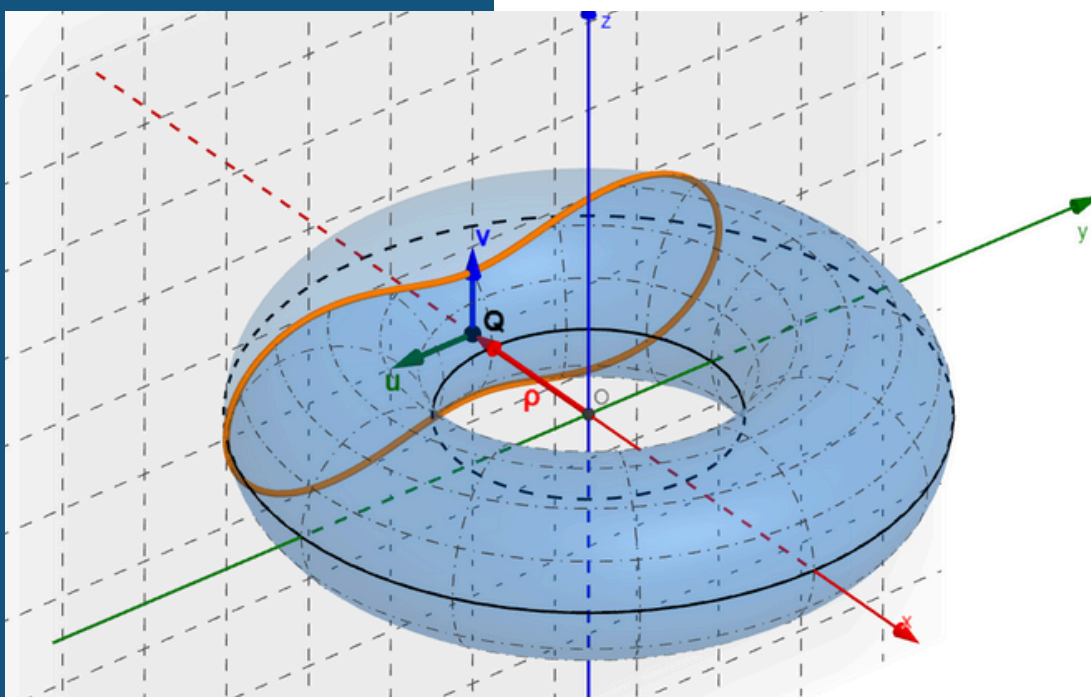


# TRAJETÓRIAS

História da Matemática e Divulgação Científica

## AS SEÇÕES DO TORO

Jean-Gaston Darboux e a geometria no século XIX.



**TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO:** Entrevistas com matemáticos brasileiros: teoria, aplicações e ensino.

**JEAN-GASTON DARBOUX:** Um geômetra do século XIX e sua leitura do toro.

**CURVAS NOTÁVEIS:** Cassini, Bernoulli e Villarceau entre arte e ciência.

**PRÁTICA EM SALA DE AULA:** GeoGebra como ferramenta para explorar as seções do toro.

WALLACE DA SILVA

•

DANIEL F. N. MARTINS

**TRAJETÓRIAS - HISTÓRIA DA MATEMÁTICA  
E DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA**

**AS SEÇÕES DO TORO:  
JEAN-GASTON DARBOUX E A GEOMETRIA  
NO SÉCULO XIX.**

**WALLACE DA SILVA  
DANIEL F. N. MARTINS**

**TRAJETÓRIAS - HISTÓRIA DA MATEMÁTICA  
E DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA**

**AS SEÇÕES DO TORO:  
JEAN-GASTON DARBOUX E A GEOMETRIA  
NO SÉCULO XIX.**

1ª Edição



Rio de Janeiro, 2025

**COLÉGIO PEDRO II**

**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA**

**BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER**

**CATALOGAÇÃO NA FONTE**

S586 Silva, Wallace da  
Trajetórias : história da matemática e divulgação científica : as seções do toro : Jean-Gaston Darboux e a geometria no século XIX / Wallace da Silva, Daniel Felipe Neves Martins. – Rio de Janeiro : Imperial Editora, 2025.

31 p.

Bibliografia: p. [30].

ISBN: 978-65-5930-247-5.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Darboux, Jean-Gaston, 1842-1917. 3. Matemática - História. 4. Geometria diferencial. 5. Toro (Geometria). 6. Comunicação na ciência. 7. GeoGebra (Software). 8. Professores de matemática Formação. I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Colégio Pedro II. III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

## RESUMO

SILVA, Wallace da; MARTINS, Daniel F. N. *Trajatórias – História da Matemática e Divulgação Científica. As seções do toro: Jean-Gaston Darboux e a geometria no século XIX*. Rio de Janeiro: Colégio Pedro II, 2025.

Este produto educacional consiste no primeiro volume da revista digital de divulgação científica intitulada **Trajatórias – História da Matemática e Divulgação Científica**, com o título desta primeira edição: **As seções do toro: Jean-Gaston Darboux e a geometria no século XIX**. Desenvolvida no âmbito do PROFMAT, a publicação reúne entrevistas com pesquisadores, textos históricos, visualizações geométricas e construções no GeoGebra, tendo como eixo a obra de Jean-Gaston Darboux e o tema das seções do toro. O material é voltado à formação de professores de matemática da Educação Básica, buscando articular história da matemática, tecnologia digital e prática docente de forma acessível e visualmente orientada.

**Palavras-chave:** divulgação científica; história da matemática; formação de professores; visualização geométrica; GeoGebra

# SUMÁRIO

---

**Editorial** – p. 07

## **1. Seção Histórica**

Jean-Gaston Darboux (1842–1917) – p. 08

O artigo *Sur les sections du tore (1864)* – p. 09

## **2. Seção Matemática**

Toro como superfície de revolução – p. 10

Toro como lugar geométrico e superfície algébrica de grau 4 – p. 11

Introdução às seções tóricas – p. 12

Ovais de Cassini – p. 13

Lemniscata de Bernoulli – p. 14

Círculos de Villarceau – p. 15

## **3. Trajetórias em Diálogo** – p. 16

Entrevista com Marcos Craizer – p. 17

Entrevista com Alejandro Cabrera – p. 19

Entrevista com Anderson Reis de Vargas – p. 21

Entrevista com Magno Luiz Ferreira – p. 23

## **4. Seção Didática**

Seções tóricas no GeoGebra – p. 26

Construindo o toro no GeoGebra 3D – p. 27

**Conclusão** – p. 29

**Referências** – p. 30

**Ficha Técnica** – p. 31

# EDITORIAL

É com grande alegria que apresento a primeira edição da revista **Trajетórias – História da Matemática e Divulgação Científica**.

Este projeto nasce como fruto da minha pesquisa de mestrado, mas também como um convite para que professores, estudantes e curiosos possam olhar a matemática com outros olhos: os da história, da beleza e da imaginação científica.

O tema desta edição é o **toro de revolução** e as curvas que surgem de seus cortes estudadas por **Jean-Gaston Darboux** em **1864**. Longe de ser apenas uma curiosidade geométrica, o toro oferece um ambiente simples e, ao mesmo tempo, surpreendentemente rico para explorar formas diversas, como círculos, ovais e lemniscatas.

Aqui, o leitor encontrará uma breve visita à trajetória de Darboux, um olhar introdutório sobre o toro e, sobretudo, o coração desta revista: a seção **Trajетórias em Diálogo**, que reúne quatro entrevistas e quatro perspectivas complementares sobre a geometria. Um geômetra, um matemático com formação em Física, um professor-pesquisador e um historiador da matemática apresentam visões convergentes e complementares sobre geometria, ensino e as transformações que definiram a matemática moderna.

Nosso propósito é simples e profundo: **aproximar a matemática da vida**. Que cada página seja um convite à descoberta, ao diálogo e ao encantamento com a história da matemática e suas conexões.

Boa leitura!

**Wallace da Silva**  
Editor



+55 21 99939-7424

wallacedsilva@outlook.com.br

## SEÇÃO HISTÓRICA

## JEAN-GASTON DARBOUX (1842–1917)



Figura 1 – Jean-Gaston Darboux

Jean-Gaston Darboux nasceu em Nîmes, no sul da França, em 1842. Estudou na École Normale Supérieure, em Paris, onde foi aluno de grandes mestres da análise e da geometria. Rapidamente destacou-se como pesquisador e professor, ocupando cátedras no Collège de France e tornando-se, mais tarde, secretário perpétuo da Académie des Sciences.

Ao longo da carreira, Darboux publicou trabalhos fundamentais em análise, teoria das superfícies e equações diferenciais. Seu nome está ligado a conceitos que ainda hoje figuram em manuais avançados, como a **transformação de Darboux** e o **teorema de Darboux**.

Foi, no entanto, na **geometria diferencial** que deixou sua marca mais profunda. Combinando a tradição iniciada por Gauss e ampliada por Riemann, Darboux soube transformar superfícies em verdadeiros laboratórios matemáticos. Entre elas, o **toro de revolução** se destacou como palco privilegiado de suas investigações.

Logo após o artigo de 1864, Darboux consolidaria sua entrada na geometria diferencial com a tese de 1866. Defendeu *Sur les surfaces orthogonales* em 14 de julho de 1866, diante de Chasles, Serret e Bouquet. Nesse trabalho, introduziu o estudo das **linhas isotérmicas** de curvatura em famílias de superfícies ortogonais, aprofundando resultados de Monge e Lamé. A tese foi recebida com entusiasmo e marcou sua entrada definitiva na geometria diferencial.

Em 1864, publicou o artigo “*Sur les sections du tore*”, no qual analisa com rigor as curvas geradas pela interseção entre o toro e planos em diferentes inclinações. Esse texto, escrito ainda no início de sua trajetória acadêmica, revela a originalidade de um matemático capaz de encontrar elegância em objetos simples e, ao mesmo tempo, grande profundidade em problemas aparentemente elementares.

## Linha do Tempo de Darboux

- 1842 ● Nasce em Nîmes, França.
- 1864 ● Publica *Sur les sections du tore*.
- 1866 ● Defende a tese *Sur les surfaces orthogonales*, sob orientação de Michel Chasles.
- 1873 ● Secretário perpétuo da *Académie des Sciences*.
- 1917 ● Falece em Paris.

