text{ e portanto } y(t) = t(t^2 + 2) < 0 \iff t < 0.$$

Vamos verificar como  $x(t)$  e  $y(t)$  se comportam quando  $t$  varia para o infinito positivo e negativo fazendo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{C}_5 &= \left( \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 + 1, \lim_{t \rightarrow -\infty} t^3 + 2t \right) = (+\infty, -\infty), \text{ e também} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{C}_5 &= \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 + 1, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 + 2t \right) = (+\infty, +\infty). \end{aligned}$$

Derivando  $x(t)$  e  $y(t)$ , de modo a obter as tangentes horizontais e verticais de  $\mathcal{C}_5$ , teremos

$$\frac{d(x(t))}{dt} = 2t \quad \text{e} \quad \frac{d(y(t))}{dt} = 3t^2 + 2.$$

E portanto vamos ter;

- Tangentes horizontais

$$\frac{d(y(t))}{dt} = 3t^2 + 2 = 0 \iff t \notin \mathbb{R},$$

logo a curva não possui tangentes horizontais.

- Tangentes verticais

$$\frac{d(x(t))}{dt} = 2t = 0 \iff t = 0, \text{ com } \frac{d(y(0))}{dt} = 2 \neq 0,$$

desse modo, a curva possui tangente vertical no ponto  $t = 0 \iff (x(0), y(0)) = (1, 0)$ .

Utilizando as derivadas acima a fim de encontrar os intervalos de crescimento e decréscimo das equações, obtemos

- Crescimento e decrescimento de  $x(t)$

$$\frac{d(x(t))}{dt} = 2t > 0 \iff t > 0, \text{ e portanto } \frac{d(x(t))}{dt} = 2t < 0 \iff t < 0,$$

logo  $x(t)$  é crescente no intervalo  $(0, +\infty)$  e decrescente em  $(-\infty, 0)$ .

- Crescimento e decrescimento de  $y(t)$

$$\frac{d(y(t))}{dt} = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R},$$

portanto  $y(t)$  é sempre crescente.

## APÊNDICE B – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA CURVATURA

Consideremos uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com curvatura  $k(s)$  para cada  $s \in I$ .

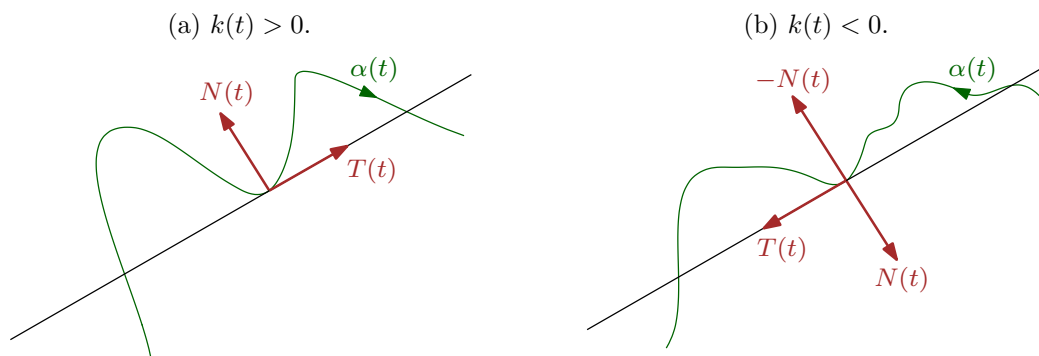
- **Sobre o sinal da curvatura:**

Quando  $k(t_0) > 0$ , ocorre que, para todo  $t$  suficientemente próximo de  $t_0$ , a curva  $\alpha$  estará no semiplano determinado pela reta tangente à  $\alpha$  em  $\alpha(t_0)$  para o qual aponta o vetor  $N(t_0)$ , conforme figura 98a. O que pode ser verificado através da função

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N(t_0) \rangle,$$

que é maior ou igual a zero, para valores de  $t$  próximos de  $t_0$ . De fato, pois  $f'(t_0) = 0$  e utilizando as fórmulas de Frenet obtemos  $f''(t_0) = k(t_0) > 0$ . Assim,  $f$  possui mínimo relativo estrito em  $t_0$ , e como  $f(t_0) = 0$  conclui-se a prova. Note que de modo análogo, sendo  $k(t_0) < 0$  obtemos que  $f$  possui máximo relativo estrito em  $t_0$ . Logo, dessa vez, a curva  $\alpha(t)$  pertence ao semiplano determinado pela reta tangente à  $\alpha$  em  $t_0$  para o qual aponta o vetor  $-N(t_0)$  de acordo com a figura 98b.

