COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.
Programa de Residência Docente

André Luís Nunes

UMA PROPOSTA DE ENSINO DOS CONCEITOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO UTILIZANDO O MATERIAL MANIPULATIVO TEODOLITO

Rio de Janeiro
2020

André Luís Nunes

UMA PROPOSTA DE ENSINO DOS CONCEITOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO UTILIZANDO O MATERIAL MANIPULATIVO TEODOLITO

Produto Acadêmico Final apresentado ao Programa de Residência Docente, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Docência da Educação Básica na Disciplina de Matemática.

Coordenador: Professor Doutor Jorge Marques

Orientador/Supervisor: Professor Doutor Daniel Felipe Neves Martins

Campus de atuação no Colégio Pedro II: Unidade São Cristóvão

Área/Disciplina: Matemática

Instituição de Origem: Colégio Estadual Olavo Bilac

Rio de Janeiro
2020

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

N972 Nunes, André Luís

Uma proposta de ensino dos conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo utilizando o material manipulativo teodolito / André Luís Nunes. - Rio de Janeiro, 2020.

65 f.

Produto Acadêmico Final (Programa de Residência Docente) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Trigonometria. 3. Materiais manipulativos. 4. Teodolito. I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Colégio Pedro II. III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

UMA PROPOSTA DE ENSINO DOS CONCEITOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO UTILIZANDO O MATERIAL MANIPULATIVO TEODOLITO

Produto final apresentado ao Programa de Residência Docente, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Docência da Educação Básica na Disciplina Matemática.

Aprovado em: _13 /_04_/ 2020.

Prof. Me. Rony Henrique Barros
Departamento de Matemática,
Colégio Pedro II

Prof. Ma. Joycimar Lemos Barcellos Zeferino
Departamento de Anos Iniciais do Ensino Fundamental,
Colégio Pedro II

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins
Departamento de Matemática,
Colégio Pedro II
Orientador

Sou grato a minha família pelo incentivo durante todo o projeto. Sua motivação foi essencial para a conclusão deste PAF. Este trabalho final é dedicado a eles.

AGRADECIMENTOS

A todos os mestres e doutores que contribuíram com a minha formação acadêmica e profissional durante a minha vida.

Ao Colégio Pedro II que sempre proporciona um ensino de alta qualidade.

Ao Colégio estadual Olavo Bilac instituição onde trabalho e que tenho muito carinho.

Ao meu orientador Professor Dr. Daniel Martins pela sua paciência durante o projeto, seus conhecimentos fizeram grande diferença no resultado deste trabalho.

A matemática é libertação...

RESUMO

NUNES, André Luís. **UMA PROPOSTA DE ENSINO DOS CONCEITOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO UTILIZANDO O MATERIAL MANIPULATIVO TEODOLITO**. 2020. 66 f. Produto Acadêmico Final (Especialização em Docência da Educação Básica na Disciplina Matemática) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Residência Docente, Rio de Janeiro, 2020.

A pesquisa realizada pretendeu elucidar alguns questionamentos referentes à fixação de conteúdos de trigonometria aplicada ao cotidiano do aluno. Deu-se através de um estudo com um grupo de estudantes que receberam o trabalho para casa (TPC) e que desenvolveram no ambiente escolar, tarefas relativas ao conteúdo de trigonometria. Foi proposto contato com materiais manipulativos, por meio da construção de teodolito em sala de aula e aplicação em diversos ambientes escolares e externos. As tarefas solicitadas para casa calcaram-se nas instruções passadas em sala de aula. Uma análise qualitativa foi implementada através da aplicação de mecanismos de controle. Seus resultados serão apresentados como conclusão deste produto final a fim de contribuir com o Ensino de Matemática.

Palavras-chave: 1- Ensino de Matemática 2- Teodolito, 3- Trigonometria, 4- Materiais Manipulativos.

ABSTRACT

NUNES, André Luís. **UMA PROPOSTA DE ENSINO DOS CONCEITOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO UTILIZANDO O MATERIAL MANIPULATIVO TEODOLITO**. 2020. 66f. Produto Acadêmico Final (Especialização em Docência da Educação Básica na Disciplina Matemática) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Residência Docente, Rio de Janeiro, 2020.

The research carried out intended to elucidate some questions regarding the fixation of trigonometry contents applied to the student's daily life. It took place through a study with a group of students who received homework (TPC) and who developed tasks related to trigonometry content in the school environment. Contact with manipulative materials was proposed, through the construction of theodolite in the classroom and application in various school and outdoor environments. The tasks requested for home were based on instructions given in the classroom. A qualitative analysis was implemented through the application of control mechanisms. Its results will be presented as a conclusion of this final product in order to contribute to the Teaching of Mathematics.

**Keywords: 1- Teaching of Mathematics, 2- Theodolite, 3- Trigonometry,
4- Manipulative Materials.**

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os Trabalhos Para Casa (TPC) é a estratégia de ensino mais frequentemente utilizada, se apresentam de diversas formas distintas, mas em sua essência trata-se de um complexo processo de tal forma que o alcance destas estratégias atinge o seu público-alvo de forma significativa.

> Ao desenvolver a proposta de um exercício para casa é preciso pensar: O que eu quero que meus alunos aprendam? E ainda qual é o objetivo desta atividade? Para que os alunos consigam realizar o trabalho de maneira proveitosa para a sua aprendizagem. (LIMA, 2013, p.12).

Pode parecer trivial que o educador tenha em mente metas cujo objetivos sejam atingir de forma mais eficientemente possível determinado conteúdo ou competência, no entanto, precisaremos estar atentos a nos fazer determinadas perguntas chaves antes de desenvolver a proposta de atividade.

Lima (2013) também acredita que o educador precisa pensar na atividade do dever de casa como um objetivo claro e muito bem definido do contrário ele poderá não obter o resultado pretendido. Lima (2003) apresenta a posição de educadores que concordam que são necessárias atividades extraclasses para total assimilação dos conteúdos, evidenciando em “É papel do professor, fazer com que as crianças entendam a importância de cada conteúdo, é importante que, no momento da aplicação do dever, o professor explique com clareza o que deverá ser feito na tarefa” (ASSMAN, 1999 *apud* LIMA, 2013, p. 13)

LIMA (2013) traz em sua pesquisa que em diferentes países a prática do TPC demanda tempo dos alunos e de suas famílias. O que em certos momentos gera comentários na ordem de repulsas, embora todos concordem com a prática de uso do TPC. Embora de modo geral a família acredite na importância e na eficácia, os educandos acreditam que deixarão de fazer algo muito mais prazeroso para eles (e muitas vezes isso é uma verdade) para executar as tarefas de casa solicitada pelo professor. “Com frequência ouço crianças na faixa dos oito aos doze anos de idade dizerem que não gostam de fazer deveres de casa, porque eles são chatos e atrapalham suas brincadeiras. Os pais também reclamam.” (LIMA, 2013, p. 8).

Este trabalho apresenta um estudo onde os educandos realizaram a atividade em ambientes variados (no ambiente escolar e externo) através de uma proposta de ensino de cálculos de distâncias, com o auxílio de uma ferramenta chamada de teodolito, construída e manipulada pelo educando em sala de aula, além do suporte e conhecimento em trigonometria informados pelo professor - foi possível realizar uma estimativa de alturas consideradas (e muitas vezes são) inacessíveis.

O autor deste trabalho modelou três cenários dentro e fora da unidade escolar em que fica impossível fazer uso de uma trena ou fita métrica, justificando para os cenários propostos o uso da ferramenta teodolito, construída pelos próprios alunos, possibilitando as aferições necessárias.

Com a pesquisa foi possível verificar as dificuldades e possibilidades de utilização deste método como meio contributivo ao ensino-aprendizado de conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo, por aproximação à prática matemática da realidade onde os discentes se inserem.

2 OBJETIVOS

Este trabalho de conclusão de curso se propõe debruçar sobre o conjunto de atividades (no âmbito escolar, externo e em casa), atrelando o uso da trigonometria com a ferramenta teodolito alternativo - construído e manipulado pelo próprio educando - averiguando suas possibilidades de utilização e exploração a partir de uma análise dos resultados obtidos, com vistas a destacar a percepção ou não dos conteúdos de trigonometria, além de compreender o quanto deste conhecimento um determinado grupo consegue absorver, qualitativamente.

