

COLÉGIO PEDRO II

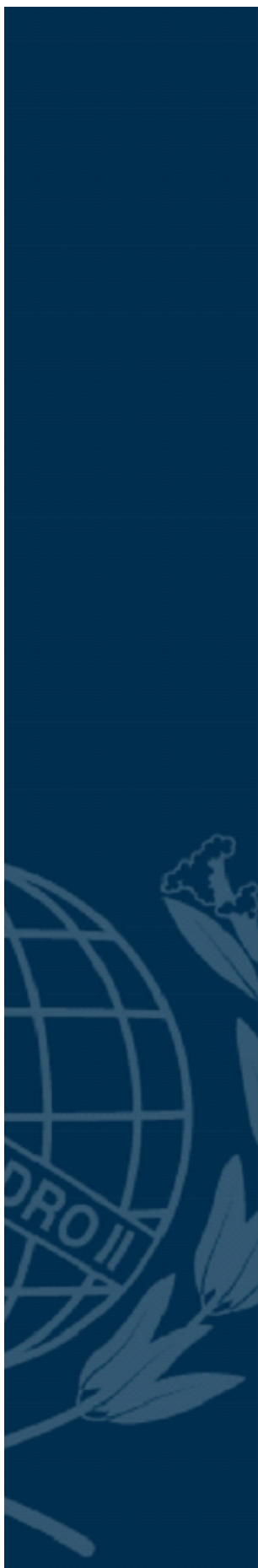
Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Eduardo Moreira Victoriano

Noções de Economia e
Direito Tributário como Temas Transversais no Ensino da Matemática

Rio de Janeiro

2021



Eduardo Moreira Victoriano

Noções de Economia e Direito Tributário como Temas Transversais no Ensino da Matemática

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Diego de Souza Nicodemos

Rio de Janeiro

2021

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

V845 Victoriano, Eduardo Moreira
Noções de Economia e Direito Tributário como Temas Transversais
no Ensino da Matemática / Eduardo Moreira Victoriano - Rio de Janeiro,
2021.

118 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa,
Extensão e Cultura.

Orientador: Diego de Souza Nicodemos.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática). 3.
Economia. 4. Direito tributário. I. Nicodemos, Diego de Souza. II.
Colégio Pedro II. III Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Eduardo Moreira Victoriano

Noções de Economia e Direito Tributário como Temas Transversais no Ensino da Matemática

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ___/___/___.

Banca Examinadora:

Dr. Diego de Souza Nicodemos
Colégio Pedro II - PROFMAT

Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Dr. Ulisses Pessôa dos Santos
Centro Universitário Augusto Motta

Dr. Daniel Felipe Neves Martins
Colégio Pedro II - PROFMAT

Dr. Ivail Muniz Junior
Colégio Pedro II - PROFMAT

Rio de Janeiro
2021

Esta pesquisa é dedicada a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a sua conclusão: família, alunos, amigos e professores.

AGRADECIMENTOS

Já dizia Sir Isaac Newton (1642 - 1727): “Se enxerguei mais longe é porque me apoiei em ombros de gigantes”. E esses gigantes de minha trajetória foram muitos, mas abaixo agradecerei a alguns deles:

Primeiramente tenho que agradecer aos meus pais; minha mãe Maria Angélica Moreira Victoriano e meu pai Roberto Ricardo Braz Victoriano. Sem vocês eu não seria nada. Vocês foram, e ainda são, meu refúgio e meu porto seguro. Também tenho que agradecer a minha filha, apesar de ela ainda não poder ler esse texto, pelas horas que tive de me afastar para poder estudar algo ou ter aulas. Também tenho que agradecer pela força que ela me foi durante esse curso e que ela me é em diversos momentos de minha vida. Obrigado também a minha irmã, Thays Moreira Victoriano, por ser minha amiga e companheira em diversas horas difíceis.

Professor Pedro da S. Coelho, agradeço ao senhor, e em sua pessoa, todos aqueles que me deram aula de Matemática nos ensinos médio e fundamental, por ter me mostrado os primeiros caminhos da “Rainha das Ciências”. Obrigado por todo carinho e dedicação que sem dúvida foram excepcionais nessa época, já que não fui um bom aluno durante meus anos nos cursos básicos.

Professor Doutor Nei Rocha da UFRJ, muito obrigado pelo excelente curso de probabilidade (o melhor que tive na graduação, junto com o cálculo lecionado pela grande professora Doutora Maria Darci). E em sua pessoa também agradeço a todos os professores que me deram aula nesse meu primeiro ciclo do ensino superior. Agradeço demais por terem mostrado que a UFRJ é mais do que uma instituição de ensino, ela é nossa casa.

Agradeço também aos professores do programa PROFMAT Cp2; professora mestra Tânia Maria Boffoni Simões de Faria, professor doutor Ivail Muniz Júnior, professora doutora Marilis Bahr Karam Venceslau, professora doutora Maria de Lourdes Rocha de Assis Jeanrenaud, professora doutora Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa, professora doutora Andreia Carvalho Maciel Barbosa e professor doutor Daniel Felipe Neves Marins. Obrigado mesmo pelo curso, por todos os ensinamentos e por me acolherem tão bem no Cp2, instituição que fora minha casa no ensino fundamental, médio e agora no mestrado. Tenho certeza de que os ensinamentos por vocês passados farão um enorme diferencial em minha prática de ensino, conhecimento matemático e vida profissional.

Agradeço, do mesmo modo, ao meu querido professor doutor orientador nesse trabalho; Diego de Souza Nicodemos. Obrigado por toda dedicação, conselhos e atenção a mim dispensados. Este trabalho também lhe pertence.

Agradeço agora, e de maneira equânime, ao meu amigo e grande mestre Carlos Avro. Tenha certeza de que você é um dos grandes responsáveis por essa conquista. Se hoje sou mestre

em Matemática foi porque você me inspirou. Desde as aulas para que eu passasse nas “provas de fevereiro” (a recuperação derradeira – a prova dos desesperados – do Cp2, em minha época, era em fevereiro) até o apoio em minha preparação para EEAR (Escola de Especialistas em Aeronáutica) você esteve presente. Você é um dos maiores gigantes que tive em minha caminhada. Muito obrigado mesmo, mestre.

Agradeço, com não menos importância do que aos anteriores, ao senhor Coronel Aviador Fábio Reith Werneck, Diretor de Ensino do Colégio Brigadeiro Newton Braga nos anos de 2018 e 2019, bem como a Tenente da reserva Cinthya Soares, minha chefe naquela instituição de ensino durante o mesmo período, e em vossos nomes à Força Aérea Brasileira, por ter me dado a oportunidade cursar o Mestrado Profissional em Matemática. Sem tal concessão eu jamais poderia ter feito e, conseqüentemente, concluído esse curso.

Por fim, quero agradecer a todos os amigos que me apoiaram e entenderam meu afastamento nesses anos. Se vocês estiveram comigo por todo esse tempo é porque verdadeiramente a nossa amizade não será destruída nem mesmo pela força do tempo. Vocês não são a família de sangue mas são a família que eu pude escolher ter por perto.

“A matemática é a rainha das ciências”.
(Carl Friedrich Gauss)

RESUMO

Victoriano, Eduardo Moreira. **Noções de Direito Tributário e Economia Como Temas Transversais na Matemática Financeira e no Estudo de Funções no Ensino Básico**. 2020. 88 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós- Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2020.

Diariamente somos bombardeados com declarações sobre crescimento do PIB, sobre carga tributária ou sobre taxa de inflação que, para uma plena compreensão, carecem de conhecimentos prévios sobre Matemática Financeira e Economia. Apesar de parte desse conhecimento ser transmitido aos alunos nas Ciências Humanas, temos pouca ou mesmo nenhuma participação da Matemática em suas explicações, isto é, a Matemática raramente é utilizada como importante ferramenta para o estudo das Ciências Humanas. Além disso, há uma enorme lacuna no ensino das Ciências Jurídicas no Ensino Básico, mesmo estas sendo ciências fundamentais para a educação de nossa sociedade e para a consolidação de um país justo e solidário como prevê a nossa carta constituinte em seu artigo terceiro inciso primeiro. Neste texto, os conceitos de Economia foram pensados através da Matemática pela Teoria de Funções e pela Matemática Financeira, enquanto a Ciência Jurídica ficará restrita ao Direito Tributário, visto que esta área do Direito é uma das que mais se apropria das ferramentas de Matemática Financeira. Ao abordar conceitos simples de Economia pretendemos explicar o funcionamento básico do fenômeno inflacionário, noções de endividamento estatal e títulos do tesouro, séries de crescimento/descrescimento do PIB e o conceito de renda. Referente ao Direito Tributário, pretendemos discutir o funcionamento dos impostos diretos e indiretos (focando em como eles acabam por onerar mais aqueles que possuem menos renda), discutir o sistema progressivo/regressivo de tributação e a noção do imposto de renda sobre pessoa física. Todos estes conceitos servirão como base para refletirmos acerca da questão tributária no Brasil. Mostraremos, com o auxílio da Matemática, que a carga tributária brasileira deveria ser vista por faixa de renda e não de maneira absoluta como é habitualmente praticada. Por fim, sugerimos um conjunto de atividades pensadas para o Ensino Básico que tratam de conceitos de Economia e de Direito Tributário sempre à luz da Matemática.

Palavras-chave: Direito Tributário; Ensino Médio; Funções; Economia; Temas Transversais.

ABSTRACT

Victoriano, Eduardo Moreira. **Noções de Direito Tributário e Economia Como Temas Transversais na Matemática Financeira e no Estudo de Funções do ensino**. 2020. 88 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós- Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2020.

Almost every day we are bombarded with statements about GDP growth, Tax Burden, High and Low Dollar, among others that for true understanding need some prior knowledge. Despite the fact that some of this knowledge is transmitted to students in human sciences, we have little or even no participation of mathematics in their explanations. With this, the teaching of mathematics has often been given without a real sample of its applications and rarely shown as an important tool of the human sciences. Other than that, we have that there is a huge gap in the teaching of the legal sciences in high school, although these are fundamental tools for the construction of a truly fair and supportive country, as provided in our constituent letter in the first item of article 3. In order to exploit this deficiency in our educational system we built this work in order to guide the teaching of two fundamental areas of human knowledge that little - or even nothing - are seen in high school: Economics and Legal Science. Economics has a large area to be explored by Mathematics, more precisely by function theory and financial mathematics. Legal Science will be restricted to tax law, because this area of law is one of the most used financial mathematics tools. When addressing simple concepts of Economics we intend to explain the basic functioning of the inflationary phenomenon, notion of state indebtedness and treasury securities, gdp growth/degrowth series, income concept. In turn, in tax law, we intend to explain the functioning of direct taxes and tax exemptions, focusing on how they end up burdening more those who have less income, progressive /regressive system of taxation, notion of irpf (income tax on individuals) and their restitution. Finally, using the above knowledge, we will deconstruct the idea that we pay many taxes in our country, by showing - with the help of mathematics - that the Brazilian tax burden should be seen by income range and not in general, as it is commonly presented. We will also bring some activities that the Mathematics teacher can use in his repertory aiming to work on the concepts scoped of this dissertation.

Keywords: Tax Law; High school; Economy; Functions; Cross-cutting Themes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|-----|
| Figura 1 – Variações Percentuais Sucessivas | 23 |
| Figura 2 – Esquema das Relações R_1 , R_2 e R_3 | 33 |
| Figura 3 – 1ª Correspondência - Relação R_1 de A em B | 33 |
| Figura 4 – 2ª Correspondência - Relação R_2 de A em B | 33 |
| Figura 5 – 3ª Correspondência - Relação R_3 de A em B | 34 |
| Figura 6 – Diagrama da função $f : A \rightarrow B$ | 34 |
| Figura 7 – Ramo positivo da hipérbole equilátera definida pela função $f(x) = 1/x$ | 36 |
| Figura 8 – Gráficos da Função Afim, à esquerda, e da Função Constante, à direita | 37 |
| Figura 9 – Gráficos de funções quadráticas | 39 |
| Figura 10 – Gráfico Da Função Quadrática - II | 39 |
| Figura 11 – Gráfico Da Função Quadrática - III | 40 |
| Figura 12 – Gráfico Da Função Modular | 41 |
| Figura 13 – Gráfico da Função Definida Por Sentenças | 42 |
| Figura 14 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - 1$ | 43 |
| Figura 15 – Gráfico da função $g(x)$ | 45 |
| Figura 16 – Cercas de raio δ em torno de x_0 e de raio ϵ em torno de L | 50 |
| Figura 17 – Curvas e retas tangentes | 51 |
| Figura 18 – Equação Cartesiana Da Reta | 52 |
| Figura 19 – Reta tangente à parábola $f(x) = x^2$ | 54 |
| Figura 20 – Sequências de secantes à curva $f(x) = \frac{10}{x}$ que tem como limite a tangente ao ponto $P(1; 10)$ | 55 |
| Figura 21 – Gráfico da Função Utilidade Total | 67 |
| Figura 22 – Gráfico da Função Utilidade Marginal | 68 |
| Figura 23 – Curva De Laffer | 71 |
| Figura 24 – Carga Tributária: Brasil e Países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), Participação (%) do PIB em 2009 e 2016 | 80 |
| Figura 25 – Orçamento Brasileiro Executado em 2019 | 83 |
| Figura 26 – Gráfico da Função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ - Uma função de utilidade marginal. | 90 |
| Figura 27 – Gráfico da Função $f(x) = 5 - \frac{1}{x}$, Uma função de utilidade total. | 91 |
| Figura 28 – Gráfico da Função de Pizza Da Distribuição Tributária | 96 |
| Figura 29 – Gráfico do IRPF Mensalmente Devido | 101 |
| Figura 30 – Gráfico do Crescimento do PIB e da Arrecadação Tributária | 108 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Investigação do limite de $f(x)$ por valores menores que zero | 44 |
| Tabela 2 – Investigação do limite de $f(x)$ por valores maiores que zero | 45 |
| Tabela 3 – Investigação do limite de $g(x)$ por valores à esquerda de 1 | 46 |
| Tabela 4 – Investigação do limite de $g(x)$ por valores à direita de 1 | 47 |
| Tabela 5 – Fatores de produção e suas remunerações | 59 |
| Tabela 6 – Inflação Acumulada de 2011 a 2020 | 63 |
| Tabela 7 – Tabela do IRPF em 2021 | 76 |
| Tabela 8 – Tabela do IRPF Corrigida pela Inflação de 2015 a 2020 | 79 |

SUMÁRIO

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 14 |
| 1.1 | Sobre a Relevância do Estudo do Direito no Ensino Básico | 16 |
| 1.2 | Sobre a Relevância do Estudo da Economia no Ensino Básico | 18 |
| 1.3 | Sobre a Relevância da Matemática Financeira no Ensino Básico | 19 |
| 2 | MATEMÁTICA PRELIMINAR | 20 |
| 2.1 | Razões e Proporções | 20 |
| 2.2 | Porcentagem | 21 |
| 2.3 | Média Aritmética e Média Geométrica | 25 |
| 2.3.1 | Uma Consideração Importante Sobre Ambas as Médias | 31 |
| 2.4 | O Conceito de Função | 31 |
| 2.4.1 | Sobre Funções Reais | 35 |
| 2.4.2 | Função Afim | 36 |
| 2.4.3 | Função Quadrática | 38 |
| 2.4.4 | Função Definida Por Várias Sentenças | 40 |
| 2.5 | Limite De Uma Função Real | 42 |
| 2.5.1 | A Ideia Intuitiva de Limite | 42 |
| 2.5.2 | A Definição Formal de Limite | 49 |
| 2.6 | O Conceito de Derivada | 51 |
| 2.6.1 | A derivada de uma função | 52 |
| 2.6.2 | Interpretações da Derivada | 53 |
| 3 | CONCEITOS DE ECONOMIA | 57 |
| 3.1 | PIB e Renda | 58 |
| 3.1.1 | Renda | 58 |
| 3.2 | O Fenômeno Inflacionário | 60 |
| 3.2.1 | O Cálculo da inflação | 60 |
| 3.2.2 | Três Índices de Preço Principais | 62 |
| 3.2.3 | Inflação Acumulada ao Longo dos Anos | 62 |
| 3.2.4 | Distorções Causadas Pela Inflação | 64 |
| 3.3 | Títulos do Governo e Endividamento Estatal | 65 |
| 3.4 | O conceito de Utilidade | 66 |
| 3.4.1 | Lei da Utilidade Marginal Decrescente | 66 |
| 3.4.2 | A utilidade da Renda | 67 |
| 3.5 | Elasticidade | 68 |
| 3.5.1 | Elasticidade Preço da Demanda | 69 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 3.6 | A curva de Laffer | 70 |
| 4 | O DIREITO TRIBUTÁRIO | 72 |
| 4.1 | Direito Público e Privado | 72 |
| 4.1.1 | Sobre o Direito Tributário | 72 |
| 4.1.2 | Tributos Direto e Indireto | 74 |
| 4.2 | Sistema Regressivo e Progressivo de Tributação | 74 |
| 4.3 | Sobre o Imposto de Renda das Pessoas Físicas | 75 |
| 4.3.1 | O Pagamento do IRPF | 77 |
| 4.3.2 | Fiscalidade e Extrafiscalidade no IRPF | 78 |
| 5 | CONSIDERAÇÕES SOBRE O SISTEMA TRIBUTÁRIO BRASILEIRO | 80 |
| 5.1 | A Alta Carga Tributária Brasileira | 80 |
| 5.1.1 | Carga Tributária Essencialmente Indireta | 81 |
| 5.1.2 | Sonegação Tributária | 81 |
| 5.1.3 | Alta Dívida Pública | 82 |
| 5.1.4 | A Tributação Direta Não Atinge os Mais Ricos Como Deveria Atingir . . . | 83 |
| 5.2 | Programas de Transferência de Renda | 84 |
| 6 | ATIVIDADES | 86 |
| 6.1 | Sobre Economia | 86 |
| 6.2 | Sobre Direito Tributário | 99 |
| 7 | CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS | 110 |
| | REFERÊNCIAS | 112 |

1 INTRODUÇÃO

Inflação, variações no produto interno bruto, carga tributária, impostos e muitos outros termos já foram por várias vezes ouvidos pelos nossos alunos e por nós. Estes são termos levados para as discussões de família, para o bar, para a igreja e para os mais diversos grupos de relações sociais. Mas será que o aluno médio brasileiro entende o que eles realmente querem dizer? Será que os formandos do Ensino Básico conseguem compreender minimamente o funcionamento dos mecanismos econômicos e do sistema jurídico tributário brasileiro?

Alguns aspectos básicos de Economia são abordados, no Ensino Médio, exclusivamente através das Ciências Humanas. No entanto, discutir Economia sem se apropriar da Matemática acena para uma internalização limitada, reduzida e superficial do funcionamento do mundo. Além disso, a ausência do Ensino de Matemática conjugado ao Ensino de Temas de Economia contribui para a formação de alunos menos críticos e conscientes de suas responsabilidades e de seus direitos, prejudicando seriamente um dos objetivos fundamentais do Ensino que é o exercício da cidadania¹.

Desde o início do século XX os economistas têm dado uma forte estruturação matemática à economia, consolidando os modelos econômicos. É importante destacar que a utilização de modelos matemáticos não desqualifica a Economia como Ciência Social.

Com o intuito de compreender minimamente o sistema tributário brasileiro, propomos adentrar em alguns tópicos de Economia e para isto utilizamos a Matemática Básica que se faz representada através da Matemática Financeira e do Conceito de Função. A Matemática Financeira porque a variação do PIB e o Fenômeno Inflacionário são crescimentos percentuais que comumente ensinamos aos alunos quando lhes mostramos os descontos ou aumentos sucessivos percentuais de preços. Logo, é possível introduzir, nessas aulas, sequências de variações do produto de acordo com um ano base e, do mesmo modo, sequências de variações inflacionárias. Por outro lado, a Teoria de Funções pode ser usada para mostrar aos alunos modelos econômico-matemáticos de demanda, de oferta e de teoria da utilidade marginal, por exemplo.

No âmbito do Ensino Básico, se a Economia tem uma abordagem mínima nas ciências humanas, as Ciências Jurídicas não são discutidas ou abordadas e sequer são mencionadas. Com isso, nossos alunos se formam sem ter a menor ideia de como funciona o sistema jurídico brasileiro, não têm ideia nem de seus deveres, nem de seus direitos. Mas como é possível introduzir mais conteúdo ao já inchado currículo do Ensino Básico, mais especificamente do Ensino Médio? Imaginamos que a solução mais viável seria uma abordagem desses assuntos por temas transversais. Claro que é utópico acreditar que todos os principais ramos do Direito

¹ O exercício da cidadania é previsto no artigo 22 da lei 9394 de dezembro de 1996, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (BRASIL, 1996).

possam ser abordados no Ensino Médio, sabemos que isso é inviável, mas algumas áreas como o Direito Constitucional, Direito Civil e o Direito Tributário poderiam ser introduzidos com a transversalidade de temas.

Acreditamos, por exemplo, que o Direito Constitucional poderia ficar a cargo da História. O Direito Constitucional deveria ser abordado para que os alunos tenham a mínima noção do funcionamento do Estado, das competências², das instituições e daqueles que ocupam os cargos públicos. Já o Direito Civil poderia ficar a cargo da Sociologia. O Direito Civil deveria focar nas capacidades civis, contratos básicos do dia a dia e ter um enfoque no direito do consumidor.

Por fim, o Direito Tributário ficaria a cargo da Matemática (isto porque o Direito Tributário requer noções de Economia e de Matemática Financeira). O Direito Tributário deveria dar uma mínima compreensão do funcionamento do sistema tributário nacional. Tal compreensão deveria mostrar o que são os impostos indiretos e diretos, como os impostos indiretos oneram mais aqueles que têm menos renda, o que é um sistema tributário regressivo e um sistema tributário progressivo. Sem dúvida estas inserções contribuiriam para os alunos terem alguma compreensão de nosso sistema jurídico e do funcionamento de nossa sociedade.

O objetivo geral deste trabalho é introduzir fundamentos de Direito Tributário e de Economia para professores de Matemática do Ensino Básico, de modo que esses profissionais, utilizando a Matemática Financeira e a Teoria de Funções como ferramentas, consigam levar essas noções para as salas de aula. Como objetivos específicos intencionamos trazer alguns tópicos de Macro e Microeconomia, necessários para a compreensão de Direito Tributário, com o auxílio da Matemática mostrar que nosso sistema tributário é perverso ao cobrar relativamente mais impostos de quem tem menos renda, discutir se de fato pagam-se muitos impostos no Brasil e mostrar os programas de transferência de renda como um mínimo de justiça em face a tal perversidade de nosso sistema tributário.

Utilizamos a pesquisa bibliográfica como metodologia básica de pesquisa. Todo o arcabouço teórico fundamenta-se em trabalhos de Economia, Direito Tributário e Matemática de relevantes autores. A partir de uma vasta pesquisa bibliográfica desenvolvemos nossas considerações acerca do sistema tributário nacional e desenvolvemos as atividades sugeridas e fundamentadas neste texto.

No Capítulo 2, abordamos os conteúdos matemáticos centrais necessários para a compreensão deste trabalho. No Capítulo 3, tratamos os conceitos de Economia que fundamentam o entendimento das noções de Direito Tributário propostas e discutidas no Capítulo 4. O quinto Capítulo, aborda algumas considerações e reflexões sobre o Sistema Tributário Brasileiro. Por fim, no Capítulo 6, sugerimos um rol de atividades pensadas para a sala de aula do Ensino Básico. Acrescentamos que tais atividades são sugestões para o profissional da educação básica que

² A palavra competência aqui é usada como a quem compete, ou seja, as competências de uma instituição são suas responsabilidades. A título de exemplo compete às instituições de Ensino Médio formar os alunos em grau secundarista. Não é competências delas formá-los no Nível Superior.

poderá utilizá-las como desejar, isto é, mantendo-as como aqui estão, ou alterando-as de acordo com as necessidades particulares de seus alunos.

Apresentamos a seguir, três breves seções em que discutimos as relevâncias dos estudos de Direito, de Economia e de Matemática Financeira para o Ensino Básico.

1.1 Sobre a Relevância do Estudo do Direito no Ensino Básico

Tomemos o Artigo 22 da LDB, Lei de Diretrizes e Bases da Educação, lei número 9.394 de 20 de dezembro de 1996: "A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o *exercício da cidadania* e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores (BRASIL, 1996)."

Pelo Artigo 22 da LDB vemos que a Educação Básica visa fortalecer a cidadania daqueles que por ela são formados. Mas o que seria cidadania? Para as Ciências Sociais a cidadania é todo o conjunto de direitos e deveres exercidos por um indivíduo que vive em sociedade, no que se refere ao seu poder de intervenção no usufruto de seus espaços e na sua posição em poder nele intervir e transformá-lo ³.

Para o exercício da cidadania o indivíduo deve ser capaz de reconhecer seus direitos e deveres, direitos e deveres estes que se encontram insculpidos nas leis, mas estas mesmas leis não são lecionadas ou transmitidas no Ensino Básico. Ou seja, formamos cidadãos inconscientes de seus direitos e deveres.

É natural que surjam vozes dentro da academia a nos mostrar essa lacuna em nossa sociedade. Dentre essas vozes podemos citar os professores Luciano Souto Dias, Leonil Bicalho de Oliveira e Diogenes Belotti Dias. Daremos destaque aos trabalhos do professor Luciano Souto Dias que conjuntamente com o professor Leonil Bicalho de Oliveira escreveu um artigo sobre a importância do estudo do Direito na Educação Básica ⁴.

Dada a relevância do conhecimento jurídico para o exercício da cidadania e dada a sua ausência na Educação Básica, viemos propor, através deste trabalho, uma maneira de incluir uma fração de tal conhecimento para nossos alunos. Sob este aspecto, merecem destaques algumas iniciativas por parte de instituições ligadas ao judiciário como, por exemplo, o Projeto Conhecer Direito da Defensoria Pública do Distrito Federal que leva algumas pílulas de conhecimento jurídico aos alunos daquela unidade da federação; alguns projetos de seccionais da OAB que realizam palestras sobre direitos básicos em escolas pelo Brasil, além de outros projetos realizados por diversas instituições governamentais e não governamentais.

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2020) do Ministério da Educação traz a previsão, para o Ensino Médio, das metas e competências específicas de Ciências Humanas e

³ (PENA, 2019)

⁴ (DIAS; OLIVEIRA, 2015)

Sociais aplicadas para o Ensino Médio. Estas competências, previstas na página 557 da BNCC, são 6 no total, porém, para este trabalho, destacamos a primeira, a terceira, a quinta e a sexta:

1ª - Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica;

O conhecimento do direito é ferramenta inalienável para que seja bem compreendido o trecho em destaque, assim como permite uma maior pluralidade de oferta nesse mesmo trecho.

3ª - Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global;

Nesse item tem-se a possibilidade de se analisar o Direito pela ótica da regionalização (normas locais e divisão dos entes federativos) e aplicação do Direito comparado (fazendo menção, por vezes, a ordenamentos jurídicos estrangeiros ⁵).

5ª - Identificar e combater as diversas formas de injustiça, preconceito e violência, adotando princípios éticos, democráticos, inclusivos e solidários, e respeitando os Direitos Humanos;

Tal identificação tornar-se-á muito mais fácil para os estudantes que tiverem algum conhecimento jurídico. Principalmente no que tange aos Direitos Humanos. Há hoje no Brasil uma esdrúxula ideia de que Direitos Humanos não seriam aplicáveis a uma parcela de nossa população, por exemplo, aos criminosos. Tal ideia tem origem no fato de que a maior parte do nosso povo não faz ideia do que sejam tais direitos e o tamanho de sua importância. Essa é, sem dúvida, uma motivação urgente para que tenhamos a introdução de noções de Direito já na Educação Básica.

6ª - Participar do debate público de forma crítica, respeitando diferentes posições e fazendo escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

Não há como participar do debate público de forma crítica se o indivíduo não tem uma mínima compreensão das ideias em confronto nesse debate. Para isso é importante que ele conheça as obrigações do Estado, seus direitos e seus deveres. Logo, novamente, é importante que ele conheça a lei, pois todos esses pontos estão nela insculpidos.

⁵ Ordenamento Jurídico é o conjunto de todas as normas que estão em vigor em uma sociedade. Normas, pro Direito, são todo e qualquer madamento legal que discipline a atividade social. Ou seja, leis, regulamentos, portarias, súmulas etc.

1.2 Sobre a Relevância do Estudo da Economia no Ensino Básico

O termo economia vem do grego *oikos* - casa - e *nomos* - costume ou lei, daí regras da casa- lar ⁶.

A Ciência Econômica, ou simplesmente Economia, apesar de pouco trabalhada na Educação Básica é bem mais tangenciada do que a Ciência Jurídica. Alguns de seus conceitos são citados em aulas de Geografia, em que fala-se de PIB, e em aulas de História, por exemplo quando são abordados os ciclos histórico-econômicos brasileiros.

Assim como as noções de Direito o Ensino de Economia é de fundamental importância para a compreensão da situação social de nosso país. Na Seção 1.1, é possível identificar através das 1^a e 3^a competências contidas na BNCC a relevância direta da Economia, enquanto nas 5^a e 6^a competências essa relevância encontra-se implicitamente enraizada.

Além disso, convém destacar que o conhecimento econômico embasa debates e discussões políticas. Historicamente política e economia têm um vínculo quase que "umbilical". Vale observar que o Brasil republicano pós governo militar teve dois presidentes impedidos onde a motivação principal para a remoção desses foram sérias crises econômicas: o ex-presidente Fernando Collor de Mello, com a crise gerada pelo confisco das poupanças, e a ex-presidenta Dilma Rouseff, com a crise gerada após os aumentos aplicados à energia elétrica e aos combustíveis depois de sua reeleição. A saúde econômica de um país geralmente garante a estabilidade política do governo.

Sem dúvida, o ensino de algumas noções de Economia conjuntamente com a Matemática Financeira pode fazer com que nossos alunos desenvolvam maior consciência ao utilizar seus recursos financeiros. A BNCC chama esse mix de conhecimentos de Economia e Matemática Financeira de Educação Financeira.

Reconhecendo a importância do conhecimento de Economia na Educação Básica, a Universidade Federal de Juiz de Fora montou o projeto Economia nas Escolas⁷, com a finalidade de compartilhar experiências observadas com os alunos. Esse projeto intitulado *Economia nas Escolas: relatos de uma experiência*, foi definido da seguinte maneira:

O projeto “Economia nas Escolas” é um projeto de extensão empreendido por alunos da Faculdade de Economia da Universidade Federal de Juiz de Fora. O objetivo do projeto é levar assuntos econômicos e sobre educação financeira para dentro de sala de aula, despertando em alunos do ensino médio e, posteriormente do ensino fundamental, o interesse por temas capazes de servir de base para suas futuras decisões cotidianas de modo a torná-las sustentáveis, entendendo o cenário econômico onde vivem e como suas ações afetam esse cenário (PEROBELLI et al., 2014)

⁶ (DIREITO.LEGAL, 2019)

⁷ (PEROBELLI et al., 2014)

1.3 Sobre a Relevância da Matemática Financeira no Ensino Básico

Está previsto na BNCC o estudo de conceitos básicos de Economia e Finanças, como taxa de juros, inflação, aplicações financeiras e impostos. Em abordagem interdisciplinar, o documento destaca as dimensões socioculturais, políticas e psicológicas, além da econômica, em torno das questões de consumo, trabalho e dinheiro. Todos estes aspectos acenam para a necessidade de trabalhar noções de Economia a partir da Matemática Financeira.