Figura 98 – Análise do sinal da curvatura.



Fonte – O autor, 2019.

- **Sobre o valor da curvatura:**

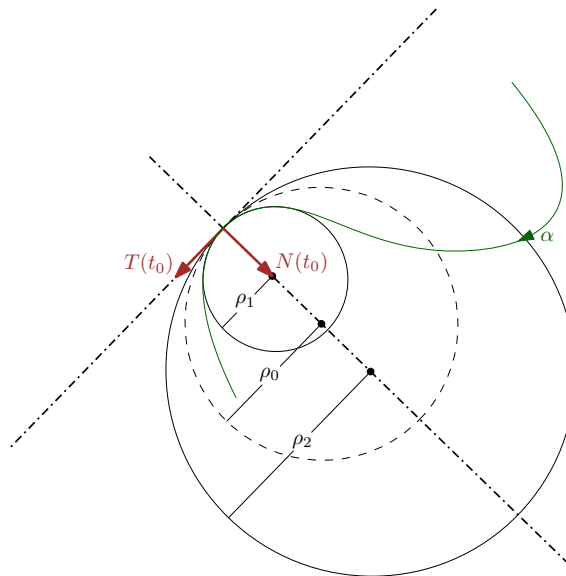
Para tratarmos do valor de  $k$ , supomos  $k(t_0) > 0$  e sejam  $P_\rho = \alpha(t_0) + \rho N(t_0)$ , com  $\rho > 0$ , e  $\mathcal{C}_\rho$  o círculo de centro em  $P_\rho$  e raio  $\rho$ . Assim, para valores suficientemente pequenos de  $t$ , quando  $\rho < \frac{1}{k(t_0)}$  os pontos  $\alpha(t)$  estarão no interior de  $\mathcal{C}_\rho$ . E no caso em que  $\rho > \frac{1}{k(t_0)}$  os pontos  $\alpha(t)$  vão estar no exterior de  $\mathcal{C}_\rho$ . Veja uma representação desse fato na figura 99.

Podemos verificar isso utilizando da função  $g$  dada por

$$g(t) = \|\alpha(t) - P_\rho\|^2 - \rho^2,$$

em que através das fórmulas de Frenet obtemos  $g(t_0) = g'(t_0) = 0$  e  $g''(t_0) = -k(t_0) + 1$ . E portanto, se  $\rho < \frac{1}{k(t_0)}$ , então  $g$  possui um máximo estrito em  $t_0$  e, se  $\rho > \frac{1}{k(t_0)}$ , então  $g$  possui mínimo estrito em  $t_0$ , o que fecha a verificação. De modo geral, nada podemos afirmar se  $\rho = \frac{1}{k(t_0)}$ .

Figura 99 –  $\rho_0 = \frac{1}{k(t_0)}$ ,  $0 < \rho_1 < \rho_0 < \rho_2$ .



Fonte – O autor, 2019.

Conforme vimos ao longo do trabalho, quando  $k(t_0) > 0$ , definimos o *raio de curvatura* de  $\alpha$  em  $t_0$  por  $\rho_0 = \frac{1}{k(t_0)}$ . E assim, o ponto  $P_{\rho_0} = \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}N(t_0)$  será o *centro de curvatura* ou *ponto focal* de  $\alpha$  em  $t_0$  e o círculo  $\mathcal{C}_{\rho_0}$  será o *círculo osculador* de  $\alpha$  em  $t_0$ . Notemos ainda que,  $\mathcal{C}_{\rho_0}$  é tangente à curva  $\alpha$  no ponto  $\alpha(t_0)$  e tem a mesma curvatura que  $\alpha$  nesse ponto.

## APÊNDICE C – FORMA CANÔNICA LOCAL DAS CURVAS PLANAS

Sabemos que a curvatura é uma medida que revela o quanto uma curva difere da reta tangente para na vizinhança de determinado ponto. Isso pode ser verificado através da forma canônica local da referida curva no ponto em questão. Logo, seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Tomando a aproximação pelo polinômio de Taylor de ambas as funções coordenadas de  $\alpha$ , teremos

$$\begin{cases} x(s) = x(s_0) + (s - s_0)x'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}x''(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{3!}x'''(s_0) + r_1(s), \\ y(s) = y(s_0) + (s - s_0)y'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}y''(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{3!}y'''(s_0) + r_2(s). \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