Tem por objetivo secundário estimular uma aprendizagem dentro da realidade prática do aluno com o uso de objetos manipuláveis.

2.1 Objetivo Geral

Analisar de que forma o uso de uma ferramenta do tipo teodolito aplicada ao ensino da trigonometria pode favorecer a compreensão desses conceitos por um grupo de educandos do Ensino Médio.

2.2 Objetivos Específicos

Analisar a eficiência do uso do TPC em trigonometria, com relação às atividades propostas na presença do professor.

Observar as características teóricas da relação ensino-aprendizagem com a percepção dos conceitos científicos, pelos educandos, presentes nas atividades propostas pelo professor em diferentes ambientes de aquisição de aprendizagem.

Implementar um estudo qualitativo em um grupo específico do primeiro ano do Ensino Médio no Colégio Estadual em que atua o autor desta pesquisa.

Estimular uma aprendizagem dentro da realidade prática do aluno com o uso de objetos manipuláveis.

3 JUSTIFICATIVA

Com base em minhas observações como docente nas diversas escolas por onde passei e sobretudo nas trocas de experiências. De um modo geral, uma das maiores dúvidas em relação ao uso do TPC pelos professores está em identificar o quanto de aprendizagem o educando conseguiu construir após a devolução da lição de casa ao professor que a indicou argumento que sustenta a elevada influência das percepções de autoeficácia[1] no rendimento acadêmico.

ROSÁRIO et al. (2005) acrescentam que após as análises realizadas nos dados coletados para a pesquisa, mostrou que os educandos que se autoperceberam auto eficazes, também apresentaram médias mais elevadas.

Infelizmente não existem evidências relacionadas nos arquivos digitalizados e disponibilizados pelo MEC.

LIMA (2013) em seu trabalho, intensificou as pesquisas e realizou buscas por algumas palavras tais como "casa", "dever", "lição", "tarefa" e "trabalho" em alguns dos documentos oficiais de educação no nosso país, todos digitalizados, foram citadas buscas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica (DCN), que são normas estabelecidas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE), tem caráter obrigatório para o planejamento curricular das escolas de Educação Básica, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), documento separado por disciplinas e por último a Lei de Diretrizes e Bases da Educação, documento norteador da educação brasileira, que distribui os papéis e responsabilidades, sendo o local onde constam os direitos e deveres, definições e classificações relacionadas a todas as modalidades de ensino em nosso país, em todos estes documentos a busca não logrou sucesso, exceto no plano nacional de educação (PNE), documento que traça metas e objetivos para um prazo de dez anos onde cita o apoio as tarefas escolares como um dos objetivos para escolas de tempo integral.

Diante do que foi colocado anteriormente, sem muitos parâmetros que permitiria nortear a prática do professor em sala de aula, recomenda-se encorajar o professor a repensar sua prática didática e realizar de forma planejada e organizada as atividades extraclasses ou atividades de casa.

Segundo Lima (2013) para que a tarefa do dever de casa não seja um desperdício

---

[1] **Autoeficácia** designa em psicologia a convicção de uma pessoa de ser capaz de realizar uma tarefa específica.

quer seja de esforço ou de tempo, faz-se necessário uma revisão das práticas educativas com certa regularidade, Lima também acrescenta que em determinados momentos de sua pesquisa percebeu que as tarefas de casa são consideradas, por alguns educadores, estar fortemente ligado a prática docente, implicando em desistir de questioná-las ou repensá-las, o que passa a ser um erro.

> Outros fatos que contribuíram para o enriquecimento das aulas foram que a trigonometria é rica em fatos históricos, evoluções tecnológicas e seus conceitos são de fáceis aplicações. Com tudo isso, o professor tem diversos materiais atrativos em suas aulas, tornando-as mais dinâmicas e, dentro da realidade do aluno, atualizadas e tecnológicas. Já os alunos tornaram-se protagonistas da aprendizagem ao deduzir, estimar, experimentar, analisar e comprovar que todos os cálculos seguiram de uma proposta metodológica que os contemplou exclusivamente. (SÃO PEDRO, 2016, p.43)

Na relação entre trigonometria e suas aplicações sabemos que existe uma margem segura para prever ou garantir que o conteúdo foi perfeitamente assimilado pelo educando e como consequência garantir o processo de ensino aprendizagem. Revela-se também a necessidade de traçar uma estratégia da abordagem quando for lançar mão do TPC. Desta forma, existe uma relevância deste trabalho para futuras práticas fora de sala de aula, já que pretende estimular o uso de recursos diferenciados de aplicação de trigonometria no exercício para além dos muros da escola.

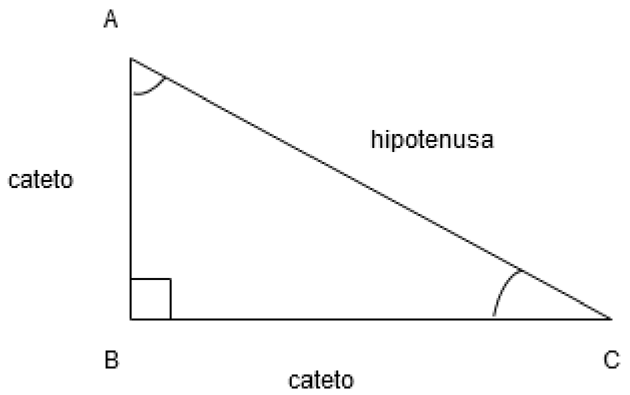
4 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

É preciso desvelar a fundamentação teórica que norteia o presente trabalho e principalmente o que foi ensinado em sala de aula.

4.1 Trigonometria no triângulo retângulo

Pela definição, o triângulo retângulo recebe este nome uma vez que um de seus ângulos internos possui um ângulo de 90º. O lado oposto ao ângulo reto recebe o nome de hipotenusa e ou outros dois lados, recebem o nome de catetos.

Figura 1: Triângulo retângulo



Fonte: O autor, 2020.

4.2 Base histórica sobre Pitágoras

Como observado em Furquim (2013), Pitágoras viveu entre (578-496 a.C.) foi um importante matemático e filósofo grego. Pitágoras teve as mesmas preferências de Tales, ou seja, o gosto preferencial por viagens ao Oriente onde ele obteve grandes oportunidades para absorção de conhecimentos matemáticos, filosóficos e astronômicos, além de receber muita influência religiosa.

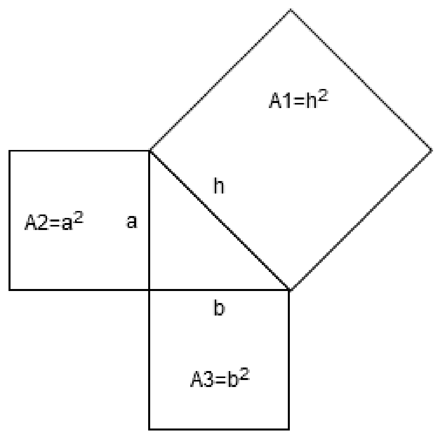
Tendo realizado uma grande quantidade de viagens, retorna ao ocidente grego, resolvendo se estabelecer em Crotona, na Itália. Neste local, cria uma escola, no entanto, muitos diziam que se tratava de uma sociedade secreta, onde o objetivo principal era realizar o desenvolvimento de estudos matemáticos e filosóficos. Muitos outros também a consideravam uma ordem religiosa ou uma escola filosófica. Nesta escola ou sociedade secreta foi desenvolvida uma parte significativa do conhecimento matemático totalmente em segredo, estabeleceram como símbolo de identificação desta sociedade um pentagrama ou uma estrela de cinco pontas.

Enquanto visitava o Egito, motivado pela beleza das pirâmides, Pitágoras teria desenvolvido o famoso teorema de Pitágoras. Todavia, naquela época, era comum que todo o crédito pelo conhecimento produzido fosse dado ao mestre, logo, não podemos afirmar se os créditos deste teorema são de fato dele ou de algum de seus discípulos.

4.3 Demonstração do Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras: Qualquer que seja o triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que tem como lados cada um dos catetos.

Figura 2: Teorema de Pitágoras.