## SEÇÃO HISTÓRICA

## SUR LES SECTIONS DU TORE (1864)

## O artigo que inaugura as curvas notáveis do toro

Publicado em 1864, **Sur les sections du tore** é um texto breve e inteiramente analítico, escrito na linguagem matemática de sua época. Ainda assim, Darboux faz a geometria emergir dos cálculos: os círculos de **Villarceau**, as ovas de **Cassini** e a lemniscata de **Bernoulli** aparecem como imagens implícitas no próprio raciocínio. O artigo revela a habilidade rara do autor de unir precisão analítica e visualização geométrica, combinação que torna sua leitura um desafio, mas também uma descoberta para o leitor contemporâneo.

## Trecho original (francês):

*Si l'on considère un tore de révolution obtenu par la rotation d'un cercle autour d'un axe extérieur, on voit qu'un plan quelconque peut le couper suivant des courbes dont la forme dépend essentiellement de l'inclinaison du plan. Dans certains cas, la section est un cercle, dans d'autres, elle devient une courbe plus compliquée, souvent symétrique et toujours déterminée par une équation du second degré en  $x$ ,  $y$  et  $z$ .*

## Tradução (português):

*Se considerarmos um toro de revolução obtido pela rotação de um círculo em torno de um eixo exterior, vemos que um plano arbitrário pode cortá-lo segundo curvas cuja forma depende essencialmente da inclinação do plano. Em alguns casos, a seção é um círculo, em outros, torna-se uma curva mais complexa, frequentemente simétrica e sempre determinada por uma equação de segundo grau em  $x$ ,  $y$  e  $z$ .*

— Jean-Gaston Darboux, „Sur les sections du tore”, 1864.

Das interseções do toro surgem figuras que combinam simplicidade e profundidade. Villarceau, Cassini e Bernoulli são pontos de partida para compreender por que essa superfície continua a fascinar a matemática e são o fio que conduz às páginas seguintes.

## O que Darboux faz no artigo:

- Analisa cortes do toro por planos em diferentes inclinações.
- Descreve o surgimento de curvas como circunferências, ovas e lemniscatas.
- Introduz métodos de cálculo diferencial aplicados à geometria das superfícies.
  - Mostra que um objeto simples pode dar origem a fenômenos geométricos sofisticados.

## Importância do artigo:

- É o primeiro estudo sistemático das seções do toro.
  - Antecipou ideias que hoje aparecem em livros de geometria diferencial.
  - Tornou-se referência permanente na obra de Darboux.
- Inspirou estudos posteriores sobre curvas de Cassini, Villarceau e Bernoulli.
  - Mostra um método que combina intuição geométrica e cálculo preciso.

## SEÇÃO MATEMÁTICA

## O TORO COMO OBJETO MATEMÁTICO

## O toro pode ser descrito de três formas principais:

O toro pode ser descrito como superfície de revolução, como lugar geométrico e como superfície algébrica de grau 4 em  $\mathbb{R}^3$ . Cada uma dessas representações destaca um aspecto da sua estrutura e prepara o terreno para o estudo das seções tóricas, tal como feito por Jean Gaston Darboux em seu artigo de 1864.

## 1. Toro como superfície de revolução e representação paramétrica:

Partimos de um círculo de raio  $r$ , com centro em  $(R, 0, 0)$  no plano  $XZ$ , e o rotacionamos em torno do eixo  $Z$ , com  $R > r > 0$ . Essa construção produz o chamado toro anular, superfície regular, fechada e com simetria axial.

Do ponto de vista analítico, introduzimos dois ângulos. O ângulo  $\phi$  localiza o ponto na circunferência geratriz, no plano vertical. O ângulo  $\theta$  descreve a rotação dessa circunferência em torno do eixo  $Z$ . Assim obtemos a parametrização.

$$\mathbf{T}(\theta, \phi) = ((R + r \cos \phi) \cos \theta, (R + r \cos \phi) \sin \theta, r \sin \phi)$$

com  $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$ .

Essa forma torna visível a estrutura do toro como superfície de revolução e é especialmente adequada para visualizações em softwares como o GeoGebra, bem como para o estudo de vetores tangentes, curvaturas e formas fundamentais.

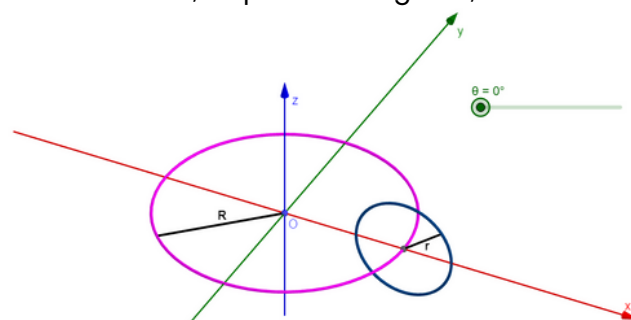


Figura 2.1 - Giro de 0°

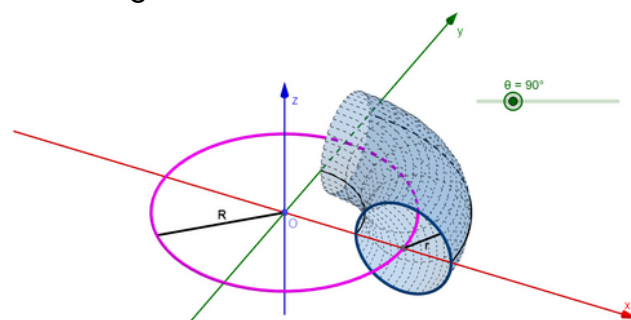


Figura 2.2 - Giro de 90°

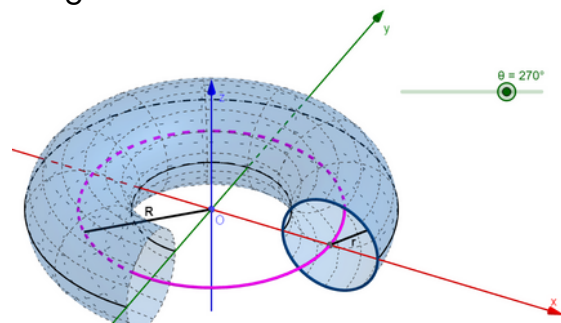


Figura 2.3 - Giro de 270°

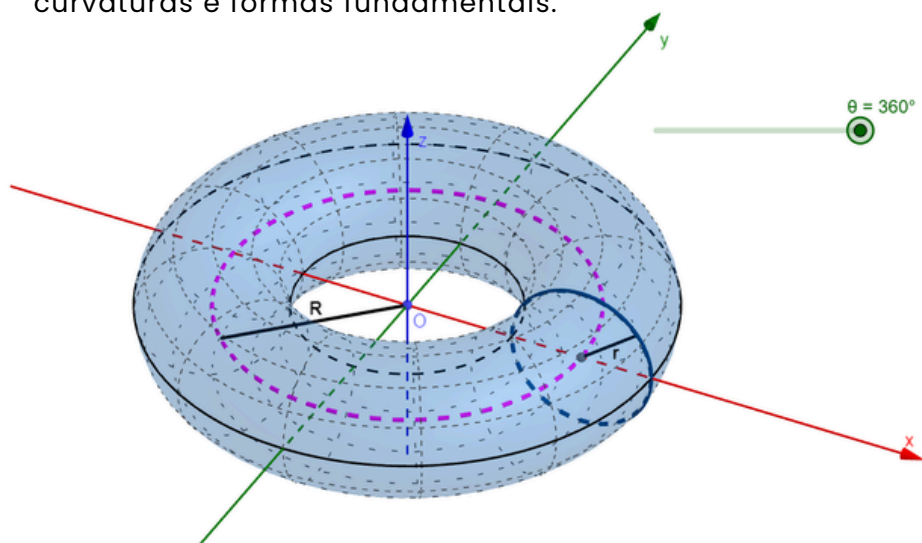


Figura 2.4 - Giro de 360°

## SEÇÃO MATEMÁTICA

## O TORO COMO OBJETO MATEMÁTICO

## 2. Toro como lugar geométrico:

Reescrevendo a parametrização em termos das coordenadas cartesianas, obtemos

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2,$$

a equação que descreve o toro como conjunto de todos os pontos do espaço que estão a distância constante  $r$  de uma circunferência de raio  $R$ , situada no plano  $XY$  e centrada na origem.

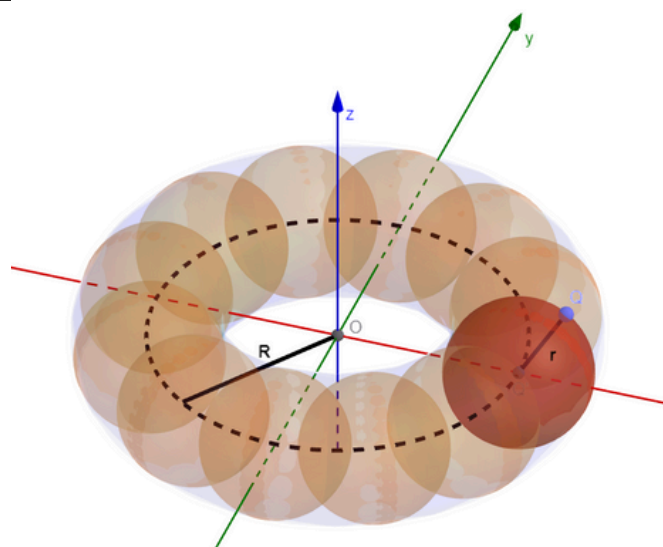


Figura 2.5 - O toro como lugar geométrico

Trata-se da interpretação do toro como lugar geométrico: em vez de parametrizar a geratriz, consideramos o **conjunto das esferas** de raio  $r$  centradas na circunferência de raio  $R$ . Essa formulação, adotada por Darboux em *Sur les sections du tore*, define o toro pela condição de distância constante, estrutura que favorece a dedução das equações das seções planas.

## 3. Toro como superfície algébrica de grau 4:

Desenvolvendo a equação cartesiana, eliminamos a raiz e obtemos a equação cartesiana do Toro:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$$

Trata-se de uma quártica bicircular, isto é, de uma superfície algébrica de grau 4 em  $R^3$  que contém dois círculos no infinito.

É essa forma algébrica que permite estudar de modo sistemático as seções tóricas. Ao substituir na equação do toro as coordenadas de um plano secante convenientemente parametrizado, obtemos a equação implícita das curvas de interseção. É nesse cenário que surgem figuras clássicas como os círculos de Villarceau, as ovais de Cassini e a lemniscata de Bernoulli, que Darboux analisa em detalhe.