E assim, utilizando as equações de Frenet obtemos

$$\begin{aligned} (x'''(s_0), y'''(s_0)) &= \alpha'''(s_0) = T''(s_0) = (k(s)N(s))'|_{s=s_0} \\ &= k'(s_0)N(s_0) + k(s_0)N'(s_0) \\ &= k'(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Logo, substituindo C.2 em C.2 encontramos

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha(s_0) + (s - s_0)T(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}k(s_0)N(s_0) \\ &+ \frac{(s - s_0)^3}{3!}[k'(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0)] + R(s), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

onde  $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\|R(s_0)\|}{(s - s_0)^3} = 0$ . Note que pela equação C.3 o valor  $k(s_0)$  representa o quanto  $\alpha(s)$  difere da reta tangente à curva  $\alpha$  em  $s_0$  para pontos próximos de  $\alpha(s_0)$ , através do fator

$$\frac{(s - s_0)^2}{2!}k(s_0)N(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{3!}[k'(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0)] + R.$$

Por fim, escolhendo um sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  dado por  $\alpha(s_0) = (0, 0)$  com base canônica  $\{T(s_0), N(s_0)\}$  tal que  $T(s_0) = (1, 0)$  e  $N(s_0) = (0, 1)$ . Se em relação a este referencial a curva  $\alpha$  é descrita por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , então utilizando a equação C.3 obtemos

$$\begin{cases} x(s) = (s - s_0) - k^2(s_0)\frac{(s - s_0)^3}{3!} + R_1(s) \\ y(s) = k(s_0)\frac{(s - s_0)^2}{2!} + k'(s_0)\frac{(s - s_0)^3}{3!} + R_2(s). \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

A equação C.4 é denominada a *forma canônica local* de  $\alpha$  e representa o comportamento de qualquer curva regular na vizinhança de um ponto  $\alpha(s_0)$ . No caso em que  $k(s_0) \neq 0$ , ela nos diz que o traço de  $\alpha$  fica de um lado da reta tangente à  $\alpha$  em  $s_0$ .

## APÊNDICE D – CONSTRUÇÃO DOS RASTROS DE BICICLETA NO GEOGEBRA

No capítulo 5 fizemos um estudo do par de curvas de bicicleta quando é conhecido o trajeto da roda traseira, obtendo propriedades diversas e os relacionando. Inicialmente como não conhecíamos ainda a matemática do rastro dianteiro, construímos uma animação de uma bicicleta no GeoGebra ativando o rastro do ponto referente a roda dianteira, e assim, podemos ver alguns exemplos. Após conhecida a expressão que fornece a curva da roda dianteira, conseguimos construir a bicicleta animada com rastro dianteiro contínuo. A seguir explicaremos esse processo de construção, de modo que uma pessoa que tenha médio conhecimento do programa consiga desenvolver.

### *Construção com o rastro do ponto referente à roda dianteira habilitado*

- Criar um *controle deslizante* para o parâmetro designado  $t$ , definindo o intervalo  $[a, b]$  em que se deseja que as curvas sejam representadas.
- Esboçar o traço da curva que será o rastro da roda traseira, utilizando a seguinte função na *caixa de entrada* do GeoGebra.

$$\text{Curva}(\langle \text{Expressão} \rangle, \langle \text{Expressão} \rangle, \langle \text{Variável} \rangle, \\ \langle \text{Valor Inicial} \rangle, \langle \text{Valor Final} \rangle)$$

Com as funções coordenadas dependendo da variável  $s$  e valores inicial e final sendo  $a$  e  $t$ , respectivamente.

Nesse momento, ativando o controle deslizante  $t$ , a curva da roda traseira será descrita de modo animado, de acordo com a variação de  $t$ .

- Criar o ponto que representará a roda traseira da bicicleta, inserindo a seguinte função na *caixa de entrada*.

$$\text{Ponto}(\langle \text{Objeto} \rangle, \langle \text{Parâmetro} \rangle)$$

Em que o objeto será a curva traseira determinada anteriormente e  $t$  o parâmetro.