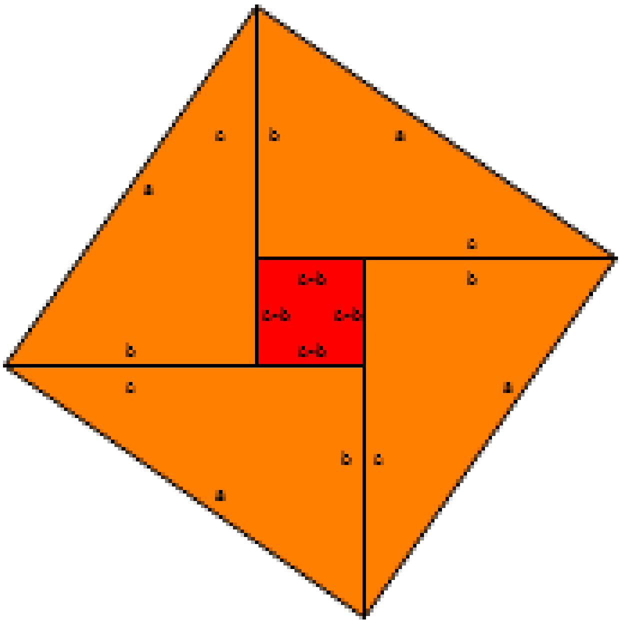
Fonte: O autor, 2020.

Algumas demonstrações podem ser visualizadas geometricamente, realizando uma comparação das áreas dos quadrados acima.

Considerada como sendo uma demonstração clássica por diversos professores de matemática, Lima (1991 *apud* COELHO, 2010, p. 35) classifica como sendo a mais bela de todas em seu livro “Meu professor de Matemática” em que acredita fortemente que se o professor ao lançar mão do conceito de áreas e, de comparação entre elas, ele é capaz de fazer com que um aluno do sexto ano do ensino fundamental consiga acompanhar.

Coelho (2010) sugere ainda uma demonstração mais detalhada do Teorema de Pitágoras em seu trabalho utilizando o cálculo de áreas.

Figura 3: Quadrado decomposto.



Fonte: O autor, 2020.

Esta demonstração do teorema de Pitágoras foi realizada por um matemático indiano chamado Báskara, o mesmo matemático que criou a fórmula de Báskara, sabemos que o Pitágoras foi um grego, todavia o seu teorema foi demonstrado em mais de cem formas diferentes, por exemplo, tomando quatro triângulos retângulos dispostos conforme figura 3, teremos um quadrado grande formado pelos quatro triângulos retângulos, diz a lenda que neste ponto Báskara colocou a imagem semelhante a figura 3 e escreveu apenas “Veja!” como se fosse fácil para qualquer um olhar para esta figura e enxergar o teorema de Pitágoras ali presente sem dar maiores detalhes, olhando para o quadrado maior onde as arestas são formadas pelas quatro hipotenusas ali presentes, podemos dizer que a área do quadrado grande é $\mathbf{A_Q = a^2}$, aqui já temos a primeira relação que chamaremos de resultado (I) e foi isso que Báskara viu inicialmente, depois disso ele percebeu que a área do quadrado maior também é a soma das áreas dos quatro triângulos retângulos com a área do quadrado menor localizado ao centro da figura, segue que a área dos quatro triângulos retângulos é 4.(½(bc)) simplificando ficará **2bc** que chamaremos de resultado (II), que representará a área dos quatro triângulos retângulos, porém para saber a área do quadrado maior também precisaremos saber o valor da área do quadrado menor cujo os lados são formados pela diferença do lado c com o lado b dos triângulos retângulos, que será $(c-b)^2$, desenvolvendo este produto notável chamado quadrado da diferença de dois termos obtemos $\mathbf{c^2-2bc+b^2}$ que chamaremos de resultado (III) aqui temos a representação da área do quadrado menor. Para descobrir a área do quadrado maior temos que somar os valores dos resultados (II) e (III) temos que $c^2-2bc+b^2+2bc$, simplificando os termos semelhantes com sinais opostos, temos que c^2+b^2, ou seja, $A_Q = c^2+b^2$. Logo como a área do quadrado maior é $A_Q = a^2$ mas também é $A_Q = c^2+b^2$, podemos dizer que $\mathbf{a^2 = c^2+b^2}$ é o teorema de Pitágoras como queríamos demonstrar.

Uma outra forma de justificar o teorema de Pitágoras, geometricamente, fica evidenciada ao tomarmos dois retângulos de lados a e b sendo b o lado menor, a área dos retângulos será $\mathbf{A_R=2\,ab}$. que estarão dispostos de tal maneira onde um deles estará na vertical e o outro na horizontal mantendo apenas um vértice de contato entre eles, com isso, percebe-se que estes dois retângulos dispostos desta maneira e em conjunto com dois outros quadrados será possível determinar a área do quadrado maior $\mathbf{A_Q}$, a área do quadrado menor será determinada por $\mathbf{A_q= b^2}$ e a área do quadrado médio será $\mathbf{A_M= a^2}$, logo a área do quadrado maior será $\mathbf{A_{Q=}\ a^2 + b^2 + 2ab}$ que chamaremos de resultado (I)**.** De forma análoga para determinar a área do quadrado maior, devemos traçar uma reta diagonal nos dois retângulos que chamaremos de hipotenusa **c**, de tal forma a obter quatro triângulos retângulos e a partir destes, podemos reposicioná-los de tal maneira onde os ângulos retos destes triângulos retângulos estarão em superposição aos ângulos retos do quadrado maior, formando um quadrado central de lados iguais ao tamanho das hipotenusas cujo o valor da área será $\mathbf{A_{central}= c^2}$**,** logo a área do quadrado maior será $\mathbf{A_{Q=}c^2+ 2ab}$ que chamaremos de resultado (II). Logo, os resultados (I) e (II) são formas diferentes de obter a área do quadrado maior $\mathbf{A_Q}$, segue-se que $\mathbf{A_{Q=}a^2 + b^2 + 2ab}$ mas também é $\mathbf{A_{Q=}c^2+ 2ab}$ podemos dizer que $\mathbf{c^2+ 2ab = a^2 + b^2 + 2ab}$ realizando a simplificação dos termos semelhantes e com os sinais opostos temos que $\mathbf{c^2=a^2 + b^2 + 2ab-2ab}$ -> $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$ é o teorema de Pitágoras como queríamos demonstrar.

Nestas duas demonstrações que foram apresentadas acima, obviamente em suas versões mais simplificadas, podem e devem ser utilizadas no Ensino Fundamental e

Médio Coelho (2010, p.37). De acordo com a base nacional curricular comum (BNCC), na área de matemática e suas tecnologias no ensino médio, o conteúdo de áreas pode ser trabalhado conforma a habilidade a seguir

> EM13MAT201: Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para a sua comunidade, envolvendo medição de áreas, de volume, de capacidade ou de massa (BRASIL, 2018, 534).

e em outro trecho destacado a seguir

> EM13MAT307: Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL,2018, p.536).

Os dois casos, servirão para a ilustrar os diversos caminhos existentes para se chegar ao mesmo ponto. Ambos envolvem conceitos e resultados matemáticos que constam do currículo da escola básica tais como: áreas, semelhanças de triângulos, razão e proporção. Não se justifica que o aluno não as conheça e só tenha acesso à fórmula resultante desse teorema sem demonstração.

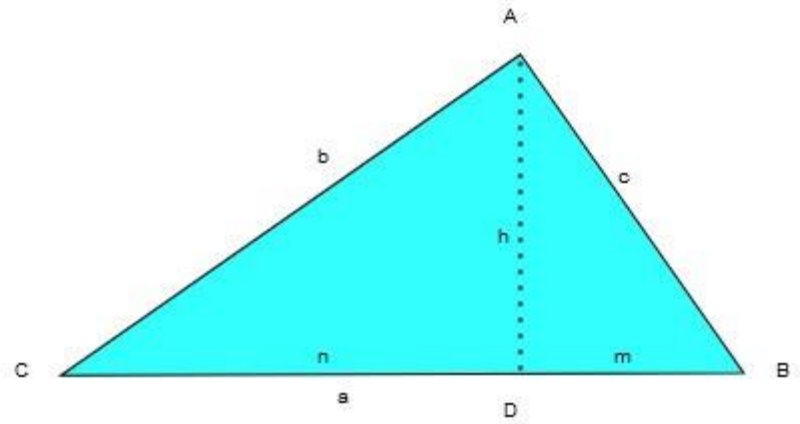
4.4 Recíproca do Teorema de Pitágoras

Em diversas situações, a praticidade didática que a demonstração geométrica proporciona ao educando é inquestionável, a manipulação permite que rapidamente o educando entenda o teorema, o professor “antenado” poderá lançar mão de alguns materiais manipulativos que o ajudarão na construção ou assimilação dos conteúdos.