O ensino da Matemática Financeira além de ser previsto pela BNCC é de extrema relevância prática e social, visto que tal conhecimento dará base para que o aluno consiga fazer um planejamento financeiro básico a fim de adquirir um determinado produto ou serviço sem que pague mais do que é necessário por isto. A necessidade e magnitude desse aprendizado e seus porquês foram magistralmente discutidos na dissertação de mestrado do PROFMAT de Santos Filho (2015), sob o título *Sequências Didáticas Para Inserção do Ensino Da Matemática Financeira No Ensino Básico - A Questão do Letramento Financeiro*. Segundo esse autor, grande parte das famílias brasileiras está endividada ou enfrentando algum tipo de dificuldade financeira e ele ainda acrescenta que:

É possível que uma parte significativa dessa inadimplência tenha decorrido de compras nas quais o consumidor apenas se preocupou com o fato de o valor a ser pago saber ou não no seu orçamento, quando, de uma maneira mais cautelosa, poderia ter feito uma série de outras questões no momento do consumo, tais como: Eu preciso, realmente, adquirir esse bem? E se preciso, ele é tão urgente que não posso aguardar a formação de poupança suficiente para adquiri-lo no futuro à vista, deixando de pagar juros na compra a prazo? E se devo comprar a prazo, a renda não estaria comprometida por muito tempo ao adquirir o bem? Na compra a prazo, os juros que estou pagando não estão muito altos a ponto de, no final do financiamento, eu estar pagando de duas a quatro vezes o valor do bem adquirido? Existe algum bem mais barato e/ou em melhores condições de aquisição que possa me proporcionar sensação de satisfação semelhante à sensação que eu teria com o bem inicialmente desejado? Será que não posso obter um empréstimo com uma taxa de juros menor em um banco para poder comprar o bem à vista na loja, proporcionando um aumento do poder de barganha na negociação do preço à vista? Qual é a taxa de juros que efetivamente estou pagando? Todas estas questões são extremamente relevantes no momento do descaixe de dinheiro para aquisição de qualquer bem ou serviço, entretanto, são questões praticamente desprezadas pelo consumidor (SANTOS FILHO, 2015, p.03)

Por esta razão, e também no intuito de trazermos os conhecimentos necessários para a discussão dos capítulos seguintes de Economia e Direito Tributário, trouxemos alguns pontos da Matemática Financeira para este trabalho.

2 MATEMÁTICA PRELIMINAR

Neste capítulo abordamos conceitos matemáticos necessários para a compreensão dos tópicos de Economia e Direito Tributário, que são o cerne desta pesquisa.

Discutimos desde conceitos simples como os de *razões e porcentagens* até conceitos menos triviais como as ideias de *limite* e de *derivada*. Durante todo este capítulo nos baseamos nas literaturas de (NETO et al., 2010), (IEZZI; HAZZAN; DEGENSZAJN, 2004). Sugerimos ao leitor não familiarizado com os temas aqui elencados, ou que necessitem de uma revisão, que busquem apoio em tais títulos, ou em outros que abordem estes temas da maneira que melhor lhes convier.

2.1 Razões e Proporções

Muitos autores definem o conceito matemático de *Razão* como sendo o quociente entre dois números. Gostaríamos de incrementar a ideia de que a razão entre dois objetos, entre dois números ou entre duas grandezas pode ser entendida como uma maneira de compará-las, utilizando a divisão. A partir deste conceito é possível entender que uma *Proporção* é a igualdade entre razões. Apresentamos, a seguir, as notações usuais para razões e proporções.

$$\frac{a}{b} \text{ ou } a : b \text{ (Notações usuais de Razão)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ou } a : b = c : d \text{ (Notações usuais de Proporção)}$$

Aqui cabem duas observações importantes a se fazer:

1. A leitura da proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ pode ser feita da seguinte forma: a está para b assim como c está para d ;
2. Da notação $a : b = c : d$ é possível entender que os valores a e d são ditos extremos, enquanto os valores b e c são ditos meios. Esta observação nos ajuda a compreender a propriedade central das proporções, apresentada a seguir.

Propriedade Fundamental das Proporções.

Em toda proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = c \cdot b \quad \text{ou} \quad a : b = c : d \iff a \cdot d = c \cdot b.$$

A validade da Propriedade Fundamental das Proporções pode ser constatada de maneira simples multiplicando ambos os membros da equação pelo produto entre os denominadores e, em seguida, efetuando as simplificações entre termos idênticos. A seguir, disponibilizamos dois problemas para que o leitor possa se familiarizar com os conceitos de razões e proporções e com a Propriedade Fundamental das Proporções.

Problema 2.1.1. Um investidor aplicou 40 mil reais, sendo 16 mil em uma caderneta de poupança e 24 mil reais em ações. Calcule a razão entre:

- o Valor aplicado em ações e total investido;
- o valor aplicado em caderneta de poupança e o total investido;
- o valor aplicado em ações e o valor aplicado em caderneta de poupança.

Resolvendo temos:

a) A razão entre o valor aplicado e o total investido é de: $\frac{24000}{40000} = \frac{3}{5}$.

b) A razão entre o valor aplicado em caderneta de poupança e o valor total investido é de: $\frac{16000}{40000} = \frac{2}{5}$.

c) A razão entre o valor aplicado em ações e o valor aplicado em caderneta de poupança é de: $\frac{24000}{16000} = \frac{3}{2}$.

Problema 2.1.2. Vamos determinar o valor da incógnita x em cada uma das situações:

a) $\frac{x}{10} = \frac{48}{30}$;

b) $\frac{55-x}{6} = \frac{9}{12}$.

Aplicando a Propriedade Fundamental das Proporções temos:

a) $30x = 10 \cdot 48 \implies x = \frac{240}{30} = 8$;

b) $12 \cdot (55 - x) = 54 \implies 4 \cdot (55 - x) = 18 \implies x = \frac{202}{4} = \frac{101}{2}$.

2.2 Porcentagem

De acordo com o próprio nome, *Porcentagem* ou *Percentagem* é uma razão cujo denominador é igual a 100. Observe que uma razão $\frac{a}{b}$ pode ser transformada em porcentagem bastando multiplicá-la por $\frac{100}{100}$. Empregamos o símbolo % para indicar uma porcentagem, ou seja, a porcentagem $\frac{p}{100}$ é abreviada por $p\%$.

O mundo que nos cerca utiliza, com frequência, o conceito de porcentagem em jornais, em revistas, em anúncios ou através da internet. Elencamos algumas situações em que é aplicado o conceito de porcentagem.

- O crescimento de matrículas no Ensino Fundamental esse ano foi 24% maior do que no ano passado;
- A taxa de desemprego no Brasil cresceu 14% esse ano;
- A comissão dos garçons é de 10 %;
- Qualquer peça da loja com desconto de 25% nas compras feitas à vista.

Convém advertir que a porcentagem também pode ser representada através de números decimais, tendo em vista que há uma equivalência natural entre um número decimal e uma fração de inteiros. Neste caso, 0,25 corresponde a 25%, pois $0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$, enquanto 9,8 corresponde a 980%, pois $9,8 = \frac{98}{10} = \frac{980}{100} = 980\%$.

Outro conceito intrínseco ao conceito de porcentagem é o conceito de *Varição Percentual*. A razão entre o aumento e o preço inicial de determinado bem é chamada de *Varição Percentual* de preço entre os períodos de tempo considerados.

Suponhamos que, no início de certo mês, o preço de um determinado produto seja de R\$25,00 e, no final do mês, o preço seja reajustado para R\$27,50. Neste período, o aumento de preço deste produto, foi de R\$2,50. Assim, indicando a variação percentual pela letra j , temos;

$$j = \frac{2,50}{25} = 0,1 = 10\%.$$

Precisamente falando, se v_0 indica o valor de uma grandeza na data inicial t_0 , enquanto v_t corresponde ao valor desta grandeza na data futura t , então a *Varição Percentual* j desta grandeza entre os períodos t_0 e t é dada por:

$$j = \frac{v_t - v_0}{v_0} \quad \text{ou} \quad j = \frac{\Delta_t}{v_0}, \quad \text{onde} \quad \Delta_t = (v_t - v_0).$$

Separando $\frac{v_t}{v_0}$ de $\frac{v_0}{v_0}$ na expressão acima é possível obter uma nova expressão, equivalente às anteriores, para a variação percentual:

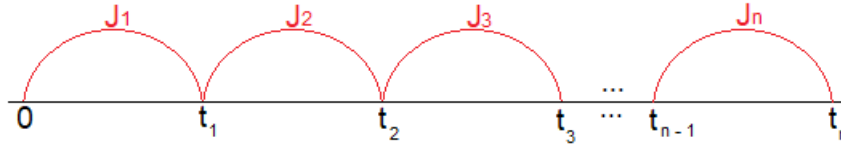
$$j = \frac{v_t - v_0}{v_0} \iff j = \frac{v_t}{v_0} - \frac{v_0}{v_0} \iff j = \frac{v_t}{v_0} - 1.$$

Quando uma grandeza assume apenas valores positivos e, além disso, $v_t > v_0$, a fração $\frac{v_t}{v_0}$ é maior do que 1. Conseqüentemente, a sua variação percentual é positiva e é chamada de *Taxa Percentual de Crescimento*. Por outro lado, se $v_t < v_0$, então a variação percentual é negativa e é dita *Taxa Percentual de Decrescimento*. Obviamente quando $v_t = v_0$, a variação percentual é nula, não havendo crescimento ou decrescimento de valores.

Considere os instantes de tempo $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t_n$ em que $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 \dots < t_n$, e admita que j_1 é a variação percentual da grandeza entre 0 e t_1 , j_2 a variação

percentual da grandeza entre t_1 e t_2 , e assim sucessivamente até j_n que indica a variação percentual da grandeza entre t_{n-1} e t_n . Os valores $j_1, j_2, j_3, \dots, j_n$ são chamados de *Variações Percentuais Sucessivas*, conforme é mostrado na Figura 1.

Figura 1 – Variações Percentuais Sucessivas



Fonte: Iezzi *et. al.*, (2010).

Se indicarmos por $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ os valores da grandeza associados respectivamente aos períodos $0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t_n$, é possível escrever:

- $j_1 = \frac{v_1}{v_0} - 1 \Rightarrow v_1 = v_0(1 + j_1)$;
- $j_2 = \frac{v_2}{v_1} - 1 \Rightarrow v_2 = v_1(1 + j_2) = v_0(1 + j_1)(1 + j_2)$;
- $j_3 = \frac{v_3}{v_2} - 1 \Rightarrow v_3 = v_2(1 + j_3) = v_0(1 + j_1)(1 + j_2)(1 + j_3)$;

Indutivamente concluímos que:

$$v_n = v_0(1 + j_1)(1 + j_2)(1 + j_3)\dots(1 + j_n). \quad (2.1)$$

À variação percentual entre as datas 0 e t_n damos o nome de *Varição Percentual Acumulada*, abreviada por j_{ac} e determinada pela expressão:

$$j_{ac} = \frac{v_n}{v_0} - 1. \quad (2.2)$$

Substituindo a Equação 2.1 na Equação 2.2 temos:

$$j_{ac} = \frac{v_0(1 + j_1)(1 + j_2)(1 + j_3)\dots(1 + j_n)v_0}{v_0} - 1.$$

E, finalmente, chegamos em outra expressão simplificada para a *Varição Percentual Acumulada*:

$$j_{ac} = (1 + j_1) \cdot (1 + j_2) \cdot (1 + j_3)\dots(1 + j_n) - 1. \quad (2.3)$$

Apresentamos três aplicações relativas ao conceito de variações percentuais.

Problema 2.2.1. No final de um ano o número de habitantes de uma cidade era igual a 80.000 e, no final do ano seguinte, esse número aumentou para 82.000. Qual a variação percentual entre as datas consideradas?

Solução.

$$j = \frac{82.000}{80.000} - 1 = 0,025 = 2,5\%.$$

Como $j > 0$ dizemos que a população cresceu a uma taxa de 2,5%.

Problema 2.2.2. Em um município brasileiro a população teve uma redução de 100.000 habitantes para 90.000 devido a pandemia de COVID 19. Qual a variação percentual entre as datas consideradas?

Solução.

$$j = \frac{90.000}{100.000} - 1 = -0,1 = -10\%.$$

Como $j < 0$ dizemos que a população decresceu a uma taxa de 10%.

Problema 2.2.3. O preço de um automóvel 0km era R\$ 50.000,00. Um ano depois, o preço teve um decréscimo de 15% e, após mais um ano, teve outro decréscimo de 10%.

a) Qual o preço do automóvel dois anos depois ?

b) Qual a taxa acumulada de decréscimo ?

Solução.

$$a) v_2 = 50.000(1 - 0,15)(1 - 0,1) = 38.250.$$

Logo, após dois anos o automóvel valia R\$38.250,00.

$$b) j_{ac} = \frac{38.250}{50.000} - 1 = -0,235 = -23,5\%.$$

Portanto, a taxa de decréscimo foi de 23,5%.

É possível também determinar a taxa de decréscimo através da Equação 2.3.

$$j_{ac} = (1 - 0,15)(1 - 0,1) - 1 = -0,235 = -23,5\%.$$

2.3 Média Aritmética e Média Geométrica

Dado um conjunto de n valores reais positivos, o conceito de *média* é uma medida de centralidade para este conjunto. Em outras palavras, a média pode ser vista como o valor que demonstra a concentração dos dados de uma distribuição, como o ponto de equilíbrio nas frequências de um histograma (um histograma é uma ferramenta de análise e representação de dados quantitativos, agrupados em classes de frequência que permite distinguir a forma, o ponto central e a variação da distribuição, além de outros dados como amplitude e simetria na distribuição dos dados (FARIA, 2017)). Discutimos, neste trabalho, as *médias aritmética e geométrica*.

Considere o conjunto de n números reais positivos $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. A *média aritmética* entre estes n números, representada por \bar{x} , é definida como sendo a razão entre a soma destes valores e n , ou seja,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n}. \quad (2.4)$$

Vale ressaltar que a média aritmética está sempre compreendida entre o menor e o maior valor do conjunto. Este fato é demonstrado a seguir.

Sejam $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um conjunto contendo n valores reais positivos, x_1 o menor elemento de X e x_n o maior elemento de X , sem perda de generalidade.

i) A média de um conjunto é maior ou igual do que seu menor elemento

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{x_1 + x_1 + \dots + x_1}{n} = \frac{n \cdot x_1}{n} = x_1.$$

ii) A média de um conjunto é menor ou igual do que seu maior elemento

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \frac{x_n + x_n + \dots + x_n}{n} = \frac{n \cdot x_n}{n} = x_n.$$

Portanto, pelos itens i e ii, atestamos que a média de um conjunto X está compreendida entre o menor e o maior valor deste conjunto, ou seja:

$$x_1 \leq \bar{x} \leq x_n.$$

Convidamos o leitor a pensar sobre um pequeno problema a respeito da média aritmética.

Problema 2.3.1. Alberto foi ao mercado e comprou 1kg de arroz, 1kg de feijão, 1kg de açúcar e 1kg de café pagando, respectivamente, pelo quilo de cada item R\$3,50, R\$2,50, R\$2,25 e R\$ 3,75. Qual é a média entre os valores pagos por Alberto por kg destes alimentos?

Solução.

Seja $V = (3,50; 2,50; 2,25; 3,75)$. A média solicitada, representada por \bar{v} , é obtida fazendo:

$$\bar{v} = \frac{3,5 + 2,5 + 2,25 + 3,75}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

Isto nos diz que, em média, Alberto gastou R\$3,00 por kg de cada item.

É oportuno destacar que se somarmos (ou multiplicarmos) cada termo de uma média aritmética por um escalar c , então a média ficará adicionada (ou multiplicada) por este escalar c . Deixamos a cargo do leitor comprovar estas duas propriedades das médias aritméticas.

Uma definição que emerge do conceito de média aritmética é a de *Média Aritmética Ponderada*. Seja x uma variável quantitativa que assume os valores reais positivos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ com *frequências absolutas* respectivamente iguais a $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$. A média aritmética ponderada de x , indicada também por \bar{x} , é definida como sendo a razão entre a soma de todos os produtos x_i por suas correspondentes frequências absolutas $n_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$, e a soma de todas as frequências absolutas.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \dots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k}.$$

A *frequência relativa* correspondente a um valor x_i é indicada por f_i e definida por:

$$f_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^k n_i}.$$

Desta maneira, é possível expressar a média aritmética ponderada através da seguinte expressão:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i f_i = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_k \cdot f_k.$$

Semanticamente falando, a frequência absoluta é definida como o número de vezes que um determinado elemento x_i ocorre em um conjunto de valores, enquanto a frequência relativa pode ser vista como a porcentagem (ou fração) de vezes que um determinado elemento ocorre

em um conjunto de valores. Tomando, por exemplo, o conjunto $\{1, 1, 4, 5, 6\}$. A frequência absoluta do valor 1 é 2, enquanto a frequência relativa de 1 é dada por $\frac{2}{5}$ ou 40%. Apresentamos dois exemplos em que é empregado a média aritmética ponderada.

Problema 2.3.2. Aurélio comprou quatro jóias a R\$50,00, duas a R\$ 75,00, três a R\$100,00 e uma a R\$125,00. Qual a média dos valores gastos em jóias por Aurélio ?

Solução.

Encontraremos tal média por aplicação simples e direta da fórmula da média aritmética ponderada.

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot 50 + 2 \cdot 75 + 3 \cdot 100 + 125}{10} = \frac{200 + 150 + 300 + 125}{10} = \frac{775}{10} = 77,5.$$

Concluimos que a média dos valores pagos pelas jóias foi de R\$77,50.

Problema 2.3.3. Durante o ano 2002, no Colégio Pedro II de São Cristóvão, a média de um aluno era calculada através de 4 provas. Duas provas diferenciadas, onde cada professor aplicava sua prova a sua turma, e duas provas únicas, onde todo um mesmo ano fazia a mesma prova (provas diferenciadas nos primeiro e terceiro bimestres, provas únicas nos segundo e quarto bimestres). As provas diferenciadas tinham peso dois e a prova única tinha peso 3. Ao final do ano o aluno devia ter uma média maior ou igual a 6,75 pontos.

Tendo Pedrinho tirado 4,0 na primeira prova diferenciada, 6,5 na primeira prova única e 7,5 na terceira prova diferenciada, quanto ele deverá tirar, no mínimo, na última prova única para que não precise depender da prova final ou da recuperação para sua aprovação?

Solução.

Este problema explicitamente trata os pesos de cada avaliação como sendo as frequências absolutas correspondentes às notas. Gostaríamos que $\bar{x} \geq 6,75$. ou seja,

$$\frac{2 \cdot 4,0 + 3 \cdot 6,5 + 2 \cdot 7,5 + 3n}{10} \geq 6,75$$

$$\frac{8 + 19,5 + 15 + 3n}{10} \geq 6,75$$

$$\frac{42,5 + 3n}{10} \geq 6,75$$

$$42,5 + 3n \geq 67,5$$

$$3n \geq 25$$

$$n \geq 8,33.$$

Portanto, Pedrinho deve alcançar pelo menos um grau igual a 8,33 para não depender de prova final ou da recuperação de modo a lograr aprovação.

Considere o conjunto de n números reais positivos $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. A *média geométrica* entre estes n números, indicada por M_g , é definida como sendo a raiz n -ésima do produtório destes valores, ou seja,

$$M_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

A média geométrica entre os elementos do conjunto $\{1, 1, 2, 8\}$ é $M_g = \sqrt[4]{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Assim como observado para a média aritmética, a média geométrica é sempre um número compreendido entre o menor e o maior valor do conjunto. Não exibiremos a demonstração desta propriedade, mas é possível atestar esta propriedade utilizando argumentos análogos aos adotados para a média aritmética, obviamente adaptando-os às novas operações inerentes à média geométrica.

Além disso, é interessante notar que a Média Geométrica (M_g) é sempre menor ou igual que a Média Aritmética (M_a), quando calculadas sobre o mesmo conjunto. Tomando novamente o conjunto $\{1, 1, 2, 8\}$, temos que a sua média geométrica é igual a $M_g = 2$, enquanto a sua média aritmética vale $M_a = 3$, ou seja, $2 = M_g \leq M_a = 3$. Essa é uma característica inerente a essas duas médias, chamada de *Desigualdade das Médias*. A seguir apresentamos uma demonstração para esta desigualdade.

*Demonstrando a Desigualdade das Médias*¹.

Inicialmente provaremos a desigualdade das médias para apenas dois elementos, isto é, consideraremos $X = \{x, y\}$, $x > 0$ e $y > 0$. Partiremos da seguinte desigualdade:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ temos que } (a - b)^2 \geq 0.$$

Tomando $a = \sqrt{x}$ e $b = \sqrt{y}$, temos:

¹ A presente demonstração foi proposta pelo professor Fábio Henrique em seu curso para OBMEP e está disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=da1prIpZniQ> (SOUZA, 2016).

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \iff x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0 \iff x + y \geq 2\sqrt{xy} \iff \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Portanto, chamando as Médias Aritmética e Geométrica de M_a e M_g , respectivamente, concluímos que:

$$M_a \geq M_g.$$

A conclusão que chegamos é válida somente para um par de números reais positivos. Para generalizá-la usaremos o Lema 1.

Lema 1 *Seja dado um conjunto de n números reais positivos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Se $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$, então $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$.*

O leitor mais atento irá perceber que estamos discutindo a desigualdade das médias para números estritamente positivos. Convém observar que o objetivo desse capítulo é dar-nos embasamento para compreender os conceitos propostos nos Capítulos 3 e 4 sobre Economia e Direito Tributário, onde são discutidos conceitos que se apropriam de números reais essencialmente positivos.

A prova do Lema 1 será dividida em dois casos.

Caso 1. Vamos admitir que n seja igual a 1. Nesta situação teremos uma trivialidade, pois $x_1 = 1$ o que implica em $x_1 \geq 1$, tornando verdadeira a sentença $x_1 \geq 1$.

Caso 2. Neste caso, $n \geq 2$. Aplicaremos o Princípio da Indução Finita sobre n .

Provando para base de indução ($n = 2$).

Por hipótese, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ e $x_1 \cdot x_2 = 1$.

Sabemos, pela desigualdade das médias para dois termos, que $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}$. Portanto, $x_1 + x_2 \geq 2$.

Algumas considerações antes de prosseguirmos para próxima etapa do Princípio da Indução Finita:

- No produtório $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ deverá haver pelo menos um elemento x_i maior do que 1, pois caso contrário, esse produtório deveria resultar em um número menor do que 1;
- Também há, no produtório $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$, pelo menos um elemento x_i menor do que 1, pois caso contrário, esse produtório deveria resultar em um número maior do que 1;
- Tomemos, sem perda de generalidade, $x_k > 1$ e $x_{k+1} < 1$, o que nos dá que $(x_k - 1) > 0$ e $(1 - x_{k+1}) > 0$. Segue que:

$$(x_k - 1)(1 - x_{k+1}) > 0 \Rightarrow x_k + x_{k+1} - x_k \cdot x_{k+1} - 1 > 0 \Rightarrow x_k + x_{k+1} - x_k \cdot x_{k+1} > 1.$$

Retomando a prova do Lema 1, caso 2 ($n \geq 2$). Vamos provar que ele vale para $n = k + 1$.

Vamos admitir, por hipótese de indução, que se $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k = 1$, então $x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k$ é válido, para em seguida, provar que também é válido para $n = k + 1$.

Inicialmente considere que $x_k \cdot x_{k+1}$ representa um único termo no desenvolvimento $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$. Digamos que $(x_k \cdot x_{k+1}) = x_\theta$. Portanto, as Equações (2.5) e (2.6), a seguir, são equivalentes.

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot (x_k \cdot x_{k+1}) = 1. \quad (2.5)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_\theta = 1. \quad (2.6)$$

Segue, pela hipótese de indução, aplicada à Equação (2.6) que:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_\theta \geq k \iff x_1 + x_2 + \dots + x_k \cdot x_{k+1} \geq k.$$

Daí:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} &\geq k - (x_k \cdot x_{k+1}) \\ x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} &\geq k - (x_k \cdot x_{k+1}) + x_k + x_{k+1} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} &\geq k + (x_k + x_{k+1} - x_k \cdot x_{k+1}) \end{aligned}$$

Na penúltima linha adicionamos $x_k + x_{k+1}$ a cada um dos membros da desigualdade. Mas lembremo-nos que pelo terceiro item destacado anteriormente, $x_k + x_{k+1} - x_k \cdot x_{k+1} > 1$. Portanto, podemos garantir que $x_k + x_{k+1} - x_k \cdot x_{k+1} = 1 + \alpha$. Logo,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} \geq k + (x_k + x_{k+1} - x_k \cdot x_{k+1}) \iff x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1 + \alpha,$$

o que garante a veracidade do Lema 1.

Agora, estamos em condições de retomar a demonstração da Desigualdade das Médias. Partimos da média geométrica para n elementos a fim de prosseguirmos com a demonstração.

$$M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \iff M_g^n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n.$$

$$1 = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{M_g^n} \iff 1 = \frac{x_1}{M_g} \cdot \frac{x_2}{M_g} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{M_g}.$$

Pelo Lema 1, temos que:

$$\frac{x_1}{M_g} + \frac{x_2}{M_g} + \dots + \frac{x_n}{M_g} \geq n.$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq M_g \cdot n.$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq M_g.$$

Portanto, podemos concluir que:

$$M_a \geq M_g.$$

O conhecimento das Médias Geométrica e Aritmética é importante porque as técnicas de cálculo do PIB apresentadas mais a frente são uma aplicação dessas duas médias. Veremos que a depender da técnica aplicada poderemos ter o PIB ligeiramente maior ou menor.

2.3.1 Uma Consideração Importante Sobre Ambas as Médias

Calculada uma determinada média, seja ela geométrica ou aritmética, podemos raciocinar que cada um dos elementos x_n utilizados para calculá-la poderiam ser substituídos por ela. Na média Aritmética, por exemplo:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} \Leftrightarrow \frac{\bar{x} + \bar{x} + \dots + \bar{x}}{n} = \frac{n \cdot \bar{x}}{n} = \bar{x} \quad (2.7)$$

Do mesmo modo também temos essa relação de equivalência na média geométrica:

$$M_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{M_g \cdot M_g \cdot M_g \cdot \dots \cdot M_g} = \sqrt[n]{M_g^n} = M_g$$

2.4 O Conceito de Função

Dicitar o conceito de função requer o domínio de alguns conceitos primitivos em Matemática como o de Conjuntos e o de Conjuntos Numéricos. Tais conceitos serão admitidos de conhecimento prévio do leitor.²

Dados os números reais a e b , o conjunto binário formado por estes valores de modo que a ordem em que cada número ocupa é relevante é chamado de *Par Ordenado*. Quando a

² Caso o leitor tenha dificuldades com esses temas é sugerida a consulta de GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra**. Impa, 3 ed. 1995. e (LIMA et al., 2020). **A Matemática do Ensino Médio. Volume 1**. Rio de Janeiro. Editora SMB, 2020.

ocupar a primeira posição (ou primeira coordenada) e b ocupar a segunda posição (ou segunda coordenada) obtemos o par ordenado indicado por (a, b) . Além disso, se a, b, c e d são números reais, então $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow [a = c \text{ e } b = d]$. Desta maneira o par ordenado $(1, 3)$ é distinto do par ordenado $(3, 1)$.

O conceito de par ordenado norteia o conceito de produto cartesiano. Se A e B são conjuntos não vazios, então o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) em que $x \in A$ e $y \in B$ é chamado de *Produto Cartesiano* de A por B e é representado por $A \times B$. Formalmente, o produto cartesiano de A por B é definido por:

$$A \times B = \{(x; y) | x \in A, y \in B\}.$$

Se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, completa-se a definição de produto cartesiano com:

$$A \times B = \emptyset.$$

O produto cartesiano $A \times B$, sendo $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 5\}$, é dado por $A \times B = \{(2, 1), (2, 5), (4, 1), (4, 5), (6, 1), (6, 5)\}$.

Dados os conjuntos A e B uma *Relação em* \mathbb{R} de A em B (ou de A para B) é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Considerando os conjuntos A e B do exemplo anterior, os subconjuntos de $A \times B$ são:

$$R_1 = \{(2, 1), (2, 5), (6, 1)\};$$

$$R_2 = \{(2, 5), (6, 5)\};$$

$$R_3 = \{(4, 1)\};$$

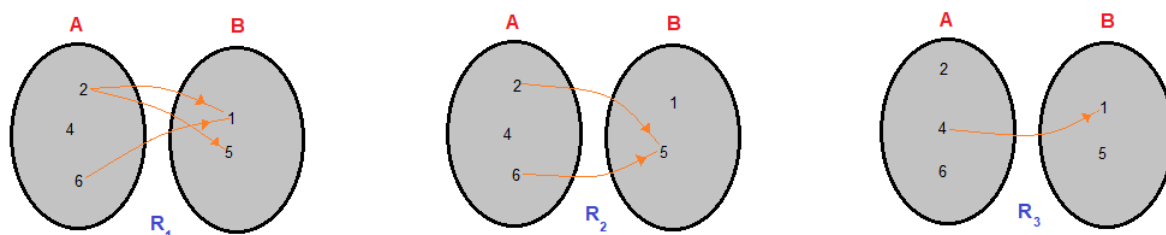
$$R_4 = \emptyset;$$

$$R_5 = A \times B.$$

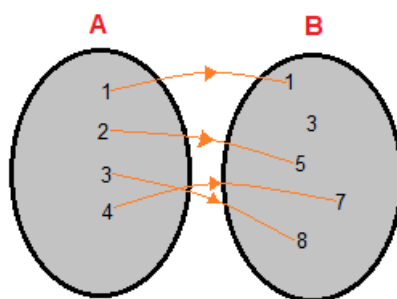
Cada um destes subconjuntos de $A \times B$ são relações de A em B .

As relações de A em B podem ser didaticamente representadas através de Diagramas de Venn (ou diagramas de flechas), de modo que as flechas conectam os elementos que compõem um mesmo par ordenado, seguindo o fluxo de A para B . As relações R_1 , R_2 e R_3 do exemplo anterior são representadas graficamente através da Figura 2.

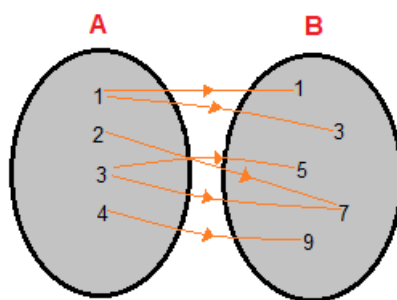
Uma relação de A em B estabelece uma *correspondência* entre estes conjuntos, de modo que os elementos do conjunto A associam-se aos elementos do conjunto B . Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, é possível definir inúmeras correspondências entre estes conjuntos. As Figuras 3, 4 e 5 representam três destas correspondências.