- Criar um novo *controle deslizante* que será a medida da distância entre as rodas dianteira e traseira denominado  $L$ , obviamente com variação positiva.
- Construir um círculo com centro no ponto que representa a roda traseira e raio  $L$  utilizando a função

$$\text{Círculo}(\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Raio} \rangle)$$

- Traçar a reta tangente a curva traseira no ponto que à descreve e que também é centro do círculo construído no passo anterior, inserindo a seguinte função na *caixa de entrada*.

$$\text{Tangente}(\langle \text{Ponto da Curva} \rangle, \langle \text{Curva} \rangle)$$

- Determinar os pontos de interseção entre a reta tangente e o círculo utilizando a função

$$\text{Interseção}(\langle \text{Objeto} \rangle, \langle \text{Objeto} \rangle)$$

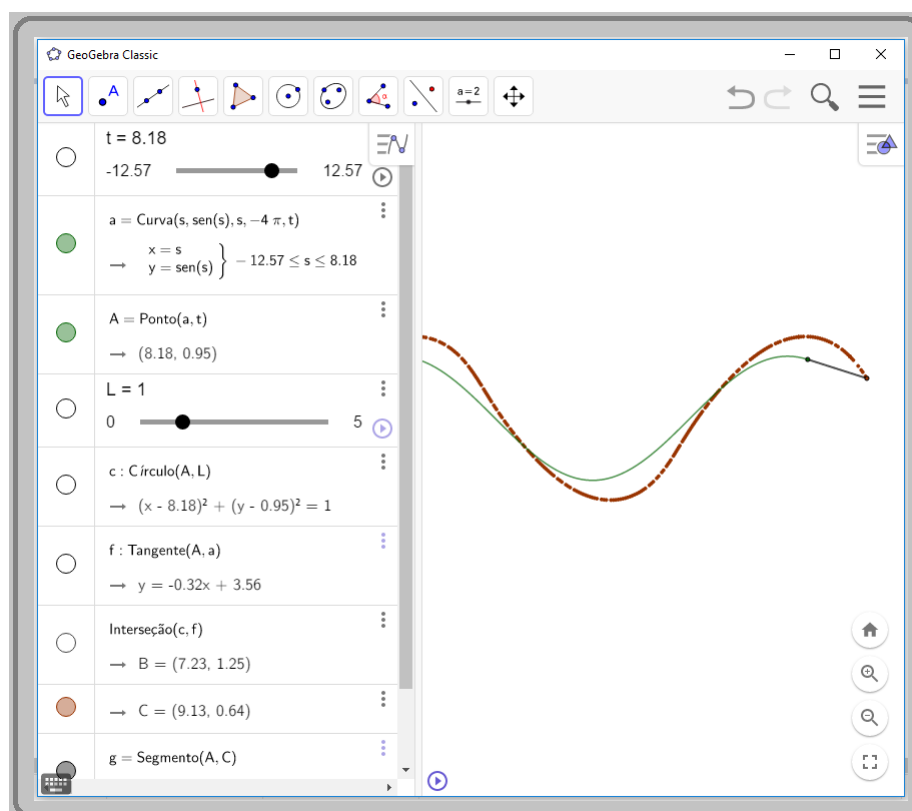
- Traçar o segmento entre o ponto de interseção, observando o sentido em que a roda traseira é descrita, e o ponto que representa a roda traseira que também é centro do círculo; inserindo na *caixa de entrada* a seguinte função.

$$\text{Segmento}(\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Ponto} \rangle)$$

Note que esse segmento será o raio do círculo, e portanto terá medida  $L$ .

- Agora, basta ocultar os elementos que não utilizaremos mais como a reta tangente, o outro ponto de interseção obtido e o círculo. E por fim, habilitar o rastro do ponto que representa a roda dianteira. Ativando o controle deslizante  $t$  a bicicleta se deslocará e variando a medida do controle deslizante  $L$  a distância entre as rodas será alterada. Veja a realização desse procedimento na figura abaixo com  $\gamma(t) = (t, \text{sen } t)$ .

Figura 100 – Construção habilitando o rastro do ponto.



Fonte – O autor, 2019.

***Construção conhecendo a expressão matemática para a roda dianteira.***

Quando se conhece a expressão matemática para a roda dianteira, o processo consiste em:

- Criar um *controle deslizante* para o parâmetro designado  $t$ , definindo o intervalo  $[a, b]$  em que se deseja que as curvas sejam representadas.
- Esboçar o traço da curva que será o rastro da roda traseira, utilizando a seguinte função na *caixa de entrada* do GeoGebra.

$$\text{Curva}(\langle \text{Expressão} \rangle, \langle \text{Expressão} \rangle, \langle \text{Variável} \rangle, \\ \langle \text{Valor Inicial} \rangle, \langle \text{Valor Final} \rangle)$$

Com as funções coordenadas dependendo da variável  $s$  e valores inicial e final sendo  $a$  e  $t$ , respectivamente.