Esta demonstração, em geral, não é suficiente, para garantir a veracidade. Sendo assim, utiliza-se a recíproca do teorema de Pitágoras para facilitar o entendimento. (FURQUIM, 2013, p.12).

Nesta demonstração da recíproca do teorema de Pitágoras considerando um triângulo qualquer de lados BC =a, AC=b e AB=c que iremos chamar de triângulo (I) onde vale a relação (i) $a^2 = b^2 + c^2$ queremos afirmar que este triângulo é retângulo. Para isso tomamos um novo triângulo de lados NP= m, MP=n, MN=p que iremos chamar de triângulo (II) de modo que o ângulo reto seja em M, n=b, p=c. Pelo fato deste triângulo (II) ser construído como sendo retângulo, decorre do teorema de Pitágoras que $m^2=n^2+p^2$, todavia como o triângulo (II) tem lados com comprimento iguais a n=b, p=c, logo também é possível afirmar que $m^2= b^2+c^2$, como hipótese da relação (i) $b^2+c^2= a^2$, logo $m^2 = a^2$, como tanto "m" quanto "a" são lados de triângulos, ou seja, são medidas não negativas tenho que m=a, logo os triângulos (I) e (II) possuem três lados iguais, quais sejam, m=a, n=b, p=c, temos que os triângulos (I) e (II) são congruentes, logo, seus ângulos internos são congruentes, sendo assim, pela congruência dos triângulos MNP e ABC, temos que A = M =90º, portanto, o triângulo (I) é retângulo no vértice A com queríamos demonstrar.

Figura 4: Analisando a Recíproca do teorema de Pitágoras.



Fonte: O autor, 2020.

Uma outra demonstração da recíproca onde tomemos o enunciado do teorema de Pitágoras e façamos o questionamento se a, b e c são números reais e positivos, considerando a relação (I) $b^2 = a^2 + c^2$ será o triângulo de lados a, b e c um triângulo retângulo?

Tomamos um triângulo ABC com AB=c, BC=a, CA=b.

Hipótese (1): onde A<90º podemos por hipótese imaginar que $b \leq c$, desta forma, o ponto D, é a projeção de A em BC, localizado no interior do lado BC, sejam BD=m, AD=h conforme ilustrado na figura 4, temos que o triângulo ABD é retângulo, o que decorre que temos a relação (II) $\mathbf{c^2=h^2+m^2}$.

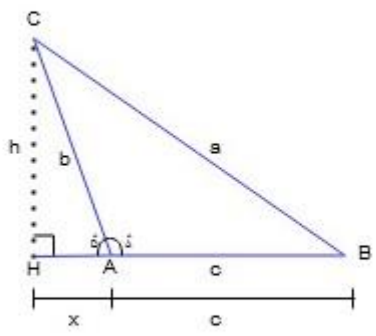
O triângulo ADC também é retângulo, o que decorre que temos a relação (III) que $b^2=(a-m)^2+h^2$, em seguida desenvolve-se o produto notável para obter o resultado $\mathbf{b^2=a^2-2am+m^2+h^2}$

Da relação (II) temos que $\mathbf{h^2= c^2 - m^2}$. Substituindo h^2 na relação (III) ficará

$\mathbf{b^2=a^2-2am+m^2 + c^2 - m^2}$. Eliminando os termos semelhantes com sinais opostos temos $\mathbf{b^2=a^2+ c^2 -2am}$.

Em outras palavras $b^2 < a^2 + c^2$ o que contradiz a condição inicial.

Figura 5: Triângulo obtusângulo.



Fonte: O autor, 2020.

Hipótese (2): onde A>90º perceba que o ponto H está partindo do lado AB conforme mostra a figura 5, tomando o triângulo CBH vale a relação $a^2=h^2+c^2$ que chamaremos de relação (I).

Tomando o triângulo CAH temos a relação $b^2=h^2+(c+x)^2$ que chamaremos de relação (II).

No desenvolvendo da relação (II) fica $b^2= h^2 + c^2+2cx+x^2$

Da relação (I) temos que $h^2= a^2 - c^2$

Substituindo (I) em (II) ficara $b^2= a^2 - c^2+ c^2+2cx+x^2$

Eliminando os termos semelhantes com sinais opostos ficará da seguinte forma $b^2= a^2+x^2+2cx$.

Em outras palavras, $b^2 > a^2 + c^2$ recai novamente na contradição da condição inicial.

Sendo assim, em um triângulo qualquer ABC, de lados a,b,c para:

A<90º implica em $b^2 < a^2 + c^2$

A>90º implica em $b^2 > a^2 + c^2$

Aqui fica claro que a condição inicial onde $a^2 = b^2 +c^2$ implica necessariamente que A = 90° assim o triângulo ABC é retângulo como queríamos demonstrar.

4.5 Topografia e o Teodolito

Topografia é o somatório da determinação do contorno, a dimensão e a sua posição relativa de um determinado recorte de superfície, para realizarmos este levantamento necessitamos realizar uma coleta inicial de alguns pontos planimétricos e altímetros, estes pontos são as medidas angulares e lineares respectivamente e que são obtidas através do uso de equipamentos designados para este fim.

4.5.1 Definições básicas em topografia

De acordo com o Veiga et. al. (2007) serão abordadas algumas definições para o entendimento da ferramenta teodolito.

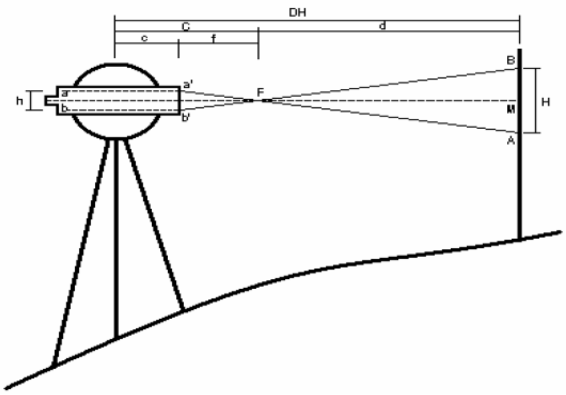
Planimetria – É a aferição dos ângulos e das distâncias cujo plano é a referência alvo. Em outras palavras, é o esforço que tem por finalidade a determinação dos dados e informações necessários à representação do terreno na forma de posição relativa, considerando todos os acidentes que existem neste ambiente.

Altimetria – São os dados / informações acerca de um determinado terreno que permite a representação deste local.

Visada – É a maneira pela qual a observação é realizada com auxílio de aparelhos, em levantamento topográfico ou geodésico.