Figura 2 – Esquema das Relações R_1 , R_2 e R_3 

Fonte: Adaptado de Neto et al., (2010).

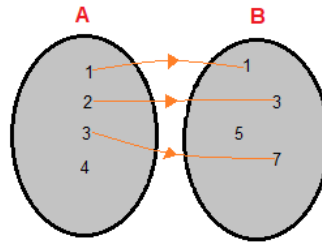
Figura 3 – 1ª Correspondência - Relação R_1 de A em B 

Fonte: Adaptado de Neto et al., (2010).

Figura 4 – 2ª Correspondência - Relação R_2 de A em B 

Fonte: Adaptado de Neto et al., (2010).

Na 2ª correspondência há elementos de A que se correspondem a mais de um elemento de B . De fato, ao elemento $1 \in A$ estão associados os elementos 1 e 3 de B . Na 3ª correspondência, isto não ocorre, mas, por outro lado, temos um elemento, $4 \in A$, que não possui correspondente em B . Por outro lado, na 1ª correspondência, todos os elementos de A possuem um único correspondente em B . Esse tipo de correspondência dá origem ao conceito de *função*, que visitaremos a seguir.

Figura 5 – 3ª Correspondência - Relação R_3 de A em B 

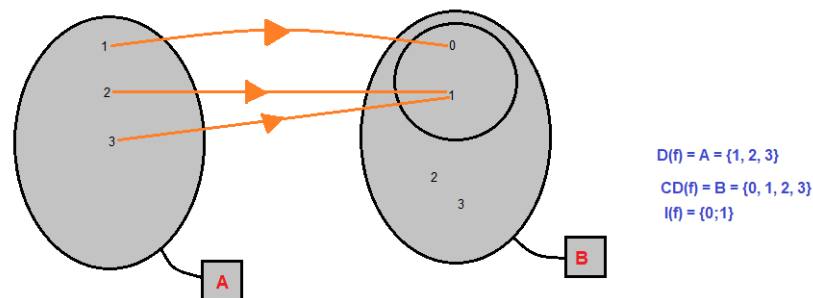
Fonte: Adaptado de Neto et al., (2010).

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma *Função* f de A em B (ou de A para B) é uma correspondência que associa a cada elemento de A exatamente 1 elemento de B . Em outras palavras, definimos uma função f de A em B como sendo uma relação de A em B de modo que todo elemento x de A se corresponde a exatamente um elemento y de B . Neste caso, dizemos que $y \in B$ é a imagem do elemento $x \in A$ pela função f ou que y é o valor da função f em x , indicado pela notação $y = f(x)$.

Uma função f de A em B é abreviada por $f : A \rightarrow B$. Neste caso, dizemos que o conjunto A é o *Domínio* da função f , representado por $D(f)$, enquanto o conjunto B é chamado de *Contradomínio* da função f , representado por $CD(f)$. Além disso, o conjunto de todos os elementos do contradomínio B que são imagens de algum elemento de A é dito *Conjunto-Imagem* de f , representado por $I_m(f)$. Em notação matemática, o conjunto-imagem é definido por:

$$I_m(f) = \{y \in B / \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

Um exemplo destas definições pode ser explorado considerando $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ e a função $f : A \rightarrow B$, definida por $f(1) = 0$, $f(2) = f(3) = 1$, como indicado através da Figura 6. Neste exemplo, $I_m(f) = \{0, 1\} \subset CD(f) = B$.

Figura 6 – Diagrama da função $f : A \rightarrow B$ 

Fonte: Adaptado de Neto et al., (2010).

De acordo com (LIMA et al., 2020), a definição de uma função de A em B como um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ com a propriedade de que cada elemento de A se corresponde (ou se associa) a exatamente 1 elemento de B tem o inconveniente de ser formal, estática e não transmitir a ideia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência (uma grandeza em função de outra) ou resultado de um movimento. Ainda acrescentam o seguinte:

Quem pensaria numa rotação como um conjunto de pares ordenados? Os matemáticos e (principalmente) os usuários da Matemática olham para uma função como uma correspondência, não como um conjunto de pares ordenados. Poder-se-ia talvez abrir uma exceção para os lógicos, quando querem mostrar que todas as noções matemáticas se reduzem, em última análise, à ideia pura de conjunto (LIMA et al., 2020), p. 30.

2.4.1 Sobre Funções Reais

Uma *função real de variável real* é uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, em que $A \subset \mathbb{R}$ e os valores de $f(x) \in \mathbb{R}$. Todas as definições a partir de agora dizem respeito às funções reais de variáveis reais, chamadas neste texto abreviadamente de funções.

Uma função é dita *crescente* quando satisfaz a seguinte definição:

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) / x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Similarmente, uma função é dita *decrecente* quando:

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) / x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

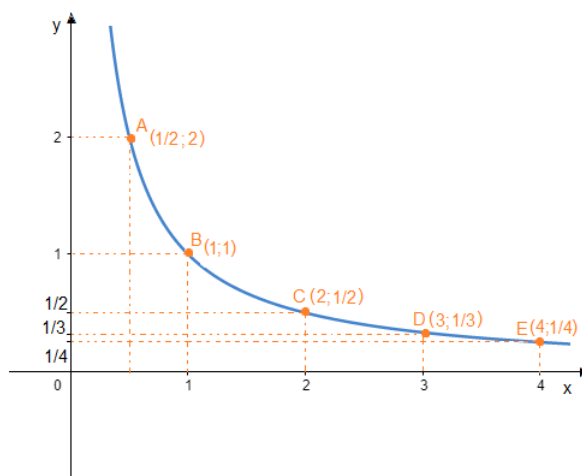
Alguns autores aderem aos conceitos de funções estritamente crescentes ou estritamente decrescentes para as definições dadas acima, enquanto creditam para funções crescentes e funções decrescentes a ideia de monotonicidade. As funções $f(x) = x^2$ ³, $g(x) = e^x$, $h(x) = \log(x)$ são funções crescentes, enquanto as funções $i(x) = \frac{1}{x}$, $j(x) = -x$, $k(x) = -e^x$ são funções decrescentes. Deixamos a cargo do leitor atestar estas classificações para f , g e h .

Segundo (LIMA et al., 2020), um subconjunto qualquer de $A \times B$ é o *gráfico* de uma relação de A para B . Se esse conjunto cumpre a propriedade de que cada elemento $x \in A$ possui exatamente 1 imagem $y \in B$, então este conjunto também é o *gráfico de uma função* $f : A \rightarrow B$. Em outras palavras, se $f : A \rightarrow B$ é uma função, então fixando um sistema de coordenadas ortogonais xOy o conjunto G de todos os pares ordenados $(x, f(x))$, com $x \in A$ e $f(x) \in B$, é o que chamamos de *gráfico de f* .

³ A função quadrática será crescente no intervalo $[0; \infty]$. Antes disso, no intervalo $[-\infty; 0]$, ela é decrescente. Sendo assim deve-se fazer uma restrição em seu domínio para tê-la estritamente crescente.

A Figura 7 exibe o gráfico da função real $f(x) = 1/x$ de domínio \mathbb{R}_+^* . Neste gráfico cada elemento do domínio se corresponde a um e somente um elemento do contradomínio. Isso ocorre por conta da definição de função que determina que para cada elemento do domínio haja apenas uma única imagem. Por outro lado podemos ver que não há imagem para o elemento zero do domínio, pois o zero não possui inverso multiplicativo.

Figura 7 – Ramo positivo da hipérbole equilátera definida pela função $f(x) = 1/x$



Fonte: O autor, (2021).

Neste trabalho, serão importantes os conceitos de funções afins, de funções quadráticas e de funções definidas por sentenças. Iniciamos a discussão pelas funções afins.

2.4.2 Função Afim

Uma *Função Afim* é uma função definida por:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b$$

Os números a e b são números reais, chamados respectivamente de *taxa de variação* e de *coeficiente linear*. Quando a taxa de variação de um função afim é não nula a lei de formação $f(x) = ax + b$ é um polinômio do 1º grau e neste caso a função afim é chamada de *Função do 1º grau*. Em outras palavras, uma função do 1º grau é definida por:

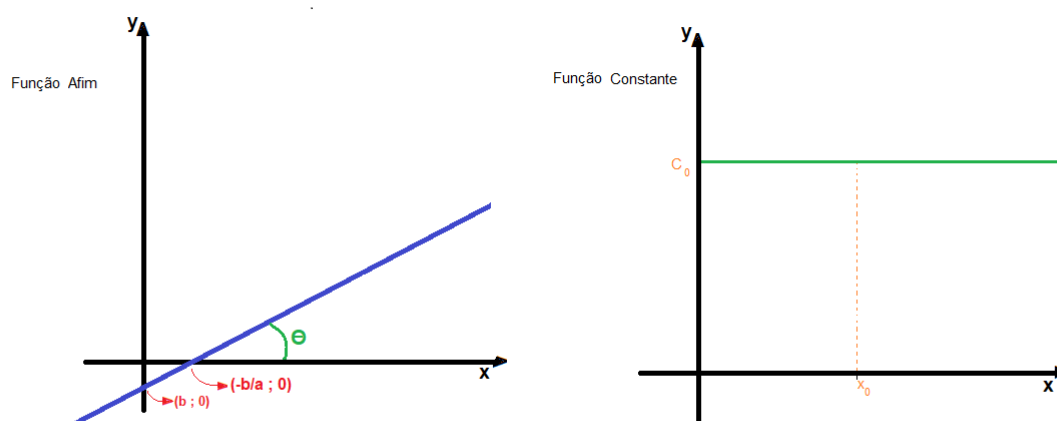
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b, a \neq 0$$

Convém observar que o gráfico de uma função afim é ou uma reta horizontal (quando a sua taxa de variação é nula), ou uma reta crescente (quando a sua taxa de variação é positiva), ou decrescente (quando a sua taxa de variação é negativa).

A Figura 8 explicita os gráficos de uma função afim crescente definida por $f(x) = ax + b$ e de um função afim constante definida por $f(x) = C_0$.

Figura 8 – Gráficos da Função Afim, à esquerda, e da Função Constante, à direita



Fonte: O autor, (2021).

A seguir, algumas considerações sobre os gráficos da Função Afim e da Função Constante exibidos na Figura 8:

1. O ponto onde o gráfico da função afim (a reta azul) corta o eixo O_x é chamado de raiz ou zero da função (definição válida para o gráfico de qualquer função real);
2. A raiz da função afim $f(x) = ax + b$ é dada pela razão $-b/a$;
3. θ é o ângulo que o gráfico da função afim (a reta azul) faz com o eixo O_x . O valor da tangente de tal ângulo é o coeficiente a da lei de formação $f(x) = ax + b$ dessa função (tal coeficiente chama-se *coeficiente angular*⁴);
4. o gráfico da função afim (a reta azul) corta o eixo O_y no ponto de coordenadas $(0, b)$, onde o valor de sua ordenada é o coeficiente linear b da lei de formação da função;
5. Para toda função constante temos que para qualquer x real estará vinculado um único y . Ou seja, em linguagem matemática; $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ temos que $f(x_0) = C_0$ onde C_0 é uma constante.

⁴ Alguns autores observam que o termo coeficiente angular é mais bem empregado quando está associado à reta, enquanto o termo taxa de variação é designado à função. Em síntese, uma função afim possui taxa de variação, enquanto o seu gráfico que é uma reta possui coeficiente angular.

2.4.3 Função Quadrática

Uma *Função Quadrática* é definida a partir de um trinômio do 2^0 grau da seguinte maneira:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax^2 + bx + c,$$

em que a , b e c são números reais e $a \neq 0$.

Em um sistema cartesiano ortogonal xOy , o gráfico da função quadrática é uma *parábola*, que tem como seu eixo de simetria a equação $x = -\frac{b}{2a}$ como eixo de simetria. O ponto $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$, é seu vértice.

Também é relevante observar que a concavidade da parábola é vinculada ao coeficiente a (o valor real que multiplica x^2). Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima, caso contrário, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

Outro aspecto relevante sobre as funções quadráticas diz respeito às suas raízes. Como em qualquer outra função real suas raízes são dadas para os valores reais em que sua lei de formação "zera". Portanto, para descobrirmos as raízes de uma função quadrática, temos que resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Quando $\Delta > 0$ o gráfico possui 2 raízes reais e distintas, quando $\Delta = 0$ o gráfico possui 2 raízes reais e idênticas e quando $\Delta < 0$ o gráfico não possui raiz real.

Além disso, o ponto onde o gráfico da função quadrática corta o eixo das ordenadas tem coordenada $(0, c)$, onde c é o termo independente da função. De fato, para toda função polinomial (função que sua lei de formação é dada por um polinômio), o seu gráfico intersecta o eixo O_y no ponto $(0, a_0)$, onde a_0 é o termo independente da função polinomial de grau n dada por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

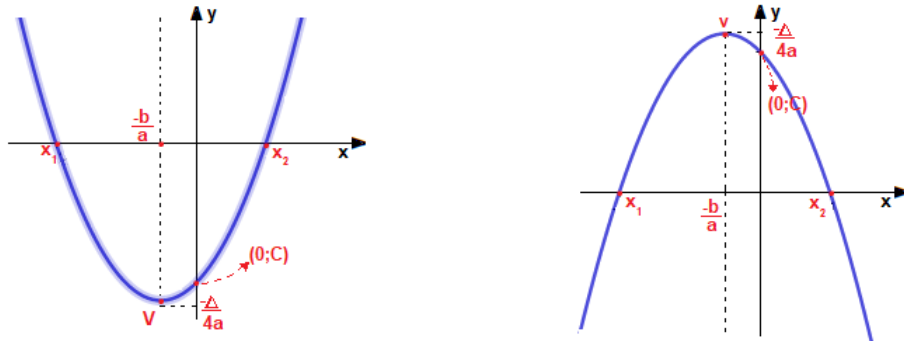
As Figuras 9, 10 e 11 exibem os seis possíveis comportamentos gráficos de uma função quadrática. Convém ressaltar que a função quadrática é também chamada de *Função Polinomial do Segundo Grau*. Alguns professores e autores a chamam simplesmente de função do segundo grau, no entanto essa nomenclatura carrega um erro conceitual, pois os graus são definidos essencialmente para polinômios. Apesar disso, podemos nos referir as funções com tais características como funções polinomiais do 1^0 , 2^0 ou n^0 graus.

Na Figura 9, temos gráficos para as seguintes situações:

Gráfico da Esquerda: $\Delta > 0$; $a > 0$; $I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{-\Delta}{4a}\}$;

Gráfico da Direita: $\Delta > 0$; $a < 0$; $I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{-\Delta}{4a}\}$.

Figura 9 – Gráficos de funções quadráticas



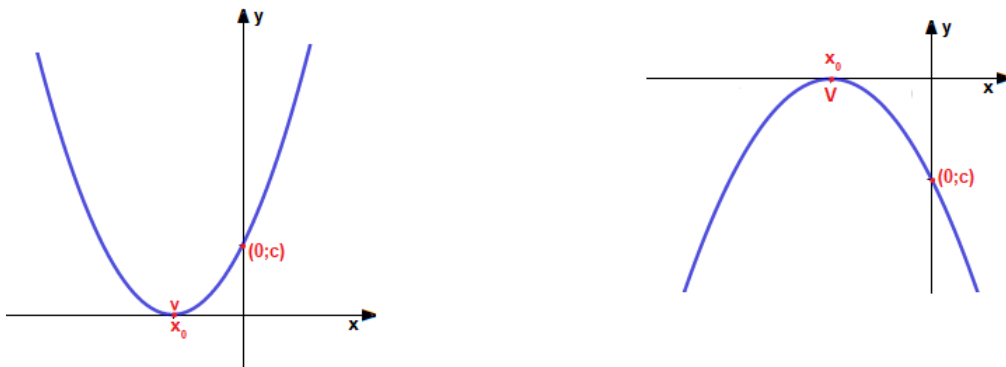
Fonte: O autor, (2021).

Na Figura 10, temos gráficos para as seguintes situações:

Gráfico da Esquerda: $\Delta = 0$; $a > 0$; $I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$;

Gráfico da Direita: $\Delta = 0$; $a < 0$; $I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$.

Figura 10 – Gráfico Da Função Quadrática - II



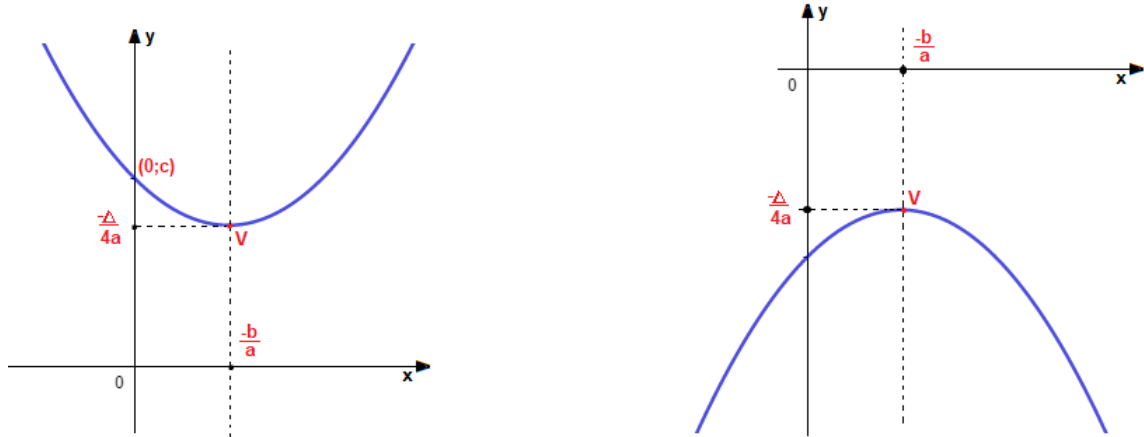
Fonte: O autor, (2021).

Na Figura 11, temos gráficos para as seguintes situações:

Gráfico da Esquerda: $\Delta < 0$; $a > 0$; $I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{-\Delta}{4a}\}$;

Gráfico da Direita: $\Delta < 0$; $a < 0$; $I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{-\Delta}{4a}\}$.

Figura 11 – Gráfico Da Função Quadrática - III



Fonte: O autor, (2021).

2.4.4 Função Definida Por Várias Sentenças

Outra importante classe de funções são as *Funções Definidas por Várias Sentenças*. Estas funções são funções reais de variável real que contém, para diferentes intervalos de seu domínio, leis de formação distintas. Em outras palavras, uma função definida por várias sentenças é dada por:

$$F : [a_1, a_{n+1}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{se } a_1 \leq x < a_2 \\ f_2(x), & \text{se } a_2 \leq x < a_3 \\ f_3(x), & \text{se } a_3 \leq x < a_4 \\ \vdots & \\ f_n(x), & \text{se } a_n \leq x \leq a_{n+1} \end{cases}$$

É importante observar que cada função f_i é uma função real definida no intervalo $[a_i, a_{i+1}] \subset \mathbb{R}$.

O módulo de um número real x , representado por $|x|$, é definido através das sentenças:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

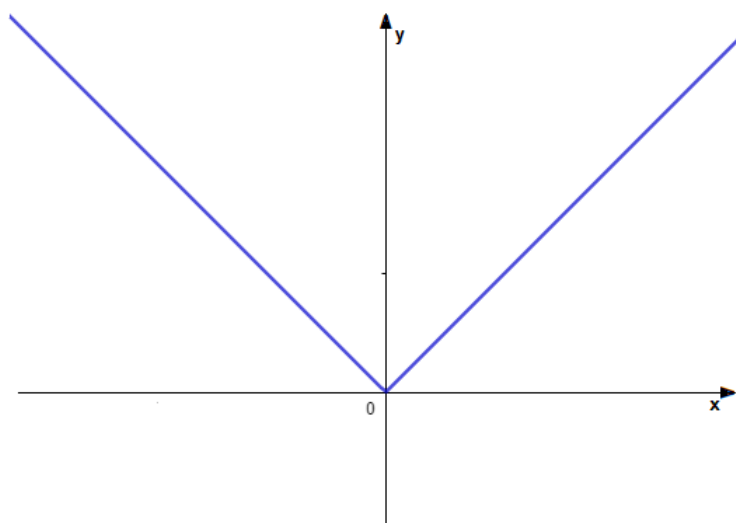
Consequentemente, se definirmos a função modular f por :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = |x|.$$

obteremos uma função definida por várias sentenças, cujo gráfico é dado pela Figura 12.

Figura 12 – Gráfico Da Função Modular



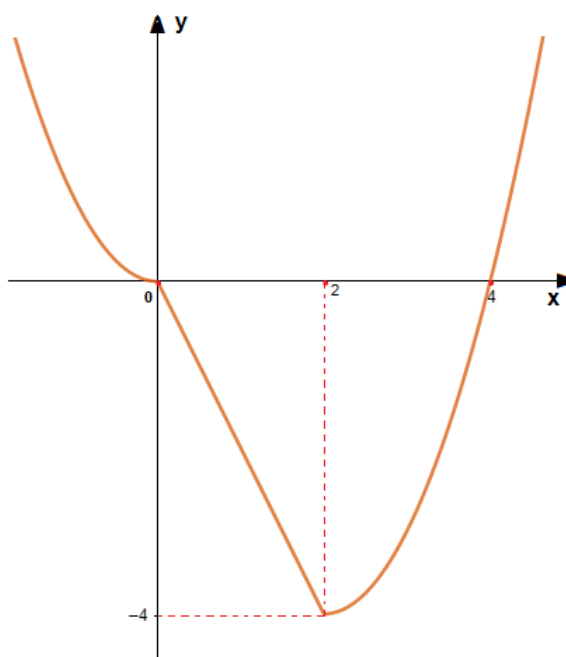
Fonte: O autor, (2021).

Fornecemos ao leitor mais um exemplo de de uma função definida por sentenças, cujo gráfico é dado pela Figura 13.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 0 \\ -2x, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Figura 13 – Gráfico da Função Definida Por Sentenças



Fonte: O autor, (2021).

2.5 Limite De Uma Função Real

Introduzimos agora alguns conceitos de Cálculo Diferencial que são imprescindíveis para a compreensão dos modelos econômicos presentes neste trabalho. Cabe ressaltar que apesar de conteúdos de Cálculo Diferencial não serem previstos diretamente na BNCC e tampouco serem abordados na maioria das escolas, ele são essenciais para Economia, Física, Engenharia e muitas outras ciências (BRASIL, 2020).

Se pudéssemos elencar as maiores criações matemáticas de todos os tempos, sem dúvidas a teoria de limites estaria nesta lista. Boa parte da Matemática Moderna se estrutura na teoria de Limite, cerne do Cálculo Diferencial.

2.5.1 A Ideia Intuitiva de Limite

Seja f uma função real de variável real e x_0 um número real. Se tomarmos valores de x próximos de x_0 , então que número estará próximo da imagem $f(x)$? Desde já é importante advertir que o conceito de limite é um fenômeno local em que consideramos o que ocorre com as imagens de valores que se aproximam cada vez mais de x_0 . Além disso, cabe ressaltar que, em geral, essa aproximação para x_0 pode ser por valores que são menores ou que são maiores que o próprio x_0 .

Exploraremos a ideia de limite a partir de dois exemplos.

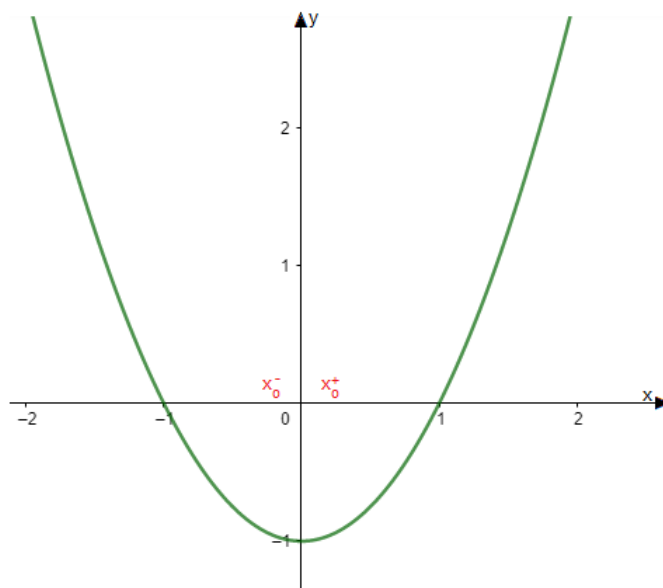
Exemplo 1. Determinar o limite da função quadrática $f(x) = x^2 - 1$ quando x tende a

$x_0 = 0$, isto é, desejamos obter

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x). \quad (2.8)$$

A função real definida por $f(x) = x^2 - 1$ está representada graficamente pela Figura 14.

Figura 14 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - 1$



Fonte: O autor, (2021).

Primeiramente vamos nos aproximar de zero, por valores à esquerda de zero, isto é, por valores menores do que zero e, em seguida, observar o que ocorre com os valores de $f(x)$. Em linguagem matemática, estamos tomando o limite de $f(x)$ quando x tende a 0 pela esquerda de zero, como indicado pela Expressão 2.6.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x). \quad (2.9)$$

Com o auxílio de uma calculadora e da Tabela 1 é possível avaliar e intuir o que ocorre na vizinhança de $f(x)$ quando nos aproximamos de zero por valores à esquerda de zero.

- Neste exemplo, $x_0 = 0$ e quanto mais x se aproxima de $x_0 = 0$, pela esquerda, mais próximo $f(x)$ está de -1 ;
- Nesta Tabela 1 utilizamos a sequência $a_n = -\frac{9}{10^n}$ para nos aproximar de $x_0 = 0$. Deixamos a cargo do leitor obter outra sequência decrescente de valores negativos que converge para zero e verificar o que ocorre com os respectivos valores de $f(x)$.

Tabela 1 – Investigação do limite de $f(x)$ por valores menores que zero

| Valor de X | Valor de $f(X)$ |
|--------------|-----------------|
| -0,9 | -0,19 |
| -0,09 | -0,9919 |
| -0,009 | -0,999919 |
| -0,0009 | -0,99999919 |
| -0,00009 | -0,9999999919 |
| -0,000009 | -0,999999999919 |

Fonte: O Autor, (2021).

Agora, vamos nos aproximar de zero por valores à direita de zero, isto é, por valores maiores do que zero e, novamente, observar o que ocorre com os valores de $f(x)$. Em linguagem matemática, estamos tomando o limite de $f(x)$ quando x tende a $x_0 = 0$ pela direita de zero, como indicado pela Expressão 2.7.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x). \quad (2.10)$$

Novamente com o auxílio de uma calculadora e da Tabela 2 é possível entender o que ocorre na vizinhança de $f(x)$ quando nos aproximamos de zero por valores à direita de zero. Diferentemente do que fizemos anteriormente dessa vez não iremos usar uma sequência bem definida. Iremos utilizar uma sequência decrescente de valores aleatórios.

Mais uma vez quanto mais x se aproxima de $x_0 = 0$, por valores maiores do que zero, mais $f(x)$ se aproxima de -1 .

Portanto, podemos suspeitar que o limite de $f(x)$, quando x tende a $x_0 = 0$, é igual -1 . O que estamos intuindo é uma propriedade bastante relevante da teoria de limites que afirma que se os limites laterais existem e são iguais, então o limite existe e é dado por este valor.

Convém lembrar que neste momento estamos propondo uma reflexão acerca do conceito de limite, por este motivo não estabeleceremos uma resposta formalizada para esta questão. No entanto é razoável sinalizar para o leitor que de fato -1 é a resposta para o limite de $f(x)$, quando x tende a $x_0 = 0$. Além disso, a função considerada é uma função quadrática que é definida para todos os valores de seu domínio e contínua. Neste caso, o cálculo de seu limite se resume a calcular a imagem de $f(x_0)$.

Tabela 2 – Investigação do limite de $f(x)$ por valores maiores que zero

| Valor de X_0 | Valor de $f(X_0)$ |
|----------------|-------------------|
| 0,8 | -0,36 |
| 0,012 | -0,999856 |
| 0,0023 | -0,99999471 |
| 0,00031 | -0,999999039 |
| 0,000069 | -0,999999952 |
| 0,0000072 | -0,999999994816 |

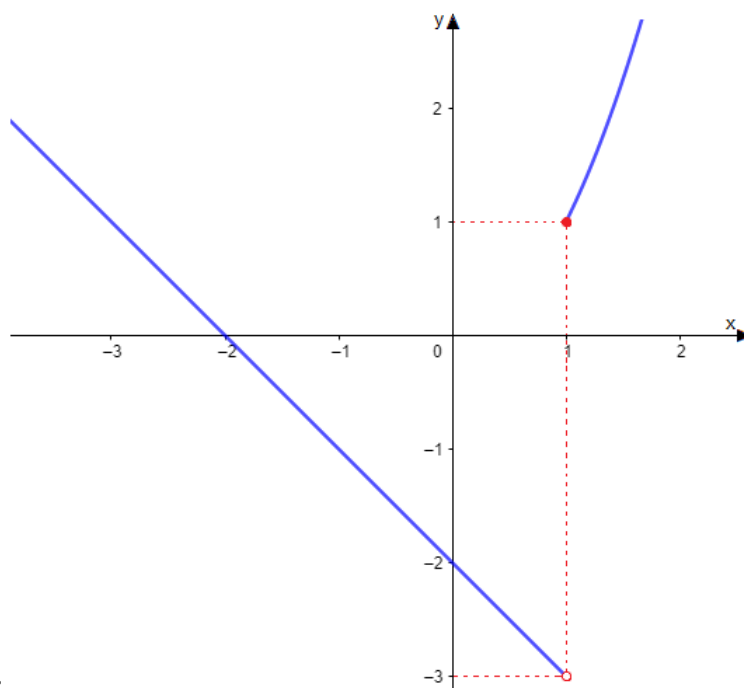
Fonte: O Autor, (2021).

Exemplo 2. Neste exemplo, a função que iremos investigar é dada por:

$$g(x) = \begin{cases} -x - 2, & \text{se } x < 1 \\ x^2, & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

cujo gráfico é dado pela Figura 15.

Figura 15 – Gráfico da função $g(x)$



Fonte: O autor, (2021).

Desejamos calcular o limite de $g(x)$ quando x tende a 1, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x). \quad (2.11)$$

Inicialmente vamos tomar o limite por valores menores do que 1. Com o auxílio de uma calculadora montamos a Tabela 3.

Tabela 3 – Investigação do limite de $g(x)$ por valores à esquerda de 1

| Valor de X_0 | Valor de $g(X_0)$ |
|----------------|-------------------|
| 0,000001 | -2,000001 |
| 0,000025 | -2,000025 |
| 0,000315 | -2,000315 |
| 0,00412 | -2,00412 |
| 0,0812 | -2,0812 |
| 0,99 | -2,99 |

Fonte: O autor, (2021).

Quando x tende a 1 pela esquerda, $g(x)$ se aproxima de -3 , ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -3. \quad (2.12)$$

A Tabela 4 avalia o limite de $g(x)$ quando x tende a 1 pela direita.

