

**COLÉGIO PEDRO II**

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**LUIZ EVANDRO CARNEIRO ALVES**

**TOMADA DE DECISÃO SOB INCERTEZA NO ENSINO  
MÉDIO: CONEXÕES ENTRE A PROBABILIDADE E A  
PSICOLOGIA**

Rio de Janeiro  
2020



Luiz Evandro Carneiro Alves

**TOMADA DE DECISÃO SOB INCERTEZA NO ENSINO MÉDIO:  
CONEXÕES ENTRE A PROBABILIDADE E A PSICOLOGIA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador: Prof. Dr. Ivail Muniz Junior**

Rio de Janeiro  
2020

**COLÉGIO PEDRO II**  
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA**  
**BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER**  
**CATALOGAÇÃO NA FONTE**

A474 Alves, Luiz Evandro Carneiro  
Tomada de decisão sob incerteza no ensino médio: conexões entre a  
probabilidade e a psicologia / Luiz Evandro Carneiro Alves,. – Rio de  
Janeiro, 2020.

114 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação,  
Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Ivail Muniz Junior.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Probabilidade. 3. Psicologia. I.  
Muniz Junior, Ivail. II. Colégio Pedro II. III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Luiz Evandro Carneiro Alves

**TOMADA DE DECISÃO SOB INCERTEZA NO ENSINO MÉDIO:  
CONEXÕES ENTRE A PROBABILIDADE E PSICOLOGIA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Ivail Muniz Junior (Orientador)  
Colégio Pedro II - PROFMAT CPII

---

Prof. Dr. Fernando Celso Villar Marinho (Externo)  
Colégio de Aplicação da UFRJ

---

Diego de Souza Nicodemos (Interno)  
Colégio Pedro II - PROFMAT CPII

Rio de Janeiro  
2020

Dedico esse trabalho a meus alunos. Que eu sempre busque me aperfeiçoar para me tornar amanhã um melhor professor que fui ontem.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me dado a oportunidade de cursar esse mestrado. Pela saúde, tempo e disposição para enfrentar essa missão. Agradeço a minha família e meus amigos. Os amigos que já possuía e os que fiz durante o mestrado. Precisei de muita ajuda durante esse tempo e pude contar com eles nesses momentos. Em particular, Maria, Gisela, Flávio, Diego, Felipe e Jefferson.

Agradeço aos professores do Colégio Pedro II, por todo o tempo que passamos juntos nas aulas do mestrado, por terem disponibilizado seu conhecimento e sua paciência. Uma enorme saudação a todos os professores que lutam por uma educação de qualidade.

Um especial agradecimento ao meu orientador, Prof. Dr. Ivail Muniz Junior, primeiramente por ter aceitado me guiar nessa dissertação e por todos os momentos em que me auxiliou. Disponibilizou seu tempo e atenção, seja pessoalmente ou por vídeo conferência. Em dias úteis, fins de semana e feriados. Caminhamos uma longa jornada.

Agradeço também aos alunos que participaram da pesquisa, por terem um carinho em particular comigo durante as aulas, e por não terem colocado nenhum tipo de dificuldade em realizar as atividades propostas. Assim como também a direção da escola pública, onde leciono e onde efetuei as atividades. Agradeço por terem me acolhido e aceitado minhas propostas.

E para finalizar, agradeço a oportunidade que tive de ser professor e de escola pública. Pois me sinto muito feliz, não só por dar aulas e ensinar matemática, mas também por orientar e auxiliar tantos jovens em como melhorar os seus respectivos futuros. E que esse trabalho posso também ajudar muitos outros estudantes e professores como encarar melhor as decisões que tomamos em nossas vidas.

## RESUMO

ALVES, Luiz Evandro Carvalho. **Tomada de decisão sob incerteza no ensino médio: conexões entre a probabilidade e psicologia.** 2020. 114 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2020.

O ensino de probabilidade tem sido objeto de muitos estudos na área de Educação Matemática, tanto no Brasil como no mundo, sendo a tomada de decisão, nos mais variados contextos, uma habilidade ainda pouco estudada, apesar de ser considerada fundamental na formação dos estudantes da Educação Básica no Brasil, incluindo a Base Nacional Comum Curricular. O objetivo desse trabalho é apresentar um conjunto de tarefas para o Ensino Médio que tratem de situações de natureza aleatória que culminem com a tomada de decisão sob incerteza, envolvendo conceitos de probabilidade e da psicologia. Como referencial teórico utilizamos uma perspectiva híbrida composta de aspectos matemáticos e não matemáticos, sendo os primeiros aspectos relacionados aos conceitos de probabilidades de Laplace, frequentista e condicional, além da esperança matemática; e os aspectos não matemáticos baseados em estudos comportamentais sobre heurísticas e vieses, em especial sobre os efeitos de enquadramento, da assimetria entre perdas e ganhos e da teoria da perspectiva, oriundos da psicologia econômica, de Kahneman e Tversky. A produção das tarefas ocorreu em duas fases. Na primeira fase, realizamos uma pesquisa qualitativa com dois grupos de alunos ( $n = 71$ ) de uma escola pública estadual do Rio de Janeiro, aplicando tarefas nas quais os estudantes analisaram e tomaram decisões, justificando suas escolhas. Na segunda fase, elaboramos um conjunto de tarefas, algumas autorais, que levassem em consideração tanto os significados produzidos pelos estudantes na primeira fase, como adaptações de situações ou questões presentes na literatura e no Exame Nacional do Ensino Médio. O resultado final é um material com tarefas que convidam o estudante a analisar situações de natureza aleatória, a tomar decisões e justificá-las, refletindo sobre os fatores que levaram em consideração nesse processo. O material também inclui uma seção específica para o professor, contendo orientações sugestivas (não prescritivas) sobre a utilização do material, que também levam em consideração resultados obtidos em nossa pesquisa com os estudantes. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

**Palavras-chave:** Tomada de decisão sob incerteza; Ensino de Probabilidade; Psicologia econômica; Ensino Médio.

## ABSTRACT

ALVES, Luiz Evandro C. **Decision making under uncertainty in high school: connections between probability and psychology.** 2020. 114 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2020.

The teaching of probability has been the subject of many studies in the area of Mathematics Education, both in Brazil and in the world, and decision making, in the most varied contexts, is a skill that has not been studied much, although it is considered fundamental in the education of students of Basic Education in Brazil, including the Common Base National Curriculum. The objective of this work is to present a set of tasks for High School that deal with situations of a random nature that culminate in decision making under uncertainty, involving concepts of probability and Psychology. As a theoretical framework, we use a hybrid perspective composed of mathematical and non-mathematical aspects, the first aspects being related to the concepts of Laplace, frequency and conditional probabilities, in addition to mathematical hope; and non-mathematical aspects based on behavioral studies on heuristics and biases, especially on the framing effects, the asymmetry between losses and gains and the theory of perspective, originating from Economic Psychology, by Kahneman and Tversky. The production of the tasks took place in two phases. In the first phase, we conducted a qualitative research with two groups of students ( $n = 71$ ) from a state public school in Rio de Janeiro, applying tasks in which students analyzed and made decisions, justifying their choices. In the second phase, we developed a set of tasks, some of them authorial, that took into account both the meanings produced by students in phase one, as well as adaptations of situations or issues present in the literature and in the National High School Exam. The final result is material with tasks that invite the student to analyze situations of a random nature, to make decisions and justify them, reflecting on the factors that took into account in this process. The material also includes a specific session for the teacher, containing suggestive (non-prescriptive) guidelines on the use of the material, which also take into account results obtained in our research with students. This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001.

**Keywords:** Decision making under uncertainty; Teaching Probability; Economic Psychology; High school.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Astrágalos.....	20
Figura 2 - Dados Egípcios .....	20
Figura 3 - Matemáticos pioneiros na matematização do conceito de aleatoriedade e acaso ....	21
Figura 4 - Linha do tempo .....	22
Figura 5 - Esquema com o número de moradores em cada uma das 10 casas .....	23
Figura 6 - Simulação do lançamento de uma moeda honesta 500 vezes, em dois gráficos. ....	24
Figura 7 – Articulação para criação do conjunto de tarefas e suas orientações .....	49
Figura 8 - Gráfico com as respostas escolhidas para a questão 1 .....	53
Figura 9 - Gráfico com as respostas escolhidas para a questão 2 .....	54
Figura 10 - Gráfico com a porcentagem de alunos que modificaram de opção entre a 1º e a 2º questão .....	55
Figura 11 - Gráfico com a porcentagem de alunos que modificaram de opção, A para B ou B para A, entre a 1º e a 2º questão .....	56
Figura 12 - Aluno 25 – Decisões e Argumentos para a Questão 1 .....	58
Figura 13 – Aluno 25 – Decisões e Argumentos para a Questão.....	59
Figura 14 - Aluno 12 – Decisões e Argumentos para a Questão .....	60
Figura 15 - Aluno 12 – Decisões e Argumentos para a Questão 2 .....	61
Figura 16 - Aluno 05 – Decisões e Argumentos para a Questão 1 .....	62
Figura 17 - Aluno 05 – Decisões e Argumentos para a Questão 2 .....	63
Figura 18 - Aluno 03 – Decisões e Argumentos para a Questão 1 .....	64
Figura 19 - Aluno 03 – Decisões e Argumentos para a Questão 2 .....	65
Figura 20 - Aluno 18 – Decisões e Argumentos para a Questão 1 .....	66
Figura 21 - Aluno 18 – Decisões e Argumentos para a Questão 2 .....	67
Figura 22 - Aluno 27 – Decisões e Argumentos para a Questão 1 .....	68
Figura 23 - Aluno 27 – Decisões e Argumentos para a Questão 2 .....	69
Figura 24 - Aluno 19 – Decisões e Argumentos para a Questão 1 .....	70
Figura 25 - Aluno 19 – Decisões e Argumentos para a Questão 2 .....	71
Figura 26 - Gráfico com as respostas escolhidas na questão 3 .....	72
Figura 27 - Gráfico com as respostas escolhidas na questão 4 .....	73
Figura 28 - Gráfico com a porcentagem de alunos que modificaram de opção entre a 3º e a 4º questão .....	74

Figura 29 - Gráfico com a porcentagem de alunos que modificaram de opção, A para B ou B para A, entre a 3º e a 4º questão .....	75
Figura 30 - Aluno 16 – Decisões e Argumentos para a Questão3 .....	77
Figura 31 - Aluno 16 – Decisões e Argumentos para a Questão 4 .....	78
Figura 32 - Aluno 22 – Decisões e Argumentos para a Questão 3 .....	79
Figura 33 - Aluno 22 – Decisões e Argumentos para a Questão 4 .....	80
Figura 34 - Aluno 19 – Decisões e Argumentos para a Questão 3 .....	81
Figura 35 - Aluno 19 – Decisões e Argumentos para a Questão 4 .....	82
Figura 36 - Resposta do Tipo IV para a questão 3 (aluno 07).....	83
Figura 37 - Aluno 07 – Decisões e Argumentos para a Questão 4 .....	84
Figura 38 - Aluno 03 – Decisões e Argumentos para a Questão 3 .....	85
Figura 39 - Aluno 03 – Decisões e Argumentos para a Questão 4 .....	86
Figura 40 - Aluno 13 – Decisões e Argumentos para a Questão 3 .....	87
Figura 41 - Aluno 13 – Decisões e Argumentos para a Questão 4 .....	88
Figura 42 - Gráfico comparativo Kahneman / Escola pública (questão 1).....	89
Figura 43 - Gráfico comparativo Kahneman / Escola pública (questão 2).....	90
Figura 44 - Gráfico comparativo Kahneman / Escola pública (questão 3).....	90
Figura 45 - Gráfico comparativo Kahneman / Escola pública (questão 4).....	91
Figura 46 – Questão 9 .....	97
Figura 47 – Questão 10 .....	98

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	13
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	19
<b>2.1</b>	<b>Aspectos matemáticos na abordagem da TD em SNA</b> .....	19
2.1.1	Matemática e acaso: origens e desdobramentos. ....	19
2.1.2	Definições e teoremas.....	25
<b>2.2</b>	<b>Aspectos não matemáticos: Tomada de decisão sob incerteza na ótica da psicologia</b> .....	30
<b>2.3</b>	<b>Ensino de Probabilidade no Ensino Médio e a Tomada de Decisão em SNA</b> .	35
<b>2.4</b>	<b>Ensino de Probabilidade e Tomada de Decisão: alguns estudos empíricos</b> .....	39
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b> .....	45
<b>4</b>	<b>ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DAS TAREFAS</b> .....	51
<b>4.1</b>	<b>Análise das respostas dos alunos: questões 1 e 2</b> .....	52
4.1.1	Análise dos argumentos da Turma 2018 .....	58
4.1.2	Análise dos argumentos da Turma 2019 .....	68
<b>4.2</b>	<b>Análise das repostas dos alunos: questões 3 e 4</b> .....	72
4.2.1	Análise dos argumentos da Turma 2018 .....	77
4.2.2	Análise dos argumentos da Turma 2019 .....	85
<b>4.3</b>	<b>Comparativo entre as respostas fornecidas pelos alunos da escola pública com as da pesquisa de Kahneman</b> .....	89
<b>5</b>	<b>PRODUÇÃO E APRESENTAÇÃO DO MATERIAL FINAL</b> .....	92
<b>5.1</b>	<b>Material final – conjunto de tarefas</b> .....	94
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	102
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	106
	<b>APÊNDICE A - ATIVIDADES APLICADAS AOS ESTUDANTES NA FASE 1</b> .....	109

<b>APÊNDICE B – ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR E SUGESTÕES DE RESPOSTAS DAS TAREFAS FINAIS .....</b>	<b>110</b>
--	------------

## 1 INTRODUÇÃO

Vivemos em uma sociedade repleta de situações de natureza aleatória (SNA), ou seja, situações em que mesmo se conhecendo algumas condições, não é possível determinar qual será o resultado antes da realização dos experimentos que geram tais situações. Geralmente quando se pensa em incerteza e aleatoriedade nos vem à cabeça os jogos de azar, loterias, mega sena da virada, escolha de quem vai começar por meio de um par ou ímpar, batalha por meio de dados, zerinho ou um para a escolha de quem vai sair perdendo, e de uma maneira geral situações envolvendo riscos, perdas ou ganhos. Mas as SNA são muito mais amplas e comuns do que geralmente percebemos.

Por exemplo, situações como: ter o carro roubado; avaliar se um lote de produtos está dentro das especificações, ser sorteado com um prêmio no supermercado; saber se uma vacina realmente é eficiente; determinar o quanto se deve comprar ou produzir para atender a um mercado consumidor, uma cadeia de lojas, ou aos parentes em uma festa de aniversário; precisar usar a garantia de um bem antes de um ano de uso; ser contaminado por um vírus em uma epidemia em certa região do planeta; precisar usar a proteção do Instituto Nacional de Seguro Social (INSS) ou de uma previdência privada, por ter sua fonte de renda interrompida por algum imprevisto, como um acidente ou baixa circulação de clientes; dentre outras, são exemplos de situações de natureza aleatória.

Para cada uma das SNA apresentadas acima, temos várias decisões possíveis, nas quais os seres humanos poderiam mobilizar tanto aspectos matemáticos, baseados em alguma probabilidade calculada ou estimada, como aspectos não matemáticos, dentre eles os comportamentais baseados em heurísticas e vieses<sup>1</sup>, conforme apontam Simon (1955); Kahneman (2012); Thaler, Sustein (2009), dentre outros. Nos exemplos anteriores, algumas decisões que poderiam ser tomadas são: decidir se acata ou não as medidas de prevenção sugeridas por autoridades sanitárias na prevenção de doenças virais em uma epidemia; escolher se faz ou não o seguro do carro; escolher o tamanho da produção de vacinas para uma população de risco; determinar o preço do seguro que a seguradora nos cobra; contratar a garantia estendida daquela televisão 4k de custo elevado; pagar uma autonomia (privada ou ao INSS)

---

<sup>1</sup> Neste texto, a partir da perspectiva do psicólogo Daniel Kahneman, vamos considerar heurística como um atalho mental, baseado em um procedimento simples que ajuda a encontrar respostas adequadas, ainda que geralmente imperfeitas, para perguntas difíceis, tais como heurística do afeto, ancoragem, da representatividade, etc. A palavra vem da mesma raiz de heureka (KAHNEMAN, 2012, p. 127). E vieses são tendências, desvios, erros sistemáticos que os seres humanos incorrem, tais como contabilidade mental, aversão a perdas, negligência com o denominador, dentre outros.

para aposentadoria e proteção, sendo um microempreendedor, ou economizar o dinheiro e torcer para não acontecer imprevistos. Além desses exemplos do cotidiano, temos que uma “parte considerável das decisões científicas da nossa era se dá em ambientes de incerteza, sendo a teoria das probabilidades uma ferramenta matemática que fornece estruturas para a quantificação da aleatoriedade associada ao fenômeno que se está interessado, para uma tomada de decisão sob incerteza” (LANDIM et al., 2019, p.15).

As situações que descrevemos acima evidenciam a importância que o papel do ensino de probabilidade na educação básica poder ter na melhoria da compreensão de uma sociedade sobre as situações de natureza aleatória, incluindo a tomada de decisão. É o que nos apresenta Batanero et al. (2016) em *Research on Teaching and Learning Probability*, produzido a partir dos estudos apresentados no Topical Surveys do ICME-13, ao dizer que:

Para funcionar adequadamente na sociedade, os cidadãos precisam superar seu pensamento determinista e aceitar a existência de um acaso fundamental na natureza. Ao mesmo tempo, eles precisam adquirir estratégias e formas de raciocínio que os ajudem a tomar decisões adequadas em situações cotidianas e profissionais em que o acaso está presente. Essa necessidade de alfabetização probabilística foi reconhecida pelas autoridades educacionais em muitos países ao incluir a probabilidade nos currículos dos diferentes níveis educacionais e na formação dos professores. No entanto, a inclusão de um tópico no currículo não garante automaticamente seu ensino e aprendizado corretos; as características específicas da probabilidade, como uma visão multifacetada da probabilidade ou a falta de reversibilidade de experimentos aleatórios, geralmente não são encontradas em outras áreas e criam desafios especiais para professores e alunos. (BATANERO et al. – ICME 13, 2016, p.1 – tradução nossa<sup>2</sup>)

Apesar da importância da tomada de decisão em situações de incerteza, a abordagem de tarefas didáticas que contribuam para a análise de SNA que culminem com a escolha de uma dentre várias opções não costuma fazer parte dos livros didáticos de matemática no Ensino Médio brasileiro. Ou seja, a tomada de decisão sob incerteza, quando é abordada em algum livro didático, é incompatível com o papel preconizado e sugerido em documentos norteadores,

---

<sup>2</sup> O texto original, extraído é: “To adequately function in society, citizens need to overcome their deterministic thinking and accept the existence of fundamental chance in nature. At the same time, they need to acquire strategies and ways of reasoning that help them in making adequate decisions in everyday and professional situations where chance is present. This need for probability literacy has been recognized by educational authorities in many countries by including probability in the curricula at different educational levels and in the education of teachers. However, including a topic in the curriculum does not automatically assure its correct teaching and learning; the specific characteristics of probability, such as a multifaceted view of probability or the lack of reversibility of random experiments, are not usually found in other areas and will create special challenges for teachers and students”.

como a Base Nacional Comum Curricular, na medida que o número de questões sobre isso é extremamente pequeno, como se pode ver no trabalho de Carvalho (2018).

Outra contradição relacionada a essa questão se apresenta, quando olhamos para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), em especial para a competência de área 7, que consiste em: “compreender o caráter aleatório e não determinístico de fenômenos naturais e sociais utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística..”, e observamos que apesar da habilidade “construir propostas de intervenção na realidade” – diretamente associada à tomada de decisão em situações de natureza aleatória – ser uma das avaliadas na prova, os livros didáticos não fornecem problemas e situações para o desenvolvimento dessas habilidades, conforme aponta a pesquisa de Carvalho (2018).

Ou seja, ainda que a tomada de decisão em situações de incerteza seja considerada por diversas autoridades educacionais em vários países (BATANERO et al., 2016), extremamente relevante para os cidadãos do século XXI, sua abordagem costuma ser rara e superficial (CARVALHO, 2018), não fazendo jus a importância que lhe é atribuída. De outro modo, o ENEM busca avaliar uma habilidade que ao longo do Ensino Médio não é desenvolvida. Olhando para os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) isso também acontece, e para a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), temos que a tomada de decisão nesse tema é reforçada e ampliada, o que demanda ainda mais de abordagens para a Educação Básica. Temos, portanto, vários exemplos que a abordagem da análise de situações de natureza aleatória, em especial, as relacionadas ao ensino de probabilidade, não é compatível com a importância que ela tem, ou pelo menos com a importância que os documentos curriculares brasileiros e internacionais, além das avaliações em larga escala, apontam que ela possui.

Olhando para os estudos sobre o ensino de probabilidade e a tomada de decisão, identificamos também uma lacuna. Ou seja, são raros os trabalhos que investigam a tomada de decisão sob incerteza no âmbito do ensino de probabilidade na Educação Básica, em especial no Ensino Médio. Em uma pesquisa realizada no banco de dissertações do PROFMAT, entre os dias 04 de outubro de 2019 a 01 de março de 2020, encontramos 125 dissertações abordando o assunto probabilidade, porém só uma abordando a tomada de decisão sobre incertezas (Moreira, 2015). A pesquisa foi realizada utilizando os filtros com as palavras probabilidade e Tomada de Decisão. No site do Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), no da Revista Eletrônica de Matemática (REMAT), no de Educação Matemática em Revista (SBEM) e no site de Educação Matemática da PUC-SP também não encontramos artigos, durante o mesmo intervalo

de tempo - 04 de outubro de 2019 a 01 de março de 2020, sobre o uso de probabilidade para a tomada de decisões sobre incertezas em situações de ensino.

Assim, dadas: (i) a importância da tomada de decisão em situações de natureza aleatória, que inclui incertezas e risco; (ii) a presença de temas e conceitos matemáticos para a análise de situações aleatórias nos principais documentos norteadores da Educação Básica no Brasil (PCN, ENEM e BNCC); (iii) a quase ausência de questões sobre tomada de decisão sob incerteza nos livros didáticos apesar de aparecerem nos exames nacionais finais do EM; (iv) a lacuna nas pesquisas da área de ensino de matemática e de educação matemática, sobre o tema, este trabalho deseja contribuir para o desenvolvimento de conceitos e habilidades relacionadas a análise de situações de natureza aleatória, no Ensino Médio, oferecendo um material didático que ajude nessa tarefa.

**Diante do que fora apresentado, o objetivo desse trabalho é apresentar um conjunto de tarefas<sup>3</sup> sobre tomada de decisão em situações de natureza aleatória (SNA) para alunos de ensino médio, envolvendo noções básicas de probabilidade e de estudos da psicologia econômica.**

É importante salientar, nesse ponto, o motivo pelo qual optamos por uma abordagem híbrida que levasse em consideração aspectos matemáticos e não matemáticos na tomada de decisão em SNA, em especial, queremos deixar claro por que misturar probabilidade com psicologia em uma dissertação do PROFMAT. Como o ser humano geralmente leva em consideração um amplo espectro de estratégias para tomar decisões, muitas delas baseadas na lógica e na consistência matemática, mas outras baseadas em emoções, heurísticas, vieses, medo, que geram decisões inconsistentes do ponto de vista probabilístico, optamos por uma abordagem híbrida que levasse em consideração aspectos matemáticos, relacionados à probabilidade e aspectos não matemáticos, relacionados à psicologia, no design das tarefas. Essa opção foi baseada, também, nos estudos de Muniz (2016) sobre tomada de decisão com alunos do Ensino Médio.

Desta forma, os aspectos matemáticos utilizados no design de tarefas desse trabalho se referem aos conceitos de probabilidade de Laplace, probabilidade frequentista e probabilidade condicional, presentes em livros didáticos de matemática no Brasil (IEZZI et al, 2017; DANTE, 2017), na matriz de conteúdos de matemática do ENEM, e na BNCC. Além destes, utilizamos também o conceito de esperança matemática, dada a sua importância em variadas situações de

---

<sup>3</sup> Nossa concepção de tarefa é de ferramenta de mediação para o ensino e aprendizagem de matemática, sendo qualquer coisa que um professor ou pesquisador usa para demonstrar e ou construir interativamente ideias, predominantemente (mas não exclusivamente) matemáticas, assim como para pedir aos alunos para fazerem algo (WATSON et al, 2013).

natureza aleatória, como por exemplo, na precificação de seguros comuns como os de automóveis, garantias estendidas, e acidentes pessoais.

Por outro lado, quanto aos aspectos não matemáticos, neste trabalho, vamos considerar estudos de psicólogos que se dedicaram a entender o comportamento humano diante do julgamento sob incerteza e da tomada de decisão. Tais estudos foram dando corpo a uma área hoje denominada de psicologia econômica. Mesmo que neste trabalho nosso foco não seja questões econômicas e sim o julgamento sob incerteza, os estudos de George Katona, Herbert Simon, Amos Tversky, Daniel Kahneman, Robert Schiler, dentre outros, são considerados hoje como estudos da psicologia econômica, que pode ser entendida como um corpo de conhecimentos que busca compreender o comportamento econômico dos indivíduos, grupos, governos, populações, buscando entender como a economia influencia tais agentes, e como tais agentes influenciam a economia, conforme aponta Ferreira (2008).

Assim, a Psicologia econômica pode ser definida como uma busca para compreender a experiência e o comportamento humanos em contextos econômicos, fornecendo modelos descritivos e não normativos sobre as decisões sobre o uso de recursos escassos para a satisfação de diversas necessidades humanas (KIRCHLER; HOLS, 2003, p.29 apud FERREIRA, 2008, p.43).

Nosso referencial se baseia essencialmente nos estudos dos psicólogos Daniel Kahneman e Amos Tversky (1978, 2011) sobre o efeito do enquadramento, aversão a perda, negligência com o denominador (*denominator neglect*) e a teoria da perspectiva. Abordaremos esses aspectos no capítulo 3.

Assim, para atingir esse objetivo principal, nessa abordagem híbrida, traçamos um caminho com quatro objetivos parciais, quais sejam:

- (i) identificar situações de natureza aleatória já apresentadas na literatura que pudessem ser adaptadas como tarefas didáticas para o contexto do ensino médio;
- (ii) desenhar tarefas que convidassem os estudantes a tomar decisão e ao mesmo tempo mostrassem seus argumentos;
- (iii) aplicar as tarefas para alunos de ensino médio e analisar a produção dos estudantes;
- (iv) desenhar um conjunto de tarefas que levassem em consideração os resultados da literatura e os resultados da nossa pesquisa.

Desta maneira, apresentaremos no capítulo 2, um referencial teórico contendo tanto conceitos de probabilidade e suas origens, como os estudos de Kahneman usados no trabalho. Neste capítulo, aproveitaremos para trazer os principais resultados obtidos da revisão da

literatura sobre tomada de decisão em situações da natureza aleatória voltados para o Ensino Médio.

No capítulo 3, detalhamos os processos metodológicos usados em nosso trabalho. Como se deu o procedimento para criação das atividades e como estas foram aplicadas em duas turmas de uma escola pública, uma turma no ano de 2018 e outra no ano de 2019.