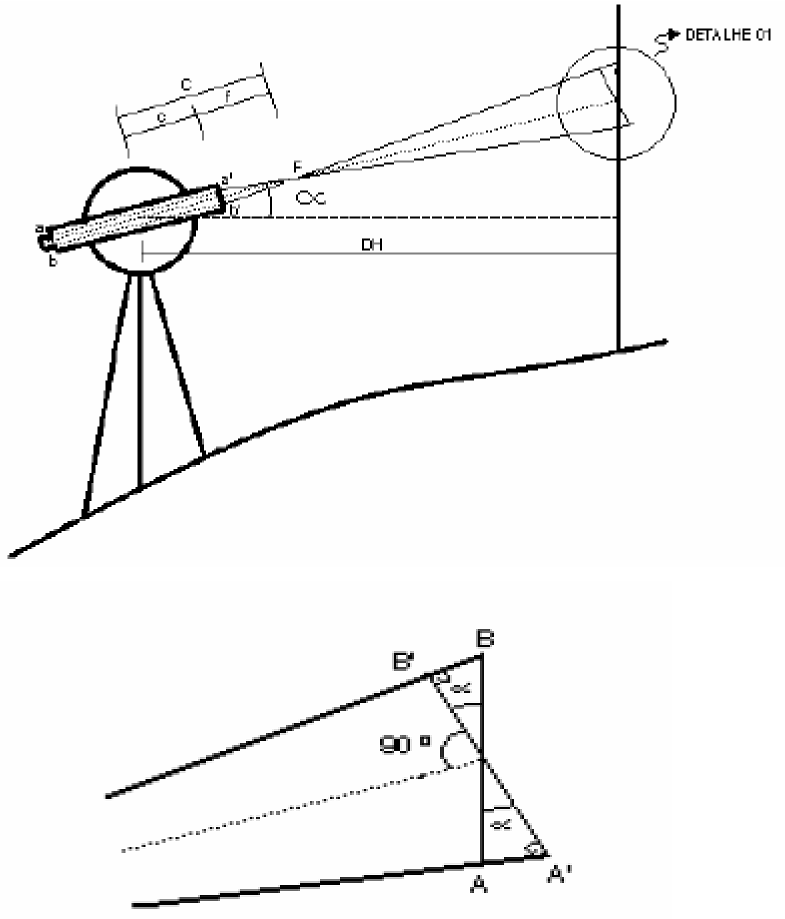
Teodolitos – São aparelhos e ou ferramentas utilizadas para a aferição de ângulos e distâncias inacessíveis/ inalcançáveis.

Figura 6: Teodolito posicionado em visada horizontal.



Fonte: O autor, 2020.

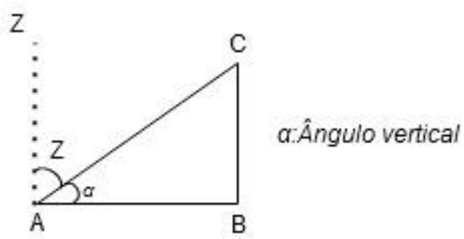
Figura 7: Teodolito posicionado em visada vertical.



Fonte: O autor, 2020.

Ângulo vertical ou Zenital – Obtido a partir de algum plano de referência, definimos que o ângulo será positivo se este ponto estiver localizado acima do horizonte daquele que chamamos de observador. Da mesma forma, o valor será negativo se este ponto estiver imediatamente abaixo do observador.

Figura 8: Ângulo vertical.



Fonte: O autor, 2020.

Medida de ângulos - Vale lembrar que em topografia os ângulos estão contidos em dois planos, quais sejam: o plano horizontal e o plano vertical, comumente os aparelhos utilizados para realizar a aferição são os **teodolitos**.

De qualquer forma podemos obter / determinar os valores de rumos, azimutes, deflexões e declinações através dos teodolitos, ou seja, esta ferramenta é a responsável pela coleta de todos os ângulos necessários nos desenhos de uma planta topográfica.

4.6 Materiais manipulativos

Não é de hoje que nos deparamos com as dificuldades na aprendizagem matemática e estamos sempre procurando formas de melhorar o ensino e a fixação dos conteúdos de matemática. Por exemplo, dentro do campo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, que são por vezes aplicados em sala de aula como sendo uma forma mecânica de reproduzir conceitos estabelecidos nos nossos livros didáticos, ou seja, uma mera reprodução ou repetição, sem uma compreensão de conteúdo. Outro exemplo forte dentro do ensino de trigonometria é a transformação de graus em radianos e vice-versa.

Desta forma, inicializo este capítulo que trata sobre a aprendizagem sob o aspecto da manipulação de objetos como forma de contribuição para a construção do conhecimento. Sendo assim, ao comentarmos sobre a aprendizagem, remete-se a figura do pesquisador que defende que a própria aprendizagem está diretamente ligada as oportunidades dos educandos de experimentarem os objetos e com isso obter a maturidade necessária para o desenvolvimento de competências, afirma ainda que está ligado diretamente ao conhecimento prévio dos educandos e que este conhecimento se dá por um longo período de tempo através de experiências e de sua maturidade. Vergnaud (2009 apud PAIM, 2013, p.02)

Dois conceitos foram fundamentais para a realização da pesquisa com os alunos do colégio estadual Olavo Bilac e o entendimento sobre estes conceitos nos ajudará na compreensão da escolha da metodologia elencada por mim, enquanto pesquisador, para trabalhar com os educandos. São eles, **concepção** e **competências**. De acordo com Vergnaud (2009 apud PAIM, 2013, p.02) o conhecimento se refere tanto a competências como a concepções e ambos são frutos de atividades desenvolvidas dentro do ramo de resolução de problemas.

As competências são desenvolvidas por meio de ações julgadas adequadas para tratar uma situação, ou seja, cada educando poderá se apropriar dos conceitos matemáticos, a partir das várias situações de aprendizagem existentes. Traz ainda que, é a partir de situações-problemas e, sobretudo de resolução de problemas que um conceito consegue ser apropriado; já as concepções são expressas por uma sequência de enunciados que o ajudarão na construção de uma narrativa deste conhecimento.

Em um estudo, na tentativa de obter os conceitos iniciais necessários para a aprendizagem matemática das razões trigonométricas no triângulo retângulo. “...razão em matemática quer dizer uma ‘divisão’, já metria ou métrica significa ‘medida’, portanto a frase ‘RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS’ pode ser associada à ‘DIVISÃO DAS MEDIDAS DOS LADOS DE UM TRIÂNGULO’”, Paim (2013) observou que os educandos ao entrarem em contato com determinados assuntos, apresentaram algumas dificuldades. Ele explicitou, por exemplo, que os educandos não estavam associando o teorema de Pitágoras como uma ferramenta e por diversos momentos os alunos ficavam presos à memorização dos nomes dos lados.

Este autor identifica, enfatiza e reforça a necessidade de conhecimentos anteriores ao conteúdo de razões trigonométricas, pois ele percebeu que uma mudança na fala do docente sobre o conteúdo razões trigonométricas poderia proporcionar ao educando uma melhor interpretação deste conteúdo.

Os autores Costa (1997), Ribeiro (2011), Lindegger (2000) e Lorenzato (2009), presentes no texto de Paim (2013) enriqueceram com diversas contribuições pertinentes acerca dos estudos sobre trigonometria e trigonometria do triângulo retângulo, dentre elas:

- Investigaram qual é a ordem de introdução mais eficaz, sob o ponto de vista de uma melhor aprendizagem dos contextos experimentais e de informática para esse estudo.
- Realizaram uma investigação sobre o currículo de matemática, onde ressaltaram que é muito importante entender, sob a perspectiva construtivista, dentro do escopo do conteúdo de funções trigonométricas e reforçaram que o conhecimento prévio dos estudantes é caracterizado como sendo conhecimento fundamental.
- Utilizaram em seu trabalho acerca da introdução dos conceitos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente partindo da manipulação de modelos.
- Sugeriram que qualquer instrumento é útil ao processo de ensino e aprendizagem, destacando-se dois diferentes tipos: a existência do material manipulativo estático, que são caracterizados pela não alteração da estrutura física durante a manipulação pelo sujeito; e do material manipulativo dinâmico, que se caracteriza pelo oposto, justamente pela mudança da estrutura física durante a sua manipulação.

Paim (2013) observou a necessidade de criação de situações de ensino próximas à realidade do aluno, pois, em se tratando da compreensão das razões trigonométricas no triângulo retângulo, especificamente as razões de seno, cosseno e tangente, de acordo com os estudos, se faz necessário observar uma forte tendência na ocorrência de deficiências de aprendizagem dos educandos que no futuro, caso não sejam criadas situações de ensino próximas da realidade do discente, infelizmente poderão ser uma barreira para o seu desenvolvimento. É fundamental que o professor realize a correlação adequada das atividades envolvendo os materiais manipulativos com as operações realizadas no caderno do educando, uma vez que o material faz parte do processo cognitivo de produção matemática, mas não se esgota neste ponto.

De toda forma, acredita-se que a compreensão das atividades propostas, sobretudo as que envolvem a aplicação das razões trigonométricas no triângulo retângulo serão comprovadas com a manipulação de materiais concretos, no nosso caso, o teodolito alternativo.