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1. \quad (2.13)$$

Tabela 4 – Investigação do limite de $g(x)$ por valores à direita de 1

| Valor de X_0 | Valor de $g(X_0)$ |
|----------------|-------------------|
| 1,999999 | 3,999996 |
| 1,087921 | 1,1835721022 |
| 1,003251 | 1,006512569 |
| 1,000421 | 1,0008421772 |
| 1,000012 | 1,0000240001 |
| 1,000001 | 1,000002 |

Fonte: O autor, (2021).

Resumidamente, temos o seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x). \quad (2.14)$$

Neste caso, é possível assegurar que o limite desejado não existe, pois os limites laterais retornam valores distintos.

Exemplo 3. Calcular o limite da função linear $f(x) = x$ quando x tende a 0.

Observe que como a função contínua f está definida em $x_0 = 0$ e zero pertence ao seu domínio, basta calcular $f(0)$ para acessar o limite desejado:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0. \quad (2.15)$$

Exemplo 4. Considere a função $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ definida para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Desejamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x). \quad (2.16)$$

Apesar da função não estar definida para $x = 1$, é possível remover esta descontinuidade fatorando o numerador e simplificando a expressão:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = (x + 1).$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2. \quad (2.17)$$

Uma ressalva importante a fazer é que $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq h(x) = (x + 1)$, pois as funções têm domínios distintos, apesar de seus limites, quando x tende a 1, serem iguais.

Exemplo 5. Calcular o limite,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 2} - \sqrt{x}. \quad (2.18)$$

Se tentarmos substituir x por $+\infty$ obtemos uma indeterminação. É necessário trabalhar essa expressão a fim de conseguirmos uma nova expressão que torne mais acessível o cálculo do limite. Multiplicando toda a expressão pelo seu conjugado, isto é, por $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x}$, obtemos o seguinte:

$$\sqrt{x + 2} - \sqrt{x} = (\sqrt{x + 2} - \sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x}} = \frac{x + 2 - x}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x}}.$$

Substituindo x por valores cada vez maiores é possível entender que este limite tenderá a zero. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 2} - \sqrt{x} = 0. \quad (2.19)$$

É vital observar que infinito (representado pelo símbolo ∞) não é um número, infinito representa, neste caso, uma ideia e quando aplicado ao limite corresponde ao que acontece a expressão quando x alcança valores positivos muito grandes, tão grandes quanto se queira.

Exemplo 6. Determinar o limite,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}. \quad (2.20)$$

Para este limite utilizamos a expansão do Binômio de Newton, ou seja,

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{n-i} a^{n-i} \cdot b^i. \quad (2.21)$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}h + \binom{n}{n-2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{0}h^n - x^n}{h}. \quad (2.22)$$

Daí podemos simplificar x^n com $-x^n$, obtendo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{n-1}x^{n-1}h + \binom{n}{n-2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{0}h^n}{h}. \quad (2.23)$$

Pondo h em evidência no numerador e no denominador

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n-2}x^{n-2}h + \dots + \binom{n}{1}xh^{n-2} + \binom{n}{0}h^{n-1}}{1} \cdot \frac{h}{h}. \quad (2.24)$$

Logo, todas as parcelas que são multiplicadas por potências de h irão tender a zero (estarão tão próximas de zero quanto se queira). Sendo assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \binom{n}{n-1}x^{n-1} = nx^{n-1}. \quad (2.25)$$

Tendo apresentado a ideia do conceito de limite e o cálculo de alguns limites simples, vamos nos debruçar na definição formal de limite.

2.5.2 A Definição Formal de Limite

A definição formal de limite requer o domínio de muitos conceitos previamente discutidos. Dentre estes conceitos prévios destacamos o conceito de módulo

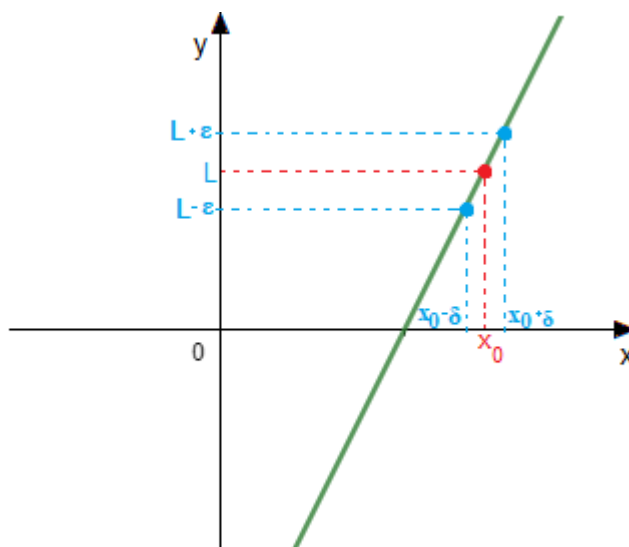
⁵ de um número real que estrutura fortemente o conceito formal de limite. A seguir apresentamos a definição formal de limite de uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } |f(x) - L| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x - x_0| < \delta. \quad (2.26)$$

Isto nos diz que para um determinado raio $\epsilon > 0$, na imagem de f , existirá um raio $\delta > 0$, no domínio de f , de modo que os valores que estão dentro do intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, exceto possivelmente x_0 , são levados, pela função f , em valores contidos no intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$. Existem muitas outras visões semânticas para a definição de limite de uma função, no entanto independente da interpretação é importante destacar que esta é uma definição que leva em conta o comportamento nas vizinhanças de x_0 e de L .

O Gráfico 16 ilustra parte da definição formal de limite.

⁵ Sugerimos ao leitor que consulte (LIMA et al., 2020) para um estudo mais aprofundado das definições, propriedades e inequações sobre módulo de um número real.

Figura 16 – Cercas de raio δ em torno de x_0 e de raio ϵ em torno de L 

Fonte: O autor, (2021).

Ao leitor interessado em se aprofundar nos conceitos que cerceiam o conceito de limite sugerimos a consulta de (NETO et al., 2010).

Vamos retomar dois exemplos propostos na Seção 2.9.1 e resolvê-los a partir da definição formal de limite. Fica a cargo do leitor formalizar a solução dos demais exemplos da seção anterior.

Exemplo 1. Mostrar que o limite de $f(x) = x^2 - 1$ quando x tende a 0 é igual a -1, isto é, desejamos provar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1, \quad (2.27)$$

ou seja, $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |x^2 - 1 - (-1)| < \epsilon$.

Com efeito, dado $\epsilon > 0$ é possível tomar $\delta = \sqrt{\epsilon} > 0$, satisfazendo $0 < |x - 0| < \delta = \sqrt{\epsilon} \Rightarrow 0 < |x| < \sqrt{\epsilon} \Rightarrow 0 < |x|^2 < \epsilon \Rightarrow 0 < |x^2| < \epsilon \Rightarrow |x^2| < \epsilon \Leftrightarrow |f(x) - (-1)| < \epsilon$.

Isto assegura, de fato, que o limite desejado é igual a -1.

Exemplo 4. Dada a função $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ definida para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, desejamos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2. \quad (2.28)$$

O objetivo é provar que para todo ϵ positivo existe um número δ também positivo, em função de ϵ , de modo que $0 < |x - 1| < \delta$ implique em $|g(x) - 2| < \epsilon$.

Com efeito, dado $\epsilon > 0$ basta tomar $\delta = \epsilon$ de modo que $0 < |x - 1| < \delta = \epsilon \Rightarrow |g(x) - 2| < \epsilon$, pois $|g(x) - 2| = \left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| = \left| \frac{x^2-1-2x+2}{x-1} \right| = \left| \frac{(x-1)^2}{x-1} \right| = |x - 1| < \epsilon$.

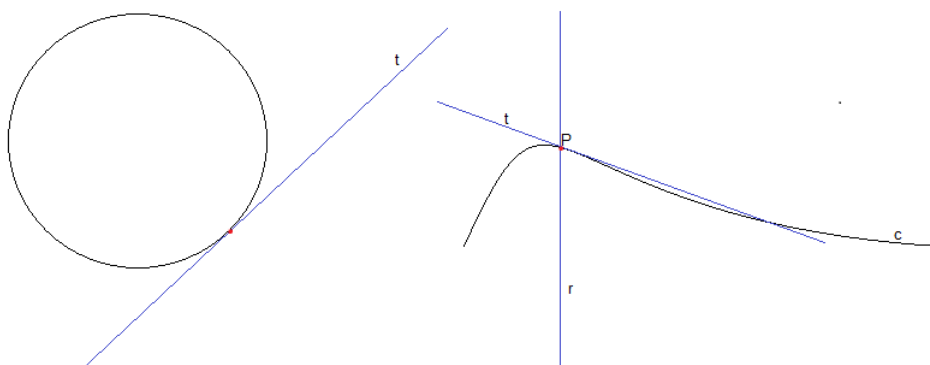
Estamos aptos a estudar outro conceito matemático fundamental para o pleno desenvolvimento deste trabalho: o conceito de derivada.

2.6 O Conceito de Derivada

O problema de determinar uma reta tangente a uma curva em um de seus pontos é um dos problemas que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial. Este problema motivou inúmeras soluções particulares até que o Cálculo Diferencial, por volta do Século XVIII, consolidou uma resposta definitiva e geral para esta questão.

A reta tangente a uma determinada curva, passando por um de seus pontos, pode ser entendida como sendo uma reta que se confunde com a curva naquela ponto, se aproximando da curva. O intervalo analisado neste caso, em torno do ponto, é muito pequeno nos forçando a pensar que a curva e a reta se confundem. É possível obter esta reta tangente através da primeira derivada da equação da curva a ser tangenciada. A Figura 17 exibe duas situações de retas tangenciando dois pontos de duas curvas. Vamos discutir a solução deste problema, revisitando a equação cartesiana da reta no plano, a fim de promover o estudo do conceito de derivada.

Figura 17 – Curvas e retas tangentes



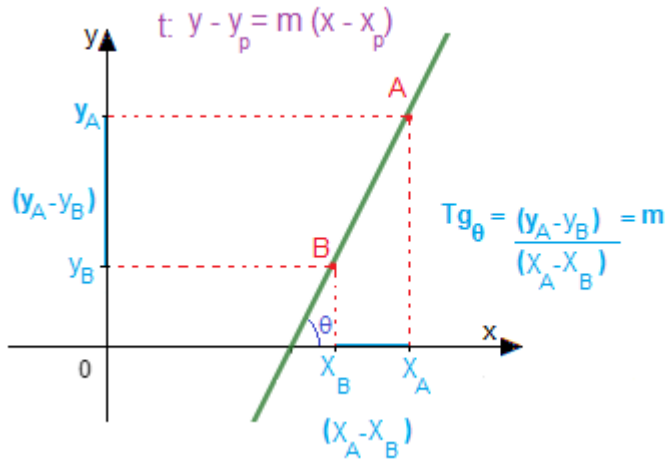
Fonte: O autor, (2021).

Dados dois pontos pertencentes a uma reta é possível acessar sua equação conforme é indicado pela Figura 18. O primeiro passo é calcular a diferença entre suas ordenadas, indicada por Δy , e a diferença entre suas abscissas, indicada por Δx . Após estes cálculos, definimos o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, que corresponde a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas. Vale observar que essa tangente será a mesma para quaisquer dois pontos pertencentes a essa reta.

A partir daí, temos diretamente a equação cartesiana da reta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ ou então } m \cdot \Delta x = \Delta y. \quad (2.29)$$

Figura 18 – Equação Cartesiana Da Reta



Fonte: O autor, (2021).

Ou ainda,

$$m \cdot (x - x_p) = (y - y_p). \quad (2.30)$$

2.6.1 A derivada de uma função

O conceito de derivada é essencial para este trabalho, visto que a partir dele seremos capazes de compreender os conceitos econômicos de Elasticidade e Utilidade Marginal, discutidos no Capítulo 3.

Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. A derivada de f em x_0 , representada por $f'(x_0)$, é definida pelos seguintes limites:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (2.31)$$

Algo importante a se ressaltar é que a derivada é um conceito local, pois decorre do conceito de limite. Além disso, a derivada de uma função f , quando calculada genericamente para um ponto x de seu domínio, gera uma nova função chamada de 1ª derivada de f que usualmente é representada por f' . Se admitirmos que a função f no ponto x é representada por $f(x) = y$, então $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ⁶. Caso venhamos a derivar a primeira derivada de f , ou seja,

⁶ Se $F(x)$ é a primeira derivada de $f(x)$, ou seja $F(x) = f'(x)$, temos que $f(x)$ é dita a função primitiva de $F(x)$. Normalmente só chamada de primitiva. A expressão e o conceito de primitiva é mais utilizado na teoria das integrais, teoria que foge ao escopo do presente trabalho.

caso derivemos f' , iremos encontrar f'' . Se pudermos derivar f n vezes, então obteremos a n -ésima derivada de f , representada por f^n .

Vejam os o cálculo da derivada da função polinomial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^n,$$

sendo $n \in \mathbb{Z}$.

Computaremos a derivada desta função para um valor x_0 arbitrário de seu domínio. Utilizaremos a definição dada pela Equação 2.3.1:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Substituindo $f(x) = x^n$ nesta expressão, obtemos o seguinte limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h}. \quad (2.32)$$

Este limite é o mesmo computado no Exemplo 6 da Subseção 2.5.1. Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \binom{n}{n-1} x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}. \quad (2.33)$$

Podemos concluir que a 1ª derivada da função polinomial definida por $f(x) = x^n$ é dada por $f'(x) = n x^{n-1}$. Além disso, através deste exemplo é possível observar que as funções polinomiais são deriváveis para todos os valores reais.

O cálculo da primeira derivada da função quadrática $f(x) = x^2$ fornece a função afim $f'(x) = 2x$, definida para cada ponto do domínio de f .

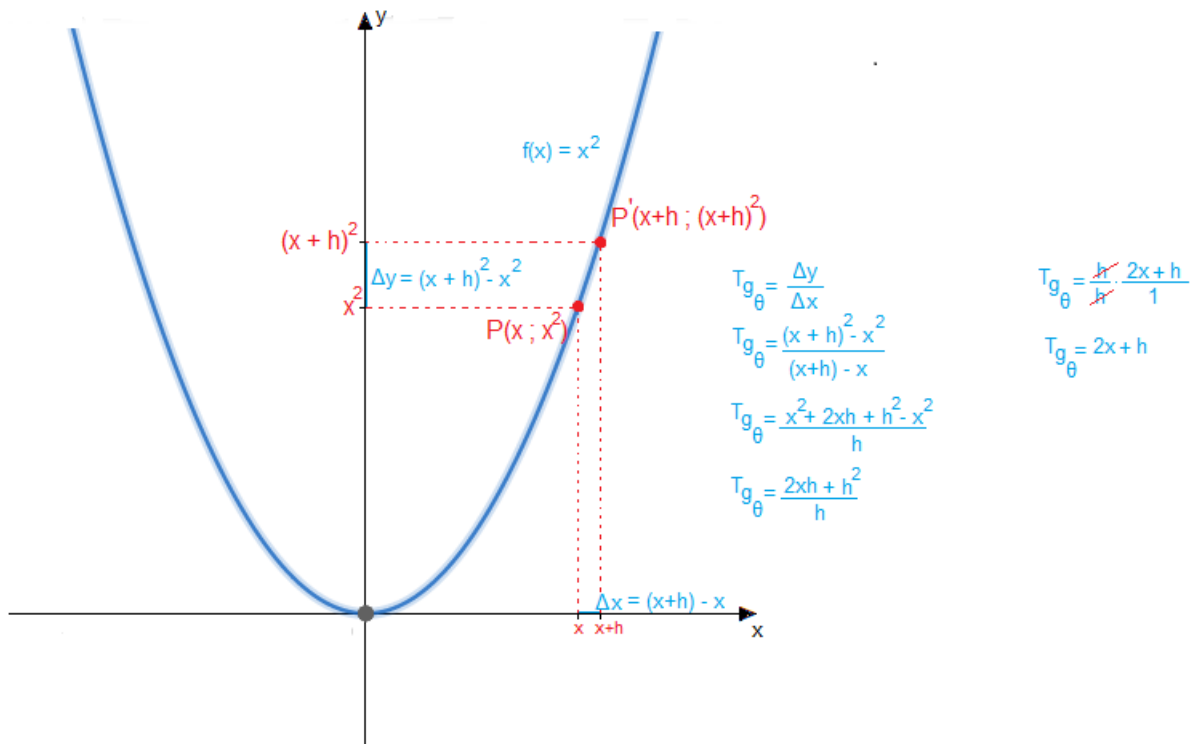
Para este trabalho abordaremos apenas a derivada de funções polinomiais, pois os conceitos econômicos aqui tratados são majoritariamente contemplados por esta classe de funções.

2.6.2 Interpretações da Derivada

Há diferentes interpretações para a derivada. A derivada está intrinsecamente relacionada com o limite de uma sequência de retas secantes, ou seja, a derivada pode ser entendida como sendo a inclinação da reta tangente a um ponto de uma curva. Mais especificamente, dada uma curva do plano e uma reta secante passando por dois pontos P e P' pertencentes a essa curva, podemos imaginar o ponto P' tendendo ao ponto P . Consequentemente, a inclinação da reta PP' alterar-se-á até que atinja o valor do coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto P . Além disso, o coeficiente angular desta reta tangente é dado pela derivada, aplicada no ponto P , da função que descreve a curva dada.

A fim de internalizarmos a ideia de reta tangente a uma curva (definida por uma função), vamos particularizar este problema determinando a equação da reta tangente a uma parábola, passando por um de seus pontos. A parábola representa a curva que é o gráfico da função quadrática definida por $f(x) = x^2$, como ilustrado pela Figura 19.

Figura 19 – Reta tangente à parábola $f(x) = x^2$



Fonte: O autor, (2021).

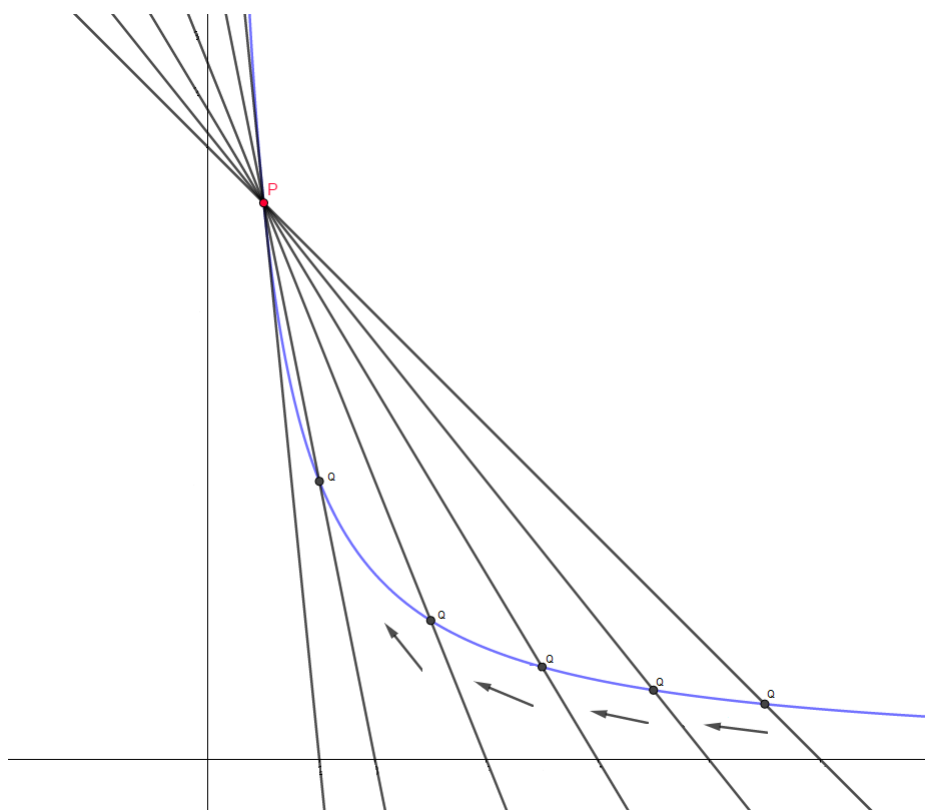
Inicialmente considere os pontos $P(x, x^2)$ e $P'(x+h, (x+h)^2)$. O ponto P' tem um incremento h em sua abscissa em relação à abscissa do ponto P . No caso particular da tangência, podemos imaginar o P coincidindo com o ponto P' . Portanto, o incremento h iria tender a zero na expressão para a tangente de θ , dada por $tg\theta = \frac{2xh+h^2}{h}$, como calculado a seguir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} tg\theta = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x. \quad (2.34)$$

Concluimos que a tangente do ângulo θ , que a reta tangente à parábola $f(x) = x^2$ passando pelo ponto P forma com o eixo O_x , é dada por $2x_p = f'(x_p)$.

Um outro exemplo é dado a partir da Figura 20. Nela, temos a curva definida por $f(x) = \frac{10}{x}$ e uma sequência de retas secantes, cujo limite é a reta que tangencia a curva no ponto $P = (1, 10)$. Convidamos o leitor a verificar que a inclinação da reta tangente a esta curva, neste ponto, corresponde à derivada da função f , que descreve a curva, aplicada no ponto $P = (1, 10)$.

Figura 20 – Sequências de secantes à curva $f(x) = \frac{10}{x}$ que tem como limite a tangente ao ponto $P(1; 10)$



Fonte: O autor, (2021).

Uma segunda interpretação é a derivada como uma taxa de variação. Tomemos o intervalo real $[x_1, x_2]$ pertencente ao domínio de uma função real $f(x)$. Então a variação em x é dada por $\Delta x = x_2 - x_1$, enquanto a variação respectiva em y é dada por $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

A razão entre as variações das ordenadas e das abscissas pode ser expressa pela equação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Esta razão pode ser interpretada como a razão média de variação entre estas grandezas. Caso queiramos a variação instantânea temos que fazer:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (2.35)$$

Portanto, a taxa de variação instantânea é descrita precisamente pela definição de derivada, ou seja, a derivada $f'(a)$ é a taxa de variação instantânea de $y = f(x)$ em relação a x quando $x = a$. Esta relação mostrará o incremento (caso $f'(a) > 0$), ou o decréscimo (caso $f'(a) < 0$), da função no ponto de abscissa a .

Uma Dica Para o Professor

Sabemos que na atual realidade das escolas brasileiras é impraticável o ensino de cálculo diferencial integral na maioria delas. Tirando algumas pouquíssimas instituições de ponta, na

maioria delas até mesmo o ensino de conceitos simples são um enorme desafio para os professores.

Pensando nisso, recomendamos que o professor interessado busque a obra de (MARTINS; GOMES, 2020), de título: "Sobre o Uso da Função Polinômio Derivados e as Funções Polinomiais de 1^o, 2^o e 3^o Graus no Ensino Médio.". Nesse artigo os autores exploram um caminho para se trabalhar derivadas sem a utilização de limites, sendo um excelente caminho para dar uma noção desse importante conhecimento para os alunos do Ensino Básico.

3 CONCEITOS DE ECONOMIA

Economia é a ciência que estuda os processos de produção, distribuição, acumulação e consumo de bens materiais ¹. Através da ciência econômica estaremos aptos a obter informações de como estão sendo processadas as trocas e a produção nas sociedades humanas.

Com essas informações o formulador de políticas públicas pode tentar moldar os processos econômicos de acordo com os interesses vigentes da época. Estes interesses variam de acordo com as forças políticas que dominam o jogo de poder em uma sociedade (como os recursos são escassos, a sociedade nem sempre consegue atender todas as demandas, daí as que serão atendidas são aquelas priorizadas por quem detêm o poder político dentro da sociedade). Deste modo, é notório que economia e política andam entreteçadas ².

A economia é comumente dividida em quatro grandes ramos: macroeconomia, microeconomia, desenvolvimento econômico e economia internacional. A macroeconomia estuda os grandes agregados econômicos, tendo como escopo parâmetros econômicos que são definidos por toda a estrutura econômica como o PIB, o fenômeno inflacionário, o comércio exterior dentre outros pontos regidos pelo comportamento global dos mercados de uma sociedade. Por outro lado, a microeconomia encarrega-se das menores estruturas da sociedade como o comportamento do consumidor, a oferta e demanda dos mercados, comportamento das firmas, dentre outros aspectos inerentes às micro estruturas dos mercados. O desenvolvimento econômico trata da evolução da produção econômica e do bem estar geral de uma população. Por fim, a economia internacional encarrega-se das relações econômicas entre os países e da influência da economia mundial no meio ambiente.

Outro ramo relevante da economia é a econometria que é a aplicação de modelos matemáticos à economia, isto é, a econometria, propõe a compreensão dos fenômenos econômicos observando-os sob modelos matemáticos. Neste capítulo, abordamos os conceitos de PIB e Renda, o Fenômeno Inflacionário, os Títulos do Governo e o Endividamento Estatal, a Lei da Utilidade Marginal Decrescente, o conceito de Elasticidade e a Curva de Laffer.

Para a elaboração do presente capítulo utilizamos como fundamentos teóricos as obras de (CARVALHO, 2017); (MILTONS, 2020) e (WESSELS, 2020).

¹ Existem diversas definições nos variados manuais que tratam dessa ciência, mas sob nosso ponto de vista a definição apresentada é a que melhor se equadra neste trabalho. Essa definição foi formulada por Jean-Baptiste Say (1767-1832), economista francês formulador da lei de say.

² De fato, o ponto determinante para sucesso ou insucesso de um governo durante as eras foi a saúde econômica da sociedade que ele administrou. A relação entre estas duas áreas é tão tênue que temos um campo das ciências sociais para estudá-la, chamada economia política.

3.1 PIB e Renda

O Produto Interno Bruto (PIB) de um país é a soma (em valores monetários) de tudo o que é produzido, em bens e serviços, dentro de suas fronteiras em um determinado intervalo de tempo.

A fim de não termos uma dupla contagem, tal quantificação aplica-se apenas aos produtos finais (a venda de carros usados, por exemplo, não agrega valor ao PIB). Também, com o intuito de excluir a dupla contagem na hora de se quantificar o PIB, não se conta o valor dos bens intermediários, pois esses já foram quantificados quando saíram de sua linha de produção. Para exemplificar, quando um produtor de trigo vende, para a fábrica de farinha, n toneladas desse insumo temos essa produção agregada ao valor do PIB. Quando a fábrica de farinhas utiliza a produção de trigo essa não entra novamente no quantum do produto. Do mesmo modo o pão produzido por essa farinha irá aumentar o PIB, enquanto que a farinha usada em sua produção não irá e assim sucessivamente. O mesmo ocorre com o ferro na linha de produção do aço, com o aço na produção de automóveis e assim por diante ³.

Outro ponto que é importante é o fato de que o produto é quantificado durante certo período de tempo. Geralmente fala-se em produto anual (PIB de 2009, PIB de 2019, PIB de 2020 etc), mas nada proíbe que seja medido em maior ou menor intervalo de tempo.

3.1.1 Renda

Antes de falarmos sobre a renda, faz-se necessário falarmos sobre os fatores de produção. Fator de produção é tudo aquilo que em uma economia é usado para produzir. Apesar dos manuais de economia divergirem podemos destacar o capital, a mão de obra, a tecnologia, os recursos naturais e a capacidade empresarial como os principais fatores de produção.

O capital é tudo aquilo que uma empresa usa para produzir seus bens ou serviços. Em uma revendedora de automóveis o capital seriam os carros, os computadores, as instalações, as peças em estoque para manutenção dos automóveis, etc. Tudo o que for utilizado para a venda dos veículos (excetuando-se os trabalhadores humanos), bem como os próprios veículos, é dito capital. Uma observação importante a ser feita é que para o senso comum capital é apenas dinheiro em espécie. Esse também é capital, mas é apenas um dentre todos os outros itens que viabilizam a atividade do capitalista ⁴.

A mão de obra é a força de trabalho, é o trabalhador humano que irá vender suas horas de trabalho para o seu empregador.

Tecnologia é o estudo da técnica, ou seja, é a maneira como as sociedades irão utilizar os recursos existentes, em especial a mão de obra e o capital na produção de bens e serviços.

³ Há outras maneiras de se calcular o PIB de um país. Mas essa é suficiente para o presente trabalho.

⁴ Outro conceito que deve ser abordado é o conceito de capitalista que corresponde àquele que é dono dos meios de produção e não aquele que simpatiza com o Capitalismo.

Dependendo do nível tecnológico, sociedades com pouca mão de obra e capital podem ser bem mais produtivas do que sociedades que têm esses dois primeiros fatores de produção em abundância.

Recursos naturais correspondem ao que o meio ambiente consegue prover para determinada sociedade. Minério de ferro, petróleo, madeira são só uma pequena amostra de recursos naturais, pois esse rol é enorme. Praticamente tudo o que é processado industrialmente tem a sua origem na natureza. Alguns manuais de economia colocam essa categoria no item capital, no entanto, como os recursos naturais são inicialmente posse do Estado, optamos por colocá-los, neste texto, isolados.

Capacidade empresarial é a vontade e o ímpeto de produzir, é a capacidade de reunir os demais fatores de produção em uma atividade (que chamamos de empresa) a fim de produzir bens e serviços.

De posse dos conceitos que definem os fatores de produção podemos abordar o conceito de renda. Renda é a soma da remuneração dos fatores de produção paga aos agentes de uma economia durante um determinado período de tempo. Na Tabela 5, indicamos o nome de cada uma dessas retribuições.

Tabela 5 – Fatores de produção e suas remunerações

| Fator de Produção | Remuneração |
|----------------------------|---|
| Capital | Juros (se for capital em dinheiro), lucros, dividendos ou arrendamentos (ou aluguel) caso sejam bens de capital |
| Mão de Obra | Salários ou Ordenados |
| Tecnologia | Royalties |
| Terra ou Recursos Naturais | Aluguéis ou Arrendamentos |
| Capacidade Empresarial | Lucros |

Fonte: O autor, (2021)

Por fim, cabe destacar que o Produto Interno de uma economia é igual a sua renda, ou seja, o produto de uma economia estará disponível para o consumo daqueles que a integram. Claro que a distribuição do produto não é equânime, principalmente quando se trata de Brasil. Por sermos um dos países mais desiguais do mundo, temos uma desajustada distribuição de renda (ou de produto). Isso nos leva ao conceito de renda per Capita que corresponde à razão entre a renda de um país e a sua população. Imagine, por exemplo, um país com uma renda de mil unidades monetárias e uma população de 100 habitantes. A divisão da renda per capita seria

de 10 unidades monetárias para cada habitante. Logo, a renda per capita nos leva a saber quanto cada habitante de um determinado país teria em uma distribuição da renda totalmente igualitária.

3.2 O Fenômeno Inflacionário

Inflação é o fenômeno econômico de alta generalizada dos preços em uma economia. Cabe ressaltar que não é o aumento de um ou de alguns poucos bens e serviços, mas sim da maioria dos que compõem a economia. Sem dúvida, alguma inflação é sempre saudável, pois mostra atividade e emprego dos meios econômicos. Por outro lado, nenhuma ou pouca inflação pode indicar desemprego desses mesmos meios e/ou fraca atividade econômica. Observe que emprego e desemprego dos meios econômicos não significa emprego/desemprego exclusivamente do trabalhador, mas sim de todos os meios de produção.