No capítulo 4, trouxemos a análise das respostas fornecidas pelos alunos, através do registro por escrito presente na folha de atividade e o registro verbal, feito através de gravação em vídeo. Nessa análise identificamos quais foram as escolhas feitas pelos alunos e tentamos identificar se essas ocorreram devido ao uso dos dados probabilísticos ou se foram influenciados por vieses e heurísticas. Dada a riqueza dos resultados obtidos, essa parte do trabalho pode ser vista tanto como um subsídio para o design do material final, como um conjunto de resultados que contribuem para o entendimento de como os estudantes pensam ao lidar com tais questões.

No capítulo 5, a partir dos resultados obtidos e apresentados em 2 e 3, trouxemos um conjunto de tarefas de probabilidade que abordam desde os conceitos iniciais do tema e que gradativamente culminam com o assunto tomada de decisão. Também inserimos nesse material um conjunto sucinto de orientações (não prescritivas) e algumas sugestões na abordagem e utilização de material.

Salientamos que este conjunto de atividades possui uma característica diferenciada e autoral, já que traz um pequeno material didático para o ensino médio, elaborado numa perspectiva híbrida, que leva em consideração pesquisas já realizadas e a pesquisa presente nesta dissertação, cujos resultados se referem ao contexto da escola pública, com estudantes presentes neste contexto, e que podem representar de certa forma a realidade de muitas escolas do país.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Apresentaremos, neste capítulo, um referencial teórico contendo tanto conceitos de probabilidade e suas origens, como os estudos de Daniel Kahneman, Amos Tversky e outros psicólogos usados no trabalho. Neste capítulo, também aproveitamos para trazer os principais resultados obtidos da revisão da literatura sobre tomada de decisão em situações da natureza aleatória voltados para o Ensino Médio, e algumas concepções sobre o ensino de probabilidade no Ensino Médio.

### 2.1 Aspectos matemáticos na abordagem da TD em SNA

Nesta seção discutimos as origens e desdobramentos de algumas concepções de aleatoriedade e a construção de conceitos no seio da matemática que buscam modelar situações de natureza aleatória. Também apresentaremos de forma mais formal, definições e teoremas de conceitos probabilísticos utilizados no trabalho.

#### 2.1.1 Matemática e acaso: origens e desdobramentos.

O domínio dos estudos sobre incerteza e risco é um conceito tipicamente moderno. A noção de acaso e ocorrências de fenômenos aleatórios foram percebidas sensorialmente pela humanidade bem antes de sermos capazes de utilizar a Matemática como forma de descrição do mundo. Expressões como “lançar sortes”, “o futuro pertence aos deuses”, “consultar as cartas” são exemplos disso. No entanto, a percepção antiga é de que havia uma razão mítica para o aparecimento de tais fenômenos. Segundo Landim et al. (2019), há vários registros históricos de 2700 A.C. do uso de dados antigos (como os ossos astrágalos e dados egípcios, ilustrados nas Figuras 1 e 2), usados para uma tomada de decisão regida pelos Deuses do Acaso, quando o homem queria se eximir de sua responsabilidade na escolha e tomada de decisão. (LANDIN et al., 2019, p. 5).

Figura 1 – Astrágalos



Fonte: LANDIN et al., 2019.

Figura 2 - Dados Egípcios



Fonte: LANDIN et al., 2019.

Ainda que essas decisões tomadas a partir dos dados em sociedades antigas nos sugerem que a experiência com o acaso é antiga, são os jogos de azar, e não uma experiência profunda sobre a natureza do acaso, da vida ou qualquer outra, que inspiraram os pioneiros como Luca Pacioli, Fermat e Pascal em suas incursões revolucionárias pelas leis da probabilidade, conforme nos mostra Bernstein (1997), em seu livro *Desafio aos Deuses: uma breve história do Risco*.

O professor de Matemática Luca Pacioli (1445-1517) é o primeiro que se tem conhecimento no estudo mais sistemático de situações de natureza aleatória que mais tarde se chamaria de estudo da Probabilidade. Ele desejava solucionar problema que envolvia a distribuição de prêmios em um jogo de dados. Para a solução desse problema Pacioli utilizava os conceitos de esperança matemática, ao dividir o prêmio de maneira proporcional à probabilidade de vitória de cada jogador (MOL, 2013).

Mas foi preciso esperar os séculos XVI e XVII para que matemáticos como Cardano, Tartaglia, Blaise Pascal e Pierre de Fermat conseguissem dar uma explicação mais consistente do conceito de acaso/aleatoriedade no seio da Matemática, a partir, primordialmente, do estudo de jogos de azar e de sua conexão estreita com a Análise Combinatória. Pascal e Fermat, por exemplo, trocavam cartas com questões tais como esta: “*Em oito lances de um dado um jogador deve tentar lançar um, mas depois de três tentativas infrutíferas o jogo é interrompido. Como deveria ele ser indenizado?*” Esta troca de correspondências entre eles foi o ponto de partida da moderna teoria da Probabilidade. Porém nenhum deles publicou nada sobre o assunto, foi somente Huygens em 1657, que estimulado por estas correspondências, publicou *De ratiociniis in ludo alea* (Sobre o raciocínio em jogos de dados) (BOYER, 2010).

Figura 3 - Matemáticos pioneiros na matematização do conceito de aleatoriedade e acaso



Fonte: LANDIN et al., 2019.

Pascal pode ser considerado o primeiro a estudar sobre uma teoria matemática para análise de decisão, criando assim o conceito de Esperança Matemática para estabelecer a correlação de levar uma vida mundana ou devotada à Deus. Determinando assim que o contexto de risco é caracterizado por uma situação em que o tomador de decisão não tem conhecimento exato dos resultados de suas ações, conhecendo apenas as probabilidades (MOREIRA, 2015).

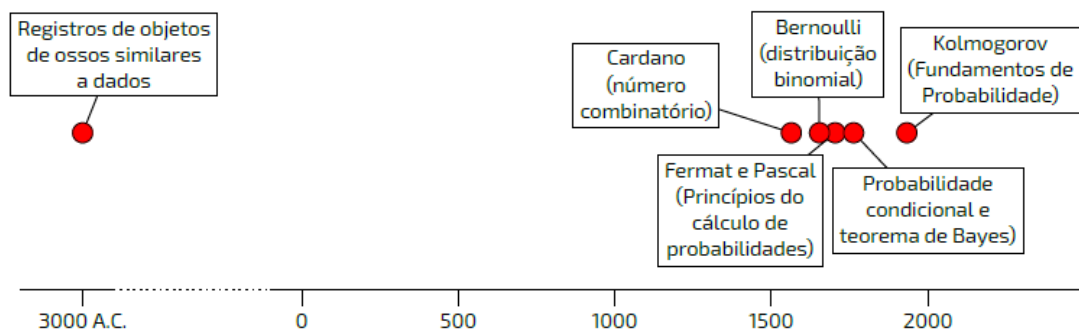
Gauss, no século XIX, também contribuiu para o desenvolvimento da Teoria da Decisão, com o estudo da curva do sino, ou curva de Gauss, criando assim uma estrutura para a compreensão da ocorrência de eventos aleatórios (MOREIRA, 2015).

De acordo com Landim et al. no *Livro Aberto de Matemática – Probabilidade* (2019, p.5-6):

A ideia fundamental por trás da matematização do acaso reside essencialmente na Estatística, quando esta reconhece, pela sua própria natureza, que fenômenos aleatórios, embora sem explicação determinística, tendem a demonstrar uma certa taxa regular de ocorrência conforme são realizados vários experimentos similares ao longo do tempo. A busca de um modelo que explique tais regularidades de ocorrência do fenômeno em estudo é a ideia central da Teoria das Probabilidades e sua utilidade hoje em vários campos científicos, como Economia, Medicina, Robótica, Engenharia, Computação, Biologia, etc, demonstra como a teoria está mais perto da Estatística do que da abordagem feita por meio do diálogo com a Análise Combinatória durante os Séculos das Luzes.

Ainda segundo esses autores, é somente na primeira metade do século XX que a teoria das probabilidades vai adquirir uma base axiomática rigorosa, com Alexei Kolmogorov (1903 – 1987). A figura a seguir ilustra uma linha do tempo destacando acontecimentos importantes da teoria das probabilidades.

Figura 4 - Linha do tempo



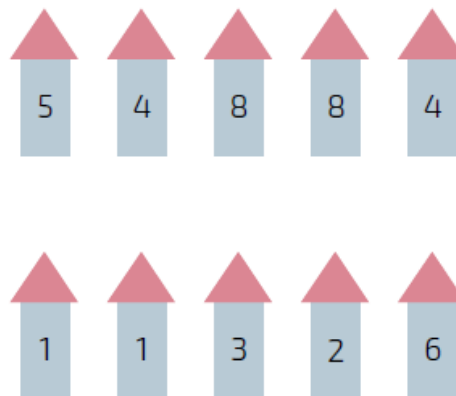
Fonte: LANDIN et al., 2019.

Se antigamente os homens buscavam a orientação de deuses para as suas decisões importantes, hoje empresas se baseiam em cálculos probabilísticos para tomar decisões sobre os caminhos que trilharão.

Esse sucinto recorte histórico nos fornece, dentre muitas, duas informações para o nosso trabalho que gostaríamos de destacar. A primeira é que a história do conceito nos mostra que tudo o que ensinamos de probabilidade atualmente no Ensino Médio veio basicamente das

ideias desse movimento dos séculos XVI e XVII, com Laplace e Pascal e Bernoulli, os quais usaram noções de análise combinatória e do Binômio de Newton na construção de um espaço amostral, e um Evento, para daí estimar probabilidades, considerando espaços equiprováveis. Essa é a chamada Probabilidade clássica, onde todos os eventos elementares são considerados igualmente prováveis. Esta interpretação costuma ser utilizada no lançamento de dados, sorteio de cartas, sorteio de bolas em uma urna, etc. A razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos vem daí. Temos então que a forma como geralmente se introduz probabilidade no Ensino Médio é muito semelhante à forma como os primeiros modelos probabilísticos foram construídos por Laplace e Pascal. E é dessa forma que os usaríamos, por exemplo, no problema de calcular a probabilidade de escolher uma casa dentre as 10 apresentadas na figura abaixo, e ela possuir 4 pessoas.

Figura 5 - Esquema com o número de moradores em cada uma das 10 casas

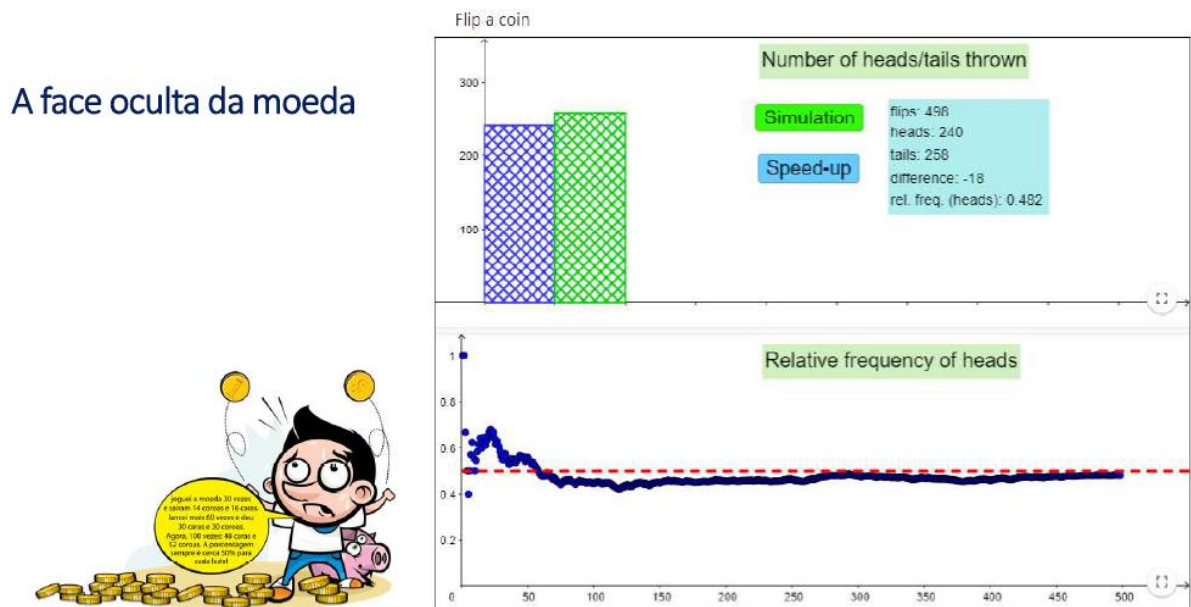


Fonte: LANDIN et al., 2019.

A segunda é que a ideia fundamental por trás da matematização do acaso reside essencialmente na Estatística, quando esta reconhece, pela sua própria natureza, que fenômenos aleatórios, embora sem explicação determinística, tendem a demonstrar uma certa taxa regular de ocorrência conforme são realizados vários experimentos similares ao longo do tempo. A história assim nos fornece uma pista de que Estatística e Probabilidade estão intimamente conectadas, e que seu ensino deveria considerar essa conexão. Os ensaios de Bernoulli, por exemplo, mostram como a investigação de padrões de frequência de acontecimentos de fenômenos podem contribuir para a compreensão de tais fenômenos, e que isso deveria ser mais utilizado no ensino de probabilidade. Por exemplo, como podemos justificar que ao lançarmos para cima uma moeda não viciada de duas faces a probabilidade de sair cara seja 0,5? A interpretação frequentista de probabilidade nos diz que probabilidade de um evento é definida

como a frequência relativa de ocorrência deste evento, se o experimento for repetido, sob as mesmas condições, um grande número de vezes. Os gráficos na figura 6 ilustram a frequência relativa de caras, ou seja, número de caras obtidas sobre o número de lançamentos da moeda (eixo vertical) em função do número de lançamentos da moeda (eixo horizontal). A linha horizontal indica o valor = 0,5, a probabilidade teórica de ocorrer cara para uma moeda honesta. Observe como rapidamente a frequência relativa se aproxima do valor  $\frac{1}{2}$ , conforme a Lei dos Grandes Números de Jakob Bernoulli (1654 – 1705).

Figura 6 - Simulação do lançamento de uma moeda honesta 500 vezes, em dois gráficos



Fonte: LANDIN et al., 2019.

Na próxima seção, vamos apresentar algumas definições e teoremas de probabilidade que serão utilizados nesse trabalho.

### 2.1.2 Definições e teoremas

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e teoremas utilizados neste trabalho por se relacionarem às situações que propomos e com os tópicos de probabilidade já abordados no Ensino Médio, excetuando-se a esperança matemática.

**Definição 2.1 (Experimento Aleatório):** É um experimento que, quando repetido muitas vezes, mantendo-se as mesmas condições iniciais, apresenta resultados geralmente diferentes, ou seja, mantidas as condições iniciais, não sabemos de antemão o que vai acontecer, mas sim o que pode acontecer. Podemos citar, por exemplo um experimento de lançar um dado de 6 faces e verificar a face voltada para cima.

**Definição 2.2 (Espaço Amostral):** O espaço amostral ( $\Omega$ ) de um experimento aleatório é o conjunto de todos os seus possíveis resultados. Por exemplo, ao lançar um dado de 6 faces e verificar qual a face voltada para cima o espaço amostral seria o conjunto  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

**Definição 2.3 (Evento):** Um evento ( $A$ ) é um subconjunto do espaço amostral que verifica certa propriedade. Por exemplo, o evento lançar um dado de 6 faces e que a face voltada para cima seja um número primo será o conjunto  $A = \{2, 3, 5\}$  que é um subconjunto de espaço  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

**Definição 2.4 (Probabilidade):** A probabilidade de ocorrência de um evento  $A$  ao se realizar um experimento mede o grau de certeza (ou incerteza) da ocorrência desse evento. Quanto maior for a probabilidade, maiores serão as chances daquele evento ocorrer. Assim, a probabilidade de ocorrência desse evento  $A$ , simbolizada por  $P(A)$ , é o quociente entre o número de elementos do conjunto  $A$  e o número de elementos do espaço amostral  $\Omega$ . Ou seja:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

É importante salientar que tal definição para a probabilidade deve sempre considerar que o espaço amostral deve ser finito.

**Definição 2.5:** Considere dois eventos  $A$  e  $B$  de um espaço amostral  $\Omega$ , com  $P(B) > 0$ . A Probabilidade Condicional da ocorrência do evento  $A$ , sabendo da ocorrência do evento  $B$ , é denotado por  $P(A|B)$ , e é definida pela razão a seguir:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

A ocorrência de A está condicionada ao fato de B já ter ocorrido, ou seja, a ocorrência do evento B interfere na do evento A.

**Definição 2.6:** Os eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos ou disjuntos quando  $A \cap B = \emptyset$  (conjunto vazio). Assim, caso A e B sejam mutuamente exclusivos teremos que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , já que  $P(A \cap B) = 0$ .

**Teorema 2.1 (Teorema da Multiplicação):** Se  $P(A) > 0$  e  $P(B) > 0$ , então:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Demonstração:

Demonstraremos o resultado para a intersecção de dois eventos e o resultado seguirá usando o princípio de indução finita. Observe que, supondo que  $P(A) > 0$  e  $P(B) > 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \\ P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B|A)P(A) \end{aligned} \right\} P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$

que é o queríamos demonstrar.

E de maneira mais geral, se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são eventos de um espaço amostral  $\Omega$ , e P é uma probabilidade definida em S, então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1, A_2) \dots P(A_n|A_1, \dots, A_{n-1}).$$

**Teorema 2.2 (Teorema da Probabilidade Total):** Seja  $B_1, B_2, \dots, B_n$  uma partição do espaço amostral  $\Omega$ , isto é, esses eventos são mutuamente exclusivos e  $\bigcup_{k=1}^n B_k = \Omega$ . Se A é um evento de  $\Omega$  e P uma probabilidade definida para os eventos de  $\Omega$ , então:

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|B_k) P(B_k).$$

Demonstração:

Pela Teorema 2.1 da Multiplicação, temos que  $P(B_i)P(A|B_i) = P(A \cap B_i)$ .

$$\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = P\left[\bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)\right] = P\left[A \cap \bigcup_{i=1}^n B_i\right] = P(A).$$

**Teorema 2.3 (Teorema de Bayes):** Seja B um evento de  $\Omega$ ,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  uma partição de  $\Omega$  e  $P(B) > 0$ , então para  $j = 1, \dots, n$  tem-se

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(B|A_j)}.$$

Demonstração:

Suponha que o evento B tenha ocorrido. Pelas definições anteriores e pelos Teoremas 1.1 e 1.2, temos que:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}.$$

Como  $P(A_j \cap B) = P(A_j) \cdot P(B|A_j)$ , tem-se:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{P(B)}.$$

Então, se  $P(B) > 0$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , pelo Teorema da Probabilidade Total:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

ou

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(B|A_j)}.$$

**Definição 2.7 (Independência):** Dados dois eventos A e B de um espaço amostral  $\Omega$ , diremos que A independe de B se a ocorrência de B não afeta a ocorrência de A, com isto  $P(A|B) = P(A)$ . Portanto:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

**Definição 2.8 (Variável Aleatória):** Consideremos um experimento e  $\Omega$  o espaço amostral associado a esse experimento. Uma função X, que associa a cada elemento  $\omega \in \Omega$  um

número real,  $X(\omega)$ , é denominada variável aleatória. Ou seja, variável aleatória é um característico numérico do resultado de um experimento.

**Exemplo 2.1:** Ao lançarmos uma moeda três vezes, podemos estar interessados na quantidade de vezes que apareceram coroas, e não na ordem em que caras e coroas ocorreram.

Se  $X$  é o número de coroas que ocorreram nos três lançamentos, então os valores que  $X$  pode assumir são: **0, 1, 2 e 3.**

Como o espaço amostral para esse experimento é:

$$\Omega = \{ccc, cck, ckc, ckk, kcc, kck, kkc, kkk\}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} X(ccc) = 3, & \quad X(cck) = 2, & \quad X(ckc) = 2, & \quad X(ckk) = 1, & \quad X(kcc) = 2, \\ X(kkc) = 1, & \quad X(kck) = 1, & \quad X(kkk) = 0 \end{aligned}$$

A probabilidade de cada um dos valores que a variável aleatória pode assumir é:

$$P[X = 0] = \frac{1}{8};$$

$$P[X = 1] = \frac{3}{8};$$

$$P[X = 2] = \frac{3}{8};$$

$$P[X = 3] = \frac{1}{8}.$$

**Definição 2.9 (Esperança Matemática):** Se  $X$  é uma variável aleatória definida em um espaço amostral  $\Omega$ , finito ou infinito enumerável, então o valor esperado de  $X$  é

$$E[X] = \sum_{\omega \in S} X(\omega)P(\omega).$$

**Exemplo 2.2:** Suponha que  $S$  seja o conjunto dos 20 estudantes de uma turma da 2ª série do Ensino Médio e que um estudante dessa turma será selecionado ao acaso. Sabendo que  $X$  representa a nota bimestral de Matemática do estudante selecionado,  $E[X]$  irá representar a média da turma em Matemática.

As notas bimestrais estão representadas abaixo e os alunos estão representados pelos respectivos números na lista de chamada.

Tabela 1: Notas bimestrais.

ALUNO	NOTA BIMESTRAL DE MATEMÁTICA	ALUNO	NOTA BIMESTRAL DE MATEMÁTICA
1	8	11	6
2	5	12	4
3	5	13	4
4	6	14	3
5	7	15	6
6	3	16	7
7	10	17	8
8	2	18	9
9	9	19	7
10	5	20	7

Fonte: SILVA FILHO, 2016.

$$E[X] = \sum_{\omega \in S} X(\omega)P(\omega)$$

$$E[X] = \frac{1}{20}(8 + 5 + 5 + 6 + 7 + 3 + 10 + 2 + 9 + 5 + 6 + 4 + 4 + 3 + 6 + 7 + 8 + 9 + 7 + 7)$$

$$E[X] = \frac{121}{20} = 6,05.$$

## **2.2 Aspectos não matemáticos: Tomada de decisão sob incerteza na ótica da psicologia**

Quando pensamos em tomada de decisão, sabemos que os indivíduos fazem isso o tempo todo, tendo ou não consciência. São muitos os contextos em que os julgamentos e as escolhas acontecem, incluindo os de natureza pessoal, familiar, acadêmica e profissional. Contudo, nem sempre parece que estamos no comando. Podemos ser impulsivos ou reflexivos demais, deixando em alguns casos que a emoção nos guie e, em outros, ficamos paralisados pela incerteza. Tomamos decisões importantes mobilizando nossa capacidade lógica, a partir de ferramentas analíticas, incluindo as que envolvem Matemática e, em outros casos, tomamos uma decisão que nos agrada, quase que de forma instantânea, perguntando como isso foi possível. Temos, portanto, um processo complexo, que pode envolver a consciência ou não (MUNIZ, 2016).

Conforme já antecipamos na introdução, a Psicologia econômica tem estudado, principalmente nos últimos 50 anos a forma como as pessoas realmente se comportam em diversas situações de risco e incerteza, dentre elas situações envolvendo escolhas em situações financeiras. Herbert Simon, Daniel Kahneman e Amos Tversky estão entre os que mais contribuíram para ampliar a compreensão como as pessoas realmente tomam decisões, em contexto os mais variados, incluindo os envolvendo incerteza.

Daniel Kahneman, professor emérito de psicologia da Universidade de Princeton (Estados Unidos), recebeu o prêmio Nobel de Economia em 2002 por sua obra, em parceria com Amos Tversky. Em seu livro *Rápido e Devagar: duas formas de pensar* (2012), ele detalha que nossa mente tem o funcionamento de duas formas: uma rápida e intuitiva e outra mais devagar, porém, mais lógica e deliberativa. No campo da tomada de decisões sobre incertezas, a psicologia cognitiva já estuda há anos como a mente humana comporta-se de forma não racional. Dados estatísticos e probabilísticos são desconsiderados na hora de tomar decisões, mesmo em áreas consideradas mais racionais, como a de Economia, por exemplo. Kahneman (2012) trata de diversos estudos que foram realizados desde a década de 1970 e descreve duas formas de pensar, ele chama estas duas formas de pensar de Sistema 1 e Sistema 2.

- ✓ O Sistema 1 opera automática e rapidamente, com pouco ou nenhum esforço e nenhuma percepção de controle voluntário.
- ✓ O Sistema 2 aloca atenção às atividades mentais laboriosas que o requisitam, incluindo cálculos complexos. As operações do Sistema 2 são muitas vezes associadas com experiências subjetiva de atividade, escolha e concentração. (KAHNEMAN, 2012, p.29)

Assim, conforme Muniz (2016, p. 136), o sistema 1 é de pensamento automático, intuitivo, rápido e emocional. Ele se baseia em atalhos mentais, chamadas heurísticas, que geram respostas intuitivas aos problemas quando eles surgem. O segundo sistema, é lento, lógico e deliberado. O quadro abaixo sintetiza as principais características dos dois sistemas.

Tabela 2 – Características dos dois Sistemas Cognitivos

Sistema 1 (Automático)	Sistema 2 (Reflexivo)
Não controlado	Controlado
Sem esforço	Laborioso
Associativo	Dedutivo
Rápido	Lento
Inconsciente	Autoconsciente
Busca atalhos	Segue normas

Fonte: KAHNEMAN, 2012.

De acordo com Kahneman (2012), as pessoas normalmente não seguem os princípios matemáticos adequados ao julgar a probabilidade na tomada de decisão em eventos incertos. Tendem a transformar problemas complexos de probabilidade e previsão em situações em que a resposta ocorre somente devido ao seu julgamento da situação. Para tanto, usam um recurso que ele chama de **heurística**, definido como um processo que nos ajuda a encontrar respostas adequadas, mesmo que incorretas, para perguntas difíceis. Por exemplo, ao fazer a pergunta abaixo a um grupo de pessoas, elas utilizaram da heurística da Representatividade, onde as probabilidades são estimadas a partir da semelhança das características fornecidas se assemelham com os profissionais de uma determinada profissão.

Considere um indivíduo descrito como segue: Steve é muito tímido e retraído, prestativo, porém desinteressado nas pessoas ou no mundo real, e que necessita de ordem e tem paixão por detalhes. Como as pessoas avaliam a probabilidade de que Steve tenha uma ocupação particular de uma lista de possibilidades (por exemplo, fazendeiro, bibliotecário ou médico)? Como as pessoas ordenam essas ocupações da mais provável para a menos provável? (KAHNEMAN, 2012, p. 14).

Devido a se utilizarem da heurística da Representatividade, a maioria dos entrevistados, opta por escolher a profissão de Steve como sendo de bibliotecário, pois a personalidade de Steve se assemelha a de profissionais que ocupam esse cargo. O Sistema 1 toma essa atitude quando confrontado com uma pergunta de maior grau de complexidade. Porém os entrevistados não conseguem observar a situação de uma forma mais ampla, considerando em números globais há muito mais fazendeiros e médicos do que bibliotecários, assim a probabilidade de que Steve trabalhe em uma biblioteca deveria ser a menor entre as demais profissões.