Gervázio (2017) propõem em seu trabalho de pesquisa, novas formas de ensino de matemática cujo objetivo é fazer com que o educando consiga memorizar naturalmente os elementos matemáticos, contribuindo desta forma para novos métodos de ensino. Seu trabalho também traz uma análise da situação existente no Brasil no âmbito do processo de ensino e aprendizagem, sempre através de uma boa prática de ensino de matemática. Uma maneira de estimular o educando a realizar a pesquisa sobre determinados assuntos do currículo de matemática é trazer estes elementos para a sala de aula.

Além disto, considera matemática experimental a utilização de novas práticas de ensino que façam uso de materiais concretos e manipulativos e comenta que são necessários e de extrema importância, no que diz respeito à construção do conhecimento do educando.

Gaspari e Gerônimo [200-?], em seu estudo, apresentaram alguns materiais didáticos manipuláveis e em alguns casos, não manipuláveis, objetivando identificar a sua relação com o ensino e aprendizagem. No decorrer do trabalho, foram identificadas nos educandos algumas carências em conceitos básicos, que de certa forma, poderiam implicar diretamente nos resultados obtidos pelos alunos sob o ponto de vista de cálculos, medições, aplicação de regras ou fórmulas.

Gaspari e Gerônimo [200-?] perceberam que os alunos se sentiram mais motivados e com mais vontade de aprender uma vez que o envolvimento dos alunos nas atividades de grupos, a cooperação e a facilidade para entender o porquê dos cálculos. Nesta linha, acredita que o uso de materiais manipuláveis desde os anos iniciais leva o aluno a desenvolver uma das habilidades mais importantes da vida, que é o senso crítico, na esteira deste desenvolvimento estão a enorme capacidade de realizar as análises e investigações, a reboque deste desenvolvimento, o educando tem a capacidade em resolver problemas mais complexos, sobretudo o de realizar argumentações e compreender a realidade.

Ao notar que os alunos passaram a lembrar das fórmulas relacionando-as com o material utilizado, Gaspari e Gerônimo [200-?], concluem que é satisfatório o uso de materiais manipuláveis, pois estes materiais contribuíram para chegar a tal resultado. Em geral, quando foram trabalhadas as relações métricas do triângulo retângulo, seno, cosseno e tangente, os alunos puderam perceber a veracidade dos cálculos quando, ao lançar mão do teodolito alternativo para calcular alturas inacessíveis. Bons resultados também foram percebidos quando o trabalho foi realizado com a circunferência e de posse de alguns conceitos básicos, não foi diferente com o uso de ábaco, onde houve a possibilidade de construir atividades interessantes. Um outro ponto também identificado por Marques e Moraes (2016) foi na fala de alguns professores que se utilizavam de uma linguagem de difícil compreensão por parte dos educandos.

Dentro do campo dos objetos manipuláveis, Gaspari e Gerônimo [200-?], relatam, também, uma proposta baseada na utilização de dominó, sendo intitulado "Dominó Trigonométrico", onde dentro do escopo de transformação de graus em radianos, através de oficinas, foi possível verificar que houve um aumento na aprendizagem.

Em Marques e Moraes (2016) explica-se que a percepção dentro da disciplina de estágio supervisionado, praticada por eles, encontraram educandos com dificuldades na aprendizagem de trigonometria. Em seu trabalho foi possível perceber que os estudantes do ensino fundamental tinham certa aversão à disciplina de matemática, este sentimento foi justificado pelos educandos que disseram que a disciplina era muito abstrata entre outros.

Diversos fatores contribuem para a queda do interesse matemático dos educandos, dentre eles, as práticas de ensino de matemática tradicionais (exposição oral, uso de lousa ou quadro negro e giz ou caneta hidrográfica), necessitando serem revisadas e readaptadas constantemente. Lógico que o ideal é fazer com que o educando não enxergue a matemática como sendo um problema e sim como uma ferramenta bastante útil para o dia a dia dele. Cabe ao educador dar as oportunidades ao educando para que ele possa fazer pequenos experimentos destas ferramentas, tornando suas aulas mais dinâmicas e criativas, extrapolar o ensino tradicional, quando ele rompe esta barreira, ele influencia diretamente no aprendizado do educando bem como no seu gosto pela disciplina. Marques e Moraes (2016) relatam algumas dificuldades existentes na aprendizagem dos alunos, uma delas está no fato de que o professor não consegue fazer uma relação do conteúdo abordado em sala de aula. Embora os livros didáticos tragam algumas sugestões de trabalho utilizando os materiais manipuláveis cabe ao professor incrementar ou não suas aulas com base na utilização desses materias sugeridos. De tal forma, que se mantenham ligados a teoria e a prática.

O aluno como personagem central de aprendizagem estimula o professor a ter uma participação ativa no uso dos materiais também, pois é um processo de aprendizagem cíclico. Marques e Moraes (2016) em sua proposta de intervenção pedagógica diz que é preciso uma participação ativa dos educandos.

> "Os alunos terão a oportunidade de levantar hipóteses, verificar sua veracidade, tirar conclusões, elaborar conceitos e principalmente criar modelos mentais, a partir da visualização de conceitos trigonométricos". (MARQUES e MORAES, 2016, P. 07)

Nesta proposta de ensino com o uso do material concreto, o dominó trigonométrico é apresentado como facilitador para a aprendizagem de trigonometria, inclusive a confecção do dominó, nos mesmos moldes do dominó tradicional, dentro do número de peças existentes também. Uma aprendizagem matemática sem a devida preocupação com uma justificativa ou fundamentação teórica de certos conteúdos, poderá, por vezes, proporcionar uma matemática desconectada da realidade do discente. Seus resultados nos levam a refletir sobre a importância de se saber o que o educando está fazendo de fato, não só a conta pela conta, mas obter a certeza de que ele percebe da realidade, ou seja, saber o que está fazendo e onde poderá ser aplicado. Com isso, para Marques e Moraes (2016) a proposta de apresentação deste conteúdo de ciclo trigonométrico pelo manuseio do dominó trigonométrico se fez extremante eficaz no sentido de aprendizagem.

Um outro exemplo que se destaca em seu estudo é de que o material manipulável dentro do processo de transformação de grau para radiano, e vice-versa, estão presentes os elementos básicos que impulsionam o educando. Por outro lado, Gervázio (2017) relata que alguns fatores contribuem para que o ensino de matemática se torne insuficiente: já tem algum tempo que a formação de professores necessita de uma reformulação, práticas de ensino antigas, metodologias engessadas pela instituição onde se trabalha, são alguns dos problemas encontrados diretamente.

Com relação a professores que se limitam ao ensino de fórmulas sem se preocuparem se o educando está entendendo qual é a origem, Gervázio (2017) afirma que este modelo apenas contribui para a memorização e repetição "...sem dar a vez ao educando de pensar, de perguntar de onde veio aquilo e para que serve...". (GERVÁZIO, 2017, p.53). Alguns tópicos do conteúdo de matemática para o ensino médio são naturalmente complexos e são enfatizados na BNCC em diversos momentos tais como:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL,2018, p.531).

Estruturas básicas do construtivismo muito exaltadas por Jean Piaget como estimular o educando a pensar matematicamente questionando de onde vem esta fórmula e onde poderei utilizar no meu dia a dia.

É essencial que o educando tenha a teoria aliada a prática, para facilitar a aprendizagem matemática, sendo assim, dentro de um contexto de contato com o concreto este educando poderá ter contato direto com a matemática também, o aprendizado se dará de forma lúdica e bastante criativa, o que permitirá a fixação deste conhecimento.

Trabalhar com estes materiais práticos permitirá, através de atividades criativas, mais um atrativo para que o educando melhore o aprendizado dos conteúdos. Por outro lado, ao lançar mão destes materiais, o educador poderá enxergar nos seus alunos as suas habilidades ou as suas ausências e, sobretudo identificar suas principais habilidades dentro dos descritores definidos, fica fácil perceber que o educando será avaliado como um todo.

Ao trabalhar com diversas formas de ensino o educador que está em busca de uma melhoria contínua consegue estimular no educando a memorização como é o caso do uso de materiais manipulativos de onde permite transformar o conhecimento teórico para o conhecimento prático.

5 PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS

5.1 A investigação

Estas aulas práticas com o auxílio do teodolito alternativo foram aplicadas no Colégio Estadual Olavo Bilac, localizado no bairro de São Cristóvão, Rio de Janeiro – Capital. A escola possui aproximadamente 1276 alunos divididos em 35 turmas de ensino médio e três turnos. Foi selecionada uma turma do primeiro ano (turma 1007) do período letivo de 2018 e, com ela, foi desenvolvida a proposta de realizar atividades internas e externas com o uso da ferramenta, elaboração e construção do teodolito, e estudo de alguns recortes da história da trigonometria. Além de ser o professor de matemática regente desta turma, o conteúdo programático desta série combinou para aplicação da atividade com material manipulável (a esta altura compreendia-se o 3º e 4º bimestres). Foi proposta a realização de atividades com as aulas práticas e dinâmicas com o intuito de despertar o interesse dos alunos pela matemática, e o estudo do conteúdo de trigonometria, além de evidenciar a dinâmica desta mesma proposta como dever de casa e sua eficácia. Vale destacar que os alunos foram bastante colaborativos.

Trabalhamos o conteúdo de razões trigonométricas no triângulo retângulo, uma apresentação da história da trigonometria, um pouco sobre a evolução de algumas ferramentas, a lei dos senos e cossenos, além de algumas profissões que utilizam esse conhecimento, situações problemas similares ou cenários ao que faremos na prática.

Nesta pesquisa desenvolveu-se fortemente por uma abordagem qualitativa, a justificativa para optarmos por uma pesquisa qualitativa de caráter exploratório, conforme definem Kuark, Manhães e Medeiros (2010, p. 27-28) está no sentido de sua adequação à investigação que se pretendia realizar, através de um processo interativo com os sujeitos pesquisados, assim como o local em que sua ação se desenvolveu.

Inicialmente, pretendia-se fazer um trabalho com três turmas do primeiro ano, uma em cada turno da unidade escolar a fim de obter uma percepção diversificada sobre como estão às amostras como um todo, entretanto optou-se por realizar os trabalhos com os alunos de uma única turma, onde estes mesmos alunos receberiam a instrução em sala de aula e teriam uma dupla função de ter que reproduzir estes conteúdos em suas casas também. Tal decisão em diminuir o escopo está diretamente ligado na redução da amostra (público-alvo) o que permitirá desenvolver mais detalhadamente este assunto em uma outra etapa.

Logo no início, ocorreu uma preocupação em conhecer quem são as pessoas que estão dando suporte a cada aluno na etapa de resolução do dever de casa, no sentido de verificar mais genericamente que suporte externo poderia ter recebido. A partir daí, resolveu-se, conforme a estratégia adotada para a pesquisa, realizar a aplicação e experimentação do teodolito, pois desta forma, seria possível proporcionar uma aproximação inicial dos alunos com a ferramenta de estudo no espaço escolar, para posterior apropriação desta pelos mesmos, além de lançar mão de dicas sobre o que estava por vir e contribuir para a reflexão sobre o tema; outro ponto positivo foi com a realização desta coleta de dados, buscavam-se evidências que nos levassem a responder algumas inquietações.

Em função da necessidade de entender o que foi buscado e como as atividades foram realizadas, a seguir será tecido um detalhamento acerca do processo que se desenvolveu em sala de aula, pátio, quadra esportiva, praça ou mesmo no lar.

5.2 Primeiro encontro

Neste primeiro encontro, foi discutido com os alunos a proposta de trabalho, seus objetivos, prazos e próximas etapas. Também foram identificados na turma os alunos maiores de idade, bem como os menores de idade e, em seguida foram distribuídos os termos de consentimentos e assentimentos a todos eles.

5.2.1 Atividade 1: Questionário

A aplicação de um questionário individual, com perguntas variadas, buscou compreender um pouco mais sobre os alunos, algumas de suas concepções, experiências e conhecimentos, o que proporcionou algumas reflexões.

Havia uma expectativa de que o questionário fosse respondido em pouco tempo, todavia os alunos gastaram bem mais tempo que o estipulado - pouco mais de 1 hora para responder 21 perguntas - isto porque, as perguntas foram consideradas relativamente difíceis por eles. Segundo os relatos, alguns deles informaram que nunca haviam parado para pensar nestes tipos de questionamentos. Diante deste cenário, foi dada a eles a oportunidade de responder o questionário[2] em suas casas, com o compromisso de devolver na aula seguinte.

[2] Uma versão deste questionário encontra-se no apêndice.

5.2.2 Atividade 2: Construção do teodolito

Solicitou-se *a priori* que os alunos trouxessem alguns itens para a confecção/ produção do teodolito, tais como: papelão, tampa de garrafa pet, barbante, transferidor e canudo. Foi apresentado a eles um modelo e procedimento para a confecção da ferramenta.

Figura 9: Modelo e calibragem do teodolito.

Fonte: O autor, 2020.

5.2.3 Atividade 3: O pé direito da sala de aula

Superada a etapa da construção do teodolito, passamos para a primeira atividade prática utilizando a ferramenta, que consistia em descobrir a altura da sala de aula; foi a oportunidade também de realizar a aferição das ferramentas recém-criadas; como os alunos já estavam familiarizados com a trigonometria, já sabiam como resolver a questão fazendo uso de coleta de dados e da matemática, tal experiência foi útil para elucidar alguns pré-conceitos.

5.3 Segundo encontro

5.3.1 Atividade 1: Entrevista coletiva

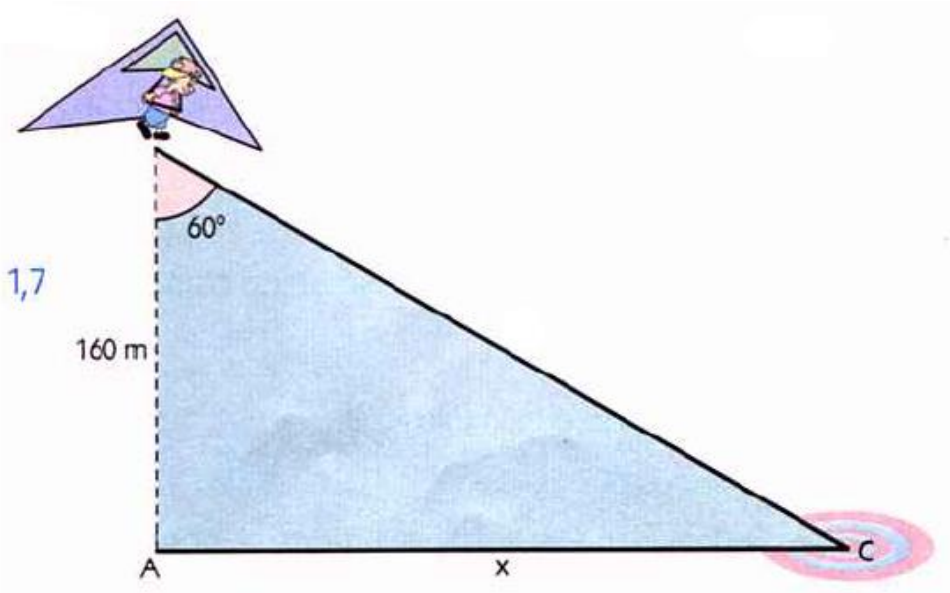
Neste segundo momento com a turma, realizou-se uma entrevista em formato de uma conversa mais descontraída sobre as respostas apresentadas por eles às perguntas do questionário. Tal decisão foi tomada de forma a garantir um entendimento coletivo do questionário, uma vez que como pesquisador não foi possível observar antecipadamente as respostas e supondo que mesmo levando o questionário e retornando neste encontro, algumas perguntas pudessem não ter sido respondidas pelos discentes.

A turma foi organizada em um círculo bem grande, de tal forma a proporcionar que todos pudessem ter uma visão dos demais. Esclareceram-se alguns pontos, conversamos sobre as experiências, a formação, entre outros aspectos.

5.3.2 Atividade 2: Campeonato de asa delta

Foi proposta uma reflexão sobre o problema em que num campeonato de asa delta, um participante de asa delta se encontrava a uma atura de 160m e vê o ponto de chegada a um ângulo de 60º. Foi ilustrado um desenho de suporte para que eles pudessem visualizar (Figura 10). Eles deveriam calcular a componente horizontal, que é equivalente a distância aproximada em que ele está desse ponto de chegada. Este é um exercício descrito e foi retirado do livro “Aula por Aula” (FILHO; SILVA, 205, p.197).

Figura 10: Problema da asa delta.



Fonte: FILHO, Benigno Barreto. **Matemática Aula por Aula.** Volume único**. FTD,** Rio de Janeiro, 2005.

5.4 Terceiro encontro

Separamos a turma em grupos de três ou quatro participantes, em cada grupo existiam dois ou mais teodolitos a disposição para a realização dos cálculos. Nos dirigimos até a quadra de esportes a fim de realizarmos a coleta de dados da altura da tabela de uma cesta de basquete, tínhamos à nossa disposição duas trenas, uma de 2 metros e outra de 30 metros.

Marcamos no chão uma linha perpendicular que contém a tabela, usamos a trena maior para realizar as marcações de distância de cinco metros, dez metros, vinte metros e trinta metros, estas marcações passam a ser referência de marcação.

Cada grupo utilizou a trena menor para aferição da altura do observador somente até a linha dos olhos.

Neste momento o observador deverá olhar pelo canudo até mirar em algum ponto de referência da tabela da cesta de basquete a fim de obter algum ponto de referência para coleta de registro dos dados, como sugestão, criamos uma tabela (Tabela 1) apresentada no tópico posterior “Resultados e discussão”.

5.5 Quarto encontro

5.5.1 Atividade 1: Aferindo o tamanho do poste de luz da companhia elétrica

A turma foi conduzida a área externa, em uma praça, em frente à unidade escolar, os mesmos grupos estavam prontos com os seus respectivos teodolitos alternativos, nos posicionamos a seis metros de distância do poste, a trena maior foi utilizada para garantir esta informação, a trena menor foi utilizada novamente para aferir o tamanho do observador, preferencialmente diferente do observador da atividade da aula anterior. Todas estas informações foram coletadas e registradas em uma tabela, como tínhamos em mãos uma lista com todos os valores possíveis para valores das tangentes, ficou fácil encontrar o tamanho aproximado do poste de luz.

Figura 11: Calculando o tamanho do poste de luz da companhia elétrica.

Fonte: O próprio autor.

5.5.2 Atividade 2: Dever de casa - Determinando o tamanho do edifício

Como dever de casa, solicitou-se que os grupos encontrassem um edifício de sua escolha, se posicionassem a uma distância de 139 metros e que utilizasse, no teodolito o ângulo de 30 graus, sugerimos o uso da tangente de 30º como sendo 0,58.

6 RESULTADO E DISCUSSÃO

Considerado como ferramenta por muitos autores, para muitos outros é considerado um componente importante de sua didática curricular diária com o educando (um ponto de vista não anula o outro ponto de vista), frequentemente, em muitas unidades escolares, a trabalho para casa é uma norma, portanto, obrigatório para os elos envolvidos na cadeia do processo de ensino-aprendizagem do educando. De uma forma bastante simples, o TPC é a atividade preparada e pensada pelo professor para que seja executada fora de sala de aula; o professor passa as instruções em sala de aula e espera que o educando corresponda com a sua parcela de comprometimento com a atividade.

Trigonometria é um assunto que pode ser abordado de diferentes formas, este trabalho veio a proporcionar aos educandos novas formas de pensar e ajudar a consolidar o conteúdo matemático. Construir/ manipular um teodolito alternativo em sala de aula e apresentar uma forma de aplicação, já proporciona ao educando a oportunidade de aprender fazendo, o que favoreceu a assimilação dos conteúdos.

Dar ao educando a oportunidade de experimentar a matemática fora da sala de aula é fomentar a curiosidade neste estudante.

> O LEM pode ser um espaço especialmente dedicado à criação de situações pedagógicas desafiadoras e para auxiliar no equacionamento de situações previstas pelo professor em seu planejamento, mas imprevistas na prática, devido aos questionamentos dos alunos durante as aulas. Neste caso, o professor pode precisar de diferentes materiais com fácil acesso. Enfim, o LEM, nessa concepção é uma sala ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o saber matemático, é um espaço para facilitar tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, processar, experimentar, analisar e concluir enfim, aprender e principalmente aprender a aprender. (LORENZATO, 2006 *apud* MARQUES, 2016, p. 2)

Acredito que o uso de materiais manipuláveis desde as séries iniciais proporcione inúmeras vantagens para o aprendizado, sobretudo para o desenvolvimento cognitivo dos discentes, tanto no campo afetivo como no campo psicomotor.

> Qualquer instrumento útil ao processo de ensino – aprendizagem. Portanto, material didático pode ser um giz, uma calculadora um filme, um livro, um quebra cabeça, uma embalagem, uma transparência, entre outros. [...] o material didático não é garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor (LORENZATO, 2006 *apud* MARQUES, 2016, p. 2).

6.1 Primeiro encontro

Talvez por conta da falta de maturidade, alguns alunos tiveram muitas dificuldades em responder perguntas do questionário, tipo: "Qual o motivo da sua reprovação no 1º ano do ensino médio em matemática?" (considerando os retidos nesta série); "O professor de trigonometria era o mesmo de álgebra?[3]", etc. O questionário (APÊNDICE A) contribuiu para traçar o perfil do aluno e facilitar a abordagem em sala de aula.

As perguntas selecionadas no questionário proposto aos alunos tinham por objetivo acrescentar ao estudo algumas informações acerca do perfil socioeconômico destes educandos além de permitir e analisar de que forma o uso do teodolito no ensino da trigonometria pode favorecer a compreensão desses conceitos pelo educando do Ensino Médio.

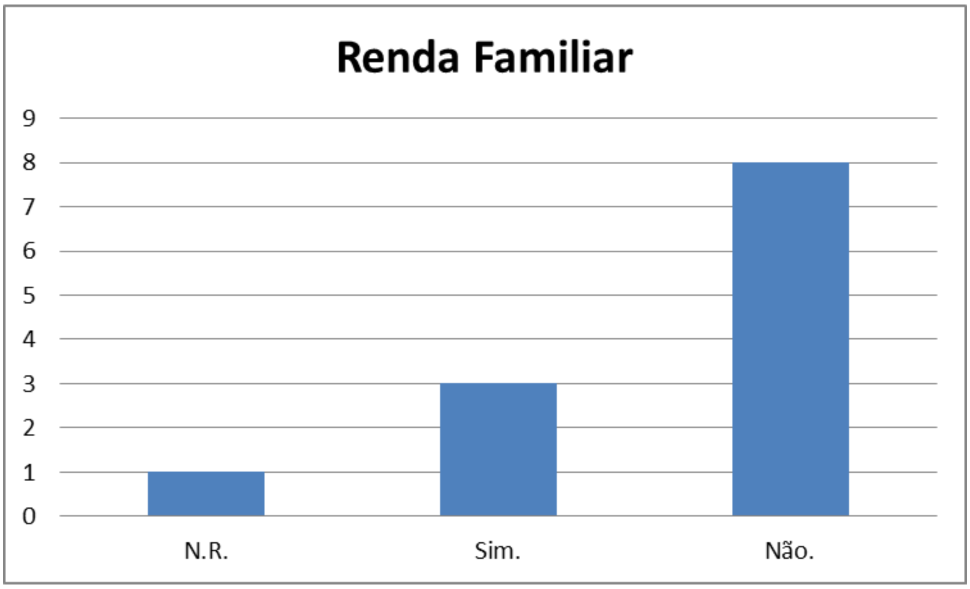
O questionário apresentou alguns questionamentos referentes a renda do grupo família, escolaridade dos responsáveis ou pais e visam entender em qual contexto está encaixado este educando permitindo investigar o avanço ou o retrocesso deste indivíduo e, sobretudo entender se estes pontos estão relacionados a ordem socioeconômica dele ou da família.

Por meio do questionário viu-se que os alunos que participaram efetivamente da pesquisa, seis alunos eram do sexo feminino e outros seis do sexo masculino (total de doze). Verificou-se que dez deles moram com os pais e que dez em sua casa moram com mais de três pessoas; apenas dois trabalham em atividade remunerada; dois já usaram algum tipo de droga; metade prática algum esporte.

Perguntados se a renda familiar superava três salários mínimos, obteve-se (onde N.R. nos gráficos, leia-se Não Respondido)

[3] Em algumas unidades escolares adotam professores de matemática diferentes para o ensino de álgebra e geometria.