A origem da inflação é comumente dividida em três categorias distintas: demanda, custos e inercial.

A inflação de demanda ocorre quando há escassez de bem em uma economia. Por conta dessa escassez, há uma enorme procura (aumento da demanda), o que faz com que os fornecedores aumentem seus preços. A consequência desse aumento é o aumento da inflação. Na década de 1980, a moeda do Brasil estava muito desvalorizada, muitos produtores brasileiros preferiam exportar do que atender ao mercado interno. Essa prática gerou elevada alta de preços nos produtos implicando em uma das maiores inflações já registradas em nossa história.

A inflação de custos é provocada por conta do aumento dos custos de produção, ou seja, quando os insumos utilizados na fabricação dos produtos ficam mais caros esses custos são repassados ao consumidor final. A energia elétrica e os combustíveis são muito sensíveis a esses aumentos, por exemplo.

Por fim temos a inflação inercial. Nessa espécie de inflação os fornecedores de bens e serviços aumentam seus preços antes mesmo de terem suas margens de lucro reduzidas. Ela resulta de um efeito psicológico de tendências inflacionárias de períodos anteriores. Ou seja, quando uma economia foi por muito tempo suscetível à inflação de demanda ou de custos, ela pode sofrer com a inflação inercial mesmo depois de aquelas duas terem sido resolvidas. Tivemos no Brasil a inflação inercial após a década de 1980, tendo sido controlada após o advento do Plano Real implantado na década de 1990.

3.2.1 O Cálculo da inflação

O cálculo da inflação pelos governos é feito através de institutos nacionais de estatística especializados. No Brasil ele é feito, principalmente, pela Fundação Getúlio Vargas (FGV). Tais cálculos levam em consideração sempre um ano y em relação a um ano x . Por exemplo, se o preço da cesta básica custava, ano passado, R\$100,00 e hoje custa R\$110,00, então o preço desta cesta básica acumulou alta de 10% de um ano para o outro.

A seguir apresentamos dois processos de determinação do Índice de Preços ao Consumidor IPC (a inflação) entre dois anos. O primeiro processo trabalhará com uma média aritmética ponderada, enquanto o segundo com uma média geométrica.

IPC através de média aritmética ponderada

- Para o ano-base determine quais bens as pessoas compram e quanto desses bens é comprado. Calcule o preço dessa cesta de bens para o ano base;
- Calcule o custo dessa cesta para o ano T ;
- O índice de preços para o ano T é dado pela seguinte fórmula:

$$\frac{\text{Custo da cesta no ano } T}{\text{Custo da cesta no ano base}} \times 100.$$

IPC através de média geométrica

- Para cada bem pesquisado divida seu preço no ano de referência pelo seu preço no ano-base. O resultado é uma razão;
- Use a participação do bem, no ano-base, no orçamento do consumidor como expoente da razão anteriormente encontrada. Caso a razão encontrada tenha sido 1,25 e a participação do bem no orçamento do consumidor seja 30%, teremos $1,25^{0,3}$ ou 1,07;
- O índice de inflação será o produto do cálculo executado no item anterior para cada um dos produtos em análise multiplicado por 100.

Problema do Marcelinho. Em 1995, em uma semana típica, Marcelinho comprava dez garrafas de vinho (a \$4,00 cada garrafa) e vinte pizzas (a \$6,00 cada). Em 2000, cada garrafa de vinho passou a custar \$6,00, enquanto cada pizza passou a custar \$8,00. Determinar o índice de preços de Marcelinho para o ano 2000 utilizando 1995 como ano-base.

Solução 1 (IPC pela média aritmética ponderada).

Devemos calcular o preço desta cesta referente aos anos 1995 e 2000.

O preço da cesta em 1995 é dado por $(10 \times 4 + 20 \times 6) = \$160,00$.

Para o ano 2000, temos $(6 \times 10 + 8 \times 20) = \$220,00$.

Por fim, dividimos o valor mais novo pelo mais antigo e multiplicamos o resultado por 100 para determinar o IPC de 2000 tomando o ano de 1995 como ano-base.

$$\frac{220}{160} \times 100 = 137,50.$$

Solução 2 (IPC pela média geométrica).

Inicialmente repare que no ano-base (1995), Marcelinho gastou \$40,00 em vinhos e \$120,00 em pizzas com seu orçamento de \$160,00. Em 2000, os gastos de Marcelinho foram de \$60,00 em vinhos e \$160,00 em pizzas com seu orçamento de \$220,00.

A razão para o gasto com vinho é de $\frac{60}{40} = 6/4 = 1,5$, e para o gasto com pizza é de $\frac{160}{120} = 8/6 = 1,333$. A participação do vinho é de $40/160 = 0,25$, enquanto que a participação da pizza é de $120/160 = 0,75$. Portanto, no passo 2, para o vinho temos $1,5^{0,25} = 1,107$, e para as pizzas temos $1,333^{0,75} = 1,241$. Por fim, temos o índice de preços em 2000 sendo dado por $1,107 \times 1,241 \times 100 = 137,38$.

O índice inflacionário foi calculado com o auxílio de duas ferramentas matemáticas: a média aritmética ponderada e a média geométrica. Demonstramos no Capítulo 2, que a média aritmética é sempre maior ou igual que a média geométrica. Isto nos diz que a depender da ferramenta que se utilize é possível obter um índice inflacionário maior ou menor que o outro.

3.2.2 Três Índices de Preço Principais

O Índice de Preços ao Consumidor (IPC) mede o custo de uma cesta composta de bens e serviços de consumo, enquanto o Índice de Preços ao Produtor (IPP) mede o custo de um cesta de bens produzidos por firmas, principalmente no setor industrial. Esse índice de preços geralmente atua como um indicador antecipado da inflação.

Já o Deflator do PIB mede o preço de todos os bens e serviços produzidos em um país. A cesta é constantemente atualizada para refletir os padrões correntes de gastos (ao contrário do IPC). Os economistas utilizam o deflator do PIB para medir a inflação. Ele cobre mais bens e serviços do que o IPC e o IPP e indica melhor o padrão de gastos correntes.

3.2.3 Inflação Acumulada ao Longo dos Anos

Com o passar dos anos é previsível termos uma inflação acumulada quando adotamos um ano-base distante do ano considerado. Isso ocorre porque o fenômeno inflacionário é contínuo, portanto, em uma economia saudável, é sempre esperado algum vestígio de inflação. Na Tabela 6,

por exemplo, temos os índices inflacionários de 2011 até o ano de 2020 bem como o acumulado da inflação nesse período.

5

Tabela 6 – Inflação Acumulada de 2011 a 2020

| Ano De Referência | Inflação | Acumulada |
|--------------------------|-----------------|------------------|
| IPC 2020 Brasil | 3,09% | 72,60% |
| IPC 2019 Brasil | 3,74% | 67,43% |
| IPC 2018 Brasil | 3,66% | 61,39% |
| IPC 2017 Brasil | 3,46% | 55,70% |
| IPC 2016 Brasil | 8,77% | 50,49% |
| IPC 2015 Brasil | 9,01% | 38,35% |
| IPC 2014 Brasil | 6,33% | 26,92% |
| IPC 2013 Brasil | 6,21% | 19,36% |
| IPC 2012 Brasil | 5,40% | 12,38% |
| IPC 2011 Brasil | 6,63% | 6,63% |

Fonte: IBGE, (2021).

O Índice Inflacionário Acumulado de um ano é o produto do índice inflacionário daquele ano pelo índice inflacionário do ano anterior. Para chegarmos, por exemplo, ao índice inflacionário acumulado em 2012, multiplicamos $1,0663=1+6,63\%$ por $1,054=1+5,40\%$ (ou seja, o índice mais "um"). Como resultado teremos 1,1238 (aproximadamente). Daí, para obtermos o acumulado em 2013 fazemos novo produto do acumulado em (somado de uma unidade) 2012 pelo índice de 2013 (também somado de uma unidade). Repetimos o processo iteradamente até obtermos o acumulado de 2020.

A partir deste cômputo é possível observar que um bem que, em 2011, tinha o preço de R\$100,00 passará a custar, em 2020, R\$172,60, ou seja, a inflação reduz o poder de compra dos indivíduos no decorrer do tempo, caso não haja reajuste nos salários pelo menos equiparado aos índices inflacionários aferidos no período.

⁵ Os índices inflacionários da tabela abaixo foram retirados do site; <https://www.inflation.eu/pt/taxas-de-inflacao/brasil/inflacao-historica/ipc-inflacao-brasil.aspx>: :text=Tabela%20

3.2.4 Distorções Causadas Pela Inflação

As distorções sobre a renda são sentidas com mais força pelos assalariados, pois essa classe tem seus reajustes salariais praticados de forma periódica, sentindo os efeitos da alta inflacionária através da perda de seu poder de compra. Além disso, esta classe, por ser a que mais aloca grande parte de seus ganhos no consumo, não tem como usar os mecanismos de proteção contra a inflação. Isso aumenta a sua vulnerabilidade em relação a essa distorção.

A Balança de Pagamentos (ou Balanço de Pagamentos) é na economia um instrumento da contabilidade nacional e da economia que contabiliza as relações comerciais de um país com o resto do mundo. Quando há uma alta inflação em um país, temos um efeito parecido com a valorização cambial (valorização da moeda nacional frente a moedas estrangeiras), só que de forma distorcida, tornando o produto nacional mais caro para os compradores estrangeiros. Isso desestimula as exportações e estimula as importações.

Sem mecanismos automáticos de proteção monetária, a alta da inflação pode desestimular a aplicação nos mercados financeiros. O receio é de que os juros oferecidos não acompanhem a inflação e o investimento acabe por apresentar retornos negativos. Esse quadro costuma levar a investimentos em imóveis ou terrenos, que tendem a se valorizar.

O receio de que a inflação possa ser danosa ao ambiente de negócios influencia o comportamento dos empresários, que tendem a reduzir o ritmo de investimentos. Isso pode comprometer a capacidade produtiva da economia, com efeitos depressivos sobre os níveis de renda e emprego.

Via de regra, a cobrança de impostos distorce os incentivos econômicos e resulta em uma alocação menos eficiente de recursos. O fato é agravado na presença da inflação pois, em geral:

i) As leis tributárias não levam em conta a inflação, o que pode provocar superestimação dos ganhos de capital por parte dos investidores do mercado financeiro e, conseqüentemente, um aumento inadequado da carga tributária sobre esses investimentos;

ii) Os impostos levam em consideração os juros nominais da renda das poupanças, ainda que parte dessa renda sirva somente para compensar a perda por conta da inflação. A cobrança de impostos sobre a poupança torna essa forma de investimento bem menos atrativa nas economias instáveis do que nas estáveis.

A essência de eficiência econômica é de maneira simplificada a ideia de que é impossível beneficiar uma parte da economia sem prejudicar outra.

Em economias com inflação descontrolada os governos tendem a emitir mais moedas para financiar seus gastos. Essa emissão de moedas gera mais pressão inflacionária que acaba por gerar um ciclo onde a população tende a perder cada vez mais com a corrosão da moeda

gerada pela inflação. Tal perda de poder aquisitivo pode ser vista como uma tributação sobre a posse da moeda. A esse efeito chamamos de Imposto Inflacionário.

Como essa emissão de moeda faz com que o governo financie seus gastos, se torna muito difícil ele sair de hiperinflações. Esse foi um dos motivos que levaram nosso país a ter índices altíssimos de inflação durante a década de 80 e início da década de 90.

3.3 Títulos do Governo e Endividamento Estatal

O Estado⁶ tem uma capacidade limitada de gerar recursos econômicos. Apesar de ter patrimônio próprio e controlar grande parte dos recursos naturais em seu território, não será ele o gerador de produtos e serviços (até porque o Estado é uma ficção jurídica que se materializa pelo agir daqueles que para ele trabalham). Quem gera esses são os indivíduos com a sua força de trabalho. Logo, o Estado terá que se financiar de algum modo a fim de cumprir suas obrigações constitucionais (as obrigações do Estado Brasileiro estão previstas em sua constituição).

O principal modo de financiamento Estatal é a arrecadação tributária (falaremos sobre este mecanismo no Capítulo 4). Mas os tributos seguem normas para serem arrecadados. Eles têm prazos e são em quantum variável, ou seja, não há como saber o valor exato da arrecadação antes de sua efetivação. Sendo assim é necessário que a Administração Pública tenha outro modo de financiamento a fim de fazer frente a gastos imprevisíveis ou a períodos de baixa arrecadação. Essa forma é a emissão de títulos públicos.

Um Título Público é um certificado de dívida do Estado para com indivíduos ou empresas. Através desse certificado o credor pegará, em um determinado prazo, o valor que ele pagou pelo título acrescido de juros e correção monetária. Os títulos públicos são uma das formas do Estado se financiar e também são uma maneira do investidor conseguir retorno de um modo absolutamente seguro.

Cabe dizer que todo investimento tem alguma taxa de risco mas a compra de títulos públicos tem um nível muito baixo de risco, pois se o Estado não honrar seus compromissos ele perde uma de suas principais fontes de financiamento o que inviabilizaria a execução de suas atividades. Estados que perdem credibilidade internacional demoram anos para recuperá-la. O Brasil, em 1987, durante a presidência de José Sarney, estendeu indefinidamente o prazo para pagamento de títulos internacionais (títulos públicos que foram vendidos no mercado internacional). Essa ação, chamada de Moratória, foi extremamente danosa para nossa economia, agravando ainda mais a triste situação que nossa nação vivia.

⁶ Estado, nesse trabalho, se refere a toda e qualquer esfera da administração pública.

3.4 O conceito de Utilidade

Utilidade em economia é o grau de satisfação ou rentabilidade que obtemos por usar ou possuir um determinado bem. Logo, tudo aquilo que você usa em sua vida tem algum grau de utilidade. A água que você bebe, as roupas que veste, o filme que assiste e tudo o mais que lhe traz alguma satisfação.

A utilidade de um determinado bem nos modelos econômicos lhe é única e incomparável (dentro do modelo) com outro bem. Por exemplo, não há como comparar a utilidade de um quilo de sorvete com a utilidade de um quilo de arroz. Tal comparação é carregada de subjetividade, o que torna inviável fazermos alguma comparação da utilidade fornecida por diferentes bens. Desse modo, o que os modelos nos trazem é a comparação que obtemos quando consumimos diferentes quantidades de um mesmo bem.

Outro ponto a se dizer é que não há uma unidade padrão de utilidade. Portanto, ela é usada de maneira adimensional nos modelos econômicos, sendo somente vista como um grau de satisfação atribuído ao consumo de um bem.

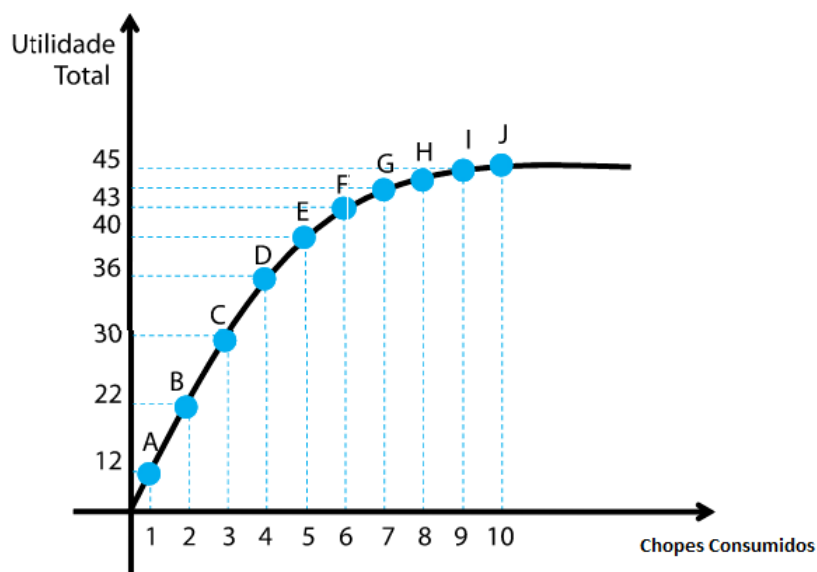
3.4.1 Lei da Utilidade Marginal Decrescente

Imagine a seguinte situação: em um dia bem quente de verão você se senta com alguns amigos pra tomar alguns chopes (se você não for adepto de bebidas alcólicas substitua o chope pela aquela que preferir). O primeiro chope lhe trará uma altíssima satisfação, o segundo também mas um pouco menos do que primeiro e assim sucessivamente até que você se sinta saciado e não peça mais chopes ao garçom. Ou seja, você irá beber chopes até que a sua vontade de tomá-los cesse. Logo, a cada chope tomado a sua vontade de tomá-los será reduzida de maneira que em algum momento ela terminará por completo.

Esse padrão de redução da satisfação ao adquirir algum bem é comum para tudo aquilo que compramos (pelo menos é essa a premissa que precisamos assumir para poder usar esse modelo) e a esse padrão chamamos de *Lei da Utilidade Marginal Decrescente*, ou seja, a utilidade (ou satisfação) adquirida ao se consumir um novo bem é sempre menor do que aquela que nos foi dada no consumo da unidade anterior, como ilustrado pelos Gráficos 21 e 22 para a situação descrita no início desta seção. Trazendo essa ideia para linguagem matemática podemos ver a utilidade marginal como a primeira derivada da função utilidade.

Na Figura 21, temos a utilidade total obtida conforme se consome certa quantidade de chopes. Repare que o primeiro chope adiciona uma total de 12 ao grau de utilidade total. O segundo chope adiciona mais 10 unidades, ou seja, saltamos de uma utilidade total de 12 pontos para 22. Já o terceiro chope eleva a utilidade total obtida para 30 pontos, logo ele acrescentou 8 pontos ao total. O leitor já deve ter percebido que apesar de o total de utilidade estar subindo, ele sobe de maneira mais lenta a cada novo chope consumido, ou seja, cada novo copo de chope adiciona menos utilidade ao total do que seu antecessor. Com isso concluímos que a utilidade

Figura 21 – Gráfico da Função Utilidade Total



Fonte: Adaptado de Milton, (2018).

marginal de um novo copo de chope é decrescente

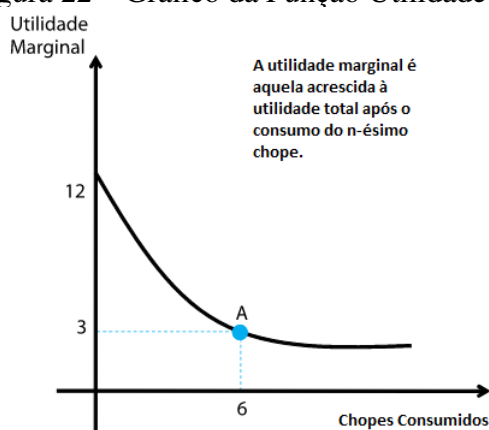
Em economia, marginal é algo que está sendo alcançado, algo que está em nosso horizonte. No nosso exemplo, marginal é o novo acréscimo de utilidade adquirido pelo copo de chope subsequente. O leitor mais atento percebeu que o acréscimo é justamente a taxa de variação da função pelo chope subsequente, ou seja, a primeira derivada.

Na Figura 22, temos a representação gráfica da quantidade de utilidade que o n -ésimo chope adiciona ao total de utilidade. Logo, temos que se a curva do Gráfico 21, que representa o total de utilidade adquirida pelo consumo total de chopes, fosse dada por uma expressão $f(x)$, a curva do Gráfico 22 teria sua expressão matemática dada por $f'(x)$. Por exemplo, se a função de utilidade total é dada por $f(x) = 5 - \frac{5}{x^2}$, então ela terá uma primeira derivada definida por $f'(x) = \frac{10}{x^3}$.

3.4.2 A utilidade da Renda

Uma ideia interessante é pensarmos na renda como um bem. Costumamos ver a renda como algo separado dos demais bens mas a verdade é que ela também é um elemento desse conjunto, e a ela também podemos atribuir um grau de utilidade. Sendo assim ela irá ter seu grau de utilidade modelado pelas funções discutidas anteriormente. Logo podemos compreender que um pequeno aumento salarial, de algumas centenas de reais, traz uma enorme utilidade para um assalariado que recebe um salário mínimo mensalmente. Mas esse mesmo aumento não afeterá em nada a qualidade de vida de nossos bilionários, ou seja: o assalariado terá um enorme acréscimo de utilidade com algumas centenas de reais enquanto que para o bilionário tal

Figura 22 – Gráfico da Função Utilidade Marginal



Fonte: Adaptado de (MILTONS, 2020)

acréscimo será perto de zero.

3.5 Elasticidade

Na ciência econômica, a Elasticidade é o quanto uma determinada variável y é afetada por alterações de uma variável x . Existem diversas espécies de elasticidade mas todas elas envolvem basicamente a mesma ideia. Inicialmente calcula-se a variação percentual na "causa" (variável x) e, em seguida, a variação percentual na "consequência" (variável y). Daí dividimos a variação encontrada para "consequência" pela variação encontrada para "causa". Desta maneira, somos capazes de observar a relação entre variações dessas quantidades, ou seja, a elasticidade E_{xy} é dada por:

$$E_{xy} = \frac{\% \Delta y}{\% \Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{y_0}}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{\frac{(y - y_0)}{y_0}}{\frac{(x - x_0)}{x_0}} = \frac{(y - y_0)}{y_0} \cdot \frac{x_0}{(x - x_0)} = \frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)} = \frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Como y é uma função de x , isto é, $y = f(x)$ é possível reescrever a equação acima da seguinte maneira:

$$E_{xy} = \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Quando x tende a x_0 na expressão acima, obtemos o conceito de Elasticidade Marginal (em economia podemos associar as derivadas aos incrementos marginais), descrita por.:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E_{xy} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Logo temos que a elasticidade em x_0 é dada pelo produto de x_0 com a primeira derivada de x_0 divididos por $f(x_0)$. Desse modo entendemos porque o estudo das derivadas é importante para as teorias econômicas discutidas nesse capítulo. Tal estudo alicerça esse conteúdo bem como a ideia de utilidade marginal

3.5.1 Elasticidade Preço da Demanda

Para este trabalho é fundamental abordarmos um caso especial de elasticidade chamada de Elasticidade Preço da Demanda.

A elasticidade preço da demanda é um conceito importante, pois a tributação ocasiona variações no preço, mas nem sempre toda carga tributária é repassada ao consumidor. Em algumas situações o vendedor do bem ou serviço sofre todo ou o maior impacto da carga tributária. Esse repasse é uma consequência direta de tal elasticidade.

A elasticidade preço da demanda é definida pela razão entre a variação percentual na demanda de determinado produto e a variação percentual de seu preço, ou seja:

$$E_{PD} = \frac{\% \Delta D}{\% \Delta P}.$$

A elasticidade preço da demanda de um bem é afetada por vários fatores, os mais importantes estão descritos e discutidos a seguir:

i. Quanto mais essencial for um bem, mais inelástica ou menos elástica será sua demanda, ou seja, quanto mais necessário for esse bem mais disposto a pagar por esse bem o consumidor estará. Para ilustrar essa situação imaginemos a insulina para um diabético. Nesse caso o consumidor não tem escolha, terá que comprar a insulina seja qual for o seu preço, pois dela depende sua vida. Agora, diferentemente da insulina, pensemos em um perfume. Esse bem tem uma elasticidade muito alta, ou seja, é muito sensível a variações em seu preço pois não se depende desse produto para nossas maiores necessidades;

ii. Quanto mais bens substitutos houver, mais elástica será sua demanda, ou seja, se pudermos trocar um bem "A" por um bem "B", a elasticidade de ambos os bens será alta. Imaginemos agora uma alta no preço da margarina. Isso acarretará em uma queda de suas vendas e um aumento na venda de manteiga. O mesmo não ocorrerá com um medicamento específico para uma determinada doença grave, esse não terá substituto;

iii. Quanto menor o peso do bem no orçamento, mais inelástica será sua demanda. Imaginemos o

aumento de um bem de $R\$1,00$ para $R\$1,20$. Esse aumento, em termos absolutos, é irrisório, apesar de em termos relativos ter sido de 20%. Logo haverá pouco impacto em sua demanda;

iv. A longo prazo a elasticidade preço da demanda tende a ser mais elevada que a curto prazo. Isso se deve pelo fato de que a informação econômica demora a circular bem como as estratégias para superar um determinado problema. Tomemos, por exemplo, um aumento no preço do feijão. A curto prazo será difícil superar uma ausência desse alimento na mesa, sendo assim a elasticidade será baixa, mas a longo prazo os seus consumidores irão adaptar-se a novas receitas que não o utilizem;

v. Quanto maior o número de possibilidades de usos de uma mercadoria, maior será sua elasticidade. Se um determinado bem tem muitas possibilidades de uso, ele também tem muitos substitutos. Logo, nesse caso, sua demanda será bem sensível a alterações no preço, ou seja, ela será muito elástica.

3.6 A curva de Laffer

A curva de Laffer, desenvolvida pelo economista Arthur Laffer, assegura que a arrecadação tributária do governo é uma função da carga tributária com um limite máximo, ou seja, o governo teria uma máxima arrecadação para um valor x e essa arrecadação passaria a cair a partir de um valor $x + k$, onde k é um infinitésimo. Em outras palavras, a curva de Laffer seria uma função contendo um único ponto de máximo global.

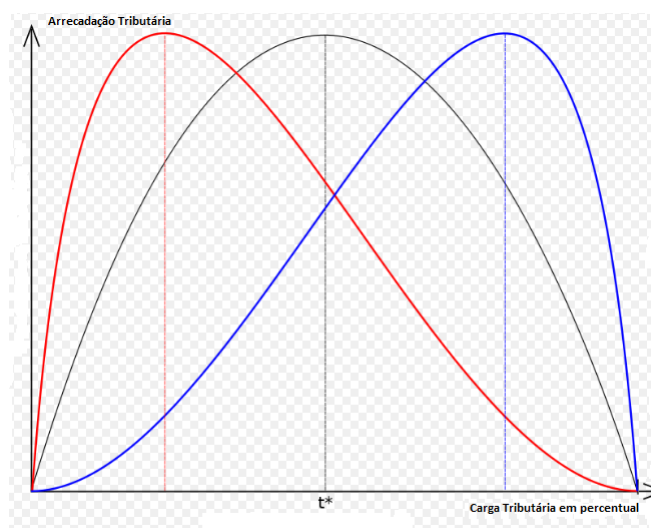
Por conta desse comportamento, o de ter um único ponto de máximo, a curva de Laffer é comumente representada por uma função do segundo grau, como mostrado pelo Gráfico 23.

Finalmente é importante ressaltar que o modelo de Laffer, para a tributação, é aceito por praticamente todos os economistas. O ponto em que divergem é a respeito da alíquota ótima. Discordam sobre qual seria a alíquota que fornece a arrecadação ótima possível para o erário.

Economista mais intervencionistas (economistas que pregam uma maior intervenção estatal na economia) sugerem que alíquota ótima (aquela encontrada no vértice da parábola) será dada por percentuais maiores de tributação. Já para os economistas mais liberais (aqueles que pregam uma pequena ou nenhuma intervenção estatal na economia) sugerem que aquela será dada por percentuais menores de tributação.

Isso na prática é definido pelo conjunto de medidas econômicas tomadas pelo poder político do momento.

Figura 23 – Curva De Laffer



Fonte: Wikipedia, (2020).

4 O DIREITO TRIBUTÁRIO

A vida em sociedade requer a regulação dos comportamentos humanos. Essa é uma noção intuitiva muito simples que todos nós temos, pois todos os dias compartilhamos espaços com outros indivíduos. Por conta dessa interação social, desde o início de nosso processo de socialização, somos educados sob a máxima de que nosso direito termina onde começa o do outro. A ideia de Direito como sendo um conjunto de normas que regulam o comportamento humano dentro de uma sociedade é necessária para o pleno entendimento deste trabalho.

Neste capítulo, abordamos as diferenças entre o Direito Público e o Privado, introduzimos a ideia do Direito Tributário e os Tipos de Tributos (Diretos e Indiretos, Regressivo e Progressivo) e discutimos o Imposto de Renda das Pessoas Físicas, o seu Funcionamento e o seu Pagamento.

Utilizamos como fundamentação teórica para este capítulo essencialmente as obras de (CARNEIRO, 2010) e (LENZA; CAPARROZ, 2020).

4.1 Direito Público e Privado

O Direito pode ser pensado a partir de dois grandes ramos: o Direito Privado e o Direito Público. O Direito Privado corresponde àquele em que as partes têm mais liberdade para fazer concessões, isto é, quando as normas de direito privado regulamentam as relações privadas. As relações privadas são aquelas em que há uma igualdade entre aqueles que a estabelecem. Um contrato de compra e venda de um automóvel entre particulares ou um contrato de fornecimento de material entre duas firmas de grande porte são exemplos de direito privado. Sempre que houver equidade entre as partes e não houver um interesse público na relação estaremos diante de uma relação de direito privado. Esta definição apesar de não ser unânime, tendo em vista que o Direito não é uma ciência exata, é bem aceita e difundida entre os juristas.

Em contrapartida, o Direito Público é caracterizado quando há um desnível entre as partes, quando uma das partes envolvidas tem mais pujança do que a outra. Neste caso, sempre há um considerável interesse público na relação jurídica constituída. O Direito Tributário pertence a essa vertente do direito, em razão de haver uma força cogente.

4.1.1 Sobre o Direito Tributário

O Direito Tributário constitui o conjunto de normas que regulam o pagamento de tributos, a fiscalização tributária bem como a relação entre o contribuinte e o Estado. O pagamento de tributos é algo impositivo, ou seja, não há como se deixar de pagá-lo. Mas para isso ele deve vir previsto em lei, de acordo com a Constituição Federal de 1988 (Artigo 5º inciso II): "Ninguém

será obrigado a fazer ou deixar de fazer alguma coisa senão em virtude de lei (BRASIL, 1988)."

Por este motivo existem leis deliberando sobre o pagamento de impostos, isto significa que toda vez que o Estado utiliza de sua força legal para coagir o cidadão a financiá-lo, ele o faz através de Tributos. Sendo assim estes são uma forma que o Estado tem para interferir em nosso patrimônio. Portanto, o Imposto é somente uma espécie do gênero Tributo. As taxas, as contribuições sociais, as contribuições de melhoria e os empréstimos compulsórios também são tipos de Tributos. Essa divisão em cinco espécies tributárias diferentes é o que chamamos de sistema pentapartite, e é o considerado pela maioria dos tributaristas ¹. Assim também reconhece nossa Suprema Corte apesar de nosso Códex Tributário ter reconhecido o sistema como tripartite. Pois assim ele declara em seu artigo 5º: "Os tributos são impostos, taxas e contribuições de melhoria (BRASIL, 1966)".

No entanto não entraremos em detalhes diferenciando-os, pois o foco deste trabalho são os modelos matemáticos que podem ser usados para compartilhar noções de direito no Ensino Básico.