As três representações do toro convivem de forma articulada. A parametrização evidencia a origem geométrica da superfície, a descrição por lugar geométrico traduz o ponto de vista adotado por Darboux e a equação algébrica fornece a base para deduzir, em coordenadas locais, a equação das seções tóricas. É a partir dessa síntese que, nas próximas páginas, o leitor acompanhará o caminho de Darboux na descrição das curvas geradas pela interseção entre o toro e um plano.

## SEÇÃO MATEMÁTICA

## INTRODUÇÃO ÀS SEÇÕES TÓRICAS

## As seções do toro: entre história, geometria e beleza matemática

**Seção tórica** é qualquer curva obtida pela interseção entre um toro de revolução e um **plano secante**.

Dependendo da posição e inclinação do plano, surgem diferentes tipos de curvas:

- círculos comuns,
- círculos de Villarceau,
- ovais de Cassini,
- lemniscatas de Bernoulli,
- curvas abertas,
- e até curvas autointersectantes.

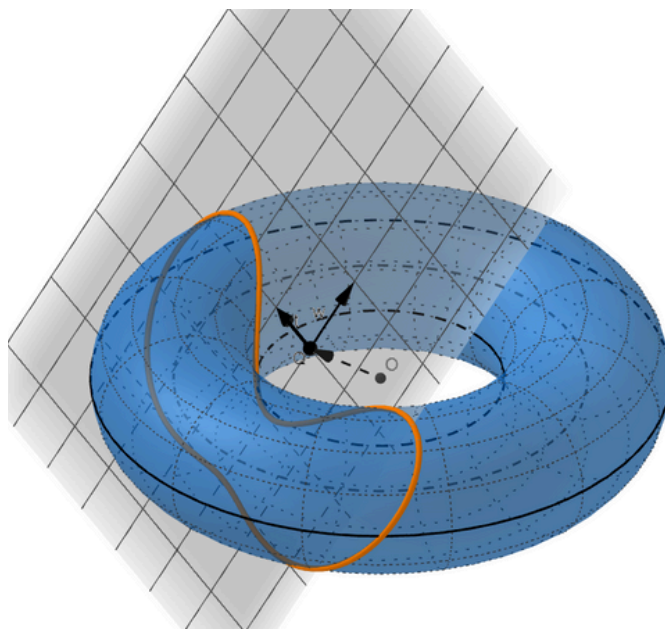


Figura 2.6 - A interseção entre um toro e um plano inclinado, destacada em laranja.

Trecho original (francês):

Un plan quelconque peut le couper suivant des courbes dont la forme dépend essentiellement de l'inclinaison du plan. (Darboux, 1864)

Tradução (português):

Um plano arbitrário pode cortá-lo (o toro) segundo curvas cuja forma depende essencialmente da inclinação do plano. (Darboux, 1864)

Explore no  
Geogebra:



[Click aqui](#)

**As seções do toro já eram conhecidas desde o século XVII, sobretudo em problemas de mecânica e óptica que exploravam interseções entre superfícies e planos.**

Foi **Jean-Gaston Darboux**, em 1864, quem organizou o estudo sistemático dessas curvas no artigo Sur les sections du tore. Nesse trabalho, ele:

1. Apresenta uma **parametrização adaptada ao plano secante**, que permite descrever a interseção com clareza;
2. Analisa a **simetria e a estrutura** das curvas obtidas;
3. Discute casos notáveis (Cassini, Bernoulli, Villarceau);
4. E propõe uma leitura **geométrica refinada**, antecipando ideias que mais tarde se consolidariam na geometria diferencial moderna.

## SEÇÃO MATEMÁTICA

## 1. AS OVAIS DE CASSINI

As **ovais de Cassini** são curvas definidas pelo conjunto de pontos P do plano cujo **produto das distâncias** a dois focos fixos F1 e F2 é constante:

$$|PF_1| \cdot |PF_2| = k$$

Introduzidas por **Giovanni Domenico Cassini** em **1680**, essas curvas generalizam a elipse, mas trocam a soma das distâncias focais pelo produto. Por isso, podem assumir formas que vão desde **duas componentes desconexas** até uma **oval convexa**, passando pela curva crítica da família: **a lemniscata de Bernoulli**.

Quase dois séculos depois, **Jean-Gaston Darboux** mostrou que elas surgem naturalmente ao cortar um toro por um **plano vertical**, revelando uma ponte elegante entre curvas focais clássicas e a geometria diferencial do toro.

Quando representadas com os focos em  $(\pm a, 0)$ , sua forma algébrica clássica é:

$$[(x - a)^2 + y^2] \cdot [(x + a)^2 + y^2] = c^4$$

As ovas de Cassini surgem como casos especiais das seções tóricas verticais. Ao cortar o toro por um plano paralelo ao eixo de revolução ( $\varphi=0$ ) e restringir a equação da seção tórica ao próprio plano ( $v=0$ ), obtém-se:

$$(u^2 + \rho^2 + v^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(u^2 + \rho^2)$$

Com  $b^2=R^2-r^2$ , essa quártica plana torna-se equivalente à forma clássica de Cassini com  $x=u$ ,  $y=\rho$ ,  $a=R$ ,  $c=b$ . Assim, **a seção vertical do toro coincide exatamente com uma oval de Cassini**.

Darboux demonstra que, ao variar a posição do plano vertical (controlada pelo parâmetro  $\rho$ ), surgem as três morfologias clássicas da família:

Sua análise combina o rigor algébrico com uma visão geométrica refinada e é essa leitura que inspira diretamente o material desta revista.

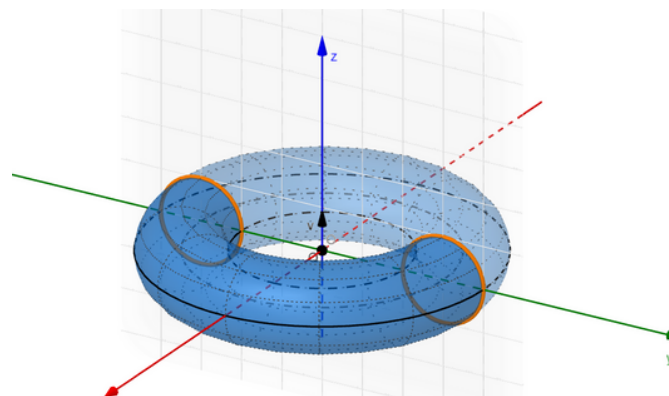


Figura 2.7 - Duas componentes desconexas.

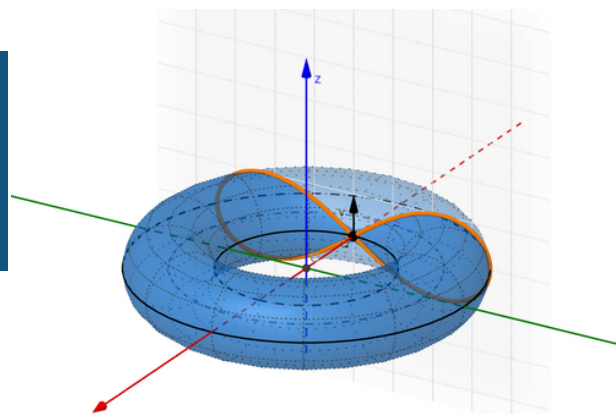


Figura 2.8 - Lemniscata de Bernoulli.

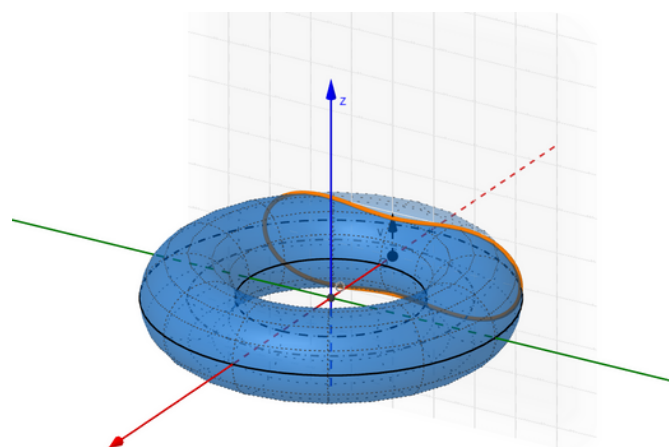


Figura 2.9 - Oval convexa.

- Duas componentes desconexas, se  $c < a$ ;
- Lemniscata de Bernoulli, no caso crítico, se  $c = a$ ;
- Oval convexa e simples, se  $c > a$ .

## SEÇÃO MATEMÁTICA

## 2. A LEMNISCATA DE BERNOULLI

A **lemniscata de Bernoulli** é a curva que surge **no caso crítico** da família das ovais de Cassini. Na forma clássica:

$$[(x - a)^2 + y^2] \cdot [(x + a)^2 + y^2] = c^4,$$

ela aparece quando

$$c = a,$$

isto é, quando o produto das distâncias aos dois focos atinge o valor exato em que duas componentes desconexas se fundem em um único laço simétrico: a famosa forma de “∞”.

Na forma polar, sua expressão elegante é:

$$r^2 = 2a^2 \cos(2\theta),$$

destacando sua simetria e estrutura de duplo laço.

Introduzida por **Jakob Bernoulli** no século XVII, a lemniscata nasceu do estudo de problemas de quadratura e de modelos astronômicos. Sua forma de laço, derivada do latim *lemniscatus*, tornou-se um dos símbolos clássicos da matemática.

No artigo *Sur les sections du tore* (1864), **Darboux** reconhece a lemniscata como o limite crítico natural das seções planas do toro, mesmo sem nomeá-la diretamente. Ela representa, para ele, o ponto em que duas componentes se unem por simetria.