- Criar o ponto que representará a roda traseira da bicicleta, inserindo a seguinte função na *caixa de entrada*.

$$\text{Ponto}(\langle \text{Objeto} \rangle, \langle \text{Parâmetro} \rangle)$$

Em que o objeto será a curva traseira determinada anteriormente e  $t$  o parâmetro.

- Criar um novo *controle deslizante* que será a medida da distância entre as rodas dianteira e traseira denominado  $L$ , obviamente com variação positiva.
- Esboçar o traço da curva que será o rastro da roda dianteira, utilizando a seguinte função na *caixa de entrada* do GeoGebra.

$$\text{Curva}(\langle \text{Expressão} \rangle, \langle \text{Expressão} \rangle, \langle \text{Variável} \rangle, \\ \langle \text{Valor Inicial} \rangle, \langle \text{Valor Final} \rangle)$$

Com as funções coordenadas dependendo da variável  $s$  e valores inicial e final sendo  $a$  e  $t$ , respectivamente.

- Criar o ponto que representará a roda dianteira da bicicleta, inserindo a seguinte função na *caixa de entrada*.

$$\text{Ponto}(\langle \text{Objeto} \rangle, \langle \text{Parâmetro} \rangle)$$

Em que o objeto será a curva dianteira determinada anteriormente e  $t$  o parâmetro.

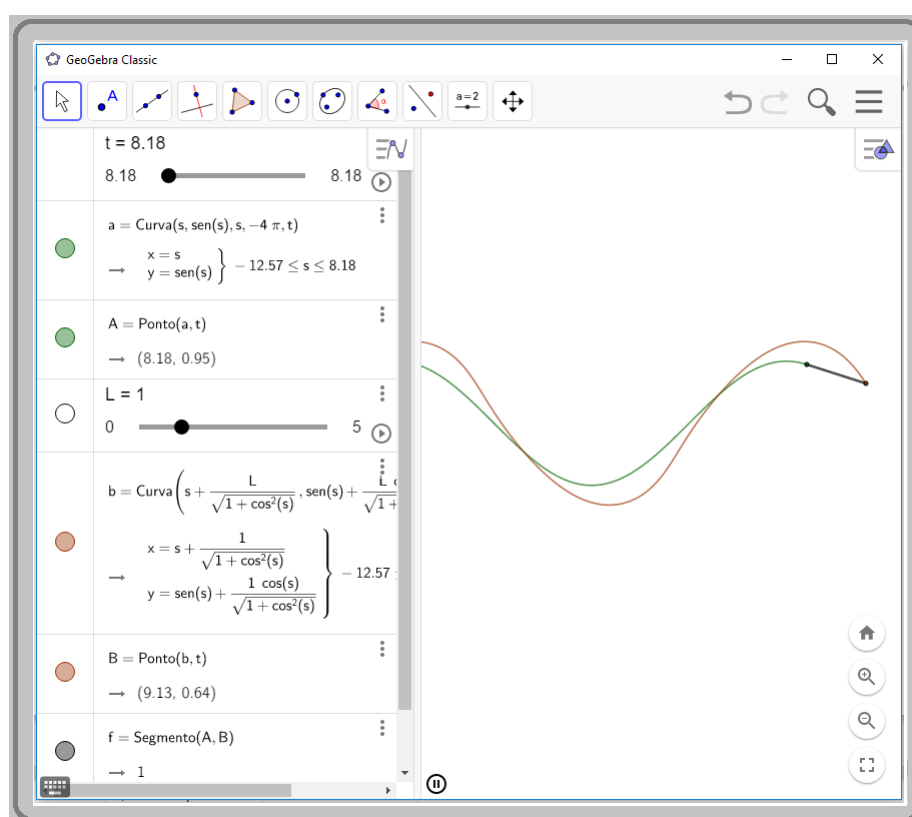
- Traçar o segmento com extremidades nos pontos que representam as rodas dianteira e traseira, utilizando na caixa de entrada a função.

$$\text{Segmento}(\langle \text{Ponto} \rangle, \langle \text{Ponto} \rangle)$$

Observe que a distância entre esses pontos terá a medida  $L$ .

Ativando o controle deslizante  $t$  a bicicleta se deslocará descrevendo seus rastros, conforme figura abaixo com  $\gamma(t) = (t, \text{sen } t)$ .

Figura 101 – Construção conhecendo a expressão matemática da roda dianteira.



Fonte – O autor, 2019.