Outros dois pontos destacados por Kahneman que influenciam nas escolhas que tomamos são a **aversão as perdas** e o **efeito de enquadramento**. O efeito de enquadramento ocorre quando uma situação é apresentada e ao mudar a semântica de uma palavra ou frase, mas mantendo-se o significado, as pessoas podem vir a mudar sua opinião sobre um determinado assunto e alterar sua decisão. Por exemplo suponha a seguinte situação, 1200 pessoas de uma cidade foram contaminadas com uma doença letal e um dos tratamentos oferecidos tem a garantia de curar os enfermos, mas só podem ser aplicados a 400 pessoas. O outro tratamento possui uma pequena probabilidade (30%) de todos os doentes serem salvos. O primeiro tratamento pode ser apresentado de duas formas: que 400 pessoas irão sobreviver ou que 800 pessoas irão morrer. Porém a segunda afirmação possui a palavra morte, o que acaba desencadeando um viés, chamado de aversão a perda. Estudos de Kahneman comprovam que os seres humanos dão muito mais valor a perda do que aos ganhos. Assim, é possível que uma pessoa seja induzida a tomar uma decisão menos vantajosa, a fim de fugir do risco de perder. Voltando ao exemplo, a população da cidade é quem deverá escolher qual será o tratamento realizado. Caso os responsáveis pela pesquisa desejem que a escolha seja pelo primeiro tratamento, a afirmação utilizada para descrever essa situação poderia ser a de que 400 pessoas iriam ser salvas, mas caso esses responsáveis prefiram que o segundo tratamento seja adotado, a primeira opção poderia ser apresentada com a informação de que 800 pessoas irão morrer.

Kahneman em parceria com Tversky, criou ainda na década de 1970, a **Teoria da Perspectiva**, que explica como as pessoas tomam decisões em situações que envolvem riscos a probabilidade de resultados são incertas. E que tendemos a valorizar mais as perdas do que os ganhos, associando assim a aversão a perdas. E desta forma, as pessoas são inclinadas a ter aversão ao risco quando estão ganhando e propensão ao risco quando perdem. Eles propõem um conjunto de questões para comprovar esta teoria. Em uma delas, sugere que a pessoa está participando de um jogo de moeda e caso ao lançar a moeda o resultado seja coroa a pessoa perderá cem dólares e caso saia cara ela ganhará 150 dólares. Ao finalizar pergunta se a pessoa

participaria do jogo. Embora o ganho seja maior que a perda, as pessoas pesquisadas prefeririam não participar do jogo, demonstrando serem avessas a perda.

Algumas das questões produzidas nas pesquisas de Kahneman, foram selecionadas para serem utilizadas nesta dissertação de mestrado, sendo adaptadas à realidade escolar. Seguem as questões originais produzidas por Kahneman, com as escolhas feitas pelos alunos estudados. Os dois problemas foram respondidos por universitários. N representa o total de participantes em cada pesquisa e entre parênteses a porcentagem que escolheu aquela opção (Kahneman, 2005).

**Problema 1 (N=152):** Imagine que os EUA estão se preparando para a eclosão de uma doença asiática incomum, com a expectativa de mortalidade de 600 pessoas. Dois programas alternativos para combater a doença foram propostos. Presuma que as estimativas científicas exatas das consequências dos programas são as seguintes:

Se o programa A for adotado, 200 pessoas serão salvas. (72%)

Se o programa B for adotado, há uma probabilidade de um terço que 600 pessoas serão salvas e uma probabilidade de dois terços que ninguém será salvo. (28%)

**Qual dos dois programas você apoiaria?**

**Problema 2 (N = 155):** Imagine que os EUA estão se preparando para a eclosão de uma doença asiática incomum, com a expectativa de mortalidade de 600 pessoas. Dois programas alternativos para combater a doença foram propostos. Presuma que as estimativas científicas exatas das consequências dos programas são as seguintes:

Se o Programa C for adotado, 400 pessoas morrerão. (22%)

Se o Programa D for adotado, há uma probabilidade de um terço que ninguém morrerá e uma probabilidade de dois terços de que 600 pessoas vão morrer. (78%)

**Qual dos dois programas você apoiaria?**

**Problema 3 (N = 150):** Imagina que você enfrenta o seguinte par de decisões concorrentes. Primeiro, examine ambas as decisões, depois indique as opções que você prefere.

**Decisão (i). Escolha entre:**

A. Um ganho seguro de \$240 (84%)

B. 25% de probabilidade de ganhar \$1.000 e 75% de possibilidade de não ganhar nada (16%).

**Decisão (ii). Escolha entre:**

A. Uma perda segura de \$750 (13%)

B. 75% de probabilidade de perder \$1.000 e 25% de possibilidade de não perder nada (87%)

Para o problema 1, Kahneman afirma que as pessoas decorrem da aversão ao risco, ao selecionar preferencialmente o programa A. Já no problema 2, muda-se a resposta da maioria para o programa D, o que mostra agora uma atração pelo risco, causada pela palavra morte presente na alternativa que contém o programa C. Mesmo as opções de programa C e D do Problema 2 serem indistinguíveis em termos reais das opções A e B do Problema 1. Kahneman afirma que este tipo de alteração na escolha das alternativas ocorre entre todos os tipos de indivíduos, não importando o seu grau de estudo. Mesmo sendo confrontados com suas repostas conflitantes e após reler os problemas, as pessoas mantêm as suas respectivas respostas. Kahneman observa que “Em seu apelo teimoso, efeitos de enquadramento se parecem mais com ilusões de percepção do que com erros computacionais” (KAHNEMAN; TVERSKY, 1982, p. 545).

No problema 4 ocorre a mesma situação observada no problema anterior, uma grande parte dos pesquisados faz uma escolha inicial avessa ao risco, selecionando a opção onde há a possibilidade do ganho seguro, demonstrando medo a opção com a aposta, na decisão 1. Na decisão 2 as pessoas optam pela atração ao risco, escolhem correr o risco ao invés da perda segura.

Utilizaremos esses resultados novamente em nossa comparação dos dados obtidos em nossa pesquisa, apresentados no capítulo 4.

### 2.3 Ensino de Probabilidade no Ensino Médio e a Tomada de Decisão em SNA

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), que apresentam informações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), dividem o ensino de Matemática entre três eixos ou temas estruturadores. São eles:

- 1 – Álgebra: números e funções
- 2 – Geometria e medidas
- 3 – Análise dos dados

O ensino de Probabilidade encontra-se sobre o tema de Análise de dados, junto com Estatística e Contagem.

A Estatística e a Probabilidade devem ser vistas, então, como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, mais especialmente aquelas provenientes de outras áreas. Devem ser vistas também como formas de a Matemática quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente. (...) a Probabilidade acena com resultados possíveis, mas não exatos. Ao afirmar que o resultado 1 tem  $1/6$  de probabilidade no lançamento de um dado, não há certeza de que em seis lançamentos do dado o número 1 sairá exatamente uma vez. Assim como ao afirmarmos que determinado tratamento médico tem 90% de probabilidade de cura para uma doença, não garante que em um grupo de 10 pessoas submetidas a este tratamento exatamente uma pessoa continuará doente. (BRASIL, 2006, p. 123).

E sobre a forma como o conteúdo de probabilidade deve ser ensinado, os PCNEM fazem a seguinte indicação:

- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
- Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico. (BRASIL, 2006, p. 124).

A nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que está sendo discutida para o Ensino Médio, prevê que a Matemática ensinada deve ser utilizada para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos.

Esses problemas incluem, necessariamente, os contextos relativos às áreas das Ciências da Natureza e Humanas e da própria Matemática, incluindo os oriundos do avanço tecnológico. No Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida; por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de

conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2017, p.101).

De uma maneira geral, A BNCC espera que no Ensino Médio, haja uma diversificação de situações-problema, incluindo aquelas que permitam aos jovens a aplicação de modelos com maior nível de abstração e de propostas de intervenção em contextos mais amplos e complexos (BRASIL, 2017, p.112). Além disso, também propõe que os estudantes desenvolvam: “... propostas de intervenção pautadas em evidências, conhecimentos científicos e princípios éticos responsáveis (idem, p.113).

Ainda na BNCC, a expressão tomar decisão aparece quatro vezes, sendo a primeira relacionada a competência específica 2, que diz:

Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. (BRASIL, 2019, p. 100).

Observamos que essa competência pretende colocar os estudantes em situações nas quais precisam tomar decisão conjunta para investigar questões de impactos sociais que os mobilizem e, assim, propor e/ou participar de iniciativas e/ou ações que visem solucionar esses problemas.

Apesar disso, temos uma crítica, pois ao mesmo tempo que tomar decisão é algo preconizado na BNCC, perde-se a oportunidade de explorá-la na medida em que a habilidade de **tomada de decisão não aparece de forma explícita** nas habilidades relacionadas ao ensino de probabilidade e estatística, conforme se pode ver no quadro a seguir.

Tabela 3 – Habilidades probabilidade no BNCC

(EM13MAT311)	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.
(EM13MAT312) Resolver	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Fonte: BRASIL, 2018.

Para Lopes e Souza (2016, p. 1469), a proposta de currículo (BNCC) sugere que, por meio de conhecimentos iniciais da Probabilidade e da Estatística, os(as) estudantes comecem a

compreender a incerteza como objeto de estudo da Matemática e o seu papel na compreensão de questões sociais que são úteis à construção de valores. Propõe também que se tornem capazes de fazer uma análise mais crítica, por exemplo, levando em consideração que, nem sempre, uma resposta é única e conclusiva. A BNCC afirma que o ensino das noções relativas à Probabilidade tem como finalidade a compreensão, desde cedo, de que nem todas as afirmações sobre fenômenos são certas, ou seja, nem todos os fenômenos são determinísticos. É fundamental essa percepção para a compreensão de como funcionam a sociedade e os fenômenos da natureza.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), traz em sua matriz de referência, documento este que descreve as competências e habilidades exigidas dos alunos, na área de Probabilidade a seguinte indicação.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade. (BRASIL, 2018, p.7).

Assim temos a importância do estudo de Probabilidade apresentado pelos documentos oficiais do governo e a forma como deve ser tratado, em situações que o aluno possa transpor o conhecimento para situações do seu cotidiano (como por exemplo, a tomada de decisões sobre incertezas). Além da presença do assunto em provas oficiais, como o ENEM.

Segundo Lopes (2008), ao estudar probabilidade os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e aleatoriedade, que aparecem nas nossas vidas diariamente, particularmente na mídia. Outras ideias importantes incluem a compreensão de que probabilidade é uma medida de incerteza, que modelos são úteis para simular eventos para estimar probabilidades e que, algumas vezes, as nossas intuições são incorretas e podem nos levar à conclusão errada no que se refere à probabilidade e eventos de chance. Além da utilidade do estudo da probabilidade para os alunos que forem se dedicar as áreas de Biologia e Ciência Sociais, é preciso observar que: “o mundo em rápida mudança como o que estamos vivendo, é imprescindível o conhecimento da probabilidade de ocorrência de acontecimentos para agilizarmos a tomada de decisão e fazermos previsões”. (LOPES, 2008, p.4).

Oliveira (2016), afirma em sua dissertação de mestrado, que o conteúdo de probabilidade aplicado aos alunos do Ensino Médio possui uma abordagem matemática teórica, fruto de uma tradição escolar, onde a matemática é ensinada de uma forma determinística, fornecendo sempre resultados exatos para soluções de problemas. E que os livros didáticos apresentam uma abordagem que prioriza o formalismo, com uma quantidade excessiva de fórmulas, com a total ausência, em alguns casos, de uma visão consistente da teoria referente a probabilidade. E que deveria tentar ampliar o espectro de raciocínio do aluno, para que assim ele possa conseguir fazer estimativas e previsões em diferentes contextos, como a Tomada de Decisão em SNA.

Finalizamos corroborando com Lopes & Souza (2016), de que exercer a cidadania na atual sociedade exige que as pessoas sejam participativas, críticas, reflexivas e criativas. A formação em Educação Estatística e Probabilidade pode contribuir muito para isso, já que os estudantes podem vivenciar na escola experiências que lhes permitam contrabalançar a visão determinista do universo, reconhecendo que vários problemas envolvem indeterminações que podem ou não ser modeladas.

## 2.4 Ensino de Probabilidade e Tomada de Decisão: alguns estudos empíricos

A pesquisa em qualquer área do ensino de matemática deve ser apoiada por uma reflexão sobre o que será ensinado, e seus objetivos. Uma reflexão epistemológica sobre os objetos que estão sendo investigados é importante, principalmente em uma área como a estocástica que tem características bem diferentes de modelos matemáticos determinísticos. Pergunte a um aluno do ensino médio qual a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda e depois pergunte o porquê. Ou pergunte o que significa  $\frac{1}{2}$  nesse contexto. A questão epistemológica rapidamente mostra a sua importância já no início da abordagem do tema. Essa reflexão também é especialmente relevante no ensino de probabilidade, onde diferentes abordagens do conceito que influenciam a prática da estocástica e o currículo escolar ainda estão sendo debatidas na comunidade científica (BATANERO et al., 2016).

Segundo Hacking (1975), a probabilidade foi concebida a partir de duas perspectivas principais, embora diferentes, desde o seu surgimento. Um lado estatístico da probabilidade está relacionado à necessidade de encontrar regras matemáticas objetivas que governam processos aleatórios; os valores de probabilidade são atribuídos por meio de dados coletados de pesquisas e experimentos. Complementar a essa visão, um lado epistêmico vê a probabilidade como um grau pessoal de crença, que depende das informações disponíveis para a pessoa que atribui uma probabilidade. A partir dessas duas perspectivas principais, refletidas nos trabalhos dos principais autores que contribuíram para o progresso da probabilidade, diferentes visões de probabilidade foram sustentadas ao longo da história (BATANERO 2015; BATANERO; DÍAZ 2007; BATANERO et al. 2005a, b; BOROVCNIK; KAPADIA 2014a; CHERNOFF; RUSSELL 2012). Atualmente, as principais interpretações primárias são intuitivas, clássicas, frequentistas, subjetivas, lógicas, propensões e axiomáticas.

Cada uma dessas visões envolve algumas questões filosóficas e é mais adequada para modelar fenômenos particulares do mundo real ou para ser levada em conta nos currículos de estudantes específicos. E cada uma dessas visões pode orientar a prática do professor no ensino de probabilidade para além da exclusiva abordagem clássica.

Essas diferentes interpretações podem ser sintetizadas no quadro a seguir, e não serão tratadas detalhadamente aqui nesse texto, sendo mencionadas apenas aquelas que possuam alguma relação direta com as SNA que abordamos nesse texto.

Tabela 4 – Elementos que caracterizam as diferentes visões de probabilidade

<b>Visões de Probabilidade</b>	<b>Procedimentos</b>	<b>Propriedades</b>	<b>Conceitos relacionados</b>
Clássica	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Combinatória</li> <li>• Proporções</li> <li>• Análise a priori de estruturas experimentais</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proporção favorável para todos os casos possíveis</li> <li>• Equiprobabilidade de eventos elementares</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expectativa</li> <li>• Justiça</li> </ul>
Frequentista	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dados estatísticos coletados a posteriori</li> <li>• Análise de dados estatísticos</li> <li>• Ajuste a curva</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• "Limite" da frequência relativa a longo prazo</li> <li>• Objetiva; baseada em fatos empíricos</li> <li>• Experimento repetível</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Frequência relativa</li> <li>• Distribuição de dados</li> <li>• Convergência</li> <li>• Independência de julgamentos</li> </ul>
Propensões	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Análise a priori da montagem experimental</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Disposição física ou tendência</li> <li>• Aplicável a casos únicos</li> <li>• Relacionado as condições experimentais</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Propensão</li> <li>• Tendência probabilística casual</li> </ul>
Lógica	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Análise a priori do espaço de possibilidades</li> <li>• Lógica proposicional</li> <li>• Lógica indutiva</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Grau de crença</li> <li>• Possível de ser revisto com experiências</li> <li>• Relações entre duas declarações, generaliza implicações</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Evidência</li> <li>• Hipótese</li> <li>• Grau de implicação</li> </ul>
Subjetiva	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teorema de Bayes</li> <li>• Probabilidade Condicional</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Caráter subjetivo</li> <li>• Possível de ser revisto com experiências</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Possibilidade</li> <li>• Permutabilidade</li> <li>• Probabilidade a priori (ou distribuição)</li> <li>• Probabilidade a posteriori (ou distribuição)</li> </ul>
Axiomática	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teoria dos Conjuntos</li> <li>• Conjunto Álgebra</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Função mensurável</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Espaço amostral</li> <li>• Evento certo</li> <li>• Álgebra de eventos</li> <li>• Medidas</li> </ul>

Fonte: BATANERO et al., 2016.

Na unidade de Probabilidade do projeto *Livro Aberto*, do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), por exemplo são apresentadas três interpretações dentre as apresentadas acima, sendo elas: clássica, frequentista e subjetiva.

### **Probabilidade clássica:**

Na interpretação clássica de probabilidade todos os eventos elementares são considerados igualmente prováveis (equiprováveis). Esta interpretação costuma ser usada em problemas envolvendo lançamento de dados, sorteios de cartas de um baralho e outros jogos. De fato, os primeiros trabalhos teóricos publicados envolvendo

probabilidades no século XVII, fazem uso desta interpretação e envolvem cálculos de probabilidades de eventos em jogos de azar. (LANDIN et al., 2019, p.14).

### **Probabilidade frequentista:**

Na interpretação frequentista de probabilidade, a probabilidade de um evento é definida como a frequência relativa de ocorrência deste evento, se o experimento for repetido, sob as mesmas condições, um grande número de vezes.

Esta interpretação é muito útil e amplamente usada em modelagens probabilísticas. De fato, a interpretação frequentista de probabilidade tem suas origens com a Lei dos Grandes Números, importante resultado da teoria das probabilidades estabelecido pelo matemático suíço Jakob Bernoulli (1654 - 1705). (LANDIN et al., 2019, p.14-15).

### **Probabilidade subjetiva:**

Na interpretação subjetiva de probabilidade, probabilidades de eventos são designadas de acordo com a experiência que o pesquisador tem sobre o fenômeno em investigação. No exemplo da queda de um corpo celeste pode-se dizer que adotou-se a interpretação subjetiva quando atribui-se uma probabilidade pequena, próxima de zero, para o evento “não cair”.

[...]Se temos a percepção de que é mais provável que certo evento ocorra do que ele não ocorra, atribuímos a ele uma probabilidade maior do que 0,5. Por outro lado, se temos a percepção de que é menos provável que certo evento ocorra do que ele não ocorra, atribuímos a ele uma probabilidade inferior a 0,5. Se temos a percepção de que não existe favorecimento entre a ocorrência ou não de certo evento, ou mesmo se não sabemos nada sobre ele, atribuímos a ele uma probabilidade de 0,5. A razão pela qual usamos o valor 0,5 como referência se dá pelo fato de que 0,5 é exatamente o centro da escala da probabilidade que varia de 0 a 1 (0 a 100%). (LANDIN et al., 2019, p.17-18).

Na BNCC há duas habilidades em que as interpretações clássicas e frequentistas ficam evidentes conforme se pode ver no quadro a seguir.

Tabela 5 – Habilidades probabilidade no BNCC

(EM13MAT311)	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.
(EM13MAT312) Resolver	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Fonte: BRASIL, 2018.

Entendidas essas diferentes interpretações da probabilidade e sua relação com o ensino de probabilidade, veremos a seguir os resultados de alguns estudos empíricos que estão relacionados ao nosso estudo.

O trabalho de Carvalho (2018)<sup>4</sup>, estuda as questões do ENEM envolvendo probabilidade, como os livros didáticos utilizados na rede pública do Estado do Rio de Janeiro abordam o assunto e fala sobre a história da probabilidade. Um dos resultados desse estudo, que tem relação com a nossa pesquisa, foi a pouca incidência nos livros didáticos de exercícios nos quais o aluno precise ter habilidade de realizar a leitura e interpretação de textos não literais, isto é, ler e interpretar informações contidas em tabelas, gráficos e imagens.

Outro resultado importante para o nosso estudo se refere a ordem com que estatística e probabilidade costumam ser abordados. Normalmente, estuda-se probabilidade e depois estatística. Mas a inversão dessa ordem poderia contribuir para um melhor entendimento de certos conceitos de probabilidade, tais com a probabilidade frequentista, tão importante para a análise e tomada de decisão em diversas situações que abordamos nesse trabalho.

Ainda que nosso intuito não seja abordar a relação entre o ensino de probabilidade nos livros didáticos com o conhecimento de probabilidade dos alunos, entendemos que os conhecimentos dos alunos decorrentes da aprendizagem de noções de probabilidade influenciam suas formas de operar e produzir significados para as questões que propomos. Assim, os resultados de Carvalho (2018) nos ajudam a entender algumas das respostas apresentadas pelos estudantes.

E podemos identificar pela análise que Carvalho (2018) fez em 3 dos livros didáticos de Matemática mais utilizados no Ensino Médio das escolas públicas - *Matemática, Ciência e Aplicações*, de Gelso Iezzi (2017); *Matemática, Contexto e Aplicações* de Luiz Roberto Dante (2017) e *Matemática Paiva*, de Manoel Paiva (2015) - que o assunto de tomada decisões sobre situações de incertezas não é abordado nestes livros.

Outra dissertação de mestrado realizada para o PROFMAT é de Moreira (2015), onde ela faz o uso de probabilidade subjetiva para a aplicação da tomada de decisão sobre incertezas para alunos do Ensino Médio. A autora aponta a importância do assunto para diversas áreas, tais como medicina, engenharia, economia e administração. Também reforça o ponto de que os livros didáticos não abordam esse conceito, tratando somente da probabilidade tradicional.

O texto traz as definições de Teoria de Decisão e apresenta cinco atividades que foram desenvolvidas com alunos e que envolvem o conceito que Tomada de Decisão sobre incertezas. Porém para resolvê-las os estudantes tiveram que aprender sobre os conceitos de probabilidade subjetiva. Moreira (2015) também realça a importância que tomar uma decisão tem nas vidas

---

<sup>4</sup> Esse trabalho foi um dos poucos encontrados na Base de dados de TCC do PROFMAT que tem relação com a abordagem utilizada em nosso estudo.

das pessoas e por isso deve ser pensada de forma clara e com o uso da razão. É importante termos a consciência de que nossas decisões foram tomadas a partir de questionamentos racionais além daqueles de natureza intuitiva. Temos aqui então mais um trabalho que afirma a importância do estudo do assunto e a sobre a viabilidade da aplicação do conteúdo.

Oliveira (2016) em sua dissertação, também traz questões adaptadas da pesquisa de Kahneman, porém com uma abordagem voltada ao estudo da Estatística. Mesmo assim podemos utilizar os seus resultados em nosso trabalho, pois as questões também abordam dados probabilísticos. O autor efetuou o seguinte procedimento com suas turmas, realizou inicialmente um pré-teste, com 6 questões que apresentam indicações de heurísticas e vieses, após análise das respostas dos alunos, preparou ações didáticas sobre o conteúdo presente no pré-teste. E finalizou com um pós-teste, onde agora selecionou 3 questões presentes no pré-teste para averiguar a influência das ações didáticas nas novas respostas dos alunos. O autor conclui sua dissertação verificando que só houve diferença significativa entre as respostas do pré-teste e do pós-teste em uma das questões propostas. Ou seja, mesmo com uma ação didática voltada para o assunto, os alunos continuaram guiando suas respostas por heurísticas e vieses.

Schneider (2006) faz um estudo sobre Tomada de Decisão em diferentes faixas etárias. Foi aplicada uma atividade a dois grupos, um com idades entre 20 e 35 anos e outro com idades entre 61 e 78 anos, e que tivessem no mínimo o Ensino Fundamental completo. A atividade utilizada foi uma versão computadorizada do IGT (*Iowa Gambling Task*), em que ocorre uma situação de tomada de decisão sob incertezas, com escolhas monetárias, em que se procura classificar a decisão do indivíduo como sendo de aversão a perda ou busca pelo risco. O participante, em cinco blocos de vinte jogadas em cada um, deve escolher um baralho, dentre quatro e após uma carta. Nos baralhos “A” e “B”, para cada carta virada ganha-se R\$ 100 e nos baralhos “C” e “D”, cada carta virada tem um ganho de R\$ 50,00. Porém algumas dessas cartas tem punições, com perda de valores. Nos baralhos que pagam mais (A e B) a perda é maior e nos que pagam menos (C e D) a perda também é menor. Nos baralhos A e C existem mais cartas com perdas e nos baralhos B e D a quantidade de cartas com punições são menores, mas com um valor maior de perda. Após a aplicação da atividade, Schneider verifica que a idade dos participantes não influenciou na tomada de decisão. Os grupos tiveram resultados similares. Segundo Schneider (2006, p.448): “[...] na maior parte da tarefa, os participantes associaram os baralhos com maior frequência de punição como ameaçadores e aqueles com menor frequência como seguros.” Assim se tem indícios que ocorreu aversão as perdas pelos participantes da pesquisa.

Os trabalhos aqui citados, nos apresentam alguns estudos sobre Tomada de Decisão, afirmam que o assunto não é abordado em livros didáticos de Matemática, mesmo visto a sua importância. Outro ponto de destaque, é que, nas poucas pesquisas realizadas, os participantes tiveram suas respostas influenciadas por heurísticas e vieses, além de sofrerem com a aversão a perdas.

Na próxima seção discutiremos os aspectos metodológicos presentes no trabalho.

### 3 METODOLOGIA

Pode-se dividir a elaboração do trabalho em duas fases, sendo a primeira fase de caráter experimental analítico, com escolha, adaptação de tarefas, aplicação com estudantes e análise dos resultados; e a segunda fase, centrada no design de tarefas compondo o material final, incluindo orientações não prescritivas (no sentido de sugerir e não determinar o que deve ser feito nem como deve ser feito) para o professor. Nossa concepção de tarefa é de ferramenta de mediação para o ensino e aprendizagem de matemática, sendo qualquer coisa que um professor ou pesquisador usa para demonstrar e ou construir interativamente ideias, predominantemente (mas não exclusivamente) matemáticas, assim como para pedir aos alunos para fazerem algo (WATSON et al., 2013). Apresentamos a seguir a descrição de cada etapa de cada fase.

**Etapa I – Escolha e adaptação.** Selecionamos 4 questões presentes na pesquisa de Kahneman (2012) e as adaptamos a realidade de alunos da Escola Pública. Essas questões foram selecionadas pois utilizam o recurso do enquadramento e possuem direcionamento para aversão a perda. Um dos objetivos então seria de averiguar se os alunos são influenciados por esses fatores.

**Etapa II – Aplicação em duas turmas.** Turmas do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual, localizada no município de Duque de Caxias - Rio de Janeiro, uma no ano de 2018 e outra no ano de 2019. A primeira turma teve a aplicação das atividades no mês de novembro, sendo assim, alguns meses após terem estudado o assunto probabilidade. Para a turma de 2019, resolvemos aplicar a atividade no mês de maio, logo após os alunos terem finalizado com o estudo de probabilidade.

**Etapa III – Análise dos resultados.** Identificamos através das respostas dos alunos quais foram os procedimentos realizados para a Tomada de Decisão em SNA, se utilizaram vieses e heurísticas em suas escolhas. Esta análise se dá através das respostas por escrito dos alunos e pela transcrição de entrevista realizada em vídeo.