Advertimos o leitor que utilizaremos, como é usualmente empregada no meio jurídico, a palavra tributo (e suas flexões) para indicar a cobrança compulsória de recursos pelo Estado ao invés do termo imposto. Temos também que nosso Código Tributário Nacional ², a lei federal que estrutura nosso sistema tributário, define legalmente tributo em seu artigo 3º: "Tributo é toda prestação pecuniária compulsória, em moeda ou cujo valor nela se possa exprimir, que não constitua sanção de ato ilícito, instituída em lei e cobrada mediante atividade administrativa plenamente vinculada (BRASIL, 1966)".

Pecuniária porque tem que ter valor financeiro, não constituir ato ilícito significa que tributo não é sanção, tem que ser instituída em lei para pode ser obrigatória (vide o artigo 5º inciso III da CF/88 in verbis acima), atividade administrativa significa que será cobrado pela administração pública e plenamente vinculada significa que está completamente previsto em lei. Ou seja, não está na margem de deliberação do agente público, ele não pode deixar de cobrar o tributo, ele deve. Se não o fizer será pessoalmente responsabilizado por isso.

Algo que também merece um comentário é que o tributo não pode ser pago através de trabalho direto para a Administração Pública. Ele somente pode ser quitado em pecúnia ou através da dação de bens que possam ser avaliados em moeda.

A estrutura do tributo é composta de Fato Gerador e Obrigação Tributária. O Fato Gerador é o ato que o contribuinte pratica no mundo fático que gera a obrigação perante o Estado. A obrigação tributária pode, ou não, se dividir em duas: a principal e a acessória. A obrigação tributária principal é a de pagar o tributo, estando sempre presente, enquanto a obrigação tributária acessória é aquela que acompanha o tributo. Um exemplo de obrigação tributária é o de fazer e enviar a declaração do Imposto de Renda para a Receita Federal que

¹ Em Direito nós chamamos esse conceito de doutrina majoritária.

² CTN - lei 5.172 (BRASIL, 1966)

corresponde a uma obrigação tributária acessória, ao passo que o pagamento do IRPF (Imposto de Renda da Pessoa Física) é uma obrigação tributária principal. Ambas as obrigações nascem da aquisição de renda acima de certo valor previamente estipulado pelo Estado.

4.1.2 Tributos Direto e Indireto

Segundo Lenza e Caparroz (2021), o que caracteriza o Tributo Direto é a correspondência jurídica entre a conduta captada no mundo real e as implicações econômicas dela derivadas, de modo que o valor do tributo seja integralmente satisfeito com a apuração da base de cálculo de fato observado.

As obrigações jurídicas do tributo direto nascem apenas da conduta de um contribuinte tendo a arrecadação advinda diretamente de seu patrimônio. Um exemplo clássico de tributo direto é o Imposto de Renda Sobre a Pessoa Física - IRPF (detalharemos a dinâmica desse imposto na Seção 4.3).

Ainda de acordo com esses dois eméritos autores, os Tributos Indiretos representam casos especiais de incidência, não porque o fenômeno individualmente considerado seja distinto, mas em função do legislador adotar como técnica arrecadatória a fragmentação da carga tributária em que se verifique a circulação econômica de bens, de serviços ou de mercadorias.

A característica mais flagrante dos tributos indiretos é a não percepção de seu pagamento por parte do contribuinte direto (aquele que sofre o ônus de seu pagamento). O Imposto Sobre a Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS) é uma referência de tributo indireto que está inserido no preço de mercadorias e de serviços de telecomunicações, de energia elétrica e de transporte de ônibus intermunicipais e interestaduais.

Sem dúvida, inferimos que todo tributo indireto é repassado àqueles que compram algum produto, mas esta afirmação não está completamente correta.

Esse repasse dos tributos diretos está diretamente ligado ao grau de necessidade do produto. Se o produto for de alta necessidade o repasse tributário será altíssimo podendo até ser total, se o produto for de baixa necessidade o repasse será baixo podendo até ser nulo. A depender da tributação que incida sobre um produto de baixa necessidade sua venda pode até ser inviabilizada naquele mercado onde sofreu excessiva tributação.

Em suma, o repasse tributário está diretamente relacionado à Elasticidade Preço da Demanda (Subseção 3.5.1) do bem ou do serviço tributado.

4.2 Sistema Regressivo e Progressivo de Tributação

Em uma sociedade a tributação é promovida sob as óticas da Tributação Progressiva e da Tributação Regressiva.

Em um sistema de tributação regressivo a carga tributária onera mais pesadamente quem

tem menos renda. Os defensores desse sistema alegam que ele incentiva o empreendedorismo, estimula uma sociedade mais dinâmica onde os indivíduos buscam ter seu próprio negócio ao invés de serem empregados e reduz o comodismo social.

O sistema de tributação progressivo é aquele que onera mais pesadamente quem tem mais renda. Os defensores do sistema de tributação progressivo apontam que este sistema é socialmente mais justo, pois propõe onerar com mais ênfase quem tem mais condições de pagar tributos (no direito tributário há um princípio chamado de princípio da capacidade contributiva que é a materialização dessa ideia em nosso sistema legal tributário).

Consideramos que o sistema de tributação progressivo é mais coerente do que o sistema regressivo, uma vez que o sistema de tributação progressivo se coaduna perfeitamente com a Teoria da Utilidade Marginal Decrescente, abordada na Subseção 3.4.1. Repare que a defesa do sistema de tributação progressivo, além de se tratar de uma questão de justiça social, tem um embasamento econômico matemático, pois quanto mais renda se tem menos utilidade ela trará ao seu detentor. Portanto, é perfeitamente admissível que aqueles que detêm mais renda devam pagar mais tributos do que aqueles que têm menos renda.

4.3 Sobre o Imposto de Renda das Pessoas Físicas

O imposto de renda incide sobre a aquisição da disponibilidade de renda, ou seja, aqueles indivíduos que têm renda mínima são obrigados a pagar imposto de renda sobre os seus ganhos, mas não é sobre toda e qualquer renda que ele incidirá. Atualmente, pessoas que têm ganhos mensais de até R\$1.903, 98 são isentos de pagamento do imposto de renda. A partir deste valor a Receita Federal³ informa faixas de tributação que incidirão progressivamente sobre a renda. Além disso, há alguns tipos de rendas que não são tributadas como a licença prêmio convertida em pecúnia e as diárias por viagens a trabalho recebidas por funcionários públicos ou celetistas.

Hoje o imposto de renda tributa todos aqueles que auferiram renda em território brasileiro ou de origem brasileira e também alcança aqueles que nem residem no país. Para isso o governo cobra o imposto do pagador a fim de poder ter posse desses recursos, ou seja, se um estrangeiro deve pagar mil reais de imposto sobre uma renda ganha de uma empresa, essa entregar-lhe-á a quantia devida reduzida de mil reais.

Reiteramos que a fim de ser progressivo, mandamento que advém diretamente da constituição federal, o imposto de renda é operacionalizado dividido por faixas. A cada faixa paga-se uma determinada quantia de imposto. Percebemos aqui novamente a presença da Teoria da Utilidade Marginal Decrescente, pois como qualquer outro bem, a utilidade da renda é inversamente proporcional a quantidade que o indivíduo já possui. Alta quantidade de renda, maiores serão os acréscimos necessários de renda para que se altere a realidade material do indivíduo. Aqueles que

³ A Receita Federal é o órgão do Governo Federal responsável particularmente pela administração de tributos federais, pelo controle aduaneiro e pelo combate à sonegação fiscal.

têm pouca renda terão sua realidade alterada de modo significativo com pequenos acréscimos na renda.

As faixas de renda mensalmente recebidas em vigor até o ano de 2021 estão explicitadas na Tabela abaixo:

Tabela 7 – Tabela do IRPF em 2021

| Base de Cálculo | Alíquota | parcela a Deduzir |
|----------------------------------|-----------------|--------------------------|
| Abaixo de R\$ 1.903,99 | Isento | - |
| De R\$ 1.903,99 até R\$ 2.826,65 | 7,5% | R\$ 142,80 |
| De R\$ 2.826,66 até R\$ 3.751,05 | 15% | R\$ 354,80 |
| De R\$ 3.751,06 até R\$ 4.664,68 | 22,5% | R\$ 636,13 |
| Acima de R\$ 4.664,68 | 27,5% | R\$ 869,36 |

Fonte: Brasil, (2021).

4.3.1 O Pagamento do IRPF

A base de cálculo do IRPF é o rendimento obtido durante todo o ano de apuração, chamado de ano base. Esse tributo adota o sistema de bases correntes, onde o contribuinte deve pagá-lo todos os meses que auferir rendimentos. No ano seguinte ao ano base o contribuinte deverá preencher a declaração do IRPF. Nessa declaração serão feitas as devidas compensações (com o que houver sido mensalmente recolhido) e serão descontados os abatimentos, deduções e despesas previstas em lei⁴. Havendo saldo positivo a diferença deverá ser paga, caso contrário o contribuinte fará jus a uma restituição do que foi recolhido pela receita federal do Brasil.

Cabe registrar que o contribuinte pode trocar todos os seus redutores por um abatimento único de 20%. Caso o indivíduo queira se utilizar dos redutores, ele efetuará a declaração completa do IRPF. Caso ele queira utilizar o abatimento único de 20% ele fará a declaração simplificada. Qual declaração será feita é um direito de escolha do contribuinte. Caso ele tenha documentação que embase o preenchimento de uma declaração completa que irá lhe conceder um abatimento maior do que 20%, para ele será mais vantajoso optar por essa modalidade de preenchimento, do contrário, ser-lhe-á mais favorável a declaração simples.

Contribuintes isentos do IRPF são os únicos a utilizar uma única faixa, os que já entrarem na primeira ou em outras faixas só pagarão a alíquota superior sobre o montante que superar a faixa posterior. Para que fique mais claro como é praticada esta tributação, disponibilizamos duas situações.

Situação 1. Sr. Nataniel é assalariado recebendo R\$1045,00. Como seu ordenado é abaixo de R\$1903,99, ele não tem nada a pagar de IR. Agora, imagine que Sr. Nataniel receba um aumento e passa a receber R\$2103,99. Nesse momento ele superou o mínimo da primeira faixa do IR em R\$200,00, logo ele terá que pagar o tributo com a menor das alíquotas, a de 7,5%. Por conta da sistemática do IRPF, os 7,5% não incidirão sobre a totalidade dos rendimentos de Sr. Nataniel (não incidirão sobre os R\$1903,99), incidirão somente sobre o que ultrapassou esse valor, ou seja, incidirão apenas sobre os R\$200,00. Sendo assim todo mês Sr. Nataniel deverá recolher 7,5% de R\$200,00, isto é, R\$15,00 mensais ou o total de $12 \cdot R\$15 = R\180 anuais (cento e noventa e cinco porque o IRPF também incide sobre o décimo terceiro salário/rendimento).

As contas acima foram apenas para explicar toda a matemática que estrutura a cobrança do imposto de renda. Na prática, se aplica alíquota ao valor cheio recebido mensalmente e desse resultado se subtrai a parcela dedutível. Para o Sr. Nataniel teríamos após seu aumento (porque antes ele era isento) a seguinte dinâmica:

$$0,075 \times 2103,99 - 142,8 = 14,99,$$

⁴ Essas três categorias são espécies de redutores do imposto devido descritas em lei. Tal lei é o regulamento do IRPF decreto N° 9.580 de 22 de novembro de 2018.

o que resulta em R\$ 15,00 mensalmente devidos ao erário público.

Situação 2. Vejamos agora o caso de Sr. Germano: ele tem uma renda mensal de R\$10.000,00. Portanto, terá imposto a pagar por todas as faixas do IRPF, mas as mesmas dinâmicas aplicadas ao Sr. Nataniel serão aplicadas ao Sr. Germano:

- sobre seus 1903,98 reais não haverá tributo a se pagar;
- sobre 2.826,65 – 1.903,99 = 922,66 reais irão incidir a alíquota de 7,5%;
- sobre 3.751,05 – 2.828,66 = 924,39 reais incidirão a alíquota de 15%;
- sobre 4.664,68 – 3.751,06 = 913,62 reais incidirão a alíquota de 22,5%;
- e, finalmente, sobre o montante restante de 5.335,32 reais incidirão a maior das alíquotas de 27,5%.

Sendo assim, Sr. Germano deverá recolher os seguintes valores mensalmente à Receita Federal:

$$(0,075 \times 922,66 + 0,15 \times 924,39 + 0,225 \times 913,62 + 0,275 \times 5335,32) =$$

$$(R\$69,19 + R\$138,65 + R\$205,56 + R\$1467,21) = R\$1880,61.$$

Da mesma forma podemos simplificar as contas para o Sr. Germano aplicando a alíquota sobre o valor cheio e, em seguida, aplicando a parcela dedutível:

$$0,275 \times 10000 - 869,36 = 1880,64,$$

o que nos dá os mesmos R\$1880,62 devidos. Essa diferença dos centavos advém dos arredondamentos feitos nas menores casas decimais que apareceram no primeiro cálculo.

4.3.2 Fiscalidade e Extrafiscalidade no IRPF

Os tributos podem ter dois caracteres diferentes, ou mesmo os dois ao mesmo tempo: a fiscalidade e a extrafiscalidade.

Tributos Fiscais são aqueles que têm o único intuito de trazer recursos ao erário, sendo somente financiadores da máquina pública. Na prática, nenhum tributo será somente fiscal, pois todos eles irão, de algum modo, influenciar o comportamento das pessoas, mas quando o tributo

o faz somente colateralmente, não tendo esse intuito como um de seus objetivos principais, ele é considerado fiscal.

Já os Tributos Extrafiscais são aqueles que têm objetivos diversos da arrecadação (isso não significa que não arrecadem, mas não é esse seu objetivo principal). Pesadas cargas tributárias sobre cigarros, bebidas e armas de fogo têm como objetivo dissuadir a compra destes itens. Impostos sobre a exportação incidindo sobre determinados bens têm como objetivo garantir o abastecimento do mercado interno com esses bens. Além de também trazerem recursos para o tesouro público, esses impostos têm como principal finalidade a manipulação do comportamento dos residentes no país.

O IRPF é preponderantemente fiscal, mas também tem um caráter extrafiscal que é a diminuição das desigualdades sociais (na teoria todos os impostos teriam esse objetivo, mas o IRPF é o que mais se aproxima disto por ir direto na renda que é o cerne da questão). Ele assim o faz quando tributa de maneira mais pesada aqueles que têm mais renda do que os que têm menos renda. Entretanto, esse tributo não consegue cumprir esse objetivo por ter poucas faixas de tributação.

No Brasil, alguém que ganhe R\$ 5.000,00 está na mesma faixa de tributação de indivíduos bilionários. Suas três faixas iniciais tributam rendas que relativamente não são altas, pois a tabela não sofre reajuste desde 2015, só de correção inflacionária teríamos que aplicar 24,7% sobre todos os valores atuais. Isto geraria a Tabela 8 atualizada somente com a correção inflacionária.

Tabela 8 – Tabela do IRPF Corrigida pela Inflação de 2015 a 2020

| Base de Cálculo | Alíquota | Parcela a Deduzir do IRPF |
|--------------------------------|-----------------|----------------------------------|
| Abaixo de R\$ 2374,27 | isento | - |
| De R\$ 2374,28 até R\$ 3524,83 | 7,5% | R\$ 178,07 |
| De R\$ 3524,83 até R\$ 4677,55 | 15,0% | R\$ 442,43 |
| De R\$ 4677,56 até R\$ 5816,85 | 22,5% | R\$ 793,25 |
| Acima de R\$ 5816,86 | 27,5% | R\$ 1084,09 |

Fonte: Brasil, (2021).

Enquanto não houver a correção da Tabela 7 continuará havendo cobranças indevidas sobre faixas salariais defasadas. Além disso, esta desatualização nas bases de cálculo do IRPF continuará implicando em um injusto aumento na arrecadação do governo e na violação ao caráter progressivo do IRPF bem como a sua finalidade extrafiscal de redução da desigualdade social nacional.

5 CONSIDERAÇÕES SOBRE O SISTEMA TRIBUTÁRIO BRASILEIRO

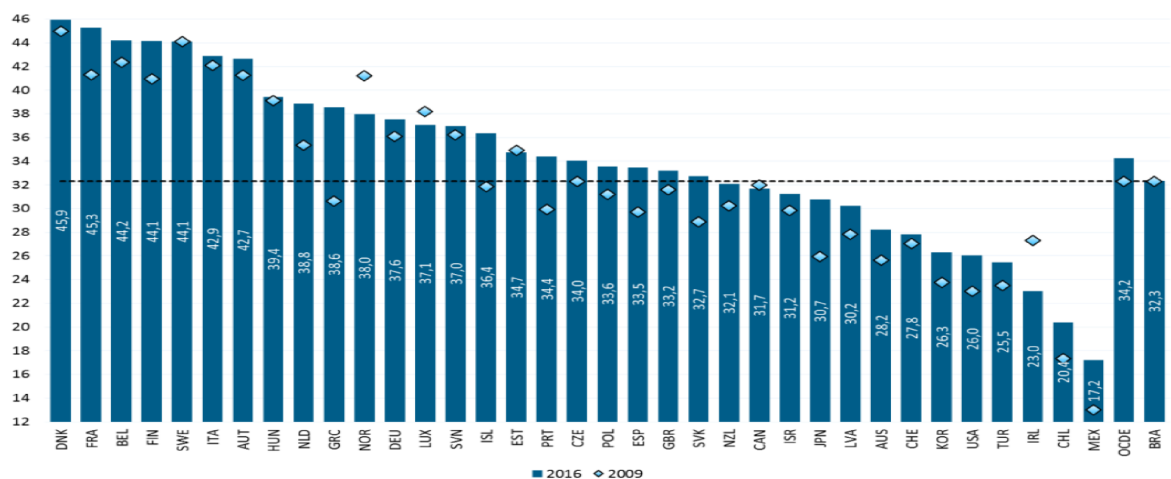
Discutimos no Capítulo 4, aspectos pertinentes ao sistema tributário brasileiro. Faremos, neste capítulo, uso da Matemática a fim de traçar algumas considerações relativas ao funcionamento da tributação no Brasil.

5.1 A Alta Carga Tributária Brasileira

Comumente ouvimos que a carga tributária brasileira é alta. Seja em ambientes formais ou informais essa máxima é sempre declarada. Mas será que realmente pagamos muitos "impostos"¹ no Brasil? Será mesmo que nossa máquina pública nos exige tantos recursos assim?

A priori, quando comparamos a carga tributária brasileira com a do restante do mundo é possível responder afirmativamente a essa pergunta. A Figura 24 sugere que de fato a sociedade brasileira, como um todo, paga sim muitos tributos.

Figura 24 – Carga Tributária: Brasil e Países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), Participação (%) do PIB em 2009 e 2016



Fonte: IFI, (2018).

Constatamos, pela Figura 24, que o Brasil tem uma das maiores cargas tributárias do mundo em valores absolutos, comparável a de países desenvolvidos que entregam serviços com qualidade bem melhores do que o nosso. Mas há alguns fatos que frequentemente não são contados nessa história e que serão abordados nas subseções a seguir.

¹ Vale lembrar, como discutido na Subseção 4.1.1, que imposto é somente uma espécie do gênero tributo.

5.1.1 Carga Tributária Essencialmente Indireta

A fim de compreendermos melhor a realidade sobre os altos pagamento de tributos no Brasil sugerimos um olhar estratificado sob nossa sociedade, isto é, sugerimos olhar para as diferentes rendas sob faixas de tributação separadamente. Como a maior parte da arrecadação brasileira advém de tributos indiretos, esse mecanismo onera com força quem tem menos recursos, isto é, a tributação indireta, aquela que é mais praticada em nosso país, onera de maneira regressiva a nossa sociedade.

Imaginemos que tenhamos um determinado bem no valor de R\$1.000,00 com um total de 10% de tributação indireta incidindo sobre esse bem. Desta maneira, o consumidor pagará R\$ 100,00 de tributos indiretos ao adquirir tal bem. Um trabalhador que possui um salário mínimo de R\$ 1.000,00 pagará 10% de sua renda mensal ao adquirir esse bem. Agora, imagine um segundo trabalhador que recebe R\$ 10.000,00 de salário deseja adquirir esse bem. Neste caso, esse segundo contribuinte pagará 1% de tributos indiretos ao adquirir esse mesmo bem. Por último, suponha que um empresário bem sucedido (economicamente falando) tenha renda média de R\$ 100.000,00, adquira também esse bem. Neste caso, esse abastado contribuinte pagará 0,1% de tributos em relação a sua renda mensal.

Um sistema tributário que tem a sua carga tributária fortemente consolidada em tributos indiretos irá onerar com muito mais força quem tem menos renda do que quem tem mais. A tributação para ser socialmente mais justa deveria ser praticada de maneira proporcional e, pela Teoria da Utilidade Marginal da Renda seria necessário ter porcentagens modeladas de acordo com o percentual de renda de cada cidadão. Como a tributação indireta onera a todos com valores absolutos iguais, ela não respeita nem a proporcionalidade (cobrar a mesma porcentagem de todos) e muito menos a progressividade (cobrar porcentagens que se coadunem com a capacidade contributiva de cada contribuinte).

5.1.2 Sonegação Tributária

Outra questão relevante nesta discussão diz respeito aos elevados índices de sonegação de impostos no Brasil. Sonegar impostos é tão criminoso quanto assaltar uma repartição pública, pois em ambos os casos estamos privando o setor público de meios para a execução de seus projetos.

Há um legítimo desinteresse da mídia em condenar essa prática criminosa e também há um desinteresse da própria sociedade em entender que esta prática depõe contra a ordem tributária de nosso país. Por outro lado, a sonegação é muitas vezes até incentivada: no dia 5 de Março de 2020, o então Presidente da República, Jair Messias Bolsonaro, declarou que sonega tudo o que puder. Infelizmente essa não é uma frase isolada, há outros episódios em que indivíduos de grande penetração popular incentivaram a prática da sonegação tributária.

O fato é que aqueles que detêm altas rendas têm melindrosos recursos para conseguir

escapar do fisco, enquanto aqueles que dispõem de pouca renda pagam em dia seus tributos (até porque a maior parte da carga tributária que estes últimos pagam é de maneira indireta, isso faz com que seja praticamente impossível que soneguem algum tributo).

Lamentavelmente, apesar de a nossa carga tributária ser alta, a sonegação tributária também é alta. Desse modo, nosso país não consegue todos os recursos previstos e que deveria ter, algo que inviabiliza, de certa forma, a execução de suas responsabilidades.

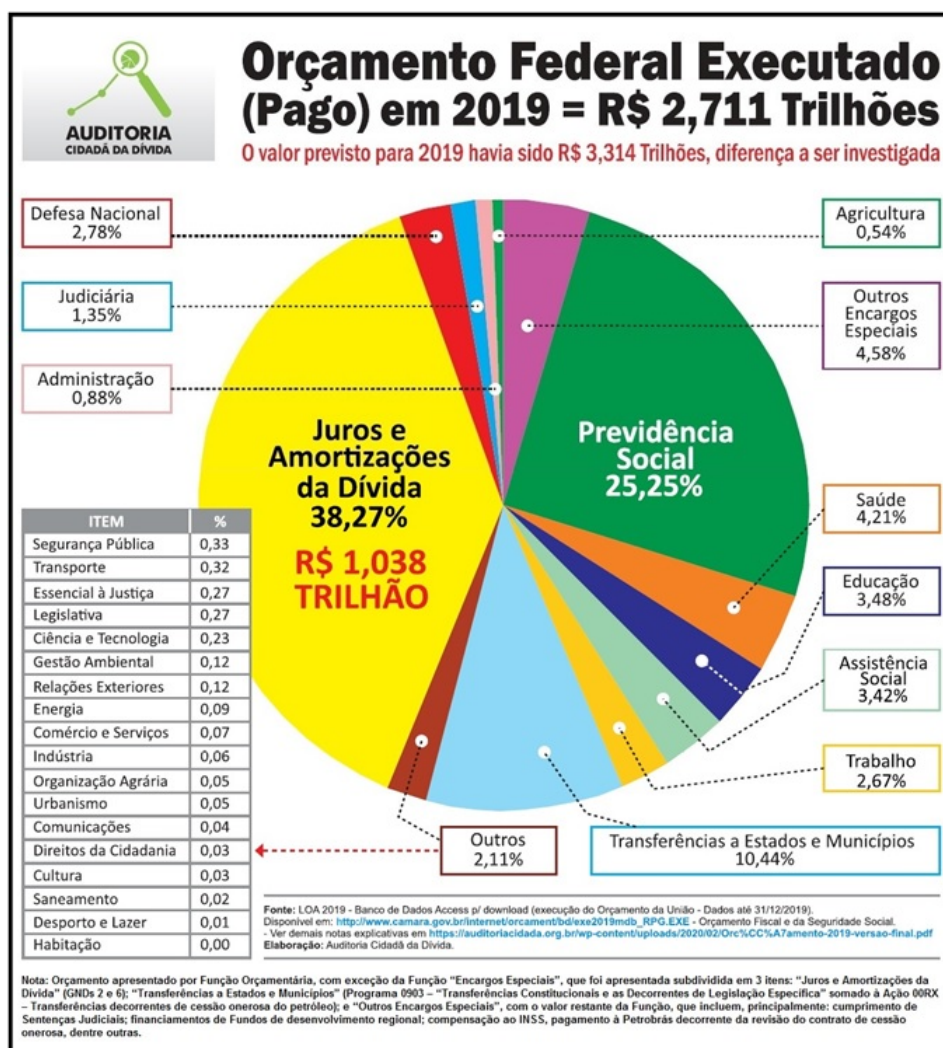
5.1.3 Alta Dívida Pública

Por décadas, o Estado Brasileiro financiou seu crescimento e suas atividades através de empréstimos, tornando-se altamente endividado. Atualmente, os serviços da dívida (juros e encargos) correspondem a um dos maiores gastos públicos anuais do Brasil, tendo impactos diretos no conceito de justiça social e na tributação, pois a dívida esvai seus recursos e reduz a capacidade de investimento em projetos de âmbito social, cultural e educacional. A Figura 25 resume parte das questões levantadas acerca do endividamento público.

Soma-se a isto o fato dos títulos da dívida pública serem usualmente comprados por pessoas de elevada condição econômica. Em vista disso, a dívida pública brasileira tem pago elevados juros àqueles que menos pagam tributos no Brasil (considerando valores relativos). Conseqüentemente, nossas engrenagens tributárias, ao invés de promoverem uma redistribuição de renda e igualdade social, estão funcionando de maneira invertida, têm trabalhado para enriquecer àqueles que já têm recursos em abundância.

Sem dúvida, todo país deve honrar seus compromissos firmados, pois um calote ou uma moratória nos deixaria em uma situação econômica muito delicada (perda ou desinteresse de investidores internos e externos), no entanto, devemos cobrar mais transparência nos mecanismos da dívida e auditá-la de maneira séria a fim de verificarmos se há erros em sua cobrança.

Figura 25 – Orçamento Brasileiro Executado em 2019



Fonte: Auditoria Cidadã 2019

5.1.4 A Tributação Direta Não Atinge os Mais Ricos Como Deveria Atingir

Todos os anos os proprietários de veículos precisam pagar o IPVA, Imposto Sobre a Propriedade Veicular. Uma dúvida bastante comum sobre o IPVA é a destinação de seus recursos. Alguns acreditam que eles deveriam servir para manter conservadas as estradas, ruas e rodovias, mas isso é um enorme equívoco.

Os recursos oriundos dos impostos não têm uma destinação vinculada, ou seja, o Estado pode gastá-los como bem entender. O Imposto de Renda não tem como finalidade gerar renda, o Imposto sobre a Circulação de Mercadorias não é destinado a fomentar a circulação de mercadorias, assim como o IPVA não é destinado a manutenção de rodovias. Tal imposto incide sobre grande parte da frota de autos no país (alguns veículos são isentos), mas seu objeto de incidência é somente esse, automóveis. Aeronaves e barcos não sofrem incidência do IPVA, pois essa foi a diretriz dada pela nossa suprema corte no Recurso Especial número 379572 RJ:

Ementa: AGRAVO REGIMENTAL EM RECURSO EXTRAORDINÁRIO COM AGRAVO. DIREITO TRIBUTÁRIO. IPVA. EMBARCAÇÕES. NÃO INCIDÊNCIA. DESPROVIMENTO.

1. Nos termos da jurisprudência consolidada da Corte, a materialidade constitucional do IPVA não abarca a propriedade de embarcações ou aeronaves. Precedentes. 3. Agravo regimental a que se nega provimento, com aplicação de multa, nos termos do art. 1.021, §4º, do CPC

Em virtude desta diretriz, até a presente data, no Brasil, os automotores de alto padrão como iates e aeronaves particulares não pagam imposto veicular anual.

Além da isenção do IPVA sobre os veículos de alto padrão, também temos um dos impostos sobre herança mais baixos do mundo. Thomas Piketty, em seu livro *O Capital No Século XXI*, afirma que uma das principais engrenagens da desigualdade social é a herança. Sendo assim, se um dia almejarmos reverter o enorme abismo entre ricos e pobres em nossa sociedade precisaremos rever as alíquotas sobre a transmissão da herança (PIKETTY, 2013).

Outros privilégios dados pelo Estado Brasileiro àqueles que dispõem de elevada renda é a existência de poucas faixas de tributação no IRPF (como discutido na Seção 4.3) e a isenção de Lucros e Dividendos. Lucros e dividendos são as frações do lucro das empresas que elas são obrigadas a distribuir a seus acionistas e colaboradores. Desde 1996 o Brasil passou a não tributar essa distribuição, conduta essa adotada por poucos países no mundo.

Por último, mas não menos relevante, temos que até hoje não houve, em nosso sistema tributário, a instituição do IGF (Imposto Sobre Grandes Fortunas). Apesar de tal imposto estar previsto em nossa constituição desde 1988, ele nunca sequer entrou em discussão em nosso legislativo federal. Algumas projeções chegam a prever 80 bilhões de reais caso esse imposto fosse arrecadado. Esta cifra poderia melhorar além da qualidade dos serviços prestados pelo Estado Brasileiro, nossos índices de desenvolvimento humano.

5.2 Programas de Transferência de Renda

No capítulo 4, sobre o Imposto de Renda das Pessoas Físicas, mostramos que esse imposto comporta uma série de deduções que podem gerar uma restituição. Essa restituição é uma questão de justiça para com o contribuinte que pagou uma quantia maior do que aquela prevista em lei.

Seguindo a mesma lógica do IRPF, e levando em consideração a maneira operacional do sistema tributário brasileiro que onera com ímpeto quem tem menos renda, podemos justificar os programas de transferência de renda (o mais famoso desses programas é o Bolsa Família, mas há outros em níveis Estadual e Municipal) como uma forma de restituição dos impostos indiretos suportados pelos economicamente menos favorecidos de nossa sociedade.

Além da questão de justiça social, ainda temos o fato de que esses programas fazem girar a economia local. Em muitas localidades do país os programas de transferência de renda

impulsionaram a atividade econômica e trouxeram desenvolvimento para essas localidades. Contudo, não há um acréscimo do PIB por conta de tais programas, mas sim uma redistribuição dos recursos que flui das regiões mais ricas do país para as mais necessitadas.