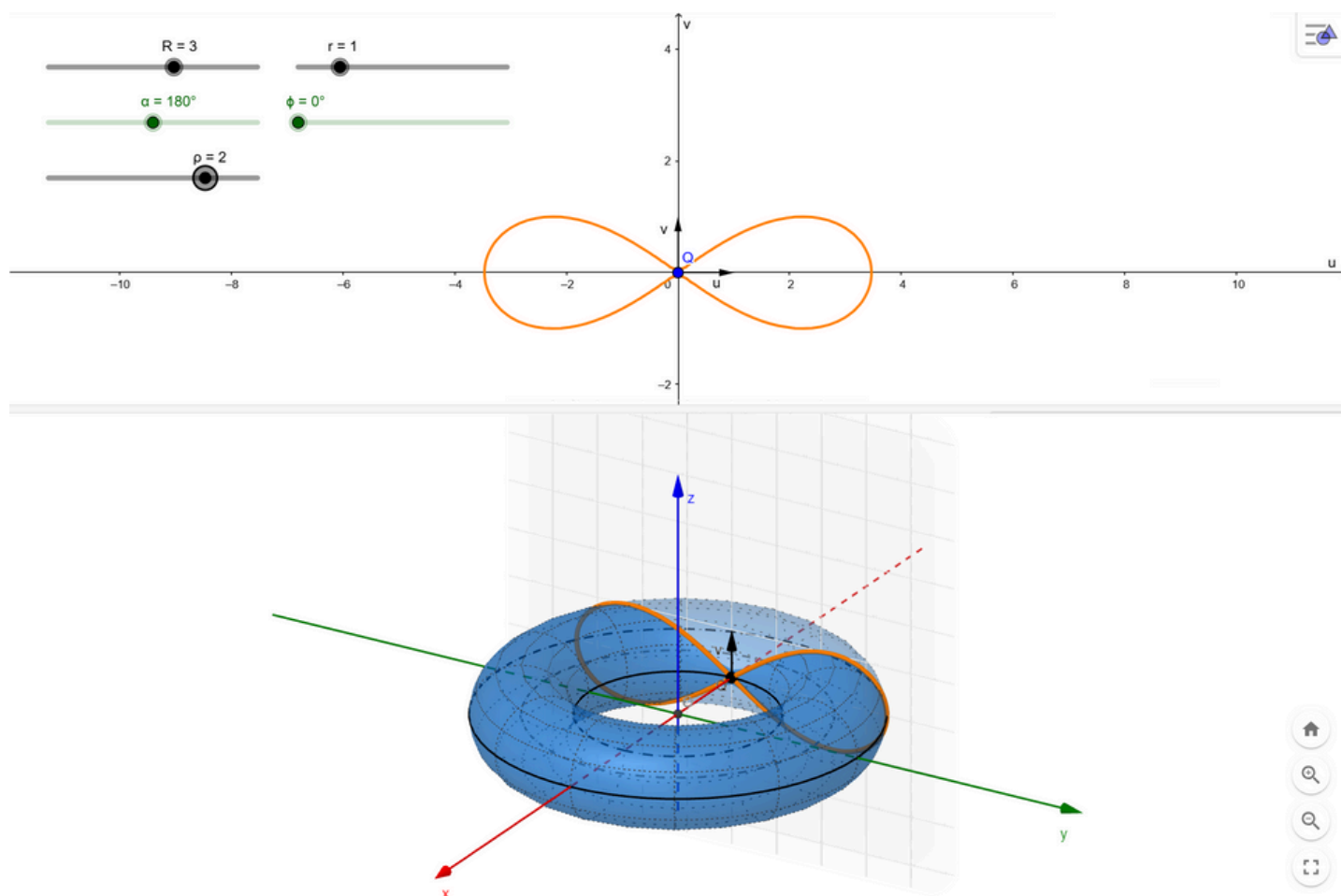


Figura 2.10 — Lemniscata de Bernoulli, caso crítico ( $c = a$ ).

## SEÇÃO MATEMÁTICA

## 3. CÍRCULOS DE VILLARCEAU

Os **círculos de Villarceau** aparecem quando o toro é cortado por **um plano oblíquo muito específico**, inclinado de modo a passar por **dois pontos diametralmente opostos** da circunferência maior do toro.

Nesse ângulo único, a interseção, normalmente uma curva quártica, se **degenera em duas circunferências congruentes**, simétricas e perfeitamente inseridas na superfície.

Os círculos foram observados pela primeira vez por **Jean-Baptiste Villarceau**, em **1848**, durante estudos geométricos ligados à Astronomia. Sua descoberta foi apresentada à *Académie des Sciences* e rapidamente se tornou uma curiosidade matemática: um corte oblíquo que, inesperadamente, produz dois círculos perfeitos.

Essa é uma das seções mais elegantes do toro: duas curvas circulares surgem como se fossem “linhas escondidas”, reveladas apenas no plano correto.

Considere um toro de parâmetros  $R > r > 0$ .

Darboux (1864) demonstra que existe um único ângulo  $\varphi$  para o qual a seção tórica se torna circular. Esse ângulo satisfaz:

$$\tan \varphi = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

No sistema intrínseco do plano de corte, a equação geral da seção tórica se reduz, sob a condição de Villarceau, ao produto de duas circunferências:

$$(u - \rho)^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{ou} \quad (u + \rho)^2 + y^2 = \rho^2.$$

Ou seja: uma **quártica degenerada em duas cônicas**. Cada círculo é tangente ao toro em dois pontos, formando o par simétrico que caracteriza a seção de Villarceau.

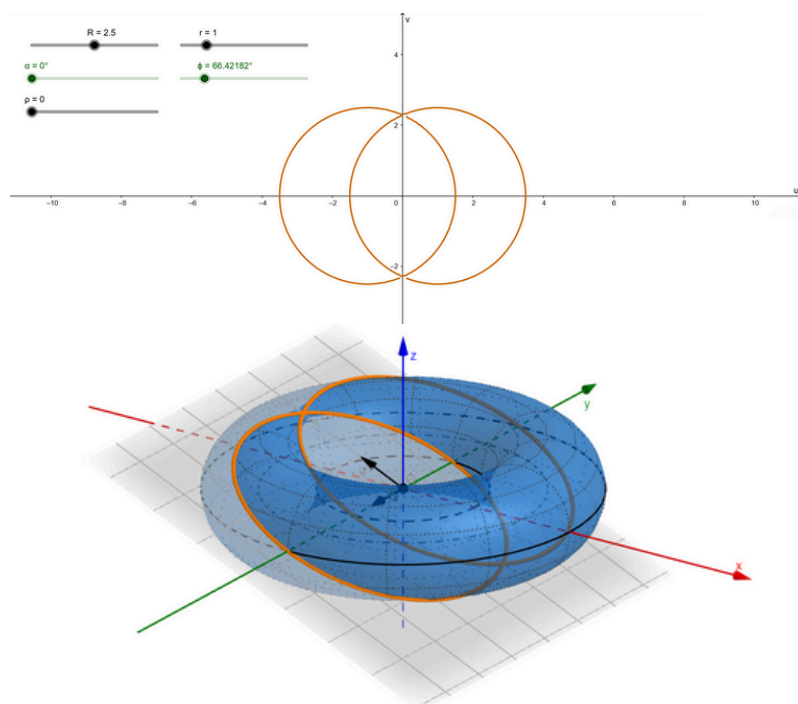


Figura 2.11 - Toro cortado por plano oblíquo específico, produzindo os dois círculos de Villarceau.

Somente em 1864, no artigo *Sur les sections du tore*, Jean-Gaston Darboux forneceu a análise completa: explicou o ângulo, descreveu a degeneração da quártica e mostrou por que surgem exatamente duas circunferências.

As três seções tóricas, Cassini, Bernoulli e Villarceau, mostram que o toro abriga uma variedade surpreendente de curvas clássicas. Cada plano revela uma forma distinta. Assim, encerramos este percurso retomando a ideia central de Darboux: a inclinação do plano transforma tudo.

# TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

## O TORO SOB QUATRO PERSPECTIVAS

A presente seção reúne quatro olhares complementares sobre o toro, a geometria diferencial e o lugar da História da Matemática na compreensão da matemática contemporânea. As entrevistas mostram como pesquisa, ensino e história se cruzam para iluminar temas que atravessam mais de um século de debates: de Darboux ao século XXI.



### Marcos Craiser

Doutor pelo **IMPA** e professor da **PUC-Rio**, atua em geometria diferencial, singularidades e aplicações modernas à visão computacional.

### Alejandro Cabrera

Doutor em Matemática e professor da **UFRJ**, trabalha com geometria, física matemática e modelos geométricos que aparecem em teorias contemporâneas.



### Anderson Vargas

Doutor pela **PUC-Rio**, professor do **Colégio Pedro II**, pesquisa ensino de geometria, formação docente e perspectivas didáticas para o toro e outras superfícies.

### Magno Ferreira

Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física pela **UFRJ**, professor do **IFRJ**, investiga práticas matemáticas do século XIX, teoria dos invariantes e formação do historiador da matemática no Brasil.



### POR QUE CONVIDAMOS ESSES PESQUISADORES?

A escolha dos entrevistados reflete a diversidade de perspectivas que o toro e suas seções suscitam:

- **Craiser**, pela profundidade na geometria diferencial clássica;
- **Cabrera**, pela articulação entre geometria e física contemporânea;
- **Vargas**, pela ponte entre história, ensino e formação de professores.
- **Ferreira**, pela leitura historiográfica do século XIX, destacando práticas matemáticas, circulação de ideias e a própria formação do historiador da matemática no Brasil.

Juntos, oferecem um panorama que conecta Darboux às discussões atuais em matemática.

### COMO CHEGAMOS ÀS PERGUNTAS?

A formulação das perguntas partiu das leituras realizadas para esta edição, do estudo das seções tóricas e da busca por compreender como temas que surgem em Darboux podem ser revisitados no presente. Procuramos saber:

- Como se dá hoje a formação em geometria diferencial?
- O toro permanece relevante na pesquisa contemporânea?
- Que vínculos mantém com a Física?
- De que modo a História da Matemática pode aproximar esses temas do ensino?
- O que a historiografia do século XIX revela sobre a formação da matemática moderna?

**A seguir, você encontrará o diálogo completo com Marcos Craiser, Alejandro Cabrera, Anderson Vargas e Magno Luiz Ferreira, revelando como o toro continua vivo na matemática contemporânea.**

# TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

## ENTREVISTA COM MARCOS CRAIZER

Nesta conversa, Marcos Craizer revisita a formação em geometria diferencial, comenta caminhos de pesquisa e destaca como a história e as aplicações ajudam a ampliar o alcance da área. Suas respostas oferecem uma visão clara e atual do campo, mantendo o diálogo com suas raízes clássicas.