**Etapa IV – Design do Material Final.** Após a análise das respostas e identificação dos processos que os alunos realizaram para responder aos itens, elaboramos um material que se apropria desse conhecimento obtido e soma-se a questões presentes em outras fontes, tais como livros, outros trabalhos de mestrado e o ENEM.

Na fase I, desenvolvemos uma atividade, dividida em duas partes, para ser aplicada a turmas do terceiro ano do Ensino Médio. Esta atividade (APÊNDICE A) consiste em 4 questões (tarefas) adaptadas do trabalho de KAHNEMAN (2012). Seguem detalhes da criação e da aplicação desta atividade.

O Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro – Matemática, determina que o assunto de probabilidade deve ser trabalhado nas turmas do 3º ano do Ensino Médio durante o 1º e 2º bimestres. No 1º bimestre, durante o assunto de Análise Combinatória já deve ser estudado como calcular a probabilidade de um evento ocorrer. No 2º bimestre a probabilidade deve ser aplicada para resolução de problemas envolvendo união de eventos, eventos complementares e probabilidade condicional.

A aplicação da atividade ocorreu em uma escola estadual situada no município de Duque de Caxias, bairro Saracuruna, na baixada fluminense, em duas turmas distintas. Em uma turma foi aplicada a atividade em novembro de 2018 e na outra turma em maio de 2019. Após o começo da análise das respostas apresentadas na atividade pela primeira turma, nos indagamos se o tempo decorrido entre as aulas de probabilidade e aplicação da atividade, poderiam influenciar nas respostas dadas. Assim para a turma de 2019, resolvemos realizar a atividade logo após o término do estudo de probabilidade. As datas da aplicação da atividade encontram-se em uma tabela que será apresentada na sequência.

As quatro questões presentes na atividade foram adaptadas de Kahneman (2012), cada uma contendo duas opções de escolha. As perguntas contêm dados probabilísticos relacionados a escolhas que podem existir no cotidiano. As questões 1 e 2 possuem os mesmos dados, modificando somente o enquadramento e foram aplicadas em um dia. Estas fazem os alunos refletirem se devem optar por salvar uma quantidade determinada de pessoas dentre as que se encontram doentes ou usar a probabilidade para salvar todos os enfermos, porém com riscos de que não seja possível salvar nenhuma pessoa. As questões 3 e 4 foram aplicadas em um segundo dia e também formam um par, com as mesmas características das duas primeiras questões, porém o assunto agora abordado é sobre um jogo e a possibilidade de ganhar ou perder dinheiro. As perguntas encontram-se no APÊNDICE A.

Essas questões foram criadas com o intuito de avaliar a tomada de decisão dos alunos. Com a presença de dados probabilísticos e somente com alterações de enquadramento entre os pares de questão. Outro intuito era avaliar se seria encontrado respostas diferentes das apresentadas no trabalho de Kahneman, que foi realizado com alunos de universidade americana, e agora, neste trabalho, aplicado a alunos do Ensino Médio de escola pública.

Os alunos devem selecionar uma das duas alternativas nas perguntas, justificando as suas escolhas. Na turma de 2018, após a aplicação da atividade, foi realizada uma entrevista individual com os estudantes para que expliquem suas motivações para a escolha das alternativas. Essa entrevista acontece, pois nem todos os alunos conseguem transportar suas ideias para o papel, desta forma, oralmente, acredita-se que ficará mais claro qual foi o fator motivador das escolhas feitos pelos estudantes. Essas entrevistas foram gravadas em vídeo e posteriormente transcritas.

A turma de 2018, do terceiro ano do Ensino Médio, possuía no primeiro dia de aplicação das atividades 36 alunos presentes e no segundo dia 26 alunos. Na turma de 2019, realizaram a tarefa um total de 35 alunos, presentes nos dois dias. Em cada dia de aplicação foram disponibilizados dois tempos de aula para a atividade.

Tabela 6 - Dados sobre a aplicação da Atividade

ATIVIDADE	AULA	DURAÇÃO	DATA	TURMA	N. ALUNOS
QUESTÕES 1 E 2	AULA 1	1h40min	22/11/2018	2018	36
QUESTÕES 3 E 4	AULA 2	1h40min	23/11/2018	2018	26
QUESTÕES 1 E 2	AULA 1	1h40min	27/05/2019	2019	35
QUESTÕES 3 E 4	AULA 2	1h40min	28/05/2019	2019	35

Fonte: O autor, 2019.

Os dados foram produzidos<sup>5</sup> pelos alunos e capturados por dois tipos de instrumentos, sendo o primeiro em papel, por meio de folhas de tarefas, e o segundo por meio de gravação em vídeo, seguida da transcrição livre dos dados, onde perguntávamos aos alunos que justificassem as decisões tomadas em cada uma das quatro questões. Devido a questões operacionais e de disponibilidade dos alunos da Turma de 2019, as gravações ocorreram somente com os alunos da turma de 2018.

As gravações individuais, aluno por aluno com o entrevistador, assumindo um protocolo básico com a seguinte pergunta: “Qual foi a opção que você escolheu? Por que você escolheu essa opção?”.

A tabela a seguir sintetiza os instrumentos usadas para capturar os dados produzidos pelos alunos.

<sup>5</sup> Usamos o termo produção de dados, conforme POWEL et al. (2004), em lugar coleta de dados, com o sentido de reconhecer que o pesquisador intervém na realidade e seleciona um recorte dela.

Tabela 7 – Recursos utilizados na captura das respostas produzidas pelos alunos

Turma 2018	Registro Escrito (36 alunos) Folhas de tarefas com as questões de 1 e 2	Produção de dados em vídeo (Entrevista gravada com 36 alunos) Transcrição dos dados
	Registro Escrito (26 alunos) Folha de tarefas com as questões 3 e 4	Produção de dados em vídeo (Entrevista gravada com 26 alunos) Transcrição dos dados
Turma 2019	Registro Escrito (35 alunos) Folha de atividades com as questões de 1 a 4	.....

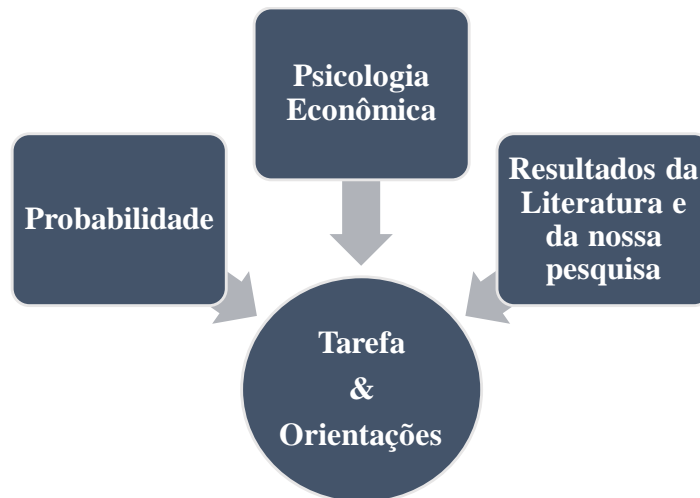
Fonte: O autor, 2019.

Com os dados capturados, de formar escrita ou por meio das gravações, seguimos com a análise das repostas dos alunos para identificarmos padrões nas escolhas realizadas, essa análise será detalhada no próximo capítulo. E a partir da investigação dos argumentos produzidos pelos alunos, e pela avaliação dos tipos de enquadramentos que aconteceram, produzimos um conjunto de tarefas sobre tomada de decisão em situações de incerteza, que levassem em consideração o efeito do enquadramento e os resultados da pesquisa.

Assim, usamos os resultados da pesquisa e de outros trabalhos sobre o tema Tomada de Decisão, além dos conceitos da Probabilidade e da psicologia econômica, para desenhar as tarefas, de modo que as questões convidassem os estudantes a:

- 1 - Comparar cenários aparentemente diferentes, mas probabilisticamente idênticos;
- 2 - Tomar decisões sob incerteza, apresentando a escolha que julgavam melhor;
- 3 - Construir os argumentos que os levaram a tomar tais decisões;
- 4 - Apresentar os cálculos que os levaram a tomar tais decisões;
- 5 - Refletir sobre possíveis efeitos de enquadramento em seus argumentos.

Figura 7 – Articulação para criação do conjunto de tarefas e suas orientações



Fonte: O autor, 2019.

Este conjunto final de tarefas está presente no capítulo 5 e não será aplicado neste trabalho. Além das questões apresenta-se também um conjunto sucinto de orientações (não prescritivas) e algumas sugestões na abordagem e utilização de material, com os aspectos matemáticos e não matemáticos explorados em cada questão. Segue abaixo, para exemplificar, uma das tarefas presente no conjunto de atividades e as orientações direcionadas aos professores.

Tabela 8 – Tarefa 14 e suas orientações

Tarefa	Orientação para o professor	Aspectos Matemáticos	Aspectos não matemáticos
<p><b>14)</b> Um advogado deseja lançar dúvida sobre a evidência de um determinado teste de DNA, que deu positivo, ou seja, que atestou que o cidadão A, seu cliente, é pai do cidadão B. Considere duas afirmações:</p> <p><b>“A chance de um falso positivo nesse teste é de 0,1%”</b></p> <p><b>“Um falso positivo ocorre em um de cada mil casos testados”</b></p> <p>a) Qual das duas afirmações o advogado usaria para atingir seu objetivo?</p> <p>b) E um promotor (defensor do cidadão B)?</p> <p>c) Quais as diferenças, para você, entre as duas afirmações do ponto de vista probabilístico? E do ponto de vista comportamental?</p>	<p>As questões de 12 a 14 consideram o efeito da negligência do denominador na tomada de decisão em situações simples de probabilidade. Esse efeito pode ser usado de maneira intencional por advogados, jornalistas, médicos, políticos e em geral por qualquer profissional, para induzir as decisões das pessoas. Segundo algumas pesquisas realizadas, a forma como a informação é colocada tende a interferir na percepção das pessoas sobre qual a opção mais provável. Tais questões podem ser perfeitamente utilizadas no início do estudo de probabilidade quando se abordam os conceitos de probabilidade clássica ou frequentista.</p>	<p>Probabilidade de Laplace.</p>	<p>Negligência com o denominador (denominator neglect). Kahneman (2012, pp 410 – 413).</p>

Fonte: O autor, 2019.

Espera-se que possamos dar continuidade nesse trabalho com a aplicação desta atividade e posterior análise dos resultados fornecidos pelos alunos. Também desejamos que este material seja utilizado por outros professores, para o assunto de Tomada de Decisão em SNA possa ser trabalhado em sala de aula.

#### 4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DAS TAREFAS

Agora realizaremos uma análise das respostas fornecidas pelos alunos na atividade proposta, com o objetivo de avaliar se os mesmos que haviam estudado recentemente os conceitos de probabilidade foram influenciados pelo efeito do enquadramento, aversão as perdas, heurísticas e vieses, assim como na pesquisa feita por Kahneman (2012), utilizando assim o Sistema 1, ou se utilizam das informações probabilísticas fornecidas na questão, utilizando o chamado Sistema 2.

Separamos essa análise em blocos, primeiro avaliamos as questões 1 e 2, pois se trata de um par com perguntas similares, com alterações somente na forma como os dados são apresentados. Fizemos também a separação das respostas fornecidas pelas turmas de 2018 e 2019. Após, apresentamos os resultados para as questões 3 e 4, também separados por turmas. Identificamos assim qual foi a opção selecionada por cada um dos alunos e o motivo dessa escolha. Também identificamos quantos alunos realizaram a troca de opção entre a primeira e a segunda questão, assim como os que trocaram de opção entre a terceira e a quarta questão. E assim, através das suas respostas, se era possível identificar nesses casos o efeito do enquadramento e da aversão as perdas. Os casos em que os alunos mantiveram a opção de escolha entre os pares de questão, 1 com 2 e 3 com 4, também estão presentes no estudo. Segue abaixo tabela contendo a descrição da ordem dos dados que serão apresentados durante a análise das respostas dos alunos. Essas respostas foram então separadas em grupos e apresentaremos, pelo menos um exemplo de cada um desses tipos em nossa análise. Constará a imagem da atividade, com a resposta escrita pelo aluno, além da sua transcrição e nos casos em que se realizou a gravação da entrevista, também estará presente a transcrição do que foi dito pelo aluno.

Tabela 9 – Estrutura de apresentação para os dados aferidos nas respostas dos alunos

BLOCO 1 – QUESTÕES 1 E 2	1º) Percentual de alunos que optaram pela alternativa A ou pela alternativa B na questão 1. Turmas 2018 e 2019.
	2º) Percentual de alunos que optaram pela alternativa A ou pela alternativa B na questão 2. Turmas 2018 e 2019.
	3º) Percentual de alunos que modificaram de opção entre as duas questões e os que mantiveram a opção. Turmas 2018 e 2019.
	4º) Percentual de alunos que realizaram a mudança da opção A na questão 1 para B na questão 2 e dos que alteraram de B na questão 1 para A na questão 2. Turmas 2018 e 2019.

	5º) Exemplos de respostas fornecidas pelos alunos, separados em tipos. Turmas 2018.
	6º) Exemplos de respostas fornecidas pelos alunos, separados em tipos. Turmas 2019.
BLOCO 2 – QUESTÕES 3 E 4	1º) Porcentual de alunos que optaram pela alternativa A ou pela alternativa B na questão 3. Turmas 2018 e 2019.
	2º) Porcentual de alunos que optaram pela alternativa A ou pela alternativa B na questão 4. Turmas 2018 e 2019.
	3º) Porcentual de alunos que modificaram de opção entre as duas questões e os que mantiveram a opção. Turmas 2018 e 2019.
	4º) Porcentual de alunos que realizaram a mudança da opção A na questão 3 para B na questão 4 e dos que alteraram de B na questão 3 para A na questão 4. Turmas 2018 e 2019.
	5º) Exemplos de respostas fornecidas pelos alunos, separados em tipos. Turmas 2018.
	6º) Exemplos de respostas fornecidas pelos alunos, separados em tipos. Turmas 2019.

Fonte: O autor, 2019.

#### 4.1 Análise das respostas dos alunos: questões 1 e 2

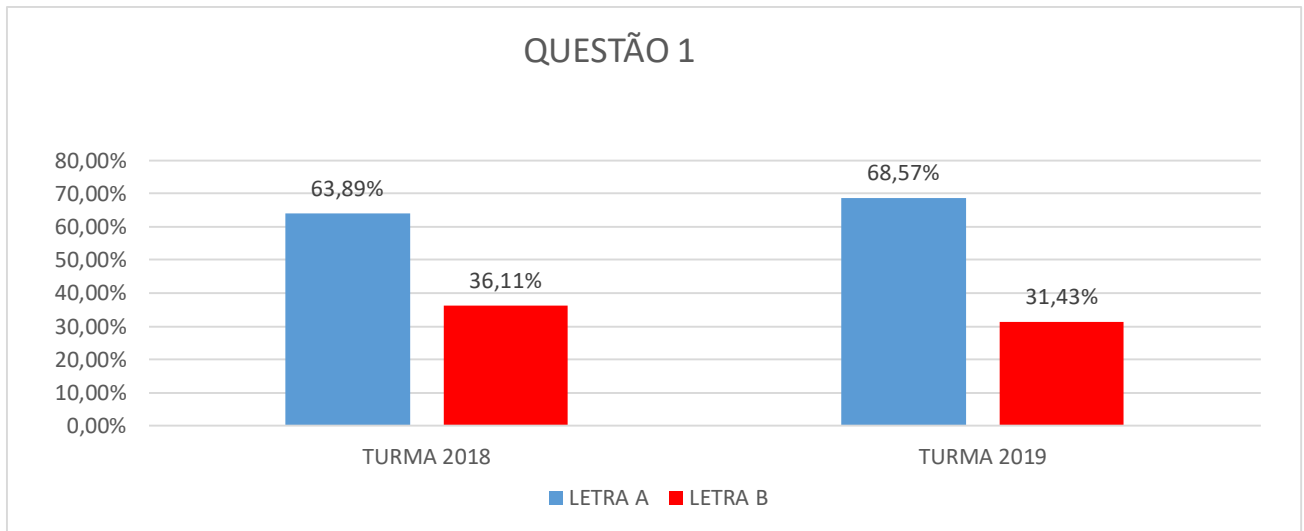
Apresentaremos na sequência as duas primeiras questões, a quantidade de alunos que optaram por cada um dos itens nas perguntas, quantos modificaram suas escolhas entre as questões 1 e 2 e uma análise dos padrões de respostas encontradas nas duas turmas, com os respectivos registros feitos pelos alunos.

**Questão 1:** Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:

- A. Se a vacina A for adotada, 400 pessoas serão salvas.
- B. Se a vacina B for adotada, existe probabilidade de  $\frac{1}{3}$  de que sejam salvas 1200 pessoas e probabilidade de  $\frac{2}{3}$  de que nenhuma pessoa seja salva.

**Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? A ou B? Por quê?**

Figura 8 - Gráfico com as respostas escolhidas para a questão 1



Fonte: O autor, 2019.

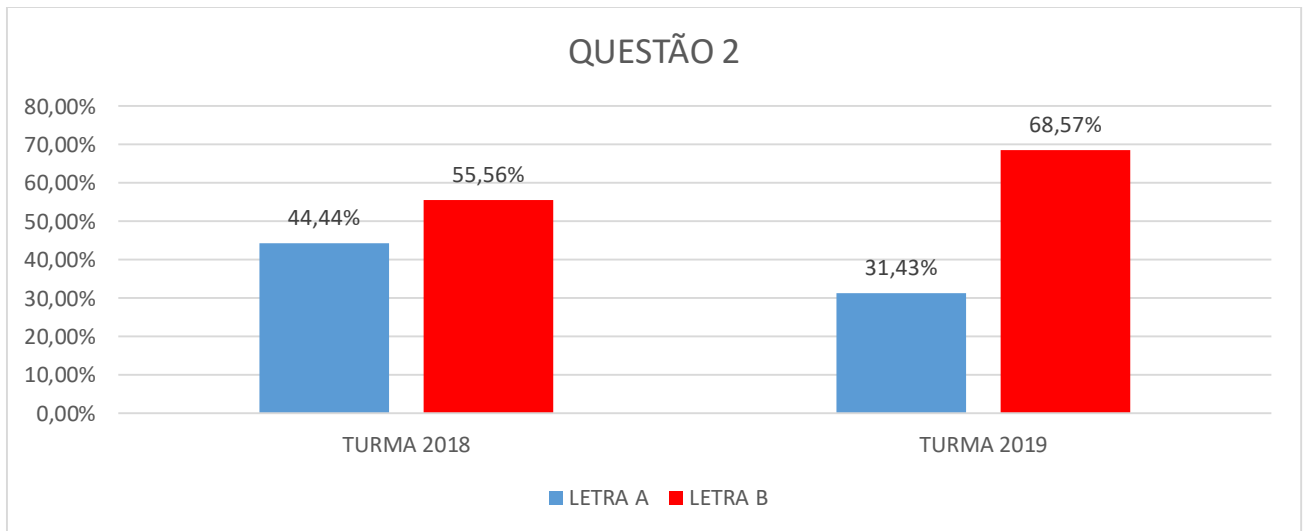
É possível observar que não houve muita diferença entre as escolhas da turma 2019 e da turma 2018, a porcentagem referente aos alunos que escolheram a opção A ou B são muito próximas nas duas turmas. A maioria dos alunos selecionou a opção A, em que era possível salvar 400 pessoas. Os alunos que selecionaram essa opção, afirmam que realizam essa escolha pois tem a certeza garantida de que salvará uma quantidade determinada de pessoas. E que a outra alternativa traz a probabilidade de que todos os pacientes possam vir a morrer, assim preferem não arriscar. Podemos assim observar que aproximadamente 70% dos alunos, em cada turma, foram avessos ao risco no domínio dos ganhos, em linha com os resultados de Kahneman (2012, p.419). De outra forma apresentaram aversão a perdas, mesmo a alternativa B contendo a chance de todos serem salvos, eles optaram pela solução em que somente uma parte dos enfermos será salva.

**Questão 2:** Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:

- A. Se a vacina C for adotada, 800 pessoas irão morrer.
- B. Se a vacina D for adotada, existe probabilidade de  $\frac{1}{3}$  de que ninguém morra e probabilidade de  $\frac{2}{3}$  de que todas as pessoas venham a morrer.

**Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? C ou D? Por quê?**

Figura 9 - Gráfico com as respostas escolhidas para a questão 2

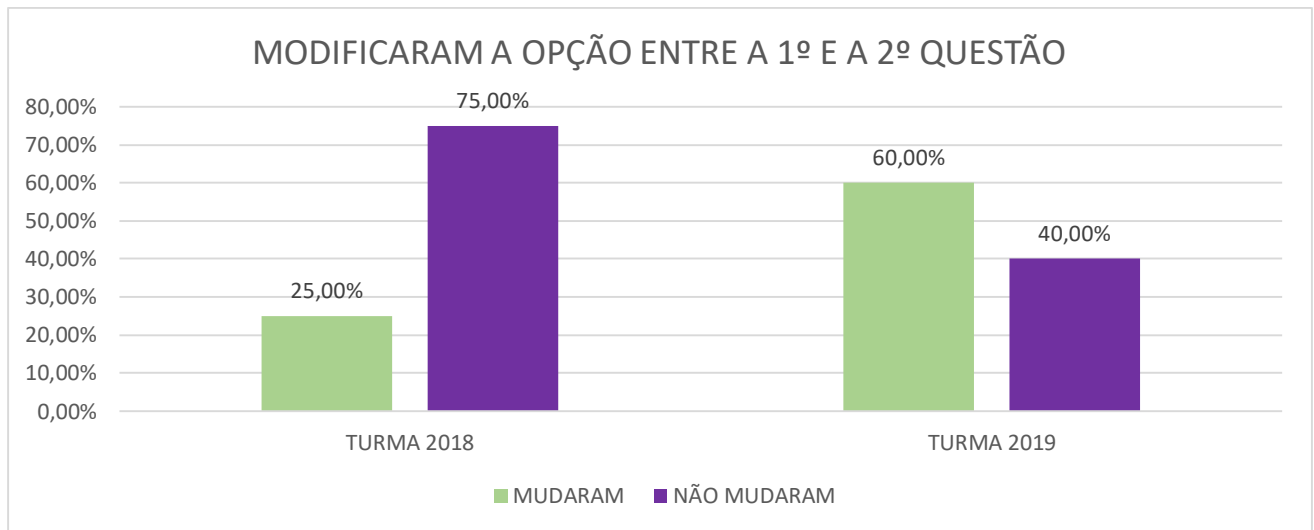


Fonte: O autor, 2019.

Agora, como a opção A mudou de 400 pessoas irão sobreviver para 800 pessoas irão morrer, das 1200 que estão doentes, os alunos preferiram optar pela opção B, na qual há a possibilidade de todos serem salvos, mesmo sendo essa menor do que a probabilidade de todos morrerem. Para a turma de 2018 a mudança não foi tão expressiva como a que ocorreu para a turma de 2019, onde ocorreu uma inversão entre a quantidade de alunos que selecionaram a opção A e B na primeira questão para os que escolheram as opções na segunda questão. Pode motivar essa mudança ao efeito do enquadramento causado pela palavra morte, presente agora na letra A. O discurso dos alunos modifica completamente, entre a primeira e a segunda questão. Eles agora afirmam que preferem correr o risco da alternativa B, mesmo a probabilidade de todos serem salvos sendo menor da que todos morrerem, preferem arriscar. Ou seja, assim como já identificado por Kahneman, neste tipo de situação os seres humanos mudam o comportamento e agora buscam o risco.

Vamos agora apresentar a quantidade de alunos que selecionaram uma determinada opção na primeira questão e que na segunda questão escolheram uma alternativa diferente. Lembrando que o ideal, já que as alternativas apresentam as mesmas informações, é de que os alunos mantivessem a alternativa nas duas questões.

Figura 10 - Gráfico com a porcentagem de alunos que modificaram de opção entre a 1ª e a 2ª questão

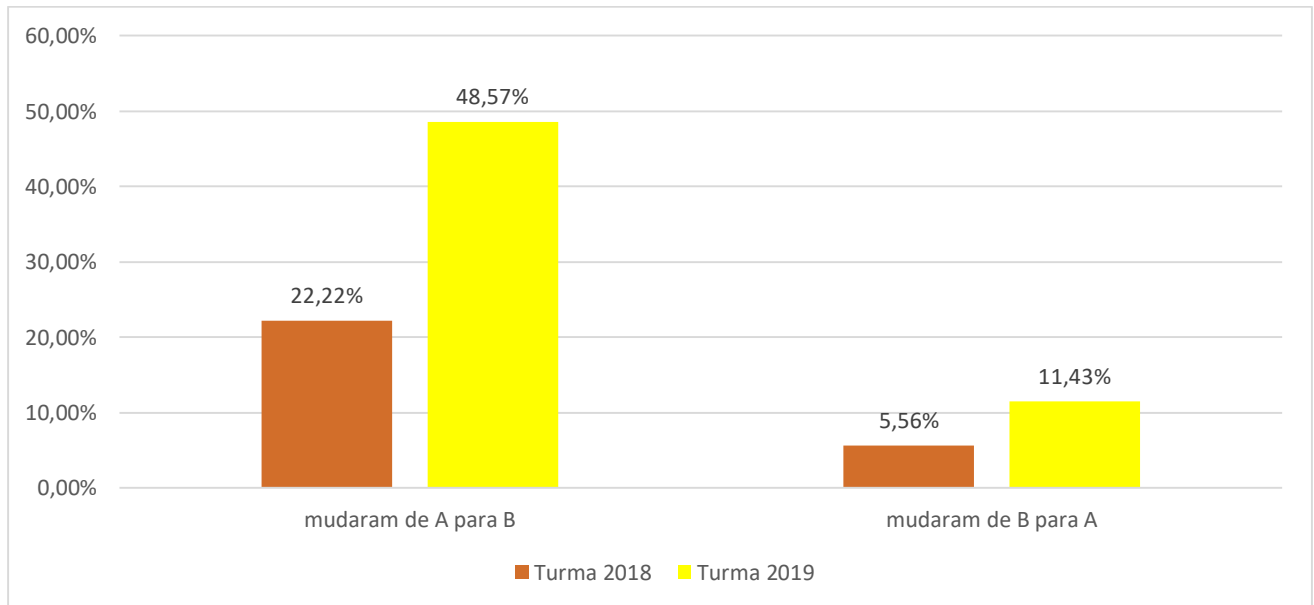


Fonte: O autor, 2019.

Como era de esperar, a turma de 2019 teve uma maior variação de alunos que modificaram a opção de escolha entre a primeira e a segunda questão. Na turma de 2018 a mudança não foi tão grande, mas também ocorreu. Pode se afirmar que o efeito do enquadramento tem grande influência na hora da tomada de decisão. E assim como observado na pesquisa de Kahneman, os pesquisados modificam os seus argumentos para assim validar a sua nova resposta.

Para melhor apurar os casos em que ocorreram a mudança de alternativa em decorrência do enquadramento, separamos os alunos pela alteração que realizaram. Se as mudanças ocorreram entre a letra A na primeira questão e depois letra B na segunda questão (gerado na maioria dos casos devido a palavra morte aparecer no item A da segunda questão, de acordo com as respostas fornecidas pelos estudantes), ou se o aluno selecionou a letra B na primeira questão e em seguida alterou para a letra A na segunda questão. Como podemos observar, maiores foram as mudanças de letra A na primeira questão para letra B na segunda questão.