Silva e Ferreira Filho (2014), abordam aspectos pertinentes aos programas de transferência de renda Benefício de Prestação Continuada (BPC) e Bolsa Família (BF) à luz da Economia Brasileira. Tecem uma análise sobre a relevância econômica e social destes programas concebidos em 1993 (BPC) e em 2003 (BF):

os resultados aqui encontrados sugerem razão para não se considerar que programas de transferências diretas como o BF e o BPC devam ser considerados como programas de crescimento econômico. De fato, isso é pedir demais a programas projetados como políticas de redução de pobreza, e que, como tal, devem ser considerados (SILVA; FILHO, 2014)

6 ATIVIDADES

Neste capítulo, propomos um repertório de atividades cujo objetivo é incentivar e inspirar o professor a abordar, no Ensino Básico, os temas aqui discutidos. Para cada uma das atividades consideradas há uma sugestão de quando o professor pode ministrá-las, mas é imprescindível ressaltar que estas são genuinamente apenas sugestões, pois entendemos que cada professor conhece seus alunos e o tempo de aprendizagem adequado para a discussão destes conteúdos.

Prevenimos o professor a aplicar estas atividades em turmas que já tiveram minimamente algum contato com os temas abordados (geralmente através das aulas de humanidades). Sem dúvida, há, no Ensino Básico, uma enorme lacuna no que tange à Ciência Jurídica, mas é possível os alunos adquirirem alguma noção de Direito, a partir das aulas de História ao estudar a Constituição, por exemplo. Relativo à Economia, alguns de seus tópicos são abordados em aulas de Geografia. Agrega-se a isto as aulas de Matemática que podem tratar de temas que atravessam temas de Direito e de Economia, contextualizando a Matemática por vezes entendida como uma disciplina árida e essencialmente teórica.

Por fim, temos duas observações a fazer: a primeira é que o professor pode adaptar as atividades a seus alunos, o incentivamos fortemente a criar novas atividades, a experimentar novos cenários e situações à luz dos temas abordados nesta dissertação; a segunda é que as atividades aqui contidas, em sua maioria, não estão encadeadas. Isto significa que o professor pode lançar mão delas quando achar conveniente didática e pedagogicamente.

Segmentamos as atividades em duas seções: a primeira versa sobre os conceitos de Economia aqui discutidos, enquanto a segunda refere-se a tópicos de Direito Tributário.

6.1 Sobre Economia

Atividade 1: Compreendendo e discutindo o conceito de PIB

Sugestão de Aplicação: A partir do 9º ano do Ensino Fundamental

Dividir a turma em duplas onde cada dupla seria um determinado setor de produção de um determinado produto (no caso da produção de pão, por exemplo, uma primeira dupla corresponderia àqueles que produzem o trigo, uma outra dupla produz a farinha, enquanto outra produz o pão). Em seguida, cada dupla contabilizaria a sua contribuição para o PIB da turma removendo do valor final o valor das matérias que foram previamente produzidas. Por último, sugerimos que efetuem a soma do valor de toda a produção da turma a fim de estabelecer qual o PIB da turma.

Comentário: nessa atividade não há um gabarito previsto, pois ela visa fazer com que os alunos entendam como se dá uma das maneiras de se calcular o Produto Interno Bruto de um país. Imagine que o grupo A produza \$100 de trigo, o grupo B \$150 de Farinha e o grupo C produza \$200 de pão. Daí teremos o seguinte mecanismo para o cálculo do PIB:

| Grupo | Quanto Produziu | Produção Anterior | Acréscimo ao PIB |
|-------|-----------------|-------------------|------------------|
| A | \$ 100 | - | \$ 100 |
| B | \$ 150 | \$ 100 | \$ 50 |
| C | \$ 220 | \$ 150 | \$ 70 |

Com isso temos um Produto Interno Bruto total de \$ 220, pois ele é a soma do que cada uma das etapas de produção acrescentou em sua formação.

Atividade 2: Introduzindo e discutindo as variações percentuais

Sugestão de Aplicação: A partir do 9º ano do Ensino Fundamental

Em um segundo momento, o professor pode aplicar variações percentuais sobre o PIB produzido na Atividade 1 (seria interessante até mesmo a aplicação das variações do PIB brasileiro dos últimos anos). Isto é habitualmente realizado nas aulas de Matemática Financeira quando abordamos descontos e aumentos sucessivos.

Comentário: aqui o professor pode tomar o valor que encontrou no PIB da atividade anterior, e elaborar uma questão onde uma sequência de crescimentos anuais percentuais sucessivos são aplicados àquele produto. A título de exemplo, tomemos o PIB total de \$ 220 encontrado na exemplo anterior. Apliquemos agora um crescimento anual de 5% no primeiro ano, no ano seguinte um novo crescimento de 3%, e por fim, no terceiro ano, um de 4%. Por tanto teremos o seguinte crescimento nesse quarto ano:

$$220 \cdot 1,05 \cdot 1,03 \cdot 1,04 = 220 \cdot 1,10313 = 242,6886.$$

Seque que teremos um PIB final de \$242,68 ao final da aplicação das variações percentuais sucessivas.

Atividade 3: Abordando o conceito de renda per capita

Sugestão de Aplicação: A partir do 9º ano do Ensino Fundamental

Considerar o PIB do país "Turma"(os valores relativos a cada habitante podem ser valores fictícios e tomados em uma unidade monetária arbitrária). Em seguida, estimular a obtenção da renda per capita do país Turma e debater sobre o quão acentuadas são as desigualdades de renda neste país.

Comentário: nessa questão o professor deve usar o valor do PIB que calculou na primeira questão e dividi-lo por um número de habitantes que achar conveniente. Imaginemos que o PIB encontrado foi de \$220 bilhões, e que o país tem 50 milhões de habitantes. teremos que dividir o PIB pelo total de habitantes para se obter a renda per capita:

$$220.000.000.000/50.000.000 = 22.000/5 = 4.400.$$

Sendo assim temos, nesse país, uma renda percapita de \$4.400. Deve-se frisar para os alunos que a renda per capita é um ideal, que apesar de ser um dos padrões de riqueza de um país (quanto mais alta ela é, mais rico é o país).

Sugerimos uma reflexão junto aos alunos sobre as desigualdades socioeconômicas atreladas a esta questão.

Atividade 4: Discutindo sobre a distribuição de renda no Brasil

Sugestão de Aplicação: A partir do 9º ano do Ensino Fundamental

Orientar os alunos a pesquisar como é a distribuição de renda no Brasil e sugerir que confrontem essa distribuição com a distribuição de renda do país Turma (Atividade 3).

Comentário: por exemplo, utilizando uma distribuição como a de 2019, 1% da sala terá que ter trinta e quatro vezes mais a renda do que a metade do restante dos alunos. Claro que não haverá como aplicar as proporções apresentadas de maneira fidedigna, mas pode-se mostrar que um aluno em uma turma de 30 teria mais renda do que 15 alunos dessa mesma turma.

Atividade 5: Introduzindo e compreendendo o índice de preços ao consumidor e abordando as diferenças entre as médias aritmética e geométrica.

Sugestão de Aplicação: A partir do 1º ano do Ensino Médio.

Criar situações problemas como a do Marcelinho (Subseção 3.2.1) em que é necessário calcular o IPC ora através da média aritmética ora através da média geométrica.

Comentário: aproveite essa atividade para abordar a diferença entre as médias geométrica e aritmética.

Atividade 6: Abordando os crescimentos inflacionários

Sugestão de Aplicação: A partir do 1º ano do Ensino Médio

Trabalhar com os alunos os crescimentos inflacionários em uma aula de aumentos sucessivos. Podemos ver que a dinâmica de aumentos sucessivos é semelhante a da inflação acumulada de um período.

Os aumentos inflacionários ocorrem de maneira caótica, ou seja, não há uma razão entre índices de inflação sucessivos. Não há como visualizarmos alguma progressão. Por isso eles não são fáceis de trabalhar no ensino básico da maneira como ocorrem nas sociedades. Mas, a fim de adaptarmos essa realidade a sala de aula, sugere-se ao professor que estabeleça um índice de inflação fixo. Por exemplo 5% ao ano. Com isso o professor terá uma progressão geométrica de razão 1,05 com os seguintes valores: $S = \{1; 1,05; 1,1025; 1,157625\dots\}$

Comentário: com base nessa sequência uma multiplicidade de temas podem ser trabalhados como termos da PG, porcentagem, dentre outros. Por exemplo, tomemos a PG de $a_1 = 1$, razão 1,05 e um PIB de \$ 100 unidades monetárias. Podemos propor aos alunos uma questão que peça qual o PIB no quarto ano sob essas condições. A resposta seria:

$$a_1 \cdot (q)^{n-1} = 100 \cdot (1,05)^3 = 100 \cdot 1,157625 = 115,7625.$$

Logo o PIB será de \$ 115,76 unidades monetárias ao final do período pedido.

Atividade 7: Contextualizando o comportamento de funções com o conceito de utilidade marginal

Sugestão de Aplicação: A partir do 1º ano do Ensino Médio

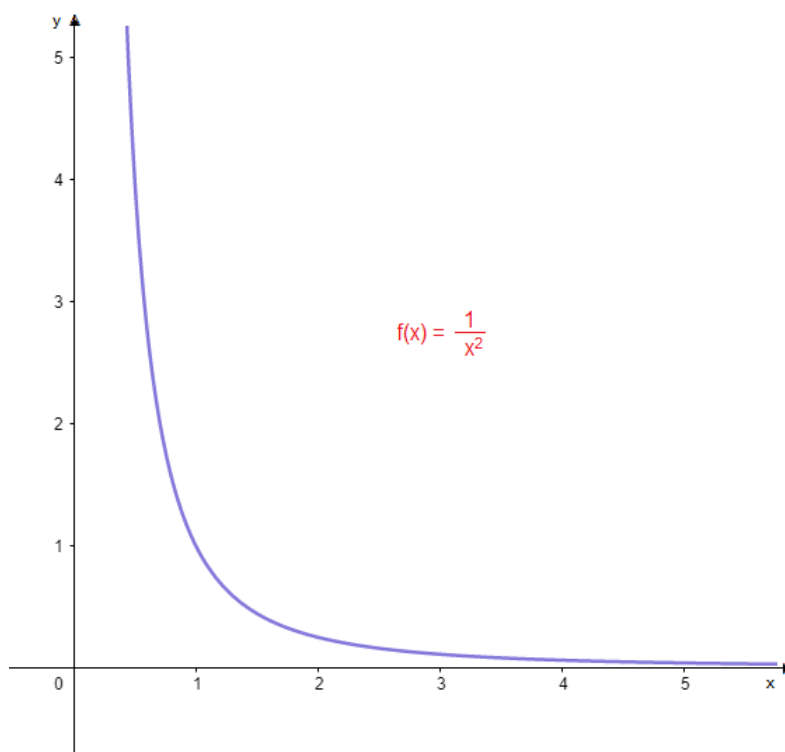
Trabalhar funções decrescentes com os alunos a fim de explicar os acréscimos decrescentes. Funções do tipo $f(x) = a - b/cx^2$, onde "a", "b" e "c" são constantes reais positivas, são excelentes modelos de representação para as funções de utilidade marginal.

Comentário: apesar de na maioria das escolas brasileiras não ser possível introduzir noções de cálculo diferencial e integral, é possível abordar temas como incrementos e taxa de variação sem entrar necessariamente no cálculo. O estudo das funções de utilidade total e utilidade marginal são um caminho para isso, pois o professor pode mostrar o comportamento assintótico delas.

Tomemos abaixo o gráfico da função $f(x) = -\frac{1}{x^2}$. Essa função pode ser vista como a função de utilidade marginal, e seu comportamento assintótico em torno de zero, quando x tende a mais infinito, é um bom caminho para se falar na ideia de limite.

Se a sua escola possuir um laboratório de informática, ou se poder projetar imagem de computadores em sala de aula, sugerimos o uso do software *Geo Gebra* ou de outro similar, a fim de se explorar os gráficos dessa teoria.

Figura 26 – Gráfico da Função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ - Uma função de utilidade marginal.



Fonte: O autor, (2021).

Um detalhe importante a observar é que o domínio dessas funções (de utilidade total e de utilidade marginal) dá-se em $x \geq 0$, pois não há como se consumir unidades negativas de um bem.

Atividade 8: Refletindo sobre ganhos decrescentes a partir da primitiva de uma função

Sugestão de Aplicação: Ensino Médio em turmas avançadas com noção de Cálculo Diferencial Integral - podendo ser adaptada para turmas do 1º ano do Ensino Médio

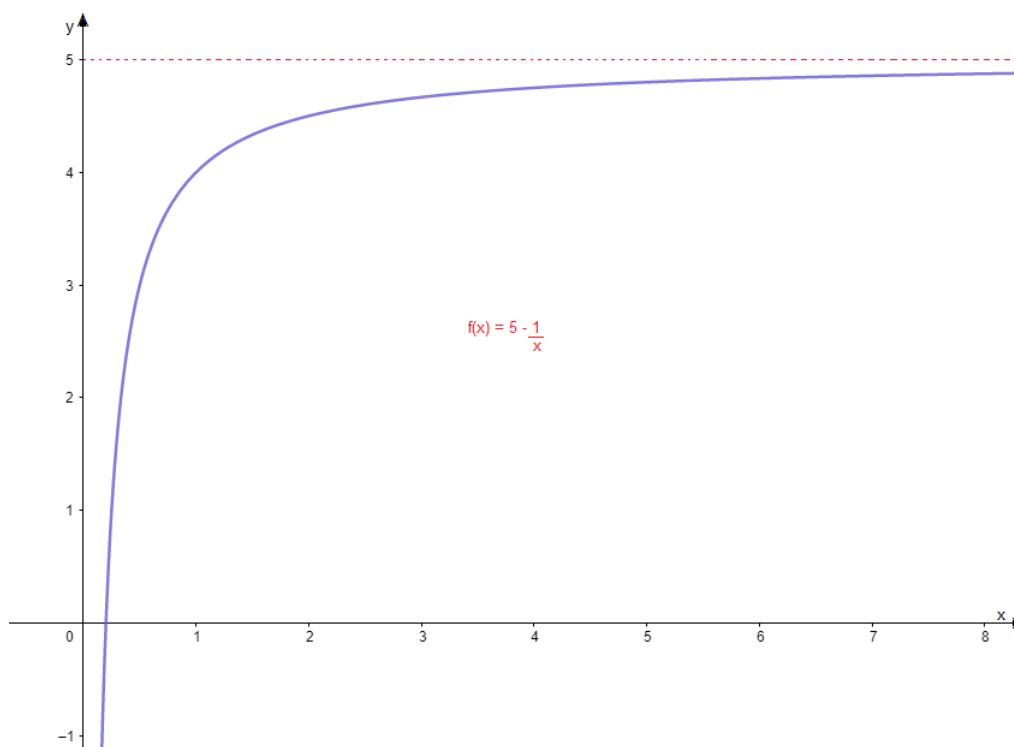
Obter a primitiva da função sugerida pela Atividade 7, a fim de que os alunos percebam que apesar dos ganhos serem decrescentes eles continuam existindo. Pensar sobre uma possível assíntota gerada por essa nova função.

Lembrando que, como visto na teoria, a primitiva é a função que gera a derivada. Por exemplo, a primitiva de $f(x) = x$ é dada por $F(x) = \frac{x^2}{2}$ pois $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) = (\frac{x^2}{2})' = x$

Comentário: explore a relação entre a função derivada e a função primitiva. Apesar das dificuldades de se lecionar Cálculo no ensino básico, isso poderá despertar a curiosidade dos alunos mais interessados.

Tendo que a função primitiva na verdade é uma família de funções (do exemplo anterior temos que $F(x) = C_0 - \frac{1}{x}$, com c_0 uma constante real qualquer, é uma família de primitivas para a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$). Lembre-se que a constante C_0 deverá ser positiva, pois não há que se falar em utilidade negativa de um bem.

Figura 27 – Gráfico da Função $f(x) = 5 - \frac{1}{x}$, Uma função de utilidade total.



Fonte: O autor, (2021).

Atividade 9: Ampliando a compreensão do conceito de elasticidade

Sugestão de Aplicação: Ensino Médio em turmas avançadas com noção de Cálculo Diferencial Integral - podendo ser adaptada para turmas a partir do 1º ano do Ensino Médio.

O conceito de elasticidade pode ser trabalhado em sala de aula de maneira simples a partir de funções afins. Para isso, sugerimos propor uma função decrescente de preço da demanda $f(p) = ap + b$ (a demanda é uma função do preço, $d = f(p)$) e, em seguida, solicitar aos alunos o cálculo da elasticidade para diferentes pares de preços. Estimular que analisem o que ocorre na elasticidade preço da demanda, em especial, para os seguintes pares de pontos (sendo k um número real qualquer):

a) $p = 0$ e $p = k$;

b) $p = -\frac{b}{a}$ e $p = k$.

Comentário: nessa questão pede-se para calcular a elasticidade entre dois pontos afastados. Antes de resolver a questão devemos lembrar que o conceito de elasticidade está relacionado com a variação percentual, ou seja: **A elasticidade verifica a variação percentual de uma variável em relação a variação percentual de uma segunda variável.**

Isso difere da utilidade marginal, pois nessa a distância entre os pontos é infinitesimal e na atual questão a distância entre os pontos é considerável.

Logo, usaremos a expressão da Elasticidade abaixo:

$$E_{xy} = \frac{\% \Delta y}{\% \Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{y_0}}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{\frac{(y-y_0)}{y_0}}{\frac{(x-x_0)}{x_0}} = \frac{(y-y_0)}{y_0} \cdot \frac{x_0}{(x-x_0)} = \frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{(y-y_0)}{(x-x_0)} = \frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Que pode ser resumida em:

$$E_{xy} = \frac{x_0}{f(x_0)} \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Daí podemos resolver a questão:

a)

$f(p) = ap + b$, para $p = 0$ temos $f(0) = b$. Com isso temos $A(0, b)$

Agora tomemos $p = k$, daí $f(k) = ak + b$. Logo temos $B(k, ak + b)$

Sendo assim podemos calcular a elasticidade:

$$E_{xy} = \frac{x_a}{y_a} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{b} \cdot \frac{(ak + b) - b}{k - 0} = 0 \cdot a = 0.$$

Ou seja, variação percentual da variável x é nula em relação à variável y entre os dois pontos analisados.

b)

$f(p) = ap + b$, para $p = -\frac{b}{a}$ temos $f(-\frac{b}{a}) = 0$ o que nos dá $A(-\frac{b}{a}, 0)$

Agora para $p = k$ temos que $f(p) = ak + b$, logo $B(k, ak + b)$

Com eses dados podemos calcular a elasticidade:

$$E_{xy} = \frac{x_a}{y_a} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{b}{a}}{0} \cdot \frac{ak + b - 0}{k - (-\frac{b}{a})} = \frac{-\frac{b}{a}}{0} \cdot \frac{(ak + b)}{(k + \frac{b}{a})}.$$

Repare que há uma divisão de uma constante real por zero, logo essa divisão aparentemente não faz sentido. Mas se pensarmos em termos prático ela é compreensível, pois saímos de zero para um valor real qualquer, logo a variação percentual deve ser infinita.

A letra "b" desse problema tem potencial pra trazer diversas discussões interessantes para sala de aula. Podemos listá-las:

- Significado de uma divisão por zero: como o nada cabe infinitas vezes dentro de qualquer conjunto, uma constante real dividida por zero, a representação do nada, tem que "ir para infinito".
- A ideia de elasticidade está vinculada a ideia de limite, pois o Cálculo discute variações.

Atividade 10: Correlacionando funções quadráticas com a Curva de Laffer

Sugestão de Aplicação: 1º ano do Ensino Médio

Utilizar a Curva de Laffer para o estudo dos gráficos de funções quadráticas. Propor a construção de gráficos de arrecadação em função da carga tributária e o cálculo de seus pontos ótimos. Um exemplo seria:

Em uma determinada nação a arrecadação tributária é modelada pela seguinte função: $f(c) = -c^2 + 100c$ onde c é a carga tributária, em %, total aplicada ao PIB do país. $f(c)$ é arrecadação total do governo, em milhões de \$. Sendo assim determine a alíquota ótima de arrecadação:

Comentário: a ideia da curva de Laffer pode ser trabalhada nas aulas de funções quadráticas, principalmente quando se estiver trabalhando a ideia de máximo de uma função na sala de aula. Aborde o tema utilizando a ideia do cálculo do ponto ótimo da tributação, elabore questões nesse sentido.

Resolução do Exemplo Proposto

A alíquota ótima é dada pelo x do vértice. Na questão, em particular, será o c do vértice. Daí é só aplicarmos a fórmula de sua determinação:

$$x_v = \frac{-b}{2a}.$$

Com isso teremos: $b = -100$, $a = -1$ logo,

$$c_v = -\frac{100}{-2} = 50.$$

Com isso temos que a carga tributária ótima desse país é de 50% de seu PIB. Uma outra questão que poderia ser feita é sobre o valor dessa arrecadação ótima. Para obtê-la é só calcularmos $f(50)$. Logo:

$$f(50) = -(50)^2 + 100(50) \Leftrightarrow f(50) = -2500 + 5000 \Leftrightarrow f(50) = 2500.$$

Desse modo, a arrecadação ótima trás 2500 milhões, ou dois bilhões e meio, de \$ para os cofres do governo.

Atividade 11: Crescimento Real do PIB e Teoria de Percentagens

Sugestão de Aplicação: 1º ano do Ensino Médio

Em um determinado país seu Produto Interno Bruto cresceu da seguinte maneira nos últimos três anos:

| | | | |
|-----------------------------|------|------|-------|
| Ano | 2xx0 | 2xx1 | 2xx2 |
| PIB em 10 ⁹ US\$ | 100 | 104 | 109,2 |
| Inflação | - | 2% | 4% |

Sabendo que o PIB foi calculado com preços de mercado, determine o crescimento real dele nos anos de 2xx1 e 2xx2.

Comentário: quando se usa os preços do mercado interni para o cálculo do PIB, pode-se está, erroneamente, considerando a inflação no processo. Imaginemos que em um ano a inflação foi de 5% e o PIB tem o mesmo crescimento. Com isso o que tivemos na verdade foi uma inflação do PIB e não um crescimento real. Para se ter o crescimento real deve-se dividir o PIB pela taxa de inflação encontrada. Desse modo, vamos calcular o que a questão pede:

- Crescimento real do PIB em 2xx1;

$$\frac{104}{1,02} = 101,96.$$

Ou seja, o crescimento real do PIB em 2xx1 pelo ano base 2xx0 foi de aproximadamente 1,96%. Agora vamos calcular o mesmo para o ano 2xx2 tendo 2xx0 como ano base:

$$\frac{109,2}{1,02 \cdot 1,04} = \frac{109,2}{1,0608} = 102,97.$$

Logo o crescimento real de 2xx2 tendo 2xx0 como ano base foi de aproximadamente 2,97%

Atividade 12: Destinação da arrecadação tributária

Sugestão de Aplicação: 1º ano do Ensino Médio

Em um país, cujo o PIB é de \$ 200 bilhões, carga tributária de 50%, e a seguinte distribuição da arrecadação:

| | | | |
|----------------|--------------|-------------------------|--------------------|
| Dívida Pública | Adm. Pública | Repasse a Entes Menores | Assistência Social |
| 50% | 25% | 12,5% | 12,5% |

determine:

a) Um gráfico de pizza que demonstre a distribuição da arrecadação:

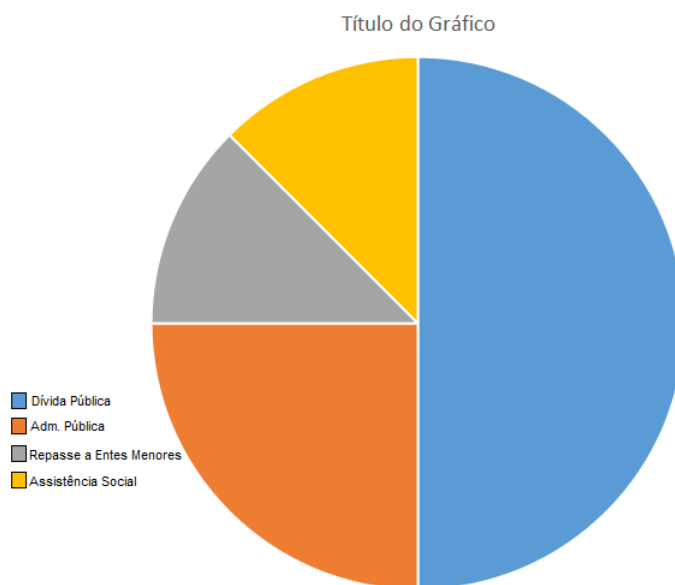
b) Total da arrecadação:

c) Quanto segue para cada setor:

Comentário: questão simples que aborda a distribuição da arrecadação tributária de um país. Vamos a sua resolução.

a) O gráfico ficará da seguinte maneira:

Figura 28 – Gráfico da Função de Pizza Da Distribuição Tributária



Fonte: O autor, (2021).

b)

$$50\% \cdot 200 = 100.$$

Logo a arrecadação tributária total, que é de metade do PIB, é 100 bilhões de dólares.

c)

$$\text{- Dívida Pública: } 50\% \cdot 100 = 50.$$

$$\text{- Adm. Pública: } 25\% \cdot 100 = 25.$$

$$\text{- Repasse a entes menores: } 12,5\% \cdot 100 = 12,5 \quad \text{- Assistência Social: } 12,5\% \cdot 100 = 12,5.$$

Logo 50 bilhões são consumidos com a dívida pública, 25 bilhões são usados para manter a Administração Pública, 12,5 bilhões são repassados aos Entes Menores e 12,5 bilhões são usados na assistências social.

Nessa questão cabe uma pequena explicação sobre o nome das rúbricas usadas. Dívida pública

sintetiza os juros e amortização dos empréstimos capados pelo país (aqui fica uma deixa pra tratar desses assuntos nas aulas de matemática financeira). Também estão incluídos nessa categoria as remunerações dos diversos títulos do governo. A administração pública se refere aos gastos com material de expediente, investimentos em novos equipamentos, pagamentos de salários, pagamentos de pensões e tudo mais que o país precisa gastar para que sua Administração funcione. Por último, a Assistência Social, se refere ao auxílios de subsistência e programas de diminuição das desigualdades sociais mantidos pelo país. Essa denominação pode ser alterada a depender do autor de Finanças Públicas que se consulte.

Atividade 13: Discutindo remuneração de títulos do governo

Sugestão de Aplicação: Apartir do 1^o ano do Ensino Médio

Em um determinado país de 100 milhões de habitantes, temos que o Estado arrecada 30% do PIB. O PIB é na ordem de \$ 300 bilhões. Do total arrecadado 40% segue para remunerar títulos do governo que pertencem a 0,01% de sua população.

Determine:

- a) Quantos são os indivíduos da população que recebem remuneração dos títulos do governo?
- b) Qual o total em \$ que segue para esse indivíduos?
- c) Quanto, em média, cada um dos indivíduos recebeu nesse repasse?

Comentário: questão que é resolvida com a aplicação de conceitos de porcentagem.

Vamos a sua resolução:

a)

$$0,01\% \cdot 10^8 = \frac{1}{10^4} \cdot 10^8 = \frac{10^8}{10^4} = 10.000.$$

Logo temos que somente dez mil habitantes são remunerados pelos títulos governamentais. b)

$$40\% \cdot 300 = 120.$$

Logo seguem 120 bilhões de US\$ para aquele pequeno grupo de dez mil pessoas.

c)

$$\frac{120 \cdot 10^9}{10^4} = 120 \cdot 10^5 = 12.000.000.$$

Logo segue, em média, doze milhões para cada um dos credores do governo.

Atividade 14: Discutindo destinação da arrecadação e concentração de renda

Sugestão de Aplicação: Apartir do 1º ano do Ensino Médio

Em um determinado país, de \$ 100,00 bilhões de PIB, carga tributária total de 40% do produto e 20 milhões de habitantes temos o seguinte:

- 10% de sua população recebe 50% de seu PIB.
- Os programas de distribuição de renda recebem 1% da arrecadação tributária total.

Considerando essas informações determine:

a) Quanto, em \$, do PIB segue para os mais abastados da sociedade? Quanto para os menos abastados? Determine, também, a média percapita desses recursos em cada um desses grupos (na hora do cálculo dos repasses desconsidere a tributação).

b) Quanto em \$ da carga tributária é destinado aos programas de transferência de renda ?

Comentário: questão simples onde são trabalhados conceitos de porcentagem. Segue a resolução:

a) A mesma fração do PIB segue para os mais e para os menos abastados, daí basta fazermos uma única conta pra ter quanto cada grupo recebe:

$$50\% \cdot 100 = 50.$$

Logo cada grupo recebe 50 bilhões. Agora vamos ver quantos indivíduos tem em cada grupo:

- Mais Abastados: $10\% \cdot 20 \cdot 10^6 = 2.000.000$ (dois milhões) indivíduos nesse grupo.
- Menos Abastados: $2 \cdot 10^7 - 2 \cdot 10^6 = 18.000.000$ dezoito milhões de indivíduos nesse grupo.

Agora podemos calcular a média percapita dos recursos em cada um dos grupos:

- Média dos Mais Abastados:

$$\frac{50.000.000.000}{2.000.000} = \frac{50.000}{2} = 25.000.$$

- Média dos Menos Abastados:

$$\frac{50.000.000.000}{18.000.000} = \frac{50.000}{18} = 2.777,77.$$

Sendo assim temos que, em média, cada um dos mais abastados recebe \$ 25.000,00 enquanto que cada um dos menos abastados recebe \$ 2.777,77.

b) Podemos resolver esse item com uma única conta:

$$1\% \cdot 40\% \cdot 10^{11} = 40 \cdot 10^7 = 400.000.000.$$

Logo seguem 400 milhões de \$ para os programas de transferência de renda desse país.

Atividade 15: Descontando títulos do Governo

Sugestão de Aplicação: 1º ano do Ensino Médio

Um investidor têm um título do governo de valor de face de R\$ 11.025,00 com uma rentabilidade de 5% ao ano. Após um ano de sua aquisição, o investidor resolve resgatar o título em um banco que lhe dará o valor atual do título cobrando uma taxa de R\$100,00 a título de serviço. Quanto receberá o investidor?

Comentário: questão direta de desconto de um título. Inicialmente temos que saber que o valor de face é o valor que o investidor receberia se o descontasse na data do vencimento. Como ele descontou apenas um ano depois temos que ver o quanto recebeu. Sendo assim temos o seguinte cálculo (tome " V_p " como valor presente do título:

$$\frac{11025}{1,05} = 10500.$$

Descontando os 100 da taxa de serviço, o investidor receberá \$10.400,00 na operação.

6.2 Sobre Direito Tributário

Atividade 16: Aprofundando a compreensão sobre o IRPF

Sugestão de Aplicação: 1º ano do Ensino Médio

Utilizar as funções definidas por várias sentenças a fim de discutir, com a turma, a dinâmica do imposto de renda das pessoas físicas. Solicitar que construam (analítica e graficamente) a função do imposto devido em função da renda auferida pelo contribuinte. A fim de que as contas fiquem menos áridas propor que trabalhem com alíquotas que facilitem os cálculos (algumas sugestões 10%, 15%, 20% e 25%).