### Marcos Craizer

Marcos Craizer doutorou-se pelo **IMPA** em 1989 e é **professor** do Departamento de Matemática da **PUC-Rio** desde 1988. Sua área de pesquisa se situa entre a **Geometria Diferencial Afim** e a **Teoria de Singularidades**. Tem também interesse em Geometria Discreta, considerando suas aplicações em Visão Computacional.

Currículo Lattes: <https://lattes.cnpq.br/8432199070549609>

### 1. Como se dá a formação matemática de um estudante que segue a linha da geometria diferencial?

**MC:** A Geometria Diferencial é uma área clássica da matemática e está diretamente relacionada ao surgimento do cálculo diferencial e integral. Ela possui uma teoria básica importante, envolvendo curvaturas e geodésicas. Após aprender essa teoria fundamental, o estudante tem um leque enorme de possibilidades para seguir. Vejamos algumas delas:

- Geometria Riemanniana, que generaliza a geometria clássica para dimensões maiores;
- Geometrias afim e projetiva, que enfocam propriedades invariantes pelos respectivos grupos de transformações;
- Geometria hiperbólica, também conhecida como geometria não euclidiana;
- Geometria conforme, que considera objetos invariantes pelas transformações de Möbius;
- Geometria de Lorentz–Minkowski, associada à Teoria da Relatividade.

Uma linha mais recente é a chamada **Geometria Diferencial Discreta**, que estuda versões discretizadas dos conceitos da geometria diferencial. Também é importante mencionar que a área está fortemente relacionada às equações diferenciais parciais, pois inúmeras classes relevantes de superfícies são definidas a partir de EDPs.

# TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

## ENTREVISTA COM MARCOS CRAIZER

**2. O toro ainda é um objeto de estudo em geometria diferencial clássica? Há novidades recentes que envolvem essa temática?**

**MC:** O toro é uma variedade compacta muito rica em propriedades matemáticas importantes. Alguns exemplos: ele admite campos de vetores sem singularidades, possui uma forma simplética não degenerada e é um grupo de Lie. Essas características fazem do toro um exemplo fundamental em Topologia Algébrica, Geometria Simplética e na teoria de Grupos de Lie, todas elas áreas que continuam sendo objeto de pesquisa atual em matemática.

**3. O senhor acredita que a História da Matemática pode ajudar a despertar interesse pela temática ou mesmo popularizar resultados da geometria diferencial entre alunos de licenciatura em Matemática ou de cursos de Física que não tiveram contato direto com a disciplina na graduação?**

**MC:** Sim. A história é fundamental para que o aluno entenda a evolução da matemática como um todo, em particular da geometria. A geometria diferencial teve início no século XVIII, com Gauss definindo a curvatura gaussiana de uma superfície, definição que permitiu demonstrar a impossibilidade de construirmos mapas planos da Terra sem distorção das distâncias. Como a questão de representar a Terra era muito importante na época, a curvatura gaussiana ganhou grande relevância.

**4. É possível abordar temas complexos da geometria diferencial, como as aplicações do toro à Física, junto a alunos de graduação, com o objetivo de despertar interesse pela área?**

**MC:** Sim, é possível. Um exemplo são as séries de Fourier no toro, associadas a funções duplamente periódicas. Essas séries de Fourier, tanto contínuas quanto discretas, têm muitas aplicações práticas em processamento de imagens.

### TERMOS-CHAVES:

#### (1) Geometria diferencial:

Ramo da matemática que estuda curvas e superfícies usando ferramentas do cálculo, como derivadas, curvaturas e equações diferenciais.

#### (2) Curvatura gaussiana:

Quantidade intrínseca que descreve como uma superfície se curva em cada ponto. É obtida pela segunda forma fundamental e central no Teorema Egregium de Gauss.

#### (3) Geodésicas:

Curvas de menor comprimento local sobre superfícies, generalizando linhas retas. Marcos as menciona como eixo formativo e de pesquisa.

#### (4) Superfícies de Riemann:

Superfícies dotadas de estrutura complexa, fundamentais na análise complexa, na geometria conforme e em fenômenos geométricos modernos.

#### (5) Grupos de Lie:

Estruturas que modelam simetrias contínuas. Aparecem na fala de Marcos ao relacionar geometria diferencial, simetria e análise.

#### (6) Sistemas dinâmicos:

Estudo da evolução temporal de estados. Surge como ponte entre geometria, física e modelagem, parte importante das respostas dele.

# TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

## ENTREVISTA COM ALEJANDRO CABRERA

Alejandro Cabrera apresenta uma visão ampla e precisa sobre o toro e suas múltiplas aparições na matemática e na física. Ao discutir movimentos quase periódicos, sistemas integráveis e estruturas modulares, suas respostas mostram como a geometria diferencial dialoga naturalmente com ideias fundamentais da física contemporânea.



### Alejandro Cabrera

Doutor pela **Universidad Nacional de La Plata** (Argentina), onde também se formou em **Física** e **professor titular** do Departamento de Matemática da **UFRJ**. Atua em **geometria diferencial**, com foco em **estruturas de Poisson**, **geometria simplética**, **algebroides de Lie** e aplicações à mecânica geométrica e à física matemática.

Currículo Lattes: <https://lattes.cnpq.br/3572545055404883>

#### 1. O toro ainda é um objeto de estudo relevante na geometria contemporânea?

#### 2. Quais são os principais resultados em Física que envolvem a geometria do toro?

**AC:** O toro pode ser pensado como um objeto matemático de grande relevância tanto na geometria contemporânea quanto nas suas aplicações em Física. Suas aparições em diversas teorias são várias, indo da descrição de movimentos periódicos e quase periódicos no contexto da mecânica até o estudo de formas modulares e teorias de cordas. A seguir, descrevo brevemente algumas destas questões.

**O toro pode ser pensado como parte de uma família de toros  $n$ -dimensionais, começando pelo 1-dimensional, que é um círculo.** O círculo, em si, já entra em jogo modelando variáveis angulares, movimentos periódicos (como aquele de um pêndulo), modelando condições de contorno periódicas e através da teoria de séries de Fourier, na qual se pode decompor sinais (por exemplo, de som ou de circuitos) em harmônicos. Ainda, o círculo tem aplicações mais sofisticadas, como aquela na qual representa “graus de liberdade internos” na teoria do eletromagnetismo quântico.

**O “toro” mais famoso corresponde ao caso 2-dimensional e pode ser pensado como modelando duas variáveis periódicas.** Por outro lado, ele já apresenta características mais ricas do que no caso de 1-dimensão, pois essas duas variáveis podem ser combinadas, dando lugar a movimentos mais complexos chamados de quase periódicos. Em casos extremos, nos quais essa combinação é “irracional”, as

trajetórias subjacentes são densas, no sentido de que, sem importar onde começam, elas passam arbitrariamente perto de qualquer outro ponto.

**Um lugar onde estes aspectos do toro se realizam, que é um dos meus favoritos, é na teoria dos chamados sistemas completamente integráveis, no contexto amplo da geometria simplética e da física-matemática.** Aqui, desenvolvem-se teorias matemáticas nas quais critérios geométrico-diferenciais relativos ao espaço de estados de um sistema mecânico garantem a existência de coordenadas especiais, chamadas de ação-ângulo, nas quais o sistema admite uma descrição explícita. É interessante notar que, nesta teoria, as coordenadas “ângulo” subjacentes de fato correspondem a um toro! As trajetórias correspondentes são movimentos quase periódicos.

**Tem muitas outras aplicações dos toros:** análogos  $n$ -dimensionais da teoria de Fourier; no caso 2-dimensional, o toro pode ser munido de diferentes estruturas de superfície de Riemann, parametrizadas por um “parâmetro modular” que desempenham um papel central na teoria de certas funções especiais; ainda, em um contexto mais sofisticado, o toro entra na famosa teoria de cordas modelando a trajetória periódica de uma corda também periódica, dentre outras.

# TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

## ENTREVISTA COM ALEJANDRO CABRERA

### 3. Como a História da Matemática pode contribuir para a popularização desses conhecimentos?

**AC:** Penso que uma das formas em que a História da Matemática pode contribuir é descrevendo os processos e os contextos nos quais os conhecimentos foram desenvolvidos pela primeira vez, já que essa perspectiva implica percorrer o caminho natural que os pesquisadores tomaram para chegar a essas teorias, antes de serem sofisticadas e tecnicizadas, tornando-as mais acessíveis. Ainda, conhecer o percurso que os conceitos tiveram desde seu nascimento até a atualidade também ajudaria na sua compreensão por parte do público não especializado.

### 4. Esses resultados são de compreensão exclusiva de matemáticos de carreira ou podem ser apresentados, de forma acessível, a estudantes de graduação em Matemática ou Física?

**AC:** Sim, esses resultados, em sua grande maioria, podem ser apresentados e entendidos por estudantes de graduação em matemática e física. Além disso, isso de fato acontece, embora às vezes de maneira “implícita”, no momento de aprender outras teorias mais gerais (como na teoria de Fourier ou na mecânica clássica, já mencionadas). Uma vez apresentados os elementos mais fundamentais, os estudantes podem ter uma noção de teorias mais avançadas por analogia e extrapolação do que já foi aprendido. Um exemplo disso ocorre quando se explicam fenômenos muito complexos de mecânica quântica ou, ainda, de teoria de campos quântica, por analogia com movimentos harmônicos de um pêndulo. O mesmo também se aplica em contextos de matemática pura.

### TERMOS-CHAVES:

#### (1) Toro $n$ -dimensional:

Produto de  $n$  círculos ( $\mathbb{T}^n$ ). Surge como espaço de fases angulares em sistemas integráveis e em generalizações multidimensionais da teoria de Fourier.

#### (2) Movimentos quase periódicos:

Dinâmicas com várias frequências independentes. Não são periódicas, mas permanecem em toros invariantes e podem preenchê-los densamente quando há razões irracionais entre as frequências

#### (3) Trajetória densa:

Órbita que passa arbitrariamente perto de qualquer ponto do toro. Em sistemas integráveis, aparece quando a dinâmica linear nos ângulos tem frequências irracionais.

#### (4) Sistemas completamente integráveis:

Sistemas hamiltonianos com integrais em involução; pelo teorema de Arnold–Liouville, suas órbitas confinadas vivem em toros invariantes com dinâmica quase periódica.

#### (5) Coordenadas ação–ângulo:

Coordenadas canônicas nas quais as ações permanecem constantes e os ângulos evoluem linearmente sobre um toro invariante.

#### (6) Parâmetro modular:

Número complexo  $\tau$  no semiplano superior que classifica as estruturas complexas do toro 2D, até equivalência por transformações modulares.

#### (7) Teoria das cordas:

Modelo em que cordas 1D substituem partículas. Toros aparecem como superfícies de mundo periódicas de cordas fechadas ou como espaços de compactificação.

# TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

## ENTREVISTA COM ANDERSON REIS DE VARGAS

O diálogo com Vargas mostra como a História da Matemática pode tornar a Geometria Diferencial acessível e inspiradora. Ao conectar formação docente, modelos geométricos e propostas de sala de aula, a entrevista aproxima ideias como curvatura e geodésicas de um público amplo, destacando o potencial do toro e de outras superfícies como ferramentas de imaginação científica.



### Anderson Reis de Vargas

Doutor em Matemática pela **PUC-Rio**, com Licenciatura em Matemática pela UFSC e **Mestrado Profissional em Matemática** pela SBM/PUC-Rio. Bacharel em **Letras – Português/Latim** pela **UERJ**, é **professor** do **Colégio Pedro II**, onde atua no Ensino Fundamental, no Ensino Médio e na Especialização em Educação Matemática.

Currículo Lattes: <https://lattes.cnpq.br/6047836539674695>

**1. Nas grades curriculares da Licenciatura em Matemática no Brasil, a disciplina de Geometria Diferencial está ausente. Como você chegou ao doutoramento em Geometria Diferencial vindo da licenciatura? Quais cursos facilitaram o seu entendimento mais global da disciplina?**

**AV:** Fiz Licenciatura na Universidade Federal de Santa Catarina no início da década de 2000, ano em que começou uma reformulação curricular na qual não havia o curso de Geometria Diferencial, assim como outras disciplinas que constavam apenas da grade do Bacharelado em Matemática.

Com intuito de seguir a carreira acadêmica, fui orientado a fazer eletivas do Bacharelado, o que incluiu quatro disciplinas de Cálculo e duas de Álgebra Linear, que tinham carga horária maior do que as da Licenciatura e apresentavam alguns objetivos diferentes. Além destas, cursei Análise e Equações Diferenciais Ordinárias. Já no IMPA tive a oportunidade de aprofundar os conhecimentos em Análise, Medida, Álgebra e, por fim, Geometria Diferencial.

Acredito que este percurso com bons cursos de Cálculo, Álgebra Linear e, sobretudo, os cursos de Análise, foram fundamentais para a continuidade na área de Geometria Diferencial.

No doutorado, complementei esta formação com Geometrias não Euclidianas, Geometria Algébrica e Geometria Riemanniana, e em minha tese trabalhei com Geometria Diferencial Discreta. De modo geral, não acredito que as disciplinas exclusivas da Licenciatura teriam dado a bagagem necessária para encarar a pesquisa em Geometria Diferencial. Entretanto, acredito que o curso de licenciatura provê o professor das ferramentas necessárias para que ele possa ser autodidata em Geometria Diferencial a partir de livros-textos tradicionais da área, pelo menos para entender alguns conceitos importantes, como curvatura e geodésica.

**2. Sendo professor da educação básica e da pós-graduação, você acredita que a História da Matemática como metodologia pode despertar no jovem aluno, no futuro professor em formação e no pós-graduando as belezas da Geometria Diferencial, mesmo sem conhecê-la formalmente? Você pode contribuir com alguns exemplos?**

**AV:** Acredito e defendo o uso da História da Matemática (HM) como metodologia no ensino de Matemática, e acho possível utilizá-la em qualquer conteúdo de Matemática do Ensino Básico.

# TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

## ENTREVISTA COM ANDERSON REIS DE VARGAS

A maior dificuldade se encontra no fato de que, em geral, o professor de Matemática não está habituado com o trabalho de pesquisa necessário para a criação de atividades baseadas em HM, seja por desconhecimento matemático, seja por falta de noções metodológicas, assim como se vê tolhido pelas pressões existentes no cotidiano escolar.

A geometria diferencial é muito rica em exemplos que permitem discussões sobre temas importantes com resultados aparentemente simples, mesmo que a matemática computacional envolvida seja complexa e esteja além da formação inicial do professor. Por exemplo, é possível trabalhar com modelos de Geometria Hiperbólica para a discussão do problema das paralelas, com ou sem uso dos números complexos, com abordagens mais conceituais e com uso de softwares de geometria dinâmica.

A geometria escolar, exclusivamente euclidiana, aponta para resultados que fazem a Matemática parecer acabada. O conceito de geodésica, por exemplo, naturalizado na forma da reta em espaços euclidianos, pode ser facilmente subvertido mudando o espaço, e o conhecimento do professor sobre isso é imprescindível para que atividades sobre o tema sejam construídas e bem executadas.

### 3. Você pensa ser possível criar alguma atividade envolvendo o toro tradicional canônico no Ensino Fundamental II?

**AV:** Acredito que um trabalho sobre mapas seria muito interessante com os estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental, visto que este é um tema trabalhado em Geografia. Entretanto, é muito comum a discussão em torno de mapas a partir da superfície esférica, visto que este é o formato do nosso planeta. E se nosso planeta tivesse a forma de uma rosquinha de polvilho? Este seria um bom título para um trabalho envolvendo o toro no Ensino Fundamental.

A geometria se preocupa em grande parte do conceito de medida e isto se aplica diretamente a mapas. A partir de objetos do cotidiano, como uma boia infantil ou um pneu, podem ser levantadas algumas perguntas: como poderíamos pensar em distâncias nesse universo? o que seriam as "retas"? como a forma do planeta afetaria a realidade de seus moradores? como esta forma afetaria os resultados geométricos aos quais estamos habituados?

Para tratar o tema da distância, os estudantes poderiam riscar os caminhos no toro e medir o comprimento com o uso de um barbante, por exemplo. Isso permitiria a exploração de conjecturas essenciais para a construção do conhecimento a ser formalizado pelo professor.

Este tema já foi explorado na ficção científica, em livros e séries, que podem agregar valor à discussão do professor e potencializar o interesse dos estudantes. A série televisiva *The Magicians* apresenta um planeta toroidal, por exemplo. A série *Halo* possui vários planetas construídos em formato de anel. Embora não sejam toroidais, mas cilíndricos, podem enriquecer as discussões com os estudantes. Há um vídeo bastante curioso no YouTube que explora questões físicas no caso de uma Terra toroidal. Estes são apenas alguns exemplos que me vem a memória, mas tenho certeza que muito pode ser encontrado e usado para enriquecer o repertório do professor nesse tema.

#### BOX: Ficção científica e o toro

- *The Magicians* (trilogia de Lev Grossman e adaptação para TV)
- *Halo* (franquia de jogos e série)
- Vídeo: "E se a Terra tivesse a forma de um donut?" ([YouTube](#))

# TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

## ENTREVISTA COM MAGNO LUIZ FERREIRA

No diálogo com Ferreira, a História da Matemática surge como chave para compreender as transformações do século XIX. Suas reflexões sobre práticas matemáticas, circulação de ideias, mudanças de rigor e atuação de figuras centrais revelam o movimento intelectual que sustentou a formação da matemática moderna.



### Magno Luiz Ferreira

Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física pela **UFRJ**, com Mestrado em Ensino de Matemática pela **UFRJ** e Licenciatura em Matemática pela **UFRRJ**. **Professor** do **Instituto Federal do Rio de Janeiro** (IFRJ), atua principalmente em **História da Matemática, teoria dos invariantes, comunidades de práticas e polinômios homogêneos**.

Currículo Lattes: <https://lattes.cnpq.br/6047836539674695>

#### 1. Como se dá a formação de um historiador da matemática?

**MF:** A formação do historiador da matemática *no Brasil* ocorre de modo difuso. Não há um percurso único ou institucionalizado; o que existe são trajetórias que convergem, por diferentes caminhos, para esse campo de pesquisa.

Geralmente, tudo começa com um interesse inicial pela história, muitas vezes um interesse quase romântico, alimentado por biografias de matemáticos, narrativas históricas e curiosidades sobre descobertas. Esse impulso primeiro conduz o futuro historiador a determinados grupos acadêmicos, e é essa aproximação inicial que molda as direções da formação.

Dependendo do grupo ao qual o estudante se vincula, caminhos distintos se abrem. Em espaços dedicados à **história dos conceitos matemáticos**, o foco recai sobre as **práticas matemáticas**, expressão que utilizo para designar as ações, técnicas e modos de argumentar característicos de cada período histórico. Já em grupos voltados à história da educação matemática, as preocupações se deslocam para fontes institucionais, trajetórias biográficas e processos de circulação do conhecimento. Trata-se igualmente de história da matemática, mas com ênfases diferentes.

Por isso digo que **a formação é difusa: ela depende de onde esse interesse inicial conduz o pesquisador**. No meu caso, essa aproximação ocorreu pela via da história dos conceitos; em outras trajetórias, o ponto de partida é a história institucional ou educacional.

Após essa primeira etapa, surge um momento decisivo: o contato com as **técnicas historiográficas**. Para quem vem de outras áreas, como eu, que vim da educação, essa descoberta é transformadora. **O trabalho histórico exige aprender a olhar o passado com os olhos do passado**, evitando anacronismos e reconhecendo que **práticas matemáticas e instituições são inseparáveis** dos contextos sociais em que se inserem.

Por fim, há a etapa em que o historiador encontra suas **ferramentas metodológicas**: análise de redes de textos, hermenêutica, estudo de obras completas, investigação de materiais didáticos, entre outras. A escolha dessas ferramentas define, em grande medida, o tipo de historiador que cada um se tornará.

#### Assim, Magno pensa a formação do historiador da matemática em três grandes etapas:

- O despertar do interesse pela história;
- A descoberta de diferentes modos de fazer história da matemática;
- A aprendizagem das técnicas de investigação, que configuram a identidade do pesquisador.

# TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

## ENTREVISTA COM MAGNO LUIZ FERREIRA

### 2. O que há de curioso ou importante na geometria do século XIX sob o olhar da história da matemática?

**MF:** Ao olhar para a geometria do século XIX, destaco especialmente o cenário do Reino Unido, que apresenta um desenvolvimento marcado por tensões entre uma **tradição sintética** e a chegada de **métodos analíticos** provenientes do continente europeu. Durante muito tempo, o prestígio de Newton influenciou fortemente o ensino e a produção científica britânica, sustentando uma percepção geométrica fortemente ligada às abordagens sintéticas.

Enquanto isso, na Alemanha e em outros centros europeus, a geometria avançava rapidamente com o uso de métodos analíticos, **coordenadas homogêneas** e o estudo das **curvas algébricas**. Os trabalhos de Plücker, publicados entre 1828 e 1829, são fundamentais nesse processo ao introduzir novas formas de representação geométrica e abrir caminho para uma geometria projetiva analítica.

Essas ideias chegam gradualmente ao **Reino Unido** ao longo das décadas de 1810, 1820 e 1830. Em determinado momento, matemáticos britânicos reconhecem que as abordagens analíticas eram essenciais para investigar problemas geométricos mais amplos. A partir da década de 1850, observa-se uma produção intensa envolvendo geometrias em duas, três e mais dimensões, em conjunto com o desenvolvimento da **teoria dos invariantes**, impulsionada pelos trabalhos de Sylvester e Cayley.

### De modo geral, Magno destaca três contribuições centrais do século XIX:

- as geometrias não euclidianas e sua classificação no Programa de Erlangen;
- a nova noção de rigor introduzida por Cauchy;
- as práticas que constituem os pilares da álgebra linear moderna.

Essa base prepara o terreno para uma das contribuições mais emblemáticas do século: o **Programa de Erlangen**, de Felix Klein, que propõe uma classificação das geometrias a partir de grupos de transformações. Nesse enquadramento, a **geometria projetiva** aparece como a geometria mais geral, da qual a euclidiana é um caso particular.

Fora do contexto britânico, outras contribuições também merecem destaque. Os trabalhos de Cauchy inauguram uma nova noção de rigor matemático, redefinindo limites, derivadas e integrais e lançando bases que seriam consolidadas no início do século XX. A álgebra dos polinômios ganha novos rumos com as contribuições de Abel e Galois, fundamentais para a teoria das extensões de corpos.

Finalmente, no final do século XIX, surgem práticas que se tornarão os alicerces da álgebra linear moderna: determinantes, sistemas lineares, eliminação e vetores, presentes nos trabalhos de Hamilton, Sylvester, Cayley, Grassmann e outros.

### Destaque histórico:

No século XIX, a geometria passa por três viradas fundamentais:

- a descoberta e classificação das geometrias não euclidianas;
- a reformulação do rigor matemático;
- o surgimento das bases da álgebra linear.

**Essas transformações redefinem o que se entende por “fazer matemática” e moldam profundamente o século XX.**

# TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

## ENTREVISTA COM MAGNO LUIZ FERREIRA

### 3. Quais figuras e resultados mais importantes do século XIX merecem ser levados para o ensino básico e para a formação universitária?

**MF:** Ao pensar nas figuras mais importantes do século XIX, costumo organizá-las de forma cronológica, pois **as contribuições desse período se encadeiam e ajudam a compreender a estruturação da matemática moderna.**

No início do século, destacam-se personagens como Olry **Terquem** (1782–1862) e Joseph **Liouville** (1809–1882), muito influentes na França. No Reino Unido, figuras como Duncan **Gregory** (1813–1844) e Archibald **Smith** (1813–1872), embora menos conhecidas, desempenharam papel essencial ao fundar e manter periódicos especializados que impulsionaram a circulação de ideias matemáticas e fortaleceram o ambiente científico britânico.

Também merecem atenção os compiladores, responsáveis por organizar e apresentar o que estava sendo produzido. Na França, Michel **Chasles** (1793–1880) reuniu contribuições fundamentais sobre geometria. No Reino Unido, George **Salmon** (1819–1904) sistematizou a teoria dos invariantes e as formas algébricas; e, na Alemanha, Wilhelm **Meyer** (1856–1934) elaborou um levantamento abrangente sobre a relação entre invariantes e geometria projetiva no final do século.

Entre os grandes nomes amplamente reconhecidos, Augustin-Louis **Cauchy** (1789–1857) é incontornável. Suas contribuições reformularam noções básicas de limite, derivada e integral, instaurando um novo rigor matemático que marcaria profundamente o século XX. Na álgebra, Niels Henrik **Abel** (1802–1829) e Évariste **Galois** (1811–1832) transformaram a teoria dos polinômios e inauguraram novos caminhos conceituais.

No contexto britânico, o trio Arthur **Cayley** (1821–1895), James Joseph Sylvester (1814–1897) e o já mencionado George Salmon exerceu papel central no desenvolvimento da teoria dos invariantes e na inserção da matemática britânica no cenário internacional. Na França, Jean-Victor **Poncelet** (1788–1867) contribuiu decisivamente para a geometria projetiva, ainda antes de sua consolidação analítica. Charles **Hermite** (1822–1901) também se destaca por seus trabalhos sobre polinômios homogêneos e curvas algébricas.

Destaco ainda Jean-Gaston **Darboux** (1842–1917), cuja obra extensa atravessa o final do século XIX e reúne estudos de geometria, análise e teoria das superfícies. Seu conjunto de cursos e pesquisas permanece como referência importante.

No Reino Unido, Augustus De **Morgan** (1806–1871) simboliza a figura do professor de matemática do período: matemático influente, primeiro presidente da London Mathematical Society e responsável por consolidar uma rede institucional duradoura.

No final do século, Felix **Klein** (1849–1925) desempenha papel decisivo. Seu *Programa de Erlangen* redefine a classificação das geometrias e estabelece a geometria projetiva como a mais geral, propondo uma reorganização profunda do campo e influenciando reformas educacionais que alcançaram o ensino secundário europeu.

Outras figuras relevantes incluem Paul **Gordan** (1837–1912), com resultados sobre a finitude da teoria dos invariantes; Alfred **Clebsch** (1833–1872), que articulou invariantes e geometria; e Edwin **Elliot** (1851–1935), autor de um importante tratado de 1895 sobre a teoria dos invariantes.

**Esses personagens, cada um à sua maneira, compõem o panorama vibrante da matemática do século XIX e ajudam a compreender por que esse período permanece tão influente para o ensino e para a pesquisa contemporânea.**

#### Figuras-chave do século XIX:

- Cauchy (rigor analítico)
- Plücker (geometria projetiva)
- Abel e Galois (estruturas algébricas)
- Cayley e Sylvester (teoria dos invariantes)
- Hermite (formas algébricas)
- Klein (classificação das geometrias)

## SEÇÃO DIDÁTICA

## SEÇÕES TÓRICAS NO GEOGEBRA

As seções do toro estudadas por Jean-Gaston Darboux em 1864 podem ser visualizadas com precisão no ambiente tridimensional do GeoGebra. Esta primeira parte apresenta uma exploração direta: um modelo pronto, acessível por link ou QR Code, que permite observar como a inclinação de um plano transforma a curva de interseção com o toro.

A proposta é simples, mas revela de forma imediata a riqueza geométrica do toro como laboratório natural de curvas clássicas.

## 1. Acesse a construção

Escaneie o QR Code ou utilize o link abaixo para abrir o modelo:

- toro já construído,
- plano secante controlado por um deslizante,
- curva de interseção atualizada em tempo real.

## 2. O que observar na exploração

A variação contínua do ângulo  $\varphi$  gera diferentes morfologias de curvas. O modelo permite visualizar três fenômenos centrais descritos por Darboux:

### A. Seções verticais – Ovais de Cassini

O plano vertical produz:

- duas componentes desconexas,
- lemniscata crítica,
- oval convexa simples.

### B. Ponto crítico – Lemniscata de Bernoulli

As duas componentes se unem por simetria, formando o laço característico.

### C. Seção especial – Círculos de Villarceau

Apenas um ângulo produz duas circunferências perfeitas na superfície. É o caso em que a quártica se degenera em duas cônicas, um dos resultados mais elegantes do artigo de Darboux.

## 3. Tarefas sugeridas

- Mover o controle deslizante e registrar as mudanças na curva.
- Identificar quando surgem duas componentes desconexas.
- Observar o instante em que aparece a lemniscata.
- Localizar o ângulo correspondente aos círculos de Villarceau.
- Comparar cada transição com as figuras e explicações das páginas matemáticas da revista.

Explore no  
GeoGebra:



[Click aqui](#)

### BNCC: Competências

#### EF06MA16

Padrões geométricos com tecnologia.

#### EF07MA12

Geometria dinâmica no digital.

#### EM13MAT303

Exploração tecnológica de figuras e superfícies.

### CG5 – Cultura Digital

Uso crítico e criativo de tecnologias.

## SEÇÃO DIDÁTICA

## CONSTRUINDO O TORO NO GEOGEBRA 3D

### Construção dinâmica das seções tóricas: o surgimento das Ovais de Cassini e da Lemniscata de Bernoulli

Nesta atividade, o leitor constrói um **toro de revolução** e um **plano secante móvel** que percorre sua superfície, revelando uma família de curvas conhecidas desde o século XVII e analisadas em profundidade por Jean-Gaston Darboux em 1864.

O objetivo é oferecer aos professores e estudantes uma visualização acessível, dinâmica e rigorosa das **seções tóricas**, destacando fenômenos geométricos que não emergem facilmente em abordagens exclusivamente algébricas.

## 1. Circunferência geratriz

Para que o toro seja produzido corretamente por rotação, a circunferência menor precisa estar em um plano perpendicular ao eixo de rotação. Como queremos rotacionar em torno do eixo z, utilizamos como direção o **EixoY**, que determina um plano perpendicular ao eixo z.

### Na barra de entrada:

$$c = \text{Círculo}[(R, 0, 0), r, \text{EixoY}]$$

O GeoGebra criará automaticamente os controles **R** e **r**. Escolha valores com  $R > r$  para evitar autointerseções e garantir a forma clássica do toro.

## 2. Gerando o toro por rotação

Com a circunferência *c* definida, construímos o toro usando a superfície de revolução.

### Digite:

$$\text{Toro} = \text{Superfície}(c, 360^\circ, \text{EixoZ})$$

Agora temos o toro com raio maior *R* e raio menor *r*, fiel à construção clássica e compatível com a apresentação feita por Darboux em *Sur les sections du tore*.

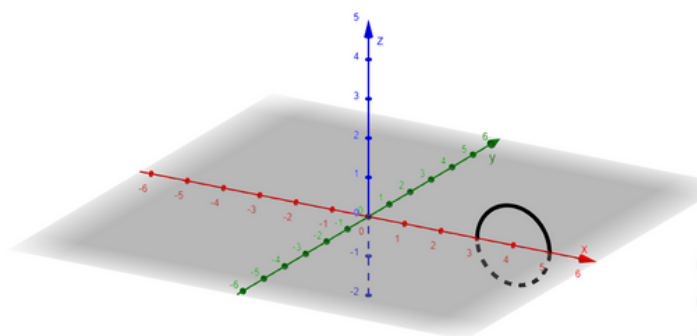


Figura 4.1 – Circunferência *c* no plano YZ vista em perspectiva

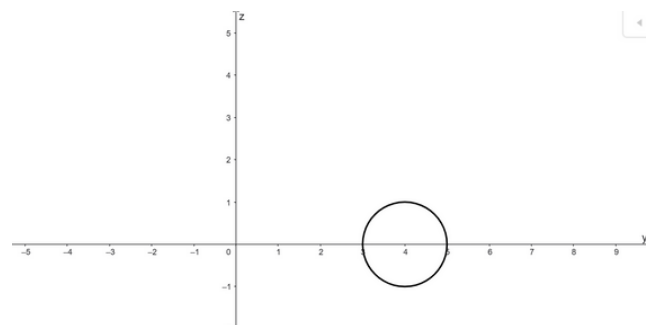


Figura 4.2 – Circunferência *c* no plano YZ vista em perspectiva

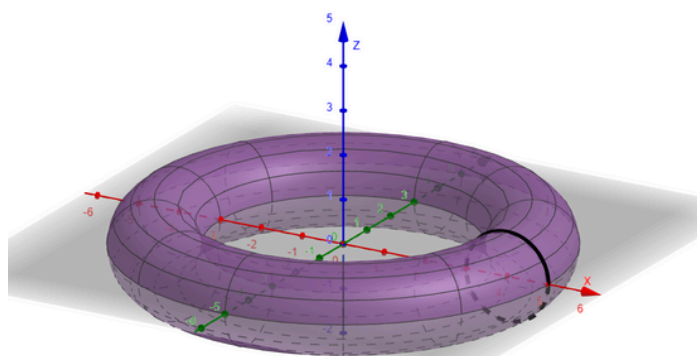


Figura 4.3 – toro final em vista isométrica

## SEÇÃO DIDÁTICA

## CONSTRUINDO O TORO NO GEOGEBRA 3D

## 3. Construindo o plano secante móvel

Criamos agora um plano vertical, paralelo ao plano YZ, que se desloca ao longo do eixo x.

3.1. Controle deslizante **a**:

**a** de  $-(R + r)$  a  $(R + r)$ , passo 0.1

3.2. Ponto móvel **Q**:

$Q = (a, 0, 0)$

3.3. Plano perpendicular ao eixo x que passa por **Q**:

$p = \text{PlanoPerpendicular}(Q, \text{EixoX})$

Esse plano atravessa o toro continuamente conforme **a** varia.

## 4. Definindo as curvas de interseção

As seções tóricas possuem dois ramos simétricos. Definimos cada ramo como uma curva paramétrica em  $t$ .

## 4.1. Primeiro ramo:

```
c1 = Curva[
  a,
  (R + r*cos(t)) * sqrt(1 - (a / (R + r*cos(t)))^2),
  r*sin(t),
  t, 0, 2π
]
```

## 4.1. Segundo ramo:

```
c1 = Curva[
  a,
  (R + r*cos(t)) * sqrt(1 - (a / (R + r*cos(t)))^2),
  r*sin(t),
  t, 0, 2π
]
```

Quando o plano atravessa o toro:

- valores pequenos de  $|a|$  produzem **ovais de Cassini**;
- o valor crítico de  $a$  gera a **lemniscata de Bernoulli**;
- valores maiores produzem **dois laços desconectados**, cada um situado em uma região distinta do toro

O caso crítico ocorre quando o plano tangencia o furo interno da superfície.

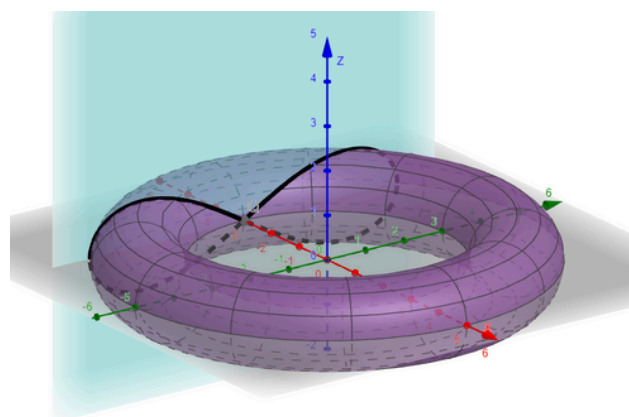


Figura 4.4 - toro final em vista isométrica

## 5. Perguntas investigativas

5.1. O que acontece com a curva quando o plano está próximo do centro do toro?

5.2. Em que valor de **a** a curva atinge seu estreitamento máximo?

5.3. Por que esse valor crítico produz uma lemniscata?

5.4. O que muda quando o plano atravessa o furo e se desloca para a parte externa do toro?

5.5. Como a variação de **R** e **r** altera o formato das seções?

# CONCLUSÃO

---

Encerramos esta edição de *Trajelórias* retomando o propósito apresentado no editorial: aproximar a matemática do professor e da sala de aula por meio de um diálogo equilibrado entre história, rigor conceitual e exploração geométrica. Ao revisitar o *toro de revolução* e suas *seções tóricas*, buscamos mostrar como temas clássicos podem sustentar práticas formativas profundas e acessíveis, capazes de inspirar novas leituras e experiências de ensino.

As três seções centrais da revista, histórica, matemática e didática, foram concebidas de forma integrada. A contextualização do trabalho de Jean-Gaston Darboux apresenta o nascimento das ideias; o tratamento matemático organiza o toro como superfície, lugar geométrico e quártica; e a abordagem com GeoGebra oferece caminhos diretos para que o professor transforme esse conteúdo em investigação, visualização e descoberta em sala de aula.

As entrevistas que integram *Trajelórias em Diálogo* ampliam esse percurso. Suas vozes mostram que o toro permanece presente tanto na pesquisa contemporânea quanto nas aplicações em física matemática, revelando a vitalidade de temas que atravessam séculos sem perder relevância. Essa interlocução reforça uma dimensão essencial deste produto educacional: aproximar a formação docente de reflexões acadêmicas atuais, sem abrir mão da clareza necessária ao ensino básico.

Como produto do PROFMAT, esta revista busca contribuir para uma prática docente mais informada, criativa e historicamente situada. Que este material sirva de referência e convite à experimentação, ao uso de tecnologias e ao diálogo com a *História da Matemática*. Se a geometria nasce de boas perguntas, esperamos que estas páginas ajudem a formulá-las e a encontrar, nelas, caminhos férteis para compreender e ensinar com mais profundidade.

# REFERÊNCIAS

- AMBROZIO, Lucas.** Materiais de geometria diferencial para superfícies. IMPA, 2018.
- APPELL, Paul.** Obituary of Gaston Darboux. Bulletin de la Société Mathématique de France, Paris, 1918. Disponível em: <[https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Darboux\\_Appell](https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Darboux_Appell)>. Acesso em: 8 jul. 2025.
- BERNOULLI, Jakob.** Curva lemniscata e estudos de quadratura. Basileia, 1694.
- CASSINI, Giovanni Domenico.** De visu planetarum e trabalhos sobre curvas focais. Paris, 1680.
- CABRERA, Alejandro.** Entrevista concedida a Wallace da Silva. Rio de Janeiro, nov. 2025.
- CRAIZER, Marcos.** Entrevista concedida a Wallace da Silva. Rio de Janeiro, nov. 2025.
- DARBOUX, Jean-Gaston.** Sur les sections du tore. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, v. 58, p. 104–110, 1864.
- FERREIRA, Magno Luiz.** Entrevista concedida a Wallace da Silva. Rio de Janeiro, dez. 2025.
- FRIEZE, Kátia; LIMA, Ronald F.** Notas de aula sobre superfícies de revolução. UFF/UFBA, anos diversos.
- MONERA, Luis; MONTERDE, Joaquín.** *Surfaces with Villarceau Circles.* Journal for Geometry and Graphics, v. 15, n. 1, p. 63–75, 2011. Disponível em: <<https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg15/j15h1mone.pdf>>. Acesso em: 9 set. 2025.
- MORONI, Luca.** The toric sections: a simple introduction. arXiv:1901.10368, 2019. Disponível em: <https://arxiv.org>. Acesso em: 18 nov. 2025.
- O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F.** *Gaston Darboux.* MacTutor History of Mathematics Archive. Disponível em: <<https://mathhistory.standrews.ac.uk/Biographies/Darboux>>. Acesso em: 6 jul. 2025.
- O'NEILL, Barrett.** *Elementary Differential Geometry.* Academic Press, 1966.
- PRESSLEY, Andrew.** *Elementary Differential Geometry.* Springer, 2010.
- STRUIK, Dirk J.** *Lectures on Classical Differential Geometry.* 2. ed. New York: Dover, 1988.
- SYM, Antoni.** *Darboux's Greatest Love.* Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, v. 42, p. 404001, 2009. DOI: 10.1088/1751-8113/42/40/404001.
- TATON, René.** *Gaston Darboux (1842–1917).* Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications, Paris, t. 7, n. 3, p. 197–214, 1954.
- VILLARCEAU, Jean-Baptiste.** *Note sur une propriété du tore.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, v. 27, p. 207–209, 1848.
- VARGAS, Anderson Reis de.** Entrevista concedida a Wallace da Silva. Rio de Janeiro, dez. 2025.

# FICHA TÉCNICA

---

**Título da revista:**

Trajetórias – História da Matemática e Divulgação Científica

**Título da edição:**

As Seções do Toro: Jean-Gaston Darboux e a Geometria no Século XIX

**Edição:**

1ª edição – 2025

**Produção, texto, pesquisa e diagramação:**

Wallace da Silva

**Orientação acadêmica:**

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins

**Entrevistas:**

Prof. Dr. Alejandro Cabrera  
Prof. Dr. Anderson Reis de Vargas  
Prof. Dr. Magno Luiz Ferreira  
Prof. Dr. Marcos Craizer

**Imagens, diagramas e GeoGebra:**

Wallace da Silva

**Apoio:**

PROFMAT – Colégio Pedro II

© 2025 Wallace da Silva. Uso educacional permitido com citação da fonte.