Figura 11 - Gráfico com a porcentagem de alunos que modificaram de opção, A para B ou B para A, entre a 1º e a 2º questão



Fonte: O autor, 2019.

Aqui fica claro, dentre o total de alunos, quantos modificaram suas opções em decorrência do enquadramento. Colocados lado a lado, podemos reparar que a variação foi maior que duas vezes na turma de 2019 em comparação com a turma de 2018. Não foi possível averiguar nas respostas apresentadas pelos alunos, um fator, além do enquadramento, que motivasse tamanha divergência. Porém, detectamos uma maior incidência de alunos da turma de 2018 que foram mais atentos a leitura das questões e conseguiram identificar que elas possuíam os mesmos dados em suas opções. Mas não é possível precisar se esse foi o fator determinante, ou se o viés e a heurística é que determinaram a mudança em maior quantidade.

Há uma pequena quantidade de estudantes que alternaram entre a opção B na primeira questão e a letra A na segunda questão. Pelas respostas apresentadas, o fizeram ou porque não compreenderam o texto das perguntas ou porque optaram por apresentar duas soluções. Nesse segundo caso, os alunos afirmam que ficaram com medo de errar na escolha da alternativa. Como os alunos tendem a tratar qualquer atividade como avaliação (o que havia sido explicado antes da aplicação da tarefa que não era o caso), os participantes da pesquisa nesse caso, optaram por escolher alternar entre as duas opções e assim ter a possibilidade de conseguir acertar uma das questões. Exemplos dessas respostas serão apresentadas mais adiante. Nesses casos o viés e a heurística são apresentados, ao terem essa atitude os alunos simplificaram questões complexas para caso certo/errado, além de aplicar a experiência escolar que possuem,

em que não são convidados a pensar e expressar suas ideias, somente apresentar uma resposta imediata.

As respostas fornecidas pelos alunos foram agrupadas por categorias, a fim de identificar padrões de respostas. Seguem abaixo os tipos criados e entre parênteses o percentual do total de estudantes que se classificam em cada modalidade.

**Tipo I** – optaram pela letra A na primeira questão e mantiveram a opção A na segunda questão (29,6%)

**Tipo II** – alunos que escolheram a letra A na primeira questão e modificaram para a letra B na segunda questão (35,2%)

**Tipo III** – alunos que escolheram a letra B na primeira questão e mantiveram a opção B na segunda questão (26,8%)

**Tipo IV** – alunos que escolheram a letra B na primeira questão e depois modificaram para a letra A na segunda questão (8,4%)

Agora apresentaremos exemplos das respostas fornecidas pelos alunos para cada um dos tipos criados. Separamos as respostas por turma, com o intuito de identificar se a diferença entre o tempo decorrido entre as aulas de probabilidade e a aplicação da atividade trariam alguma modificação nas opções selecionadas. Conseguimos identificar que as justificativas dadas pelos alunos quase sempre eram as mesmas, por isso em alguns tipos apresentaremos somente um exemplo de resposta dada pelos estudantes.

#### 4.1.1 Análise dos argumentos da Turma 2018

**Tipo I** – optaram pela letra A na primeira questão e mantiveram a opção A na segunda questão.

Os alunos classificados nessa categoria apresentaram argumentos semelhantes entre si, e dentre eles escolhemos o Aluno 25. Apresentamos seus argumentos para as respostas das questões 1 e 2, nas figuras 11 e 12 respectivamente.

Figura 12 – Aluno 25 – Decisões e Argumentos para a Questão 1

- 1) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:
- a) Se a vacina A for adotada, 400 pessoas serão salvas.
  - b) Se a vacina B for adotada, existe probabilidade de  $\frac{1}{3}$  de que sejam salvas 1200 pessoas e probabilidade de  $\frac{2}{3}$  de que nenhuma pessoa seja salva.

Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? A ou B? Por quê?

Nesse caso a melhor opção é A, por que serão salvas ~~30~~ 400 pessoas!

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 25: “Nesse caso a melhor opção é A. Por que serão salvas 400 pessoas!”

Transcrição da entrevista realizada com o aluno 25: “Eu escolhi A, porque nessa situação trabalhar com a certeza é melhor e na letra A falava que 400 pessoas sairão vivas e na letra B existiria a probabilidade de as pessoas sobreviverem ou não. Então eu escolhi a letra A porque 400 pessoas sobreviveriam. Na B pode salvar todo mundo, mas também tem o risco de não salvar. E a probabilidade maior era de  $\frac{2}{3}$  de dar errado.”

Figura 13 – Aluno 25 – Decisões e Argumentos para a Questão 2

- 2) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:
- a) Se a vacina **C** for adotada, 800 pessoas irão morrer.
  - b) Se a vacina **D** for adotada, existe probabilidade de  $1/3$  de que ninguém morra e probabilidade de  $2/3$  de que todas as pessoas venham a morrer.

Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? C ou D? Por quê?

(A) Por que 400 pessoas terão a certeza de não viver

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 25: “A. Por que 400 pessoas terão a certeza de que irão viver.”

Transcrição da entrevista realizada com o aluno 25: “E na dois eu adotei o mesmo caso, trabalhar com a certeza. Escolhi a letra C, 800 pessoas morrerem. Porque no caso se 800 morrerem, 400 poderiam sobreviver. Na vacina D existiria a probabilidade de as pessoas viverem ou não. Então eu optei por trabalhar com a certeza.”

Ao ser perguntado se as duas questões são parecidas o estudante responde: “Também, porque o índice das pessoas viverem é quase o mesmo número. 400 pessoas são salvas na primeira e 400 são salvas na segunda, na verdade são as mesmas quantidades.”

Mesmo sem identificar que as questões eram similares, o aluno selecionou a mesma alternativa nas duas perguntas. Ou seja, resolveu manter a sua decisão como proceder nas duas situações apresentadas. Somente após ser indagado sobre este ponto na entrevista, que ele identificou se tratar da mesma quantidade de pessoas salvas e mortas na opção A das duas questões. Podemos afirmar que estes estudantes presentes no tipo I não sofreram o efeito do enquadramento. Não foram influenciados pela palavra morte presente na segunda pergunta e/ou conseguiram identificar que as duas questões eram similares.

**Tipo II** – alunos que escolheram a letra A na primeira questão e modificaram para a letra B na segunda questão

Os alunos classificados como Tipo II apresentaram argumentos semelhantes entre si, e dentre eles escolhemos os Alunos 12 e 05. Apresentamos seus argumentos para as respostas das questões 1 e 2, nas figuras 13 a 16.

Figura 14 – Aluno 12 – Decisões e Argumentos para a Questão 1

- 1) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:
- a) Se a vacina A for adotada, 400 pessoas serão salvas.
- b) Se a vacina B for adotada, existe probabilidade de  $\frac{1}{3}$  de que sejam salvas 1200 pessoas e probabilidade de  $\frac{2}{3}$  de que nenhuma pessoa seja salva.

Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? A ou B? Por quê?

Eu escolheria a vacina A, pois está me dando a certeza de que 400 pessoas seriam salvas. Já a vacina B existe probabilidades, ou seja, não me dá a certeza, como elas podem ser salvas como também elas podem morrer. Então eu fico com a vacina A.

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 12: “Eu escolheria a vacina A, pois está me dando a certeza de que 400 pessoas seriam salvas. Já a vacina B existe probabilidades, ou seja, não me dá a certeza, como elas podem ser salvas como também elas podem morrer. Então eu fico com a vacina A.”

Transcrição da entrevista realizada com o aluno 12: “Eu escolhi a vacina A pelo simples fato de que lá eles iam, no caso, eu ia salvar 400 pessoas. Eu teria a certeza disso, não teria uma probabilidade. Na B eu teria uma probabilidade, não teria uma certeza, eu poderia arriscar ou poderia matar elas.”

Identificamos aqui claramente que o efeito do enquadramento no argumento do aluno 12, mobilizado em relação a aversão ao risco no domínio dos ganhos (400 salvas), conforme apontam Kahneman e Tversky (1984) e Kahneman (2012, p. 419).

Figura 15 – Aluno 12 – Decisões e Argumentos para a Questão 2

- 2) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:
- Se a vacina **C** for adotada, 800 pessoas irão morrer.
  - Se a vacina **D** for adotada, existe probabilidade de  $\frac{1}{3}$  de que ninguém morra e probabilidade de  $\frac{2}{3}$  de que todas as pessoas venham a morrer.

Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? C ou D? Por quê?

Nesse caso eu arriscaria na vacina D, eu tentaria salvar as pessoas mesmo sendo a probabilidade de serem salvas  $\frac{1}{3}$ .

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 12: “Nesse caso eu arriscaria na vacina D, eu tentaria salvar as pessoas mesmo sendo a probabilidade de serem salvas  $\frac{1}{3}$ .”

Transcrição da entrevista realizada com o aluno 12: “E na dois eu escolhi a D. Nessa eu preferi arriscar porque eu ia jogar muita gente fora, 800 pessoas eu ia matar. Então eu preferi, por mais que era um terço, eu preferi arriscar.”

Figura 16 – Aluno 05 – Decisões e Argumentos para a Questão 1

- 1) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:
- Se a vacina A for adotada, 400 pessoas serão salvas.
  - Se a vacina B for adotada, existe probabilidade de  $1/3$  de que sejam salvas 1200 pessoas e probabilidade de  $2/3$  de que nenhuma pessoa seja salva.

Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? A ou B? Por quê?

Vacina A. Por que ela dá a certeza que pelo menos 400 pessoas serão salvas diferente da vacina B que não dá certeza é pela sorte. Antes escolher algo que te dá certeza que investiu em uma teoria que você possa se arrepender depois por não dar certo.

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 05: “Vacina A. Por que ela dá a certeza de que pelo menos 400 pessoas serão salvas, diferente da vacina B que não dá certeza, é pela sorte. Antes escolher algo que te dá certeza que investir em uma teoria que você possa se arrepender depois por não dar certo.”

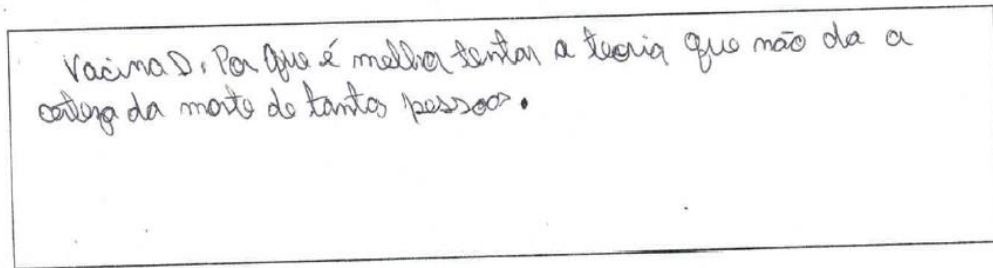
Transcrição da entrevista realizada com o aluno 05: “Eu escolhi a vacina A. Porque iria dar certo com 400 pessoas e a vacina B tem a possibilidade que desse certo com um terço das pessoas. Mas entre dar certo e essas 400 pessoas viver e entre não dar certo e todas as pessoas morrer eu preferi a A. Porque era tipo uma sorte, caso desse certo, não era uma certeza. E eu optei pela certeza, que é as 400 pessoas.”

Figura 17 – Aluno 05 – Decisões e Argumentos para a Questão 2

2) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:

- a) Se a vacina C for adotada, 800 pessoas irão morrer.
- b) Se a vacina D for adotada, existe probabilidade de 1/3 de que ninguém morra e probabilidade de 2/3 de que todas as pessoas venham a morrer.

Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? C ou D? Por quê?



Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 05: “Vacina D. Por que é melhor tentar a teoria que não dá a certeza da morte de tantas pessoas.”

Transcrição da entrevista realizada com o aluno 05: “Eu optei pela vacina D. Porque na letra A estava falando que 800 pessoas irão morrer. Agora eu fiz o contrário, coloquei como se fosse para ir no jogo, porque na primeira opção 800 pessoas morrem, vamos tentar salvar essa população aí. Porque melhor que deixar morrer é tentar ajudar. Na A tem certeza de que vai morrer. Eu achei parecido os itens (questão 1 e 2), só que na primeira é a certeza que as pessoas vão se salvar, as 400 e na outra dobrou o valor 800 vão morrer. Aí fiquei meio bolada.”

Nos dois casos apresentados como tipo II, os alunos selecionam na questão 1 a opção A, pela segurança de poderem salvar 400 pessoas. Relatam que tem aversão as perdas, não querem correr o risco que possui na alternativa B de todos os pacientes morrerem. Já quando respondem a segunda pergunta, modificam o seu comportamento. Agora preferem arriscar na probabilidade, não querem ter a responsabilidade de 800 mortes em suas mãos. Podemos perceber pelos discursos dos estudantes, como a palavra morte influenciou nas suas escolhas, assim como já havia sido observado nas pesquisas de Kahneman. Outra observação feita nas pesquisas do psicólogo é que mesmo ao indagar se as questões eram similares, os entrevistados continuam com as mesmas respostas, mesmo que isso pareça não ter lógica, caso que pode ser observado na entrevista do aluno 05. Eles se justificam através de conceitos religiosos ou de experiências de suas vidas (vieses).

**Tipo III** – alunos que escolheram a letra B na primeira questão e mantiveram a opção B na segunda questão

Os alunos que classificados como Tipo III apresentaram argumentos semelhantes entre si, e dentre eles escolhemos o Aluno 03.

Figura 18 – Aluno 03 – Decisões e Argumentos para a Questão 1

- 1) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:
- Se a vacina A for adotada, 400 pessoas serão salvas.
  - Se a vacina B for adotada, existe probabilidade de  $1/3$  de que sejam salvas 1200 pessoas e probabilidade de  $2/3$  de que nenhuma pessoa seja salva.

**Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? A ou B? Por quê?**

A vacina B, pois o meu medo de que a vacina B, que poderá salvar todas as pessoas, dê errado, não pode me influenciar a ir pelo lado mais fácil e egoísta de salvar apenas 400 pessoas das 1200 que estão contaminadas.

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 03: “A vacina B, pois o meu medo de que a vacina B, que poderá salvar todas as pessoas, dê errado, não pode me influenciar a ir pelo lado mais fácil e egoísta de salvar apenas 400 pessoas das 1200 que estão contaminadas.”

Transcrição da entrevista realizada com o aluno 03: “A vacina B, porque eu acho que seria injusto escolher a vacina A, porque na vacina A salvaria apenas 400 pessoas das 1200 que estariam contaminadas. Então acho que o medo de errar na probabilidade que é de  $1/3$  acho que não pode impedir que a gente seja apenas egoísta e vá na questão mais fácil que é salvar pelo menos as 400 e deixar as outras morrerem. Porque na vacina B mesmo que tenha a probabilidade de mortes também tem a probabilidade de que as pessoas sejam curadas.”

Figura 19 – Aluno 03 – Decisões e Argumentos para a Questão 2

- 2) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:
- Se a vacina **C** for adotada, 800 pessoas irão morrer.
  - Se a vacina **D** for adotada, existe probabilidade de  $\frac{1}{3}$  de que ninguém morra e probabilidade de  $\frac{2}{3}$  de que todas as pessoas venham a morrer.

Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? C ou D? Por quê?

A vacina D, por diferente da primeira questão, se a primeira vacina (C) for aplicada, terei certeza de que todas irão morrer, alterando assim pela vacina D, poderia ter a chance de salvar todas, mesmo correndo o risco de que todas também morram, pelo menos teria tentado. Porém, a doença atingiu o Estado do Rio, assim, salvar as 800 pessoas não seria tão vantajoso já que as outras pessoas seriam atingidas.

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 03: “A vacina D, pois diferente da primeira questão, se a vacina C for aplicada, terei certeza de que todas irão morrer, alterando assim pela vacina D, poderia ter a chance de salvar todas, mesmo correndo o risco de que todas também morram, pelo menos teria tentado.

Porém, a doença atingiu o Estado do Rio, assim, salvar as 800 pessoas não seria tão vantajoso já que as outras pessoas seriam atingidas.”

Transcrição da entrevista realizada com o aluno 03: “Na segunda questão eu coloquei a vacina D porque é a mesma coisa, só que diferente da questão 1, na vacina A da questão 1, 400 pessoas seriam salvas, já na vacina C da questão 2, 800 pessoas seriam mortas. Então já colocando a vacina C termos certeza que elas irão morrer então optando pela vacina D, que foi a que eu escolhi, tem aquela probabilidade de poder salvar. Mesmo que tenha a probabilidade de eles morrerem também tem a probabilidade de eles serem salvos. Pelo menos a gente vai tentar.”

Os alunos que foram classificados como tipo III optaram nas duas questões a correr o risco e salvar todos os que estavam doentes. Eles também apresentaram o mesmo raciocínio ao descrever os motivos de suas escolhas. E conseguiram verificar que as duas questões eram similares.

**Tipo IV** – alunos que escolheram a letra B na primeira questão e depois modificaram para a letra A na segunda questão.

Os alunos que classificados como Tipo IV foram muito poucos e demonstraram todos que não entenderam muito bem as situações de natureza aleatória apresentadas. Dentre eles escolhemos o Aluno 18.

Figura 20 - Aluno 18 – Decisões e Argumentos para a Questão 1

- 1) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:
- Se a vacina **A** for adotada, 400 pessoas serão salvas.
  - Se a vacina **B** for adotada, existe probabilidade de  $1/3$  de que sejam salvas 1200 pessoas e probabilidade de  $2/3$  de que nenhuma pessoa seja salva.

**Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? A ou B? Por quê?**

Eu escolheria B por que se a população não for salva essa pessoa vai morrer pra uma doença então essas pessoas têm que tomar a vacina para se livrar das doenças seria aplicada na população

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 18: “Eu escolheria B por que se a população não for salva, essas pessoas vão morrer pra uma doença, então essas pessoas têm que tomar a vacina para se livrar das doenças, seria aplicada na população.”

Figura 21 - Aluno 18 – Decisões e Argumentos para a Questão 2

- 2) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:
- a) Se a vacina C for adotada, 800 pessoas irão morrer.
  - b) Se a vacina D for adotada, existe probabilidade de  $1/3$  de que ninguém morra e probabilidade de  $2/3$  de que todas as pessoas venham a morrer.

**Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? C ou D? Por quê?**

Eu escolheria A por que se a vacina C for adotada as pessoas irão morrer se não tomar a vacina essa população ninguém morra.

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 18: “Eu escolheria A por que se a vacina C for adotada as pessoas irão morrer se não tomar a vacina essa população ninguém morra.”

Vemos por sua resposta, que aparentemente o aluno 18 não compreendeu a situação que foi proposta. As justificativas não são muito claras, e assim, como os outros alunos classificados como tipo IV, fez a seleção das alternativas sem um critério definido.

#### 4.1.2 Análise dos argumentos da Turma 2019

Como tivemos poucos alunos classificados como tipo I e tipo IV na turma de 2019 e estes possuíam respostas similares aos da turma de 2018, não apresentaremos as respostas referentes a esses grupos para a turma de 2019.

**Tipo II** – alunos que escolheram a letra A na primeira questão e modificaram para a letra B na segunda questão.

Os alunos classificados como Tipo II apresentaram argumentos semelhantes entre si, e dentre eles escolhemos os Alunos 27. Apresentamos seus argumentos para as respostas das questões 1 e 2, nas figuras 21 e 22.

Figura 22 – Aluno 27 – Decisões e Argumentos para a Questão 1

1) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:

- a) Se a vacina A for adotada, 400 pessoas serão salvas.  
 b) Se a vacina B for adotada, existe probabilidade de  $\frac{1}{3}$  de que sejam salvas 1200 pessoas e probabilidade de  $\frac{2}{3}$  de que nenhuma pessoa seja salva.

**Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? A ou B? Por quê?**

A: Por que tem certeza que vai salvar as pessoas. Já a B não tem certeza.

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 27: “A. Porque tem a certeza de que vai salvar as pessoas. Já a B não tem certeza.”

Figura 23 – Aluno 27 – Decisões e Argumentos para a Questão 2

- 2) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:
- a) Se a vacina **C** for adotada, 800 pessoas irão morrer.
  - b) Se a vacina **D** for adotada, existe probabilidade de  $1/3$  de que ninguém morra e probabilidade de  $2/3$  de que todas as pessoas venham a morrer.

**Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? C ou D? Por quê?**

D- Por que tem mais chances de sobreviver mais gente

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 27: “D. Por que tem mais chances de sobreviver mais gente.”

A turma de 2019 respondeu as questões de uma forma mais sucinta, mas podemos identificar também a aversão a perdas na hora da tomada de decisão. Assim como o efeito do enquadramento, que faz com que os estudantes modifiquem as suas escolhas entre uma questão e outra.

**Tipo III** – alunos que escolheram a letra B na primeira questão e mantiveram a opção B na segunda questão

Os alunos que classificados como Tipo III apresentaram argumentos semelhantes entre si, e dentre eles escolhemos o Aluno 19.

Figura 24 – Aluno 19 – Decisões e Argumentos para a Questão 1

- 1) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:
- Se a vacina **A** for adotada, 400 pessoas serão salvas.
  - Se a vacina **B** for adotada, existe probabilidade de  $\frac{1}{3}$  de que sejam salvas 1200 pessoas e probabilidade de  $\frac{2}{3}$  de que nenhuma pessoa seja salva.

**Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? A ou B? Por quê?**

B. Pois acho que valerá a pena tentar salvar as 1200 pessoas, mesmo tendo uma probabilidade de muitas pessoas morrerem. Também acho que as pessoas afetadas aceitarão a B também.

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 19: “B, pois acho que valerá a pena tentar salvar as 1200 pessoas. Mesmo tendo uma probabilidade de muitas pessoas morrerem. Também acho que as pessoas afetadas aceitarão a B também.”

Figura 25 – Aluno 19 – Decisões e Argumentos para a Questão 2

- 2) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:
- Se a vacina C for adotada, 800 pessoas irão morrer.
  - Se a vacina D for adotada, existe probabilidade de  $\frac{1}{3}$  de que ninguém morra e probabilidade de  $\frac{2}{3}$  de que todas as pessoas venham a morrer.

Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? C ou D? Por quê?

D. Mesmo caso da letra B. Também acho que as pessoas aceitariam a D.

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 19: “D. Mesmo caso da letra B. Também acho que as pessoas aceitariam a D.”

Como foi observado no tipo III da turma de 2018, os alunos de 2019 agrupados nesse tipo, também conseguiram identificar que as questões 1 e 2 eram similares. Além de também terem direcionamento pela busca ao risco. Em seus discursos, afirmam que ao adotarem essa vacina podem salvar todas as pessoas (mesmo sendo essa a probabilidade menor de ocorrer). A maioria dos alunos que escolherem a vacina B na primeira questão, mantiveram a escolha da alternativa na segunda questão.

## 4.2 Análise das repostas dos alunos: questões 3 e 4

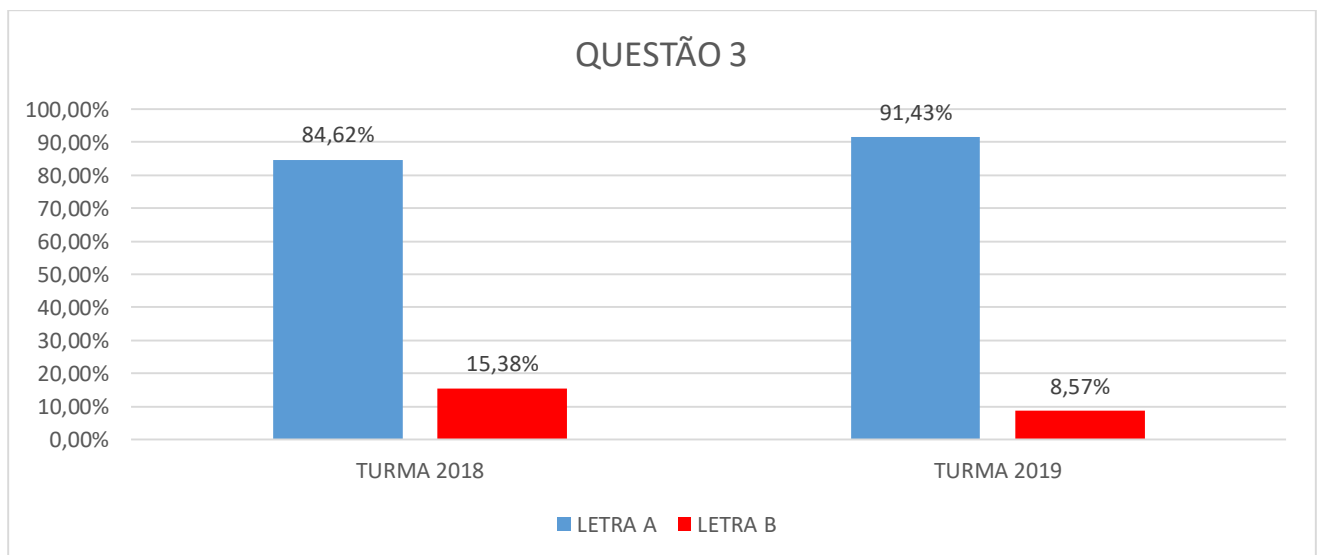
Seguiremos a mesma sequência do subcapítulo anterior, primeiramente apresentaremos as questões 3 e 4 juntamente com a quantidade de alunos que optaram por cada um dos itens nas perguntas, quantos modificaram suas escolhas entre as questões 3 e 4 e uma análise dos padrões de respostas encontradas nos registros feitos pelos estudantes.

**Questão 3:** Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:

- A. Ficar com R\$30,00.
- B. Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

**Qual opção você escolhe? Por quê?**

Figura 26 - Gráfico com as respostas escolhidas na questão 3



Fonte: O autor, 2019.

Assim como foi observado na questão 1, não encontramos uma diferença muito significativa entre as escolhas realizadas pela turma de 2018 e pela de 2019. O que podemos

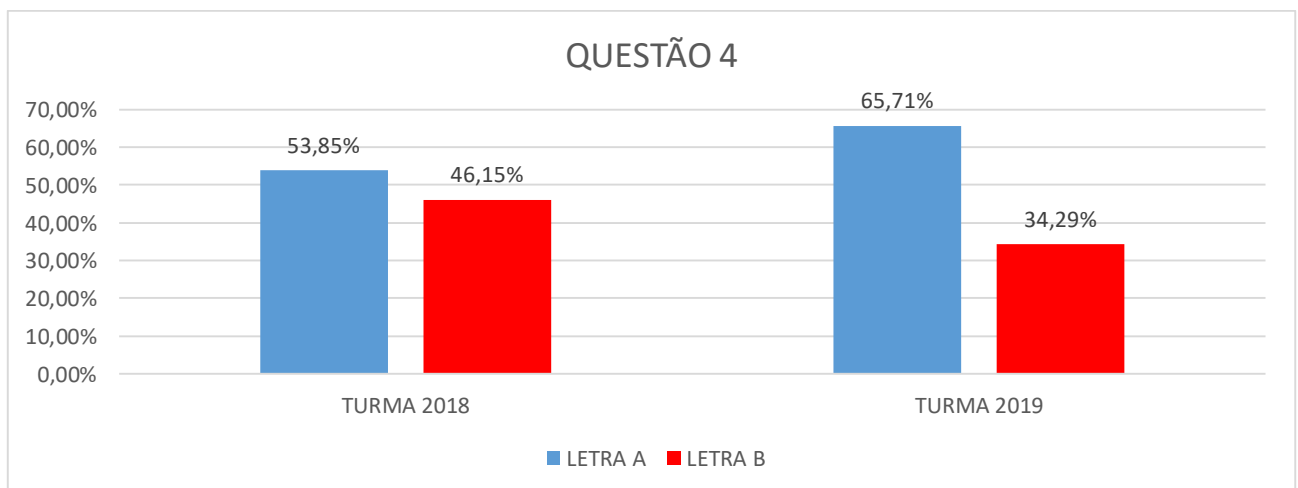
observar é que agora uma maior quantidade de participantes opta pela letra A como escolha, a turma de 2019 uma quantidade superior a 90% dos estudantes. Os discentes, em sua maioria, afirmam que preferem encerrar o jogo e ficar somente com os R\$ 30,00 do que ter a possibilidade de continuar jogando e poder perder todo o dinheiro. Vemos aqui uma clara aversão a perda. Eles afirmam que é preferível garantir o dinheiro, já que a probabilidade de 50% de sair com o prêmio total (R\$ 50,00) não é garantia certa e que costumam ser azarados quando se trata de escolhas. Assim é possível identificar vieses dando preferência a dados probabilísticos.

**Questão 4:** Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:

- A. Perder R\$ 20,00.
- B. Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

**Qual opção você escolhe? Por quê?**

Figura 27 - Gráfico com as respostas escolhidas na questão 4

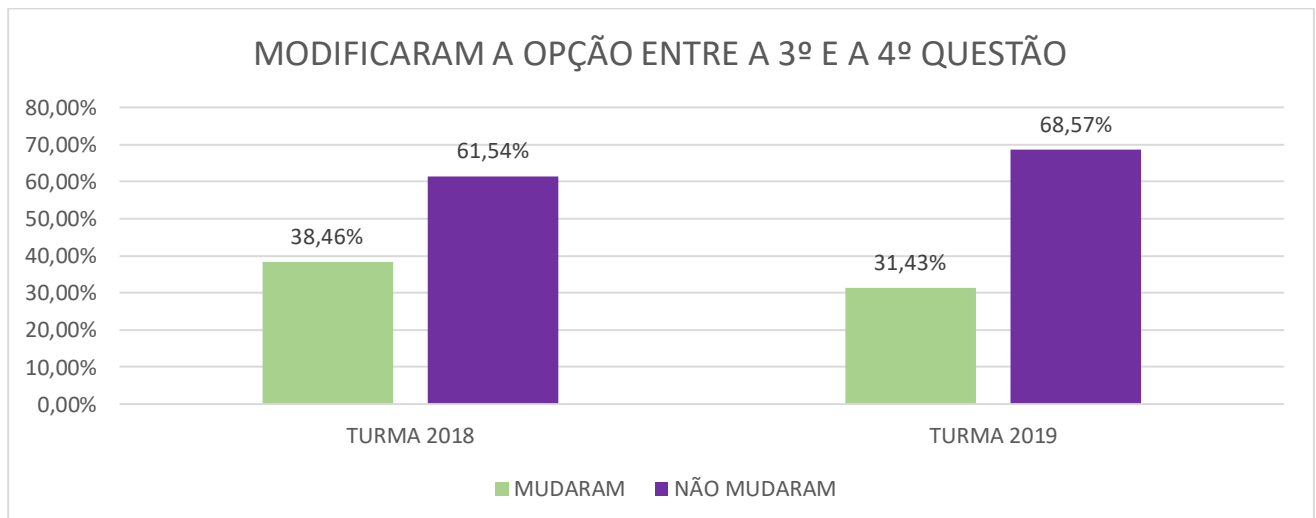


Fonte: O autor, 2019.

Para essa questão, a turma de 2018 possui praticamente metade dos alunos optando pela opção A e a outra metade pela opção B. Já a turma de 2019, teve quase que 30% a mais de alunos que optam pela letra A, assim sendo muitos não modificaram a sua escolha em comparação com a terceira pergunta. Novamente o efeito do enquadramento, causado pela alteração no texto das alternativas, opção A da questão 3, falava em ganhar R\$30,00 e na questão 4, perder R\$ 20,00, foi observado. E dessa vez foi mais forte na turma de 2018.

Vamos agora apresentar a quantidade de alunos que modificaram de opção entre a terceira e a quarta questão.

Figura 28 - Gráfico com a porcentagem de alunos que modificaram de opção entre a 3ª e a 4ª questão

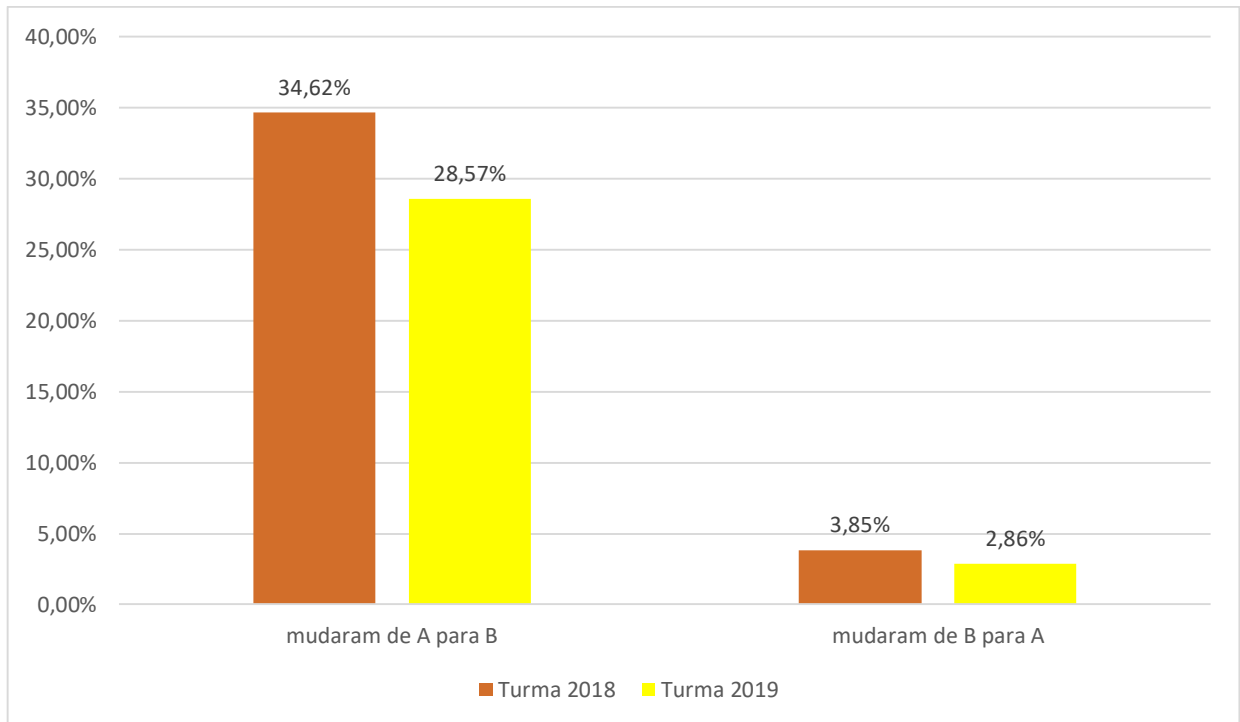


Fonte: O autor, 2019.

É possível observar nas duas turmas que a quantidade de alunos que mantiveram a escolha entre as questões 3 e 4 foi maior dos que alteraram de opção. Grande parte desses alunos responderam que perceberam que as questões possuíam a mesma informação. Ou seja, entenderam que no caso ganhar R\$ 30,00 e perder R\$ 20,00 de R\$ 50,00 era a mesma situação, só que apresentada com um diferente enquadramento. Talvez um dos motivos para terem conseguido identificar mais facilmente essa similaridade esteja no fato de que a pergunta dessa vez envolvia dinheiro e o valor era pequeno, permitindo o cálculo mental. Outro motivo é que tenham aprendido a refletir mais em suas escolhas após terem realizadas a primeira parte da atividade. Esse é um fator que não podemos comparar com as pesquisas de Kahneman, pois ele as aplica em diferentes grupos.

Para melhor identificar os casos listados como alteração entre itens da terceira e quarta questão, também optamos por separar a quantidade de alunos que fizeram a alternância entre a opção A e depois a B, ou vice-versa.

Figura 29 - Gráfico com a porcentagem de alunos que modificaram de opção, A para B ou B para A, entre a 3° e a 4° questão



Fonte: O autor, 2019.

Como se previa, a predominância absoluta foi entre alunos que escolheram primeiramente a opção A e depois na próxima pergunta mudaram para a letra B. Mais uma vez observamos o efeito do enquadramento, agora presente pela inclusão da palavra “perder”. Em torno de 30% dos estudantes resolveram mudar a sua escolha e assim evitar perder o dinheiro que possuíam. Outro fator presente nestas questões e que possivelmente influenciou as escolhas dos discentes foi a Teoria da Perspectiva de Kahneman, que propõe ao leitor, nessa parte da atividade, que ele já inicia o jogo proposto com um determinado valor. O que faz aflorar a aversão a perda, caso que talvez não fosse tão sentido se a tarefa mencionasse que o jogador iniciasse com zero reais. Vale ressaltar que somente um aluno em cada turma escolheu a letra B na questão 3 e após trocou para a letra A na questão seguinte. Aparentemente essa escolha ocorreu pelo aluno não ter compreendido a questão, como pode ser visto mais adiante.

As respostas fornecidas pelos alunos foram agrupadas por categorias, a fim de identificar padrões de respostas. Seguem abaixo os tipos criados e entre parênteses o percentual do total de estudantes que se classificam em cada modalidade.

**Tipo I** – alunos que optaram pela letra A na terceira questão e mantiveram a opção A na quarta questão (57,4%)

**Tipo II** – alunos que escolheram a letra A na terceira questão e modificaram para a letra B na quarta questão (31,1%)

**Tipo III** – alunos que escolheram a letra B na terceira questão e mantiveram a opção B na quarta questão (8,2%)

**Tipo IV** – alunos que escolheram a letra B na terceira questão e modificaram para a letra A na quarta questão (3,3%)

Assim como realizamos anteriormente, apresentaremos exemplos das respostas fornecidas pelos alunos para cada um dos tipos criados, separadas por turma.

#### 4.2.1 Análise dos argumentos da Turma 2018

**Tipo I** – optaram pela letra A na terceira questão e mantiveram a opção A na quarta questão.

Os alunos classificados nessa categoria apresentaram argumentos semelhantes entre si, e dentre eles escolhemos o Aluno 16. Apresentamos seus argumentos para as respostas das questões 3 e 4, nas figuras 29 e 31.

Figura 30 – Aluno 16 – Decisões e Argumentos para a Questão3

- 3) Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:
- Ficar com R\$30,00.
  - Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

Qual opção você escolhe? Por quê?

Letra A, porque tenho a certeza de ficar com R\$30,00.

Fonte: O autor, 2019.

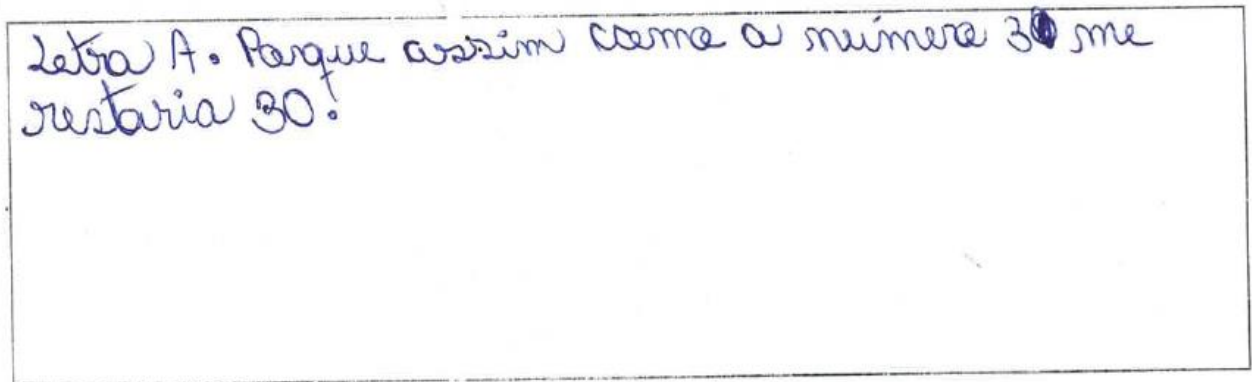
Resposta por escrito do aluno 16: “Letra A, porque tenho a certeza de ficar com R\$30,00.”

Transcrição da entrevista realizada com o aluno 16: “Letra A, porque eu sabia que ia ficar com o dinheiro e na segunda também. Porque pelo meu raciocínio eu ficaria com o dinheiro, eu ficaria com 30 reais. Eu ia perder 20, mas ia ficar com 30.”

Figura 31 – Aluno 16 – Decisões e Argumentos para a Questão 4

- 4) Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:
- a) Perder R\$ 20,00.
  - b) Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

Qual opção você escolhe? Por quê?



Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 16: “Letra A, porque assim como a número 3 me restaria R\$ 30,00.”

Os alunos agrupados no Tipo I conseguiram identificar que dos R\$ 50,00, ficar com R\$ 30,00 (letra A na questão 3) e perder R\$ 20,00 (letra A da questão 4) significava o mesmo ganho de R\$ 30,00. Assim optaram pela certeza de garantir uma quantia, mesmo que na opção B pudessem sair com um valor maior.

**Tipo II** – alunos que escolheram a letra A na terceira questão e modificaram para a letra B na quarta questão

Os alunos classificados como Tipo II apresentaram argumentos semelhantes entre si, e dentre eles escolhemos o Aluno 22. Apresentamos seus argumentos para as respostas das questões 3 e 4, nas figuras 33 e 34.

Figura 32 – Aluno 22 – Decisões e Argumentos para a Questão 3

3) Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:

- a) Ficar com R\$30,00.
- b) Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

Qual opção você escolhe? Por quê?

Eu escolho ficar com 30,00 (A), Porque na letra (B) tenho a probabilidade de ficar sem nada.

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 22: “Eu escolho ficar com R\$ 30,00 (A), porque na letra (B) tenho a probabilidade de ficar sem nada.”

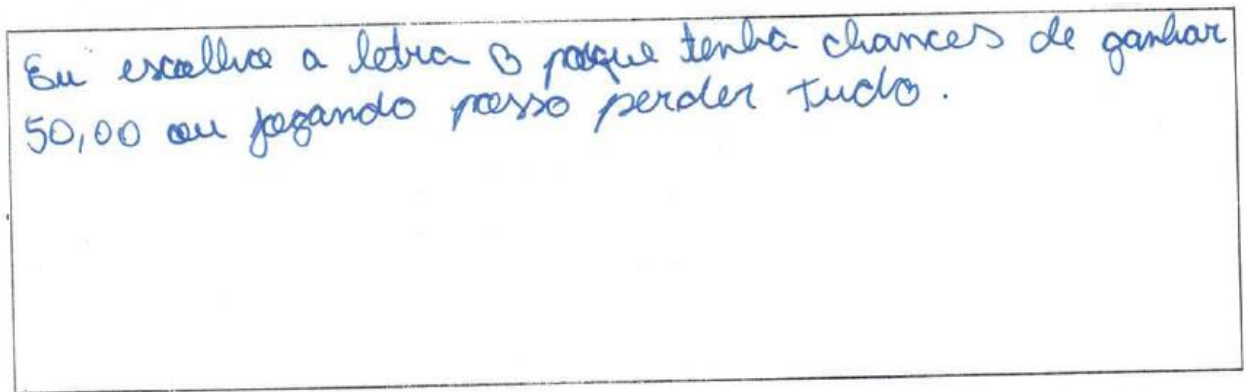
Transcrição da entrevista realizada com o aluno 22: “Eu escolhi a letra A, porque eu tenho a chance de ficar com 30, se eu escolhesse a B eu ia ficar sem nada. Então eu preferi escolher a A.”

Figura 33 – Aluno 22 – Decisões e Argumentos para a Questão 4

4) Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:

- a) Perder R\$ 20,00.
- b) Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

Qual opção você escolhe? Por quê?



Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 22: “*Eu escolho a letra B porque tenho chances de ganhar R\$ 50,00 ou jogando posso perder tudo.*”

Transcrição da entrevista realizada com o aluno 22: “*Na quatro eu escolhi a B, porque na letra A está dizendo que eu ia perder 20 e eu com a letra B eu tenho a chance de ganhar 50 ou então de perder tudo.*”

No tipo II temos os alunos que modificaram a opção de A na terceira questão para B na quarta questão. As respostas apresentam o medo da palavra “perder” presente na letra A da pergunta de número 4, sofrendo assim o efeito do enquadramento. Conforme também foi observado na primeira parte da atividade, os alunos mudam os seus argumentos, onde primeiramente afirmam que preferem ter a garantia de ganhar os R\$ 30,00, na outra questão mudam e dizem que agora preferem arriscar e tentar levar os R\$ 50,00.

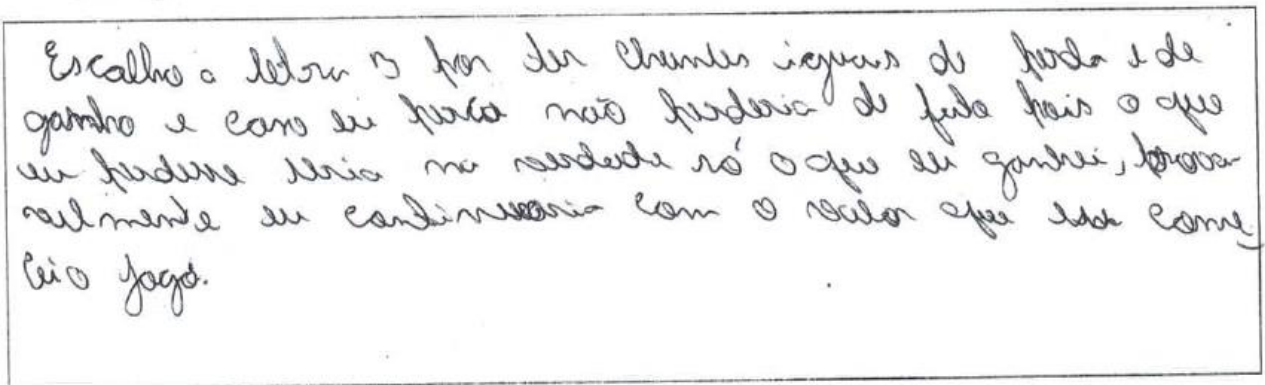
**Tipo III** – alunos que escolheram a letra B na primeira questão e mantiveram a opção B na segunda questão

Os alunos que classificados como Tipo III apresentaram argumentos semelhantes entre si, e dentre eles escolhemos o Aluno 19.

Figura 34 – Aluno 19 – Decisões e Argumentos para a Questão 3

- 3) Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:
- Ficar com R\$30,00.
  - Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

Qual opção você escolhe? Por quê?



Escolho a letra B por ter chances iguais de perda e de ganho e caso eu perca não perderia de fato pois o que eu perdesse seria na verdade só o que eu ganhei, provavelmente eu continuaria com o valor que eu comecei o jogo.

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 19: “*Escolho a letra B por ter chances iguais de perda e ganho e caso eu perca, não perderia de fato, pois o que eu perdesse seria na verdade só o que eu ganhei, provavelmente eu continuaria com o valor que eu comecei o jogo.*”

Transcrição da entrevista realizada com o aluno 19: “*Eu escolhi a B, bom porque ali está dizendo que eu já ganhei 50 reais, independentemente do valor que eu comecei eu já tenho 50 reais, vamos supor, de crédito. Porque se eu arriscasse eu teria 50% de chance de perder esses 50 reais e teria também 50% de chance de ganhar, mas caso eu perdesse esse 50 reais na verdade eu não perderia, porque na verdade aquilo já foi um lucro que eu já tive e o valor inicial que eu comecei continua a mesma coisa, então se eu perdesse eu não perderia simplesmente só não acrescentaria mais nada.*”

Figura 35 – Aluno 19 – Decisões e Argumentos para a Questão 4

- 4) Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:
- a) Perder R\$ 20,00.
  - b) Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

Qual opção você escolhe? Por quê?

Escolho a letra B pelos mesmos motivos da questão 3.

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 19: “Escolho a letra B pelos mesmos motivos da questão 3.”

Transcrição da entrevista realizada com o aluno 19: “Na quarta questão eu escolhi a segunda opção pelos mesmos motivos da primeira, não iria perder de fato, só não conseguiria acrescentar um valor mais alto. As duas questões tinham as chances iguais de perda e ganho.”

Os alunos do tipo III gostam de arriscar, assim nas duas questões selecionam a opção em que podem ter a chance de ganhar mais dinheiro. Como essa é a opção B nas duas questões, eles mantem essa escolha nas perguntas.

**Tipo IV** – alunos que escolheram a letra B na primeira questão e depois modificaram para a letra A na segunda questão.

Os alunos que classificados como Tipo IV apresentaram argumentos semelhantes entre si, e dentre eles escolhemos o Aluno 07.

Figura 36 – Aluno 07 – Decisões e Argumentos para a Questão 3

- 3) Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:
- a) Ficar com R\$30,00.
- Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

Qual opção você escolhe? Por quê?

Por ter ganhado R\$ 50,00 por sorte eu apostaria 50% do meu dinheiro a probabilidade está igualada 50% ganha 50% de perde então não teria que perder mas só ganhar.

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 07: “Por ter ganhado R\$ 50,00 por sorte eu apostaria 50% do meu dinheiro a probabilidade está igualada, 50% ganha 50% de perder, então não teria que perder, mas só ganhar.”

Figura 37 – Aluno 07 – Decisões e Argumentos para a Questão 4

4) Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:

Perder R\$ 20,00.

b) Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

Qual opção você escolhe? Por quê?

Pois a garantia de ficar com trinta reais e 100% de probabilidade então não perderia tudo como a da ~~B~~ B

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 07: “Pois a garantia de ficar com trinta reais é 100% de probabilidade, então não perderia tudo como a da B.”

Observamos que, nesse único caso em que o aluno escolhe a opção B na questão 3 e depois modifica para a letra A na próxima pergunta, pela resposta dada, o estudante não conseguiu entender a atividade proposta. Ele cria uma situação sobre apostar o dinheiro que não existe nas alternativas presentes na tarefa.

#### 4.2.2 Análise dos argumentos da Turma 2019

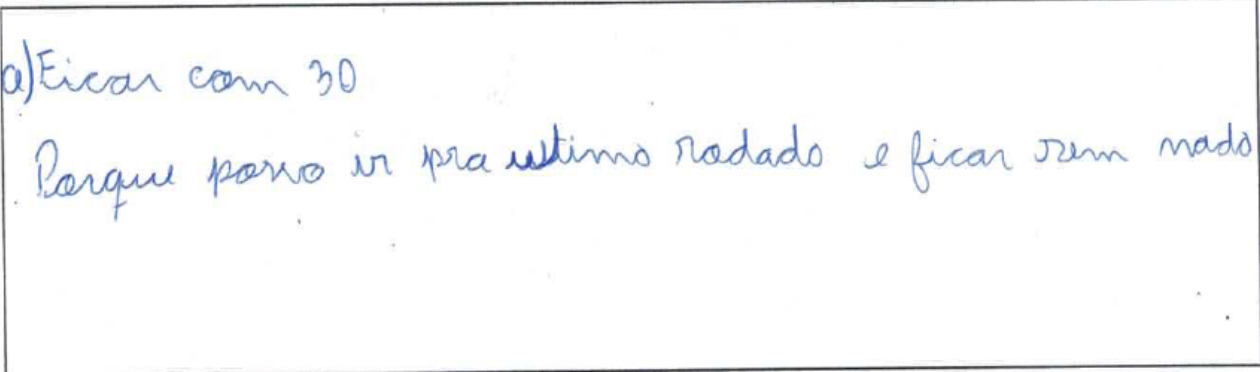
**Tipo I** – optaram pela letra A na terceira questão e mantiveram a opção A na quarta questão.

Os alunos classificados nessa categoria apresentaram argumentos semelhantes entre si, e dentre eles escolhemos o Aluno 33. Apresentamos seus argumentos para as respostas das questões 3 e 4, nas figuras 39 e 40 respectivamente.

Figura 38 – Aluno 03 – Decisões e Argumentos para a Questão 3

- 3) Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:
- a) Ficar com R\$30,00.
  - b) Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

**Qual opção você escolhe? Por quê?**



a) Ficar com 30  
Porque posso ir pra última rodada e ficar sem nada

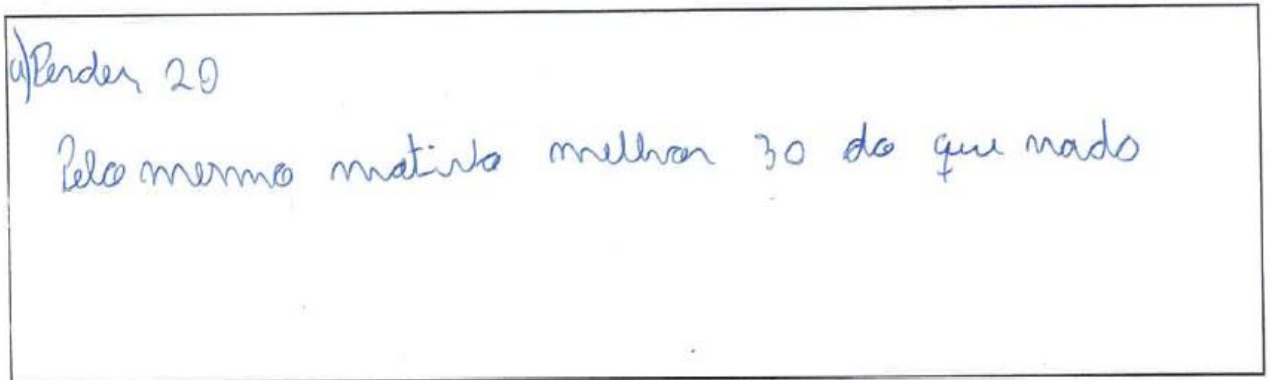
Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 03: “Ficar com 30. Porque posso ir pra última rodada e ficar sem nada.”

Figura 39 – Aluno 03 – Decisões e Argumentos para a Questão 4

- 4) Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:
- a) Perder R\$ 20,00.
  - b) Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

**Qual opção você escolhe? Por quê?**



a) Perder 20  
Pelo mesmo motivo melhor 30 do que nada

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 03: “Perder 20. Pelo mesmo motivo, melhor 30 do que nada.”

Da mesma forma que identificamos na turma de 2018, os alunos desta turma preferem não arriscar e garantir os R\$ 30,00. Também observa-se nesse tipo I, que os pesquisados conseguem entender que a alternativa A presente na questão 3 e 4 possuem a mesma informação. Em alguma das respostas vimos o viés sendo explicitado, os estudantes afirmam que são azarados e que se continuassem jogando (opção B) acabariam perdendo todo o dinheiro.

**Tipo II** – alunos que escolheram a letra A na terceira questão e modificaram para a letra B na quarta questão

Os alunos classificados como Tipo II apresentaram argumentos semelhantes entre si, e dentre eles escolhemos o Aluno 13. Apresentamos seus argumentos para as respostas das questões 3 e 4, nas figuras 41 e 42.

Figura 40 – Aluno 13 – Decisões e Argumentos para a Questão 3

3) Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:

- a) Ficar com R\$30,00.
- b) Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

**Qual opção você escolhe? Por quê?**

A, porque prefiro ficar com R\$ 30,00 do <sup>que</sup> ter a chance de perder tudo e ficar com nada.

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 13: “A, porque prefiro ficar com R\$ 30,00 do que ter a chance de perder tudo e ficar com nada.”

Figura 41 – Aluno 13 – Decisões e Argumentos para a Questão 4

- 4) Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:
- Perder R\$ 20,00.
  - Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

**Qual opção você escolhe? Por quê?**

B, porque quem se arrisca não petisca, tentaria jogar se a sorte estiver comigo me darei bem, mas se não jogamos outra vez.

Fonte: O autor, 2019.

Resposta por escrito do aluno 13: “B, porque quem se arrisca não petisca, tentaria jogar, se a sorte estiver comigo me darei bem, mas senão, jogamos outra vez.”

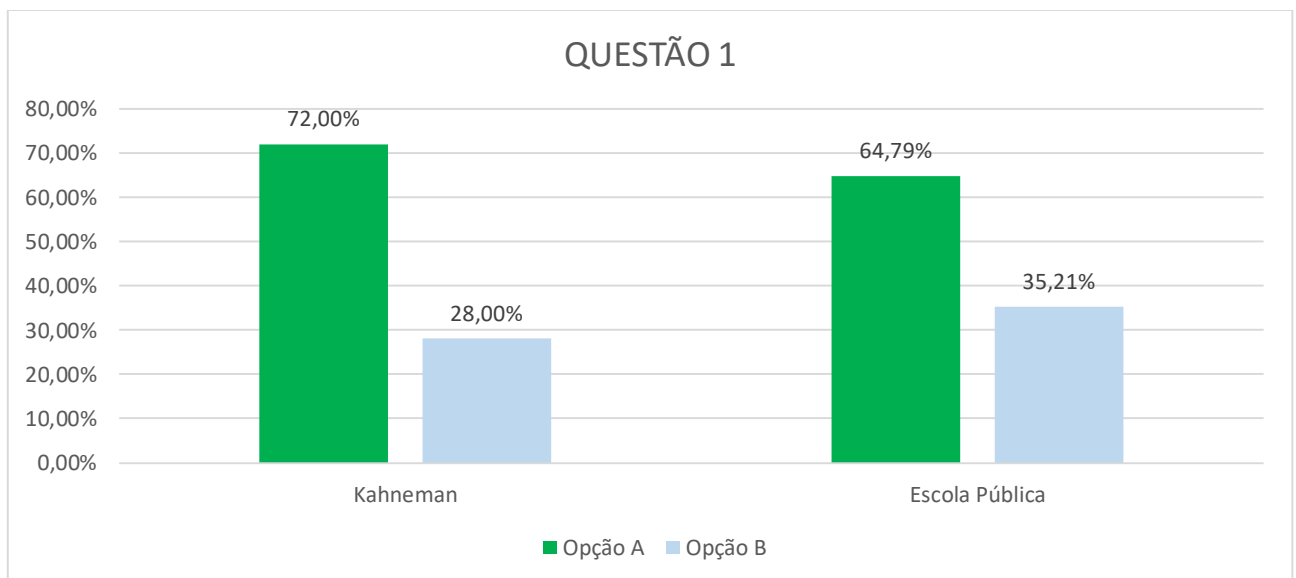
No tipo II, os alunos modificam o seu comportamento. Ao selecionar a alternativa A na questão 3 afirmar que não gostam de arriscar e que preferem ter o dinheiro garantido. Logo após, na questão 4 mudam o argumento, agora dizem que preferem arriscar, que desejam a chance de ficar com os R\$ 50,00. Cito novamente Kahneman, que já havia identificado esse comportamento contraditório por parte dos entrevistados.

Como nessa turma tivemos uma pequena quantidade de alunos que optou pela opção B nas duas questões, e que defendem esse comportamento afirmando que gostariam de jogar e ter a chance de sair com o prêmio total, não colocamos exemplos do tipo III. O tipo IV teve um único elemento, com as mesmas características do presente na turma de 2018, assim também não o apresentaremos nessa análise.

### 4.3 Comparativo entre as respostas fornecidas pelos alunos da escola pública com as da pesquisa de Kahneman

Realizamos agora uma comparação entre as respostas que foram dadas pelos alunos da escola pública no Rio de Janeiro na atividade com as fornecidas na pesquisa de Kahneman, cujos participantes eram universitários dos Estados Unidos. Assim divergências podem se motivar pelos seguintes fatores: nível de escolaridade, renda financeira (algo que não é analisado nos estudos de Kahneman) e pelo viés (experiências de vida). As duas turmas (2018 e 2019) tiveram os seus resultados agrupados, para melhorar a visualizar dos dados obtidos.

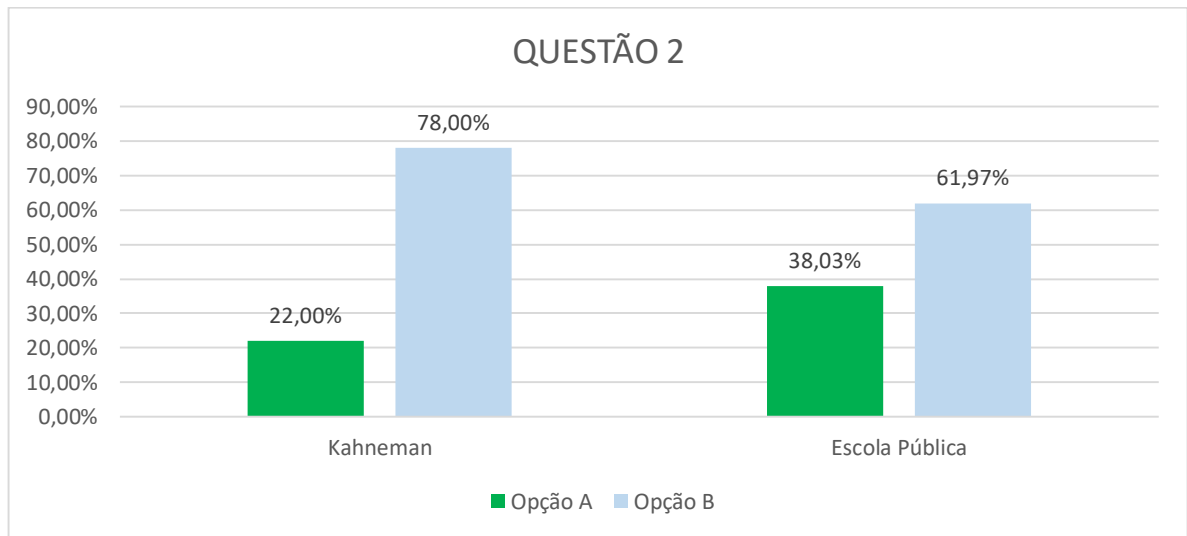
Figura 42 - Gráfico comparativo Kahneman / Escola pública (questão 1)



Fonte: O autor, 2019.

Observa-se que tanto na pesquisa realizada por Kahneman quanto na pesquisa realizada neste trabalho têm resultados bem próximos. A maioria dos entrevistados optou pela opção A. Kahneman afirma que essa seleção decorre da aversão a perdas, o ser humano tende, nas tomadas de decisões, a selecionar opções que demonstrem segurança, nem que pra isso selecionem a opção com maior desvantagem.

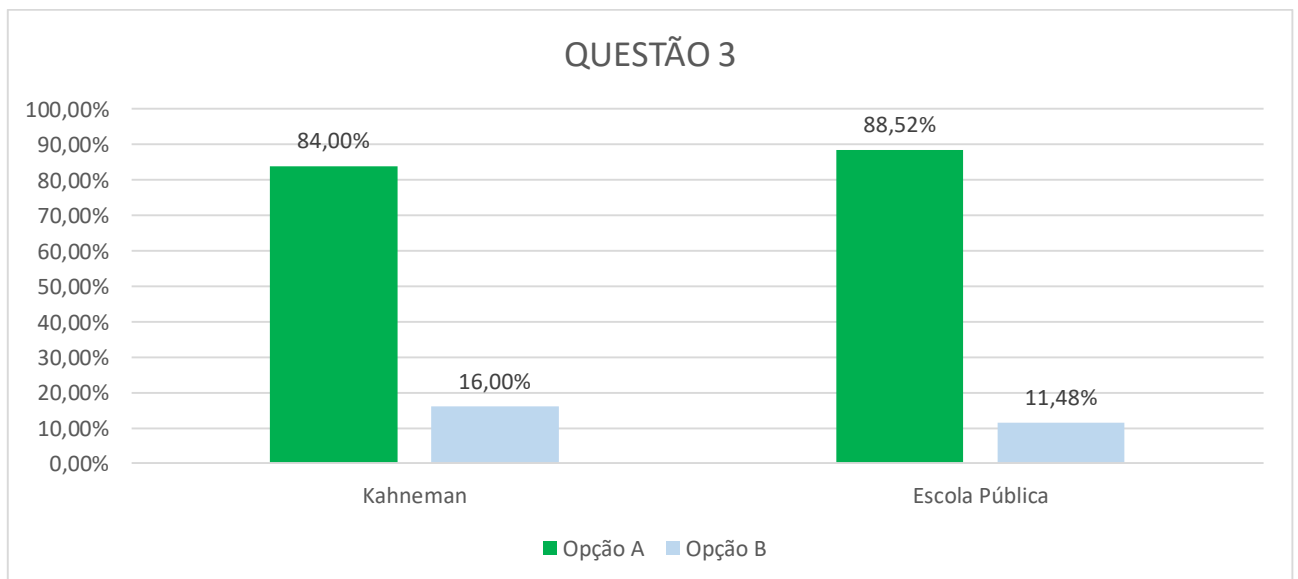
Figura 43 - Gráfico comparativo Kahneman / Escola pública (questão 2)



Fonte: O autor, 2019.

Na questão 2, encontra-se uma diferença maior entre as opções feitas no estudo de Kahneman e dos alunos da escola pública. Os entrevistados por Kahneman optaram mais pela letra B dessa vez, mostrando assim que sofreram maior influência do enquadramento. Durante as entrevistas, os estudantes da escola afirmam que, agora nessa questão, não selecionaram a opção A pois nesta há a informação de que pessoas morrerão. Assim como no estudo de Kahneman, as respostas dadas na primeira e na segunda pergunta se tornam contraditórias. Primeiramente afirmam que não gostam de correr risco e depois justificam que preferem arriscar a deixar as pessoas morrerem.

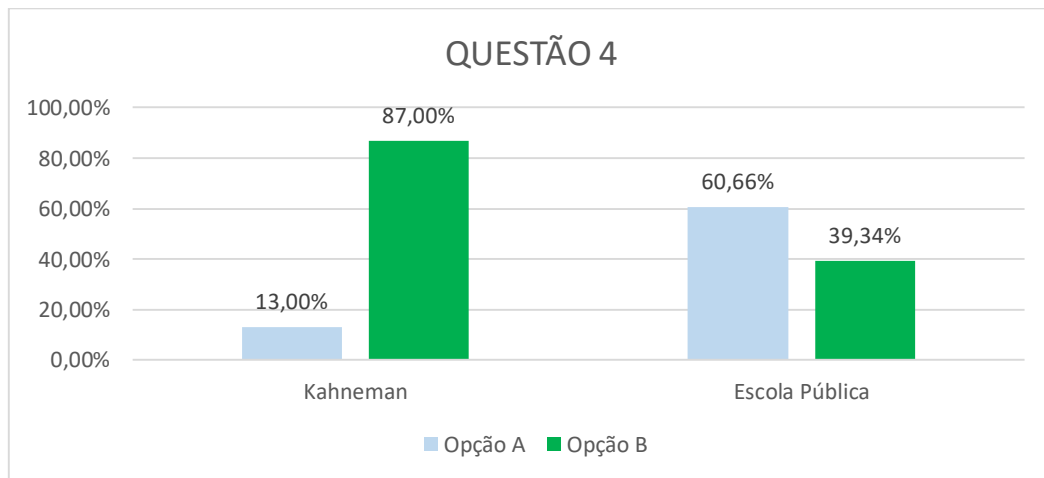
Figura 44 - Gráfico comparativo Kahneman / Escola pública (questão 3)



Fonte: O autor, 2019.

A questão 3 também teve um percentual de seleção muito próximo entre os entrevistados por Kahneman e os da escola pública. Vale ressaltar que a pergunta foi adaptada para a realidade brasileira, com os valores reduzidos, o que não modificou o resultado entre as pesquisas. Também foi aplicado a Teoria da Perspectiva, na qual afirma que devemos considerar um valor inicial de ganho, não começando assim com o valor zerado. Pode-se concluir que todos os entrevistados preferiram a opção em que tem-se o ganho garantido. Mostrando novamente a aversão a perdas.

Figura 45 - Gráfico comparativo Kahneman / Escola pública (questão 4)



Fonte: O autor, 2019.

Na questão 4 é onde ocorre a maior diferença entre as pesquisas. Possivelmente devido a faixa etária e pela escola se encontrar numa área carente, os alunos da escola pública optaram por não arriscar o dinheiro que haviam ganho no jogo. Eles afirmam que é preferível ter pouco dinheiro em sua posse do que não ter dinheiro nenhum. Outra observação que deve ser feita, é que uma maior quantidade de alunos conseguiu identificar que as informações presentes nos itens A das questões 3 e 4 são as mesmas. Possivelmente em decorrência de já terem realizado as duas primeiras atividades e/ou pelos valores serem pequenos, de fácil cálculo mental.

Resumidamente, os dados obtidos pela pesquisa de Kahneman também foram encontrados na pesquisa aplicada na escola pública. Assim foram identificados aversão a perdas, o efeito do enquadramento, viés e heurísticas sendo aplicadas na tomada de decisões, mesmo em alunos que tiveram contato recente com o assunto probabilidade. A diferença entre o tempo de aplicação da atividade das aulas de probabilidade, parece não ter influenciado a escolha dos alunos nas duas turmas. E constatamos a importância do assunto ser abordado em sala de aula, visto que os alunos são influenciados a tomarem decisões de acordo com o texto que lhe é apresentado e desprezam dados probabilísticos.

## 5 PRODUÇÃO E APRESENTAÇÃO DO MATERIAL FINAL

O conjunto de tarefas aqui proposto, tem como objetivo inserir o assunto Tomada de Decisão em SNA na sala de aula. Recomendamos que seja aplicado a alunos do Ensino Médio que já tiveram o contato com o assunto de Probabilidade. Nas escolas estaduais do Rio de Janeiro, o assunto de probabilidade costuma ser abordado no terceiro ano do Ensino Médio, durante o segundo bimestre. O material foi preparado após as análises das respostas dadas pelos estudantes em pesquisa realizada na escola pública sobre TD em SNA. As tarefas aqui propostas incluem mais algumas questões adaptadas da pesquisa de Kahneman, além de atividades que já foram testadas e aplicadas em outros trabalhos de mestrado, atividades desenvolvidas pelo autor desta dissertação e questões de ENEM.

As 4 primeiras questões são as mesmas que foram aplicadas durante a pesquisa desta dissertação. Sua presença se faz importante para identificar se os alunos que realizarem as tarefas possuem aversão a perdas e se sofreram o efeito do enquadramento. O diferencial das questões 3 e 4 é que devido a ordem em que são colocadas, já que seguem as mesmas ideias das duas primeiras questões, os alunos não sofram tão fortemente o efeito do enquadramento. Também vale salientar, que devido a situação econômica dos alunos, as respostas para esses itens podem ser diferentes das encontradas no trabalho que realizamos.

A questão 5 serve para identificar se o aluno apresenta a heurística da representatividade, se as características descritas na pergunta para o personagem influenciam na escolha da profissão. O esperado é que ele entenda que quanto for maior a quantidade de profissionais que exerçam aquela profissão, maior será a probabilidade de o personagem pertencer aquela categoria.

A sexta questão propõe diferentes sequências de sexo para bebês nascidos em uma maternidade. Aqui queremos averiguar se os estudantes conseguem perceber que todas as alternativas têm a mesma probabilidade de ocorrer, que nesta situação não existem sequências que são mais possíveis que outras.

Na questão 7 é proposta uma situação em que os que serão pesquisados devem realizar a tomada de decisão em um problema que se adequa a realidade escolar e sua faixa etária, com uma situação envolvendo a venda de trufas e quantidade que devem ser adquiridas para que não se tenha prejuízo. São realizadas diversas perguntas, para que assim os alunos detalhem em suas respostas quais foram as estratégias que tomaram para resolver o problema.

As questões 8 a 11 foram retiradas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e foram inseridas no trabalho pois tratam de probabilidade e da tomada de decisão. Mais uma vez enfatizando a importância de tratar desses assuntos no Ensino Médio, visto a sua presença em provas externas.

As questões de 12 a 14 foram baseadas no viés da negligência com o denominador (denomitor neglect), e adaptadas de Kahneman (2012, pp 410 – 413). Elas consideram o efeito da negligência do denominador na tomada de decisão em situações simples de probabilidade. Esse efeito pode ser usado de maneira intencional por advogados, jornalistas, médicos, políticos e em geral por qualquer profissional, para induzir as decisões das pessoas. Segundo algumas pesquisas realizadas, a forma como a informação é colocada tende a interferir na percepção das pessoas sobre qual a opção mais provável. Tais questões podem ser perfeitamente utilizadas no início do estudo de probabilidade quando se abordam os conceitos de probabilidade clássica ou frequentista.

A questão 15 versa sobre o efeito do enquadramento, onde as pessoas tendem a ter reações assimétricas em relação a perdas e ganhos. Nesse caso, a reação mais comum é escolher o par AD, de modo ser atraído pela A e ter aversão pela C, ou seja, ser atraído por ganhos seguros (nesse caso de 240 reais mesmo que a esperança matemática no item B seja maior), e ser atraído pelo risco no domínio das perdas, daí escolher D a despeito da esperança em D ser igual a de C. Segundo os estudos de Kahneman e Tversky que fundamentaram a teoria da perspectiva (KAHNEMAN, TVERSKY; 1979; 1984), as pessoas tendem ser avessas ao risco no domínio dos ganhos, e atraídas pelo risco no domínio das perdas.

As questões 16 e 17 formam uma dupla, sendo a primeira para avaliar a percepção dos estudantes sobre a decisão sem muita perda envolvida diante de uma informação probabilística, e a segunda para avaliar se os eventos a priori, apesar de independentes, modificam a percepção anterior. E a questão 18, extraída de Prata, Oliveira Júnior, Caetano Neto (2013), visa investigar se os estudantes compreendem o conceito de probabilidade, e de que maneira o valor de uma probabilidade está associado à natureza de uma situação aleatória. Uma resposta que apareceu na pesquisa foi: “Sim, porque de 100% das operações pelo menos uma terá a probabilidade de não ser bem sucedida. E a probabilidade de sucesso da operação é de 99%, e é este 1% que fez o doente desistir.

Algumas das possíveis resoluções das questões presentes neste conjunto de atividades encontram-se no APÊNDICE B.

### 5.1 Material final – conjunto de tarefas

1) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:

a) Se a vacina A for adotada, 400 pessoas serão salvas.

b) Se a vacina B for adotada, existe probabilidade de  $1/3$  de que sejam salvas 1200 pessoas e probabilidade de  $2/3$  de que nenhuma pessoa seja salva.

**Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? A ou B? Por quê?**

2) Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:

a) Se a vacina C for adotada, 800 pessoas irão morrer.

b) Se a vacina D for adotada, existe probabilidade de  $1/3$  de que ninguém morra e probabilidade de  $2/3$  de que todas as pessoas venham a morrer.

**Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? C ou D? Por quê?**

3) Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:

a) Ficar com R\$30,00.

b) Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

**Qual opção você escolhe? Por quê?**

4) Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:

a) Perder R\$ 20,00.

b) Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

**Qual opção você escolhe? Por quê?**

5) Felipe é muito tímido e retraído, mas sempre prestativo e atencioso com as pessoas, necessita de organização e ordem pois é muito detalhista. Para cada profissão abaixo dê a chance de 0% a 100% (probabilidade) que, em sua opinião Felipe poderia ter e, em seguida, justifique o valor dado:

a) Vendedor

b) Fazendeiro ou agricultor

c) Físico

d) Advogado

e) Engenheiro

6) Numa maternidade nasceram na última noite seis bebês. Identifique abaixo, na sequência referente ao sexo do recém-nascidos, (**M** representa os bebês de sexo masculino e **F** os de sexo feminino) qual é a probabilidade de cada uma ter ocorrido. **Justifique sua resposta para os valores escolhidos.**

a) M – M – M – F – F – F

b) F – F – F – F – F – F

c) M – F – M – M – F – M

7) Suponhamos um grupo de alunos do 3º ano do Ensino Médio que irá vender trufas na feira todo sábado para conseguir renda que propicie a festa de formatura. As trufas serão compradas na sexta-feira que antecede o dia da feira. A doceira da cidade vende suas trufas no atacado a R\$ 2,00 a unidade. Os alunos pretendem vendê-las a R\$ 4,00 a unidade. Admitindo que a doceira venda suas trufas em embalagens contendo 50, 100 ou 150 unidades, os alunos poderão escolher entre comprar qualquer uma das 3 opções. Porém, não sabem de antemão qual será a demanda a cada sábado. Os alunos estimam em 35%, 45% e 20%, respectivamente, a probabilidade de que a demanda seja de 50, 100 ou 150 unidades. Os alunos sabem que as trufas compradas deverão ser vendidas todas no sábado, as trufas não vendidas serão consideradas como perda, já que a validade dessas trufas é de apenas 4 dias. Sendo assim, eles não poderão vendê-las na semana seguinte e o único lugar em que poderão vender essas trufas é na feira aos sábados.

**Dentro dessa situação qual deve ser a melhor decisão, na sua opinião, a ser tomada com relação a quantidade de trufas que devem ser encomendadas com a confeitaria? Descreva a estratégia que você tomaria para o primeiro fim de semana de vendas. E para o segundo e terceiro dia de feira?**

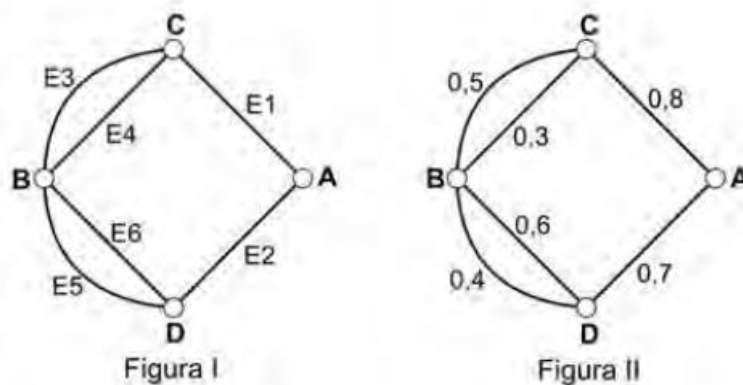
8) (Enem - 2009) Um médico está estudando um novo medicamento que combate um tipo de câncer em estágios avançados. Porém, devido ao forte efeito dos seus componentes, a cada dose administrada há uma chance de 10% de que o paciente sofra algum dos efeitos colaterais observados no estudo, tais como dores de cabeça, vômitos ou mesmo agravamento dos sintomas da doença. O médico oferece tratamentos compostos por 3, 4, 6, 8 ou 10 doses do medicamento, de acordo com o risco que o paciente pretende assumir.

Se um paciente considera aceitável um risco de até 35% de chances de que ocorra algum dos efeitos colaterais durante o tratamento, qual é o maior número admissível de doses para esse paciente?

- a) 3 doses.
- b) 4 doses.
- c) 6 doses.
- d) 8 doses.
- e) 10 doses.

9) (Enem - 2010) A figura I abaixo mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao o ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.

Figura 46 – Questão 9



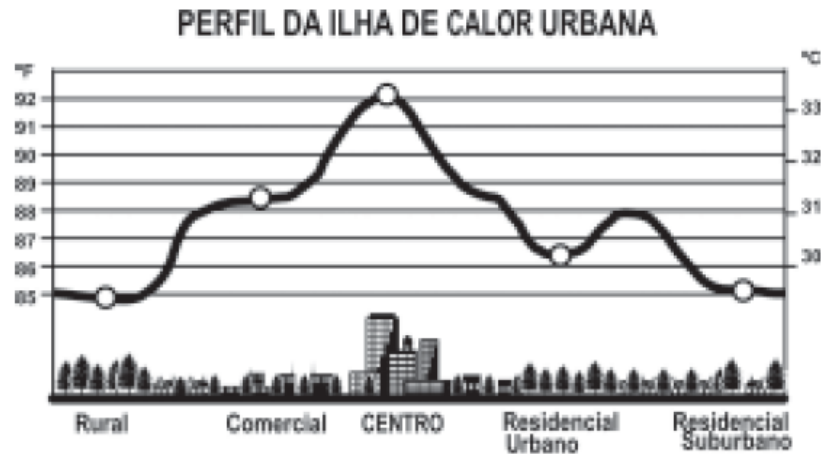
Fonte: ENEM, 2010.

Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível. O melhor trajeto para Paula é

- a) E1E3.
- b) E1E4.
- c) E2E4.
- d) E2E5.

**10)** (Enem - 2011) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a  $31^{\circ}\text{C}$ . Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:

Figura 47 – Questão 10



Fonte: ENEM, 2011.

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

- a)  $\frac{1}{5}$
- b)  $\frac{1}{4}$
- c)  $\frac{2}{5}$
- d)  $\frac{3}{5}$
- e)  $\frac{3}{4}$

**11)** (Enem - 2015) No próximo final de semana, um grupo de alunos participará de uma aula de campo. Em dias chuvosos, aulas de campo não podem ser realizadas. A ideia é que essa aula seja no sábado, mas, se estiver chovendo no sábado, a aula será adiada para o domingo. Segundo a meteorologia, a probabilidade de chover no sábado é de 30% e a de chover no domingo é de 25%.

A probabilidade de que a aula de campo ocorra no domingo é de:

- a) 5,0%
- b) 7,5%
- c) 22,5%
- d) 30,0%
- e) 75,0%

**12)** Considere o seguinte experimento:

Dois potes iguais, A e B, com bolinhas de gude todas de mesmo tamanho e não visíveis. O pote A contém 10 bolinhas, das quais 1 é vermelha; o pote B contém 100 bolinhas, das quais 5 são vermelhas.

Se você tirar uma bolinha vermelha, ganhará um prêmio de 200 reais.

**Qual pote você escolheria?**

**13)** Uma vacina X protege crianças de uma doença fatal, compreende um risco de incapacitação permanente de 0,001%. Uma vacina Y protege crianças da mesma doença fatal, de modo que uma em cada 100 mil crianças vacinadas ficará permanentemente incapacitada.

**Qual vacina você escolheria?**

**14)** Um advogado deseja lançar dúvida sobre a evidência de um determinado teste de DNA, que deu positivo, ou seja, que atestou que o cidadão A, seu cliente, é pai do cidadão B.

Considere duas afirmações:

“A chance de um falso positivo nesse teste é de 0,1%”

“Um falso positivo ocorre em um de cada mil casos testados”

- a) Qual das duas afirmações o advogado usaria para atingir seu objetivo?
- b) E um promotor (defensor do cidadão B)?
- c) Quais as diferenças, para você, entre as duas afirmações do ponto de vista probabilístico? E do ponto de vista comportamental?

**15)** Imagine que você enfrenta o seguinte par (1 e 2) de decisões conflitantes. Primeiramente examine ambas as decisões, depois faça suas escolhas.

Decisão 1. Escolha entre

- a) Ganho seguro de 240 reais
- b) 25% de chance de ganhar mil reais e 75% de chance de não ganhar nada

**Decisão 2. Escolha entre**

- c) Perda segura de 750 reais
- d) 75% de chance de perder 1000 reais e 25% de chance de não perder nada.

**Qual o par de decisões, sendo um de cada, você escolheria?**

**Justifique sua escolha na decisão 1, buscando entender o porquê da tua escolha.**

**Justifique sua escolha na decisão 2, buscando entender o porquê da tua escolha.**

**16)** Foi publicada a previsão do tempo, indicando que a probabilidade de chover amanhã na região onde você mora e estuda é de 30%.

**a)** Que decisão você tomaria com base nessa previsão: levar ou não um guarda-chuva para a escola? Por quê?

**b)** Como você interpreta essa previsão?

**17)** Após um final de semana chuvoso, no domingo à noite Diego vê no clima tempo que a previsão de chover na segunda-feira (amanhã) na região onde mora e estuda é de 30%.

**a)** Que decisão você tomaria no lugar do Diego com base nessa previsão: levar ou não um guarda-chuva para a escola? Por quê?

**b)** Como você interpreta essa previsão?

**18)** Um doente que está prestes a ser operado sabe que a probabilidade de sucesso da operação é 99%. Antes de ser operado, perguntou ao médico quantas operações já tinha efetuado antes. Noventa e nove - respondeu o médico - e foram todas bem-sucedidas. O doente muito abalado, decidiu que não queria mais ser operado, pois segundo os seus cálculos, a sua operação não teria sucesso.

**a)** Você concorda com o doente? Justifique sua resposta.

**b)** O que você faria no lugar dele? Justifique sua resposta.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse estudo teve como *objetivo geral* construir e apresentar um conjunto de tarefas sobre tomada de decisão em situações de natureza aleatória (SNA) para alunos de ensino médio, envolvendo noções básicas de probabilidade e de estudos da psicologia.

As tarefas foram desenhadas em duas fases. Embasado nas pesquisas da Psicologia Cognitiva, realizadas por Daniel Kahneman e Amos Tversky, na fase 1 propomos inicialmente um conjunto de tarefas para alunos do terceiro ano do Ensino Médio, que já haviam estudado os conceitos de probabilidade. Em seguida realizamos uma análise das respostas fornecidas pelos estudantes e assim identificar como eles lidam com esse assunto. Na fase 2, elaboramos um material com 18 tarefas, levando-se em consideração a pesquisa realizada na fase 1, e adaptando questões encontradas na literatura e nas edições do ENEM.

Apesar da fase 1 ter sido construída para subsidiar a fase 2, os resultados obtidos nos permitiram avaliar como alunos participantes da pesquisa utilizaram dados probabilísticos para realizar a tomada de decisão em situações de natureza aleatória. Tais resultados nos apresentaram ideias importantes sobre os motivos que levaram os estudantes a tomarem determinadas decisões.

Na fase 1 da pesquisa propusemos aos estudantes quatro tarefas, adaptadas de Kahneman (2012), com pares de questões similares, envolvendo os efeitos do enquadramento e da aversão a perdas. Nas questões 1 e 2 tínhamos uma doença que infectou um grupo de pessoas, e uma escolha moral deveria ser feita pelos alunos. Aplicado o efeito do enquadramento, a opção A proposta na questão 1 tratava de salvar vidas (400 pessoas de 1200) e na questão 2 o texto era modificado e tratava da morte (800 pessoas das 1200). A opção B das duas questões abordava sobre a probabilidade de salvar todas as pessoas ou ter a chance de todos morrerem. Também foi desenvolvido o efeito do enquadramento e da aversão as perdas nas questões 3 e 4, que agora tinham a proposta de um jogo, onde o aluno poderia, na questão 3, opção A, ficar com R\$ 30,00 (de R\$ 50,00) e na opção A da questão 4, perder R\$ 20,00 (de R\$ 50,00). O item B das duas questões tratavam também sobre a probabilidade, agora de 50% de sair com o dinheiro todo ou de perder tudo.

Assim como foi visto por Kahneman, identificamos que os alunos entrevistados em nossa pesquisa também aplicaram heurísticas e vieses para solução das questões propostas, onde foram identificados os efeitos de enquadramento e de aversão as perdas. A maioria dos alunos, na questão 1, optam pela opção A, onde há a garantia de salvar 400 pessoas. Em suas respostas, afirmam que não selecionam a opção B, pois não querem correr riscos. Porém na

segunda questão mudam suas respostas, selecionam agora a opção B, pois possivelmente não querem ser responsáveis pelas mortes de tantas pessoas e agora preferem arriscar e usar a probabilidade e ter a oportunidade de salvar todas as pessoas. Podemos perceber claramente pelos depoimentos dados pelos alunos, o quanto a palavra morte influenciou nas suas escolhas. Assim como também foi identificado poucos os casos em que os pesquisados identificaram que as duas questões se tratava da mesma pergunta.

Os mesmos efeitos foram identificados nas respostas para as questões 3 e 4. Nas duas turmas os alunos optaram por ficar com o valor e não quiseram continuar jogando. A partir dos seus vieses, se classificaram como azarados e que preferiam assegurar o valor já recebido.

Um resultado que merece destaque foi o obtido com as respostas dos alunos para a questão 4. Esses resultados vão na direção oposta aos resultados de Kahneman. Não identificamos na questão 4, a aversão a perdas, já que os alunos em sua maioria optaram pela letra A (60,66%). Nos estudos realizados por Kahneman, somente 13% dos entrevistados escolheram a alternativa A. Um dos motivos que podem ter influenciado na maior predominância na seleção da primeira alternativa, foi o dos estudantes conseguirem agora identificar mais facilmente que o par de questões (3 e 4) eram similares e assim deveriam permanecer com a seleção feita nas duas questões. Outro possível motivo é de que por se tratar de alunos universitários, na pesquisa de Kahneman, contra alunos da Escola Pública, na pesquisa desta dissertação, os universitários possuem maior renda e menor desapego a quantia que era proposta. Já os alunos da escola pública são moradores de área carente, onde mesmo um valor que parece ser pouco (R\$30,00), para eles representa uma quantia que geralmente não tem possuem, preferindo assim garanti-lo ao invés de arriscar, continuar no jogo e perder o dinheiro. Esse ponto também deve ser mais investigado em trabalho futuro, com a aplicação de um questionário socioeconômico para os alunos, além do conjunto de atividades ser realizado em mais escolas, onde o nível econômico dos estudantes seja diferente dos que participaram da pesquisa apresentada nesta dissertação. E mais um ponto que deve ser considerado, que diferente da pesquisa realizada por Kahneman, os alunos da escola pública tiveram contato com situações envolvendo o efeito do enquadramento quando responderam as questões 1 e 2.

Outro resultado está relacionado a relação entre o tempo entre o estudo regular de probabilidade e a realização das atividades. Não encontramos evidências de que estudar probabilidade e logo em seguida realizar as atividades gere resultados diferentes de estudar probabilidade e alguns meses depois realizar as atividades. Salienta-se que por se tratar de um estudo exploratório, de natureza qualitativa, ele apresenta limitações que foram apresentadas

ao longo do texto e demandam estudos quantitativos que confirmem os resultados aqui apresentados.

A análise feita nas respostas dos alunos, na primeira questão, nos mostrou que os participantes da pesquisa também sofreram aversão a perdas no domínio dos ganhos, assim como o relatado por Kahneman. Nas duas turmas a maioria dos alunos optou pelo ganho certo, escolhendo a opção que apresentava a quantidade de pessoas que seriam salvas.

Na segunda questão, os estudantes sofrem o efeito do enquadramento, e muitos resolvem alterar a sua escolha, tornando-se agora atraídos pelo risco no domínio das perdas. Já que agora há a presença da palavra morte na alternativa A. As justificativas dadas mudam completamente nesses casos. Assim como também afirma Kahneman, os pesquisados usam de argumentos que parecem não ter sentido quando comparados. O estudante afirma na primeira questão que não queria arriscar, por se tratar de vidas humanas e que não queria colocá-las em jogo e agora o mesmo estudante afirma que prefere selecionar a opção com a probabilidade, que quer ter a chance de salvar todas as pessoas.

O comportamento dos alunos na terceira questão é similar com a questão 1. Eles preferem o valor garantido, mesmo que ele seja menor do que a quantia que ganhariam se continuassem no jogo. Assim, mais uma vez detecta-se uma aversão a perdas.

E como já mencionado nesse capítulo, o efeito do enquadramento não foi tão sentido na questão 4. Os discentes conseguiram perceber mais facilmente que se selecionaram uma opção na terceira questão deveriam manter a opção na quarta questão.

Na fase 2, o trabalho finaliza com um novo conjunto de atividades, que pode ser utilizado por professores e assim dar subsídios para que este assunto seja abordado em sala de aula. Este material foi preparado com base na análise das respostas fornecidas pelos alunos e de outras pesquisas realizadas sobre o tema. Esta contribuição vem da identificação nas respostas dos alunos, da aversão a perdas, do efeito do enquadramento e da utilização de vieses e heurísticas na tomada de decisão. Desta forma as questões propostas irão trabalhar novamente esses temas e assim fazer com que os alunos reflitam sobre suas decisões.

Como desdobramento desse estudo, podemos ter a aplicação do material final em outras turmas de Ensino Médio, bem como a investigação da tomada de decisão dos alunos e suas justificativas para as mesmas. Além disso, uma possível frente de pesquisa seria investigar quais os fatores influenciam estudantes nessa faixa etária a não sofrer o efeito do enquadramento, tais como idade, proficiência em matemática, experiências e reflexões sobre suas próprias decisões, complexidade dos problemas, dentre outros.

Esperamos que este trabalho contribua não apenas para o ensino de probabilidade no Ensino Médio, mas principalmente para que a visão das pessoas sobre as situações aleatórias seja ampliada, oferecendo oportunidades para que reflitam e tomem decisões críticas e fundamentadas em conhecimentos matemáticos, não se esquecendo dos limites da racionalidade humana, mas pensando sempre em aperfeiçoamento e melhoria da nossa compreensão do mundo e nossas responsabilidades com as consequências de suas escolhas.

## REFERÊNCIAS

- BATANERO, C. *et al.* **Research on Teaching and Learning Probability**. Hamburg: Springer Open, 2016.
- BATANERO, C. *et al.* Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. **International Journal of Mathematics Education in Science and Technology**, London, n. 25, p. 527-547, 1994.
- BARRY, R. J. **Probabilidade: um curso em nível intermediário**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Projeto Euclides), 1981.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.
- BRASIL. **PCN+Ensino médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: [http://portal.mec.gov.br /seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf). Acesso em: 07 jul. 2018.
- BRASIL. **Políticas do ensino médio: Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/33672>. Acesso em: 19 set. 2018.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.
- CARVALHO, Vitor Hugo Justino. **Uma análise das questões de probabilidade do novo ENEM por meio de uma visão do PCNEM e três livros didáticos**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2018.
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2017.
- FERREIRA, V.R.M. **Psicologia econômica: estudo do comportamento econômico e da tomada de decisão**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.
- HACKING, Ian. **The Emergence of Probability – A philosophical study of early ideas about probability induction and statistical inference**. Cambridge: Cambridge University Press, 1975.
- HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar 5: combinatória probabilidade**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- IEZZI, Gelson. *et al.* **Matemática: ciência e aplicações**. 9. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2017.
- INEP. **Matriz de referência**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: [http://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/downloads/2012/matriz\\_referencia\\_enem.pdf](http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf). Acesso em: 19 out. 2018.
- KAHNEMAN, Daniel. **Rápido e devagar: duas formas de pensar**. São Paulo: Objetiva, 2012.
- KAHNEMAN, Daniel; TVERSKY, Amos. Choices, values and frames. **American**

- Psychologist**, Washington, DC, n. 34, p. 341-350, 1984.
- LANDIM, F.; ROCHA, N.; MATOS, V.; SILVA, ALEXANDRE. **Probabilidade**. Um livro Aberto de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.
- LOPES, C.E.; SOUZA, L.O. Aspectos filosóficos, psicológicos e políticos no estudo da Probabilidade e da Estatística na Educação Básica. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 3, p. 1465-1489, 2016.
- LOPES, Celi Espasandin. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Cad. CEDES**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, abr. 2008. Disponível em [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0101-32622008000100005&lng=pt&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-32622008000100005&lng=pt&nrm=iso). Acesso em: 20 mai. 2019.
- MOREIRA, Andréa de Paula Machado. **Aplicações da teoria da decisão e probabilidade subjetiva em sala de aula do ensino médio**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.
- MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.
- MUNIZ, Ivail Jr., **Econs Ou Humanos?** Um Estudo Sobre a Tomada de decisão em Ambientes de Educação Financeira Escolar. 2016. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - Coordenação dos Programas de Pós-graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.
- OLIVEIRA, C. R. **Julgando sob incerteza: heurísticas e vieses e o ensino de probabilidade e estatística**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.
- POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento de Ideias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes. **Bolema**, Rio Claro, ano 17, n. 21, 2004.
- RIO DE JANEIRO. **Currículo Mínimo**. Rio de Janeiro: Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <http://docenteonline.educacao.rj.gov.br/NovoDocente/>. Acesso em: 10 jun. 2019.
- SILVA FILHO, Haroldo C. **Probabilidade e valor esperado discussão de problemas para o ensino médio**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.
- SCHNEIDER, D. D. G.; PARENTE, M. A. M. P. O desempenho de adultos jovens e idosos na Iowa Gambling Task (IGT): um estudo sobre a tomada de decisão. **Psicologia: reflexão e crítica**, Porto Alegre, v. 19, n. 3, p. 442-450, 2006.
- TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Judgment under uncertainty: Heuristics and Biases. **Science**, Washington, DC, n. 85, p. 1124–1131, 1974.

WATSON, A; OHTANI, M.; AINLEY, J.; FRANT, J.B; DOORMAN; MARGOLINAS, C.; PETER; S.; YANG; Y. **Introduction in Task Design in Mathematics Education.** Proceedings of ICMI Study 22. Oxford: HAL, 2013.

## APÊNDICE A - ATIVIDADES APLICADAS AOS ESTUDANTES NA FASE 1

1. Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:
  - a. Se a vacina **A** for adotada, 400 pessoas serão salvas.
  - b. Se a vacina **B** for adotada, existe probabilidade de  $1/3$  de que sejam salvas 1200 pessoas e probabilidade de  $2/3$  de que nenhuma pessoa seja salva.

**Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? A ou B? Por quê?**

2. Uma doença mortal atingiu o Estado do Rio de Janeiro. 1200 pessoas foram contaminadas por ela. O governo conseguiu desenvolver 2 vacinas distintas para essa doença. E estas vacinas ao serem aplicadas a população contaminada, trarão os seguintes resultados:
  - a. Se a vacina **C** for adotada, 800 pessoas irão morrer.
  - b. Se a vacina **D** for adotada, existe probabilidade de  $1/3$  de que ninguém morra e probabilidade de  $2/3$  de que todas as pessoas venham a morrer.

**Qual vacina você escolheria para aplicar na população doente? C ou D? Por quê?**

3. Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:
  - a. Ficar com R\$30,00.
  - b. Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

**Qual opção você escolhe? Por quê?**

4. Você está participando de um jogo com os colegas e já ganhou R\$ 50,00. Você está na última rodada e deve escolher uma das opções abaixo:
  - a. Perder R\$ 20,00.
  - b. Jogar com o dinheiro, com probabilidade de 50% de ficar com os R\$ 50,00 ou de perder todo o dinheiro.

**Qual opção você escolhe? Por quê?**

## **APÊNDICE B – ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR E SUGESTÕES DE RESPOSTAS DAS TAREFAS FINAIS**

Prezado professor (a). Apresentamos abaixo um conjunto de atividades sobre tomada de decisão sob incerteza. Apresentamos algumas sugestões sobre a motivação e utilização das mesmas. Como algumas delas podem ser trabalhadas em diversos momentos da matéria, tanto olhando para os conteúdos geralmente ensinados, como para as habilidades da BNCC para o EM, optamos por deixar sua escolha totalmente livre.

As 4 primeiras questões são as mesmas que foram aplicadas durante a pesquisa de ALVES (2020), que sugerimos fortemente a leitura. Sua presença se faz importante para identificar se os alunos que realizarem as tarefas possuem aversão a perdas e se sofreram o efeito do enquadramento. O diferencial das questões 3 e 4 é que devido a ordem em que são colocadas, já que seguem as mesmas ideias das duas primeiras questões, os alunos não sofram tão fortemente o efeito do enquadramento. Também vale salientar, que devido a situação econômica dos alunos, as respostas para esses itens podem ser diferentes das encontradas no trabalho que realizamos.

A questão 5 serve para identificar se o aluno apresenta a heurística da representatividade, se as características descritas na pergunta para o personagem influenciam na escolha da profissão. O esperado é que ele entenda que quanto for maior a quantidade de profissionais que exerçam aquela profissão, maior será a probabilidade de o personagem pertencer aquela categoria.

O sexto item propõe diferentes sequências de sexo para bebês nascidos em uma maternidade. Aqui queremos averiguar se os estudantes conseguem perceber que todas as alternativas têm a mesma probabilidade de ocorrer, que nesta situação não existem sequências que são mais possíveis que outras.

Na questão 7 é proposta uma situação em que os que serão pesquisados devem realizar a tomada de decisão em um problema que se adequa a realidade escolar e sua faixa etária, com uma situação envolvendo a venda de trufas e quantidade que devem ser adquiridas para que não se tenha prejuízo. São realizadas diversas perguntas, para que assim os alunos detalhem em suas respostas quais foram as estratégias que tomaram para resolver o problema.

As questões 8 a 11 foram retiradas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e foram inseridas no trabalho pois tratam de probabilidade e da tomada de decisão. Mais uma vez

enfatizando a importância de tratar desses assuntos no Ensino Médio, visto a sua presença em provas externas.

As questões de 12 a 14 foram baseadas no viés da negligência com o denominador (denominator neglect), e adaptadas de Kahneman (2012, pp 410 – 413). Elas consideram o efeito da negligência do denominador na tomada de decisão em situações simples de probabilidade. Esse efeito pode ser usado de maneira intencional por advogados, jornalistas, médicos, políticos e em geral por qualquer profissional, para induzir as decisões das pessoas. Segundo algumas pesquisas realizadas, a forma como a informação é colocada tende a interferir na percepção das pessoas sobre qual a opção mais provável. Tais questões podem ser perfeitamente utilizadas no início do estudo de probabilidade quando se abordam os conceitos de probabilidade clássica ou frequentista.

A questão 15 versa sobre o efeito do enquadramento, onde as pessoas tendem a ter reações assimétricas em relação a perdas e ganhos. Nesse caso, a reação mais comum é escolher o par AD, de modo ser atraído pela A e ter aversão pela C, ou seja, ser atraído por ganhos seguros (nesse caso de 240 reais mesmo que a esperança matemática no item B seja maior), e ser atraído pelo risco no domínio das perdas, daí escolher D a despeito da esperança em D ser igual a de C. Segundo os estudos de Kahneman e Tversky que fundamentaram a teoria da perspectiva (KAHNEMAN, TVERSKY; 1979; 1984), as pessoas tendem ser avessas ao risco no domínio dos ganhos, e atraídas pelo risco no domínio das perdas.

As questões 16 e 17 formam uma dupla, sendo a primeira para avaliar a percepção dos estudantes sobre a decisão sem muita perda envolvida diante de uma informação probabilística, e a segunda para avaliar se os eventos a priori, apesar de independentes, modificam a percepção anterior.

E a questão 18, extraída de Prata, Oliveira Júnior, Caetano Neto (2013), visa investigar se os estudantes compreendem o conceito de probabilidade, e de que maneira o valor de uma probabilidade está associado à natureza de uma situação aleatória. Uma resposta que apareceu na pesquisa foi: “Sim, porque de 100% das operações pelo menos uma terá a probabilidade de não ser bem sucedida. E a probabilidade de sucesso da operação é de 99%, e é este 1% que fez o doente desistir.

Apresentamos a seguir algumas das possíveis resoluções das questões presentes neste conjunto de atividades.

**QUESTÃO 1:** Essa questão não tem escolha certa ou errada. O objetivo é identificar se o aluno tem a aversão a perdas (escolhendo a opção A) ou busca os riscos (opção B).

**QUESTÃO 2:** Deve-se comparar a opção escolhida nesta pergunta com a primeira. Caso o aluno tenha alterado a opção de escolha, ele estará sendo afetado pelo efeito do enquadramento, aqui apresentado pela inclusão da palavra morte.

**QUESTÃO 3:** O mesmo da questão 1, selecionando a opção A o aluno tem aversão a perdas e escolhendo a alternativa B ele busca riscos. O aluno pode ter um resultado diferente da primeira questão, pois agora trata-se de dinheiro que será perdido e não vidas.

**QUESTÃO 4:** A pergunta apresenta os mesmos dados que a questão 3, porém agora com a inclusão da palavra perda. Caso essa alteração modifique a opinião dos alunos eles terão sofrido o efeito do enquadramento.

**QUESTÃO 5:** A investigação agora é sobre a Heurística da Representatividade. Não existe uma probabilidade correta para cada profissão, mas o esperado é que o aluno identifique maiores chances de Felipe ser vendedor do que físico. Assim as escolhas das probabilidades de cada profissão que Felipe possa ter, se dê pela maior quantidade de pessoas que ocupam aquele cargo do que pela personalidade do personagem.

**QUESTÃO 6:** Neste item todas as alternativas têm a mesma probabilidade de ocorrer. Mas intuitivamente os seres humanos acreditam que casos com valores repetidos (letra B) são mais raros de acontecer. O aluno deve acreditar que como é de 50% a probabilidade de que nasça um bebê do sexo masculino e de 50% para um bebê do sexo feminino, casos como o da letra B são impossíveis de ocorrer.

**QUESTÃO 7:** Nesta questão também não se espera um único resultado como resposta possível. Deseja-se que os estudantes consigam interpretar o problema e avaliar as probabilidades apresentadas, assim como analisar os casos que possam a ter prejuízo. Neste item alguns vieses devem aparecer nas respostas dos alunos, mas o professor deve reforçar a importância da realização dos cálculos para que assim possa ser tomada uma decisão acertada.

**QUESTÃO 8: Letra b.** A probabilidade de não ter nenhum efeito colateral em “n” doses é de  $(0,9)^n$ .

Como a probabilidade aceitável de risco é de 35%, a probabilidade de não possuir efeito colateral deve ser maior de  $100\% - 35\% = 65\%$ . Logo,  $(0,9)^n \geq 0,65$ .

Com  $n = 4$ , tem-se que  $(0,9)^4 = 0,6561 \geq 65\%$ , já com  $n = 5$ ,  $(0,9)^5 = 0,590495 < 65\%$ .

Logo o maior valor de  $n$  é 4 doses.

### QUESTÃO 9: Letra D

Calculando a probabilidade de não pegar engarrafamento em nenhum dos dois:

i) E3E1:  $(1 - 0,5) \cdot (1 - 0,8) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,10$

ii) E4E1:  $(1 - 0,3) \cdot (1 - 0,8) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14$

iii) E6E2:  $(1 - 0,6) \cdot (1 - 0,7) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$

iv) E5E2:  $(1 - 0,4) \cdot (1 - 0,7) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$

Agora conseguiremos saber a probabilidade de ter pelo menos um dos caminhos engarrafados em cada trajeto, sendo suas probabilidades de:

i) E3E1:  $1 - 0,10 = 0,90$

ii) E4E1:  $1 - 0,14 = 0,86$

iii) E6E2:  $1 - 0,12 = 0,88$

iv) E5E2:  $1 - 0,18 = 0,82$

Assim o caminho com menor chance de pegar um engarrafamento seria E5E2.

### QUESTÃO 10: Letra E

Casos favoráveis: Residencial urbano, residencial suburbano e caso não favorável: comercial. Assim a probabilidade será de  $\frac{3}{4}$ .

### QUESTÃO 11: Letra C

É preciso que chova no sábado e domingo não chova. Assim a probabilidade desejada é de  $30\% \cdot 75\% = 22,5\%$ .

### QUESTÃO 12: Pote A

A probabilidade de sair bola vermelha no pote A é de:  $P(A) = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$ .

A probabilidade de sair bola vermelha no pote B é de:  $P(B) = \frac{5}{100} = 0,05 = 5\%$ .

Logo a maior chance de ganhar os R\$ 200,00 é escolhendo o pote A.

**QUESTÃO 13:** As duas vacinas têm a mesma taxa de incapacitação.

Vacina X a probabilidade de incapacitação é de **0,001%**.

Vacina Y a probabilidade de incapacitação é de:  $P(Y) = \frac{1}{100000} = 0,00001 = 0,001\%$ .

**QUESTÃO 14:** As duas afirmações são idênticas.

a) Possivelmente o advogado escolhera a afirmação “Um falso positivo ocorre em um de cada mil casos testados”.

b) O defensor poderá usar: “A chance de um falso positivo nesse teste é de 0,1%”.

c) Possivelmente o aluno justifique que a expressão 1 em cada mil casos dá a impressão de ocorrer mais vezes do que a probabilidade de 0,1%, pois esta, devido ao número decimal começado por zero, parece ter uma probabilidade menor de ocorrer.

**QUESTÃO 15:** Esta questão também serve para analisar se o aluno é avesso ao risco no domínio dos ganhos e é atraído pelo risco no domínio das perdas, selecionando assim as opções A e D.

**QUESTÃO 16:** O aluno possivelmente irá justificar que a probabilidade de 30% de chover é menor do que a probabilidade de não chover, 70%. Mas podem influenciar na resposta do aluno seus vieses.

**QUESTÃO 17:** A probabilidade de chover continua igual ao item anterior, 30%, espera-se que ele dê a mesmas respostas que foi dada na questão 16. O professor deve verificar se a informação de que nos dias anteriores choveu irá modificar a opinião do estudante. Se sim, o aluno possivelmente ainda não consegue identificar eventos independentes.

**QUESTÃO 18:** A probabilidade de 99% não significa que nas cem primeiras cirurgias, 99 terão sucesso e 1 terá fracasso. Significa que após serem realizadas muitas cirurgias, o número de cirurgias com sucesso tenderá a ser 99% do número total de cirurgias. Logo, o argumento do doente não é compatível com o conceito de probabilidade, e foi usado de maneira equivocada para tomar decisão, o que pode colocar sua vida em risco, dependendo do tipo de cirurgia que deixará de fazer.