Comentário: inicialmente vamos montar uma tabela com as alíquotas sugeridas semelhante a tabela do IRPF brasileiro. Esipularemos faixas de renda arbitrárias:

| Base de Cálculo | Alíquota | Parcela a Deduzir |
|---------------------------------|----------|-------------------|
| Abaixo de \$ 2.000,00 | Isento | - |
| De \$ 2.000,01 até \$ 4.000,00 | 10% | \$ 200,00 |
| De \$ 4.000,01 até \$ 7.000,00 | 15% | \$ 400,01 |
| De \$ 7.000,01 até \$ 11.000,00 | 20% | \$ 750,02 |
| Acima de \$ 11.000,00 | 25% | \$ 1300,03 |

A Base de Cálculo e a Alíquota para o IRPF acima, de um país imaginário, foram definidos arbitrariamente. Mas as parcelas a deduzir foi calculada do mesmo modo que se calculam as parcelas a deduzir da tabela do IRPF brasileiro. Sendo assim cabe uma breve explicação de como as obtemos:

Parcelas a Deduzir do IRPF

Até \$ 2.000,00 não há imposto a pagar pois é caso de isenção ¹. Sendo assim a primeira parcela a deduzir será a alíquota de 10% aplicada a faixa isenta. Isso nos dá uma parcela detutível inicial de \$200, 00.

Para o cálculo da segunda parcela dedutível, aplicada a faixa de incidência da alíquota de 15%, temos que fazer o seguinte cálculo:

$$15\% \cdot (x - 4.000, 01) + 10\% \cdot (1.999, 99) = 15\% \cdot x - 15\% \cdot 4.000, 01 + 199, 99 = \\ 15\% \cdot x - 600 + 199, 99 = 15\%x - 400, 01.$$

Com isso temos que a segunda parcela a deduzir de nosso IRPF é de \$ 400,01.

A mesma mecânica de cálculo foi utilizada para as demais parcelas das duas últimas faixas. Estimulamos uma renda x que esteja dentro da faixa, aplicamos a alíquota a x , tiramos do resultado o produto da alíquota pelo limite inferior da faixa e, por fim, somamos os impostos devidos das outras faixas ². Seguindo essa ideia vamos calcular a parcela dedutível das duas últimas faixas:

¹ A isenção é quando ocorre o fato gerador, ou seja, a condição no mundo fático que obriga ao pagamento do tributo mas que por força de lei ou política fiscal a autoridade opta por não cobrar o tributo.

² O imposto devido das outras faixas é o produto da alíquota aplicada à faixa pela diferença do limite superior pelo limite inferior. Por exemplo, o imposto devido da faixa de alíquota de 10% é calculado da seguinte forma: $10\%(4.000, 00 - 2.000, 01) = 10\%(1.999, 99) = 199, 99$. Logo o imposto devido para essa faixa é de \$ 199,99.

Parcela Dedutível da Faixa da Alíquota de 20%:

$$20\% \cdot (x - 7.0001,00) + 15\% \cdot 2.999,99 + 10\% \cdot 1.999,99 = \\ 20\% \cdot x - 1.400 + 449,99 + 199,99 = 20\% \cdot x - 1400 + 649,98 = 20\% \cdot x - 750,02.$$

Parcela Dedutível da Faixa da Alíquota de 25%:

$$25\%(x - 11.000,01) + 20\% \cdot 3.999,99 + 15\% \cdot 2.999,99 + 10\% \cdot 1.999,99 = 25\% \cdot x - 25\% \cdot \\ 11.000,01 + 799,99 + 449,99 + 199,99 = 25\% \cdot x - 2750 + 1449,97 = 25\% \cdot x - 1.303,03.$$

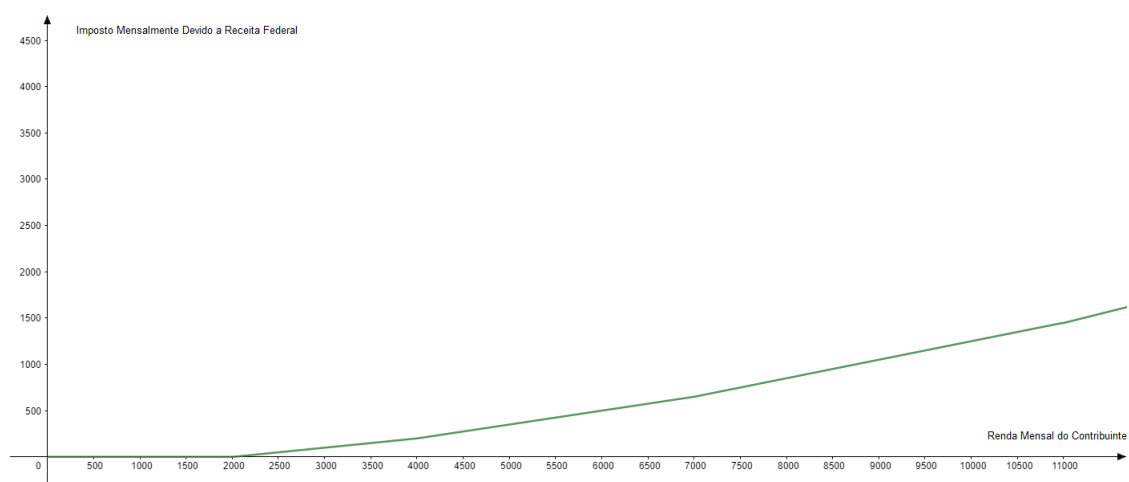
Logo a parcela a deduzir da faixa de alíquota de 20% é de \$ 750,02, e da faixa de alíquota de 25% é de \$1303,03.

Com isso podemos montar a expressão analítica da função que nos retorna o imposto devido. Nesta função $F(x)$ é o imposto mensalmente devido pelo contribuinte e x é sua renda mensal³.

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 2.000,00 \\ 10\% \cdot x - 200,00 & \text{se } 2.000,01 \leq x \leq 4.000,00 \\ 15\% \cdot x - 400,01 & \text{se } 4.000,01 \leq x \leq 7.000,00 \\ 20\% \cdot x - 750,02 & \text{se } 7.000,01 \leq x \leq 11.000,00 \\ 25\% \cdot x - 1.303,03 & \text{se } 11.000,01 \leq x \end{cases}$$

Abaixo temos a o gráfico de $F(x)$:

Figura 29 – Gráfico do IRPF Mensalmente Devido



Fonte: O autor, (2021).

³ É comum tais representações, da tabela e da função, serem feitas com a renda anual. Para isso é só multiplicar por 12 os valores que aqui usamos.

Atividade 17: Retificando a tabela do IRPF**Sugestão de Aplicação:** 1º ano do Ensino Médio

Propor que os alunos realizem a correção da Tabela 7 do IRPF praticada atualmente. Em seguida, sugerir a reflexão da relação entre o aumento da arrecadação do governo e a defasagem na atualização desta tabela.

Comentário: inicialmente vamos ver novamente a atual tabela do IRPF

| Base de Cálculo | Alíquota | Parcela a Deduzir |
|----------------------------------|----------|-------------------|
| Abaixo de R\$ 1.903,99 | Isento | - |
| De R\$ 1.903,99 até R\$ 2.826,65 | 7,5% | R\$ 142,80 |
| De R\$ 2.826,66 até R\$ 3.751,05 | 15% | R\$ 354,80 |
| De R\$3.751,06 até R\$ 4.664,68 | 22,5% | R\$ 636,13 |
| Acima de R\$ 4.664,68 | 27,5% | R\$ 869,36 |

A última proposta que foi discutida de correção da tabela foi de 31%. Logo teremos que multiplicar cada um dos valores da base de cálculo e das parcelas a deduzir por 1,31. Logo obteremos a nova tabela:

| Base de Cálculo | Alíquota | Parcela a Deduzir |
|----------------------------------|----------|-------------------|
| Abaixo de R\$ 2.494,22 | Isento | - |
| De R\$ 2.494,22 até R\$ 3.702,91 | 7,5% | R\$ 187,06 |
| De R\$ 3.702,91 até R\$ 4.913,87 | 15% | R\$ 464,78 |
| De R\$4.913,87 até R\$ 6.110,73 | 22,5% | R\$ 833,33 |
| Acima de R\$ 6.110,73 | 27,5% | R\$ 1.138,86 |

Podemos ver que o limite de isenção subiu consideravelmente. Tendo que a renda média do trabalhador brasileiro é R\$2.000,00, nós teremos que o governo irá ter uma considerável queda em sua arrecadação quando aplicar a correção que aqui usamos. Logo fica claro o motivo de tanto atraso em realizar tal correção.

A resolução desse problema em sala de aula, juntamente com uma discussão sobre a queda na arrecadação e soluções para sua compensação são uma ótima dinâmica com os alunos a fim de fazê-los pensar nessa questão.

Aproveite essa deixa pra falar do IGF (imposto sobre grandes fortunas), que apesar de previsto na CF/88 nunca foi proposto no Congresso, bem como do fato do IPVA não incidir sobre helicópteros, jatinhos particulares ou iates.

Atividade 18: Sobre o endividamento público**Sugestão de Aplicação:** A partir do 1º ano do Ensino Médio

Explorar exercícios de juros compostos através da dívida pública de algum país. A partir daí, esperamos que estes exercícios conduzam-nos a discutir a situação da dívida pública no Brasil e em outros países e os motivos que possam ter levado estas nações a contrair estas dívidas. Além disso, viabilizar reflexões sobre as consequências sociais destes endividamentos.

Comentário: empréstimos entre nações geralmente ocorrem de acordo com o "Sistema Americano". Nesse sistema, o principal, mais os juros e outros encargos são pagos na data do vencimento. Por exemplo, imagine que um determinado país tenha pego US\$ 100 milhões com juros de 10% ao ano, com o vencimento em dois anos e com outros encargos ao curso de \$ 5 milhões. O país que contratou o empréstimo pagará \$ 126 milhões no vencimento do empréstimo pelo mesmo.

Forje outras questões com essa temática levando os alunos a pensar nesse tipo de financiamento tomado pelas nações. Leve-os a pensar, também, na tributação que abastece os cofres do Estado e acaba sendo usada pra pagar esses empréstimos.

Atividade 19: Sobre os tributos indiretos**Sugestão de Aplicação:** A partir do 1º ano do Ensino Médio

Propor exercícios de porcentagem utilizando os tributos indiretos. Considerar "compradores" de diferentes níveis de rendas a fim de que os alunos percebam a discrepância entre as tributações de renda no Brasil.

Comentário: uma boa alternativa para essa proposta de atividade é a seguinte: Tome um produto de R\$1000,00 (um televisor, por exemplo) com 10% de tributação indireta embutida em seu preço. Agora considere três compradores desse produto onde o primeiro tem uma renda mensal de R\$ 1000,00, o segundo uma de \$ 10.000,00 e o terceiro uma de R\$ 100.000,00. Com isso vamos ter que a tributação relativa (em percentuais de renda) para cada um deles será diferente, apesar dela ser a mesma em termos absolutos:

| Comprador | Renda Mensal | Tributação Relativa |
|-----------|----------------|---------------------|
| A | R\$ 1000,00 | 10% |
| B | R\$ 10.000,00 | 1% |
| C | R\$ 100.000,00 | 0,1% |

Sugira ao alunos a construção de tabelas parecidas como essas. A ideia é levá-los a pensar nessa situação e refletir sobre a injustiça (ou justiça) dessa forma de tributação.

Atividade 20: Mecânica dos Tributos Indiretos

Sugestão de Aplicação: A partir do 1º ano do Ensino Médio

Um produto que é vendido a R\$ 160,00 tem uma alíquota de ICMS de 25% e outra de 5% de IPI. Daí considere o seguinte:

- O ICMS é um imposto (Imposto sobre a Circulação de Mercadorias e Serviços)⁴ cobrado por dentro do preço. Para ilustrar, imagine um produto de R\$ 100,00 com 10% de alíquota. Isso significa que ele será anunciado a R\$ 100,00 e não a R\$ 110,00. Com isso o comerciante embolsará R\$ 90,00 tendo de pagar o restante para a Fazenda Estadual.
- O IPI⁵ é cobrado por fora, ou seja, seu montante é exibido na etiqueta de preço do produto. Tome, por exemplo, um produto de R\$ 100,00 com alíquota de 2% de IPI. Isso significa que seu preço será acrescido de R\$2,00 ao ser exibido ao consumidor. Logo será exibido o preço de R\$ 102,00 na prateleira da loja.
- O IPI entra no cálculo do ICMS. Desse modo, tomando nosso primeiro exemplo, imagine que haja além dos 10% de ICM também há uma alíquota de 5% de IPI. Com isso o comerciante deverá, primeiro, calcular o preço do produto com o IPI. Como ele custava R\$ 100,00 antes da aplicação do Imposto ele passará a custar R\$ 105,00. Com isso ele deverá destinar R\$ 5,00 à Receita Federal e R\$ 10,50 à Fazenda Estadual. Logo, percebe-se que o ônus tributário causado pelo ICMS aumenta quando na dupla aplicação deste e do IPI. Desse modo, qual é a carga tributária total do produto?

Comentário: inicialmente vamos calcular o preço do produto para o consumidor seguindo os passos que a questão estabeleceu. Pra isso, inicialmente, vamos ver quanto fica o preço após a inclusão do IPI:

⁴ Os serviços são somente os de telecomunicações e transportes interestaduais. Os demais serviços são tributados pelo ISQN: Imposto Sobre Serviços de Qualquer Natureza. A maior parte da renda do ICMS pertence ao Estado, uma fração dela é repassada ao município onde ocorreu o fato gerador (fato do mundo real que obriga o pagamento do tributo). Enquanto que a renda do ISQN (vulgarmente chamado de ISS) pertence na totalidade ao município.

⁵ O IPI é o Imposto Sobre Produtos Industrializados. De competência da União ele incide sobre produtos que passaram por processo de industrialização.

$$160 \cdot 1,05 = 168.$$

Agora vamos calcular o quanto de ICMS será recolhido à Fazenda Estadual:

$$0,25 \cdot 168 = 42.$$

Agora, tendo que o total pago de tributação será R\$ 50,00 (8 de IPI e 42 de ICMS), podemos ver qual a percentagem sobre o preço de venda corresponde essa tributação:

$$C_t = \frac{50}{168} \Leftrightarrow C_t \approx 29,76\%.$$

Logo nós temos uma carga tributária (C_t) de aproximadamente 29,76% incidindo sobre o preço de venda do produto. Vemos que ela é um pouco menor do que a soma das alíquotas do IPI e do ICMS.

Atividade 21: Reflexão Sobre a Soengação Fiscal

Sugestão de Aplicação: A partir do 1º ano do Ensino Médio

Em um determinado país, onde o PIB é de US\$180,00 bilhões e a carga tributária é de $\frac{1}{3}$ do PIB, temos que esse país perde 20% de seus tributos por conta da sonegação fiscal.

Determine o total perdido para a sonegação fiscal.

Comentário: questão que aborda a ideia de sonegação fiscal e abre margem para que tal assunto seja discutido em sala de aula.

Quando escutamos nossos telejornais é muito comum os vermos abordar a alta dívida pública, corrupção, ineficiência da máquina pública dentre outros problemas que apesar de reais não os únicos. A sonegação fiscal nos tira anualmente quase o dobro do que a corrupção e ela não é abordada como deveria ser nos grandes veículos de informação. Portanto, dado este problema, tal questão visa levar essa discussão para a sala de aula.

A fim de resolvê-la vamos inicialmente calcular o quanto do PIB a tributação abarca:

$$C_t = \frac{1}{3} \cdot PIB \Leftrightarrow C_t = \frac{1}{3}180 \Leftrightarrow C_t = 60.$$

Logo sua arrecadação é de US\$ 60 bilhões. Agora vamos calcular quanto a sonegação fiscal (S_f) tira dos cofres públicos:

$$S_f = 20\% \cdot 60 \Leftrightarrow S_f = 12.$$

Logo o país perde US\$ 12 bilhões com a sonegação fiscal.

Atividade 22: Discutindo a Vinculação de Receita Tributária

Sugestão de Aplicação: A partir do 1º ano do Ensino Médio

Da carga tributária de um determinado país temos os seguintes dados:

- A sua carga corresponde a 1/3 do PIB e esse, por sua vez, tem o valor de US\$ 270 bilhões.
- Dessa carga, 75% dos recursos são vinculados, ou seja, o governo não tem liberdade para gastá-los já que serão usados para o pagamento de contas de subsistência das entidades públicas, salários, dentre outras rubricas.

Desse modo, quanto o governo dispõem para gastar de maneira não vinculada?

Comentário: inicialmente vamos determinar quanto do PIB o governo arrecada através da tributação (A_t):

$$A_t = \frac{1}{3} \cdot PIB \Leftrightarrow A_t = \frac{1}{3} \cdot 270 \Leftrightarrow A_t = 90.$$

Logo sua arrecadação tributária é de US\$ 90 bilhões.

Agora vamos determinar o quanto de recursos o governo tem para manobrar livremente. O problema nos diz que 75% são vinculados, logo temos que 25% são livres. Sendo assim vamos calcular 25% dos arrecadação tributária a fim de conseguimos os recursos que o governo dispõem para usar livremente (R_l):

$$R_l = 25\% \cdot 90 \Leftrightarrow R_l = 22,5.$$

Com isso temos que o governo dispõem de US\$ 22,5 bilhões para dispor livremente.

Atividade 23: Mecânica de Empréstimo Internacional

Sugestão de Aplicação: A partir do 1º ano do Ensino Médio

Um determinado país realizou um empréstimo internacional de \$ 40.000.000,00 (quarenta milhões de unidades monetárias) para pagamento em dois anos. Sabendo que todo o montante devido será pago em uma única parcela, que a taxa de juros da operação é 5% ao ano e que junatamente com os juros também tem o pagamento de US\$ 1 milhão a título de encargos administrativos. Sendo assim, determine quanto o país pagará na data do vencimento:

Comentário: Questão que aborda a mecânica dos empréstimos internacionais pelo sistema americano de pagamento. Suas contas são simples e as resolvemos com uma única linha:

$$(1,05)^2 \cdot 4 \cdot 10^7 + 1 = 1,1025 \cdot 4 \cdot 10^7 + 1 = 4,41 \cdot 10^7 + 1 = 44.100.000 + 1 = 45.100.000$$

Logo o contratante terá que desembolsar \$ 45.100.000,00 no vencimento do empréstimo a fim de quitar a dívida.

Atividade 24: Discutindo o Crescimento do PIB e a da Arrecadação Tributária

Sugestão de Aplicação: A partir do 1º ano do Ensino Médio

Um economista notou que em seu país o PIB era de \$ 10 Bilhões há dez anos atrás. Atualmente o PIB de seu país é de \$ 100 Bilhões. Com essas informações ele modelou o crescimento do PIB por uma função afim.

Sabendo que a arrecadação tributária desse país foi estável nesse período, e é no valor de 20% do PIB, monte os gráficos de crescimento de ambos em um mesmo plano cartesiano.

Comentário: Inicialmente vamos determinar dois pontos da função que modela o crescimento do PIB durante os anos.

A questão diz que há dez anos atrás o PIB era de \$ 10 bilhões e que atualmente é de 100 bilhões. Com isso podemos tirar dois pontos da função com essas informações: $A(0, 10)$ e $B(10; 100)$. Como a arrecadação é de 20% do PIB, é só reduzirmos em 80% as ordenadas dos pontos anteriores para obtermos dois pontos da função que modela a arrecadação tributária. Sendo assim, teremos os seguintes pontos: $C(0, 2)$ e $D(10, 20)$.

Agora, utilizando o coeficiente angular das retas que passa por A e B e por C e D , podemos montar a lei de formação dessas funções:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Leftrightarrow m_{\overline{AB}} = \frac{100 - 10}{10 - 0} \Leftrightarrow m_{\overline{AB}} = 9.$$

$$m_{\overline{CD}} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} \Leftrightarrow m_{\overline{CD}} = \frac{20 - 2}{10 - 0} \Leftrightarrow m_{\overline{CD}} = 1,8.$$

Com isso podemos agora montar as leis de formação das funções:

-Função do PIB:

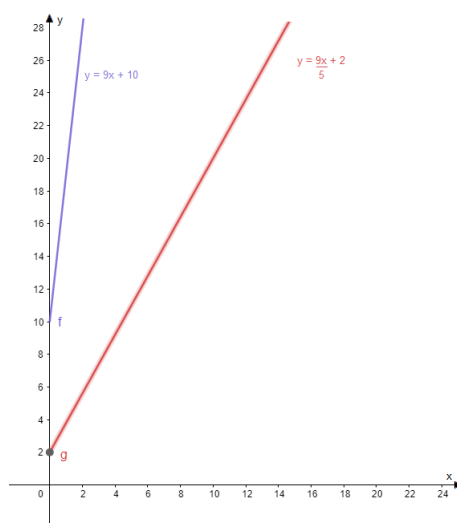
$$(y - y_A) = m(x - x_A) \Leftrightarrow (y - 10) = 9(x - 0) \Leftrightarrow y = 9x + 10$$

-Função da Arrecadação Tributária:

$$(y - y_C) = m(x - x_C) \Leftrightarrow (y - 2) = \frac{9(x - 0)}{5} \Leftrightarrow y = \frac{9x}{5} + 2.$$

Com isso podemos finalmente montar os gráficos conforme exigido pela questão:

Figura 30 – Gráfico do Crescimento do PIB e da Arrecadação Tributária



Fonte: O autor, (2021).

Atividade 25: Discutindo a Instituição de um Novo Imposto

Sugestão de Aplicação: A partir do 1º ano do Ensino Médio

O governo de um determinado país resolveu tributar os veículos de alto valor como jatinhos particulares, iates e helicópteros da seguinte maneira:

| Faixa | Amplitude | Alíquota Anualmente Aplicada |
|-------|--|------------------------------|
| 1ª | De $\$250 \cdot 10^3$ até $\$500 \cdot 10^3$ | 0,5% |
| 2ª | De $\$500 \cdot 10^3 + 1$ até $\$10^6$ | 1% |
| 3ª | De $\$10^6 + 1$ até $\$2 \cdot 10^6$ | 2% |
| 4ª | De $\$2 \cdot 10^6 + 1$ até $\$3 \cdot 10^6$ | 4% |
| 5ª | Apartir de $\$3 \cdot 10^6 + 1$ | 8% |

Qualquer bem daquela categoria que tenha seu valor menor do que $\$250.000,00$ é isento da tributação.

Sabendo que nesse país há 32 bens da primeira faixa com valor médio de $\$300.000,00$, 16 bens da segunda faixa com valor médio de $\$600.000,00$, 8 bens na terceira faixa com valor médio de $\$1.200.000,00$, quatro bens na quarta faixa no valor médio de $\$2.400.000,00$ e dois bens na quinta faixa no valor de $\$4.800.000,00$.

Com base nessas informações determine a arrecadação média do país com esse tributo.

Comentário: Questão que aborda a instituição de um imposto sobre bens de alto valor. Apesar de ter um texto longo a sua resolução é simples e em poucas linhas. Para isto vamos escrever a seguinte expressão:

$$32 \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 0,5\% + 16 \cdot 6 \cdot 10^5 \cdot 1\% + 8 \cdot 12 \cdot 10^5 \cdot 2\% + 4 \cdot 24 \cdot 10^5 \cdot 4\% + 2 \cdot 48 \cdot 10^5 \cdot 8\%.$$

Nessa expressão estamos multiplicando a quantidade de bens pertencentes a uma faixa de tributação pelo valor médio desses bens e pela alíquota aplicável àquela faixa. Fazemos isso pra cada uma das faixas e as somamos. Isso nos dá a expressão acima.

Agora vamos continuar as contas:

$$\begin{aligned} 96 \cdot 10^5 \cdot 0,5\% + 96 \cdot 10^5 \cdot 1\% + 96 \cdot 10^5 \cdot 2\% + 96 \cdot 10^5 \cdot 4\% + 96 \cdot 10^5 \cdot 8\% = \\ 96 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{100} \left(\frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8 \right) = 96 \cdot 10^3 \cdot \frac{31}{2} = 48 \cdot 31 \cdot 10^3 = 1.488.000. \end{aligned}$$

Logo a fazenda pública arrecadará \$ 1.488.000,00 com a instituição do novo imposto.

7 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho, a Matemática embasou conceitos de Economia e de Direito Tributário, mostrando versatilidade ao dialogar com temas que estão ao nosso redor e que nos afetam de maneira intensa.

Concebemos este trabalho com o intuito de contribuir para uma reflexão sobre a sociedade em que estamos inseridos. Ansiamos que esta discussão possa ser estendida para as aulas de Matemática. Discutimos conceitos Matemáticos específicos e essenciais para um entendimento sólido e consistente de modelos matemáticos econômicos e do sistema tributário brasileiro.

Abordamos desde conceitos econômicos corriqueiros tratados nos noticiários de jornais, como PIB e Renda, até conceitos mais sofisticados, como a Elasticidade e a Teoria da Utilidade Marginal Decrescente. Esse último de basilar importância, pois é nele que se apoia a ideia de justiça do sistema tributário progressivo. Vale ressaltar que como a utilidade marginal de um bem é diminuída conforme há mais disponibilidade daquele bem, e sendo o dinheiro um bem, é natural que o dinheiro seja mais útil a quem tem menos recursos. Isto sugere menores tributações àqueles que têm menores rendimentos e maiores tributações àqueles que possuem maiores rendimentos.

Relativo ao Direito tributário trouxemos aspectos que contribuem para a reflexão sobre a famosa e controversa questão: paga-se muito tributo no Brasil? Esperamos ter levado o leitor a refletir sobre a justiça de nossos programas de transferência de renda¹ e, independentemente de sua concepção da atividade Estatal, a uma reflexão sobre o nosso sistema tributário.

Sem dúvida é importante que a escola amplie essa discussão em sua grade de disciplinas. Dado o enorme impacto que esse assunto tem em nossas vidas ele não deveria ficar adstrito somente às Ciências Humanas. Acreditamos que é necessário que toda a grade curricular aborde, dentro de seus limites e com suas ferramentas, o assunto.

A partir da ampliação desta discussão talvez poderemos vir a formar cidadãos mais conscientes e capazes de alterar a realidade em que vivemos. No transcorrer deste texto é flagrante que defendemos uma postura mais ativa do Estado a fim de diminuir o abismo social entre ricos e pobres.

Também respeitamos aqueles que pensam diferente e desejamos que nossa dissertação os leve a refletir mais profundamente sobre as questões aqui abordadas para que todos nós juntos consigamos elaborar soluções a fim de que tenhamos um país justo e próspero para todos.

Convém sublinhar que as pessoas, em geral, dividem o debate público em "esquerda" e "direita". A verdade é que a realidade atual é muito mais complexa do que aquela que havia na

¹ O mais famoso deles é o "Bolsa Família" do Governo Federal. Mas também há outros programas de transferência de renda em níveis estadual e municipal.

França e no mundo do século XVIII. Para maiores informações sobre a conceituação moderna do espectro político, recomendamos o livro *Direita e Esquerda*, de Norberto Bobbio.

Trazemos um trecho da memorável fala do professor Filho (2015), de sua palestra sobre Felicidade, no TEDx:

Porque no final das contas, isto aqui que nós chamamos de Brasil somos nós. E se temos que melhorar, somos nós a melhorar. E se há algo a progredir somos nós a fazer acontecer. Somos todos corresponsáveis. É hora juntos virarmos a página e patrocinarmos, com a nossa inteligência, uma convivência melhor e mais justa. Que não seja pra nós, mas que seja para aqueles que tanto amamos e que não pediram para nascer e esperam encontrar, quando começarem a viver, um lugar bacana de convivência. Porque viver bem é conviver bem. Viver bem é viver bem com os outros. Viver bem é encontrar justiça para si e para os outros. E isso é tarefa nossa. Não haverá super heróis, não haverá soluções milagrosas, não haverá grandes gênios a nos salvar. Esta tarefa é exclusivamente nossa, de buscar a felicidade através de uma convivência feliz. (FILHO, 2020)

As perspectivas futuras apontam na direção de democratizar os conceitos e as ideias presentes neste texto, quer seja através das salas de aula, quer seja através de congressos e encontros em Educação e em Educação Matemática, amadurecendo este trabalho tornando-o uma porta de entrada para um doutoramento.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Código Tributário Nacional**. Brasília, DF: Congresso Nacional, 1966. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/15172compilado.htm>.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, DF: Congresso Nacional, 1988. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm>.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação**. Brasília, DF: Congresso Nacional, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm>.

BRASIL. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília, DF: MEC, 2020. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>.

CARNEIRO, C. **Impostos Federais, Estaduais e Municipais**. 7. ed. [S.l.]: Saraiva, 2010.

CARVALHO, H. **Economia Para Analista Do BACEN - Aula 06**. [S.l.]: Estratégia Concursos, 2017.

DIAS, L. S.; OLIVEIRA, L. B. de. **Acesso à Educação Jurídica: Pela Inclusão do Ensino Jurídico na Grade Curricular do Ensino Regular**. [S.l.: s.n.], 2015.

FILHO, C. de B. **Felicidade é Aqui e Agora**. São Paulo: [s.n.], 2020. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=HsQx02JdZ2Q>>.

IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. **Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 11**. 1. ed. [S.l.]: Saraiva, 2004.

LENZA, P.; CAPARROZ, R. **Direito Tributário Esquematizado**. 5. ed. Rio de Janeiro: Saraiva, 2020.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática No Ensino Médio - Volume 1**. 3. ed. [S.l.]: SBM, 2020.

MARTINS, D. F. N.; GOMES, R. M. **SOBRE O USO DA FUNÇÃO POLINÔMIO DERIVADO E AS FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º, 2º E 3º GRAUS NO ENSINO MÉDIO**. [s.n.], 2020. Disponível em: <<https://matematicanaescola.com/ienope/>>.

MILTONS, M. M. **Macroeconomia**. 5. ed. Rio de Janeiro: Saraiva, 2020.

NETO, A. A. et al. **Noções De Matemática**. 8. ed. [S.l.]: Vestseller, 2010.

PENA, R. F. A. **O que é Cidadania?** UOL, 2019. Disponível em: <<https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/geografia/o-que-e-cidadania.htm>>.

PEROBELLI, F. F. C. et al. **Economia nas Escolas Relatos de uma Experiência**. [s.n.], 2014. Disponível em: <<https://www.aedb.br/seget/arquivos/artigos16/21224212.pdf>>.

PIKETTY, T. **O Capital No Século XXI**. Paris: Intrínseca, 2013.

SILVA, D. I. da; FILHO, J. B. de S. F. **Impactos Dos Programas De Transferência De Renda Benefício De Prestação Contiuada E Bolsa Família Sobre A Economia Brasileira: Uma Análise De Equilíbrio Geral.** [s.n.], 2014. Disponível em: <http://repositorio.ipea.gov.br/bitstream/11058/8352/1/PPE_v48_n01_Impactos.pdf>.

WESSELS, W. J. **Economia.** 7. ed. Rio de Janeiro: Saraiva, 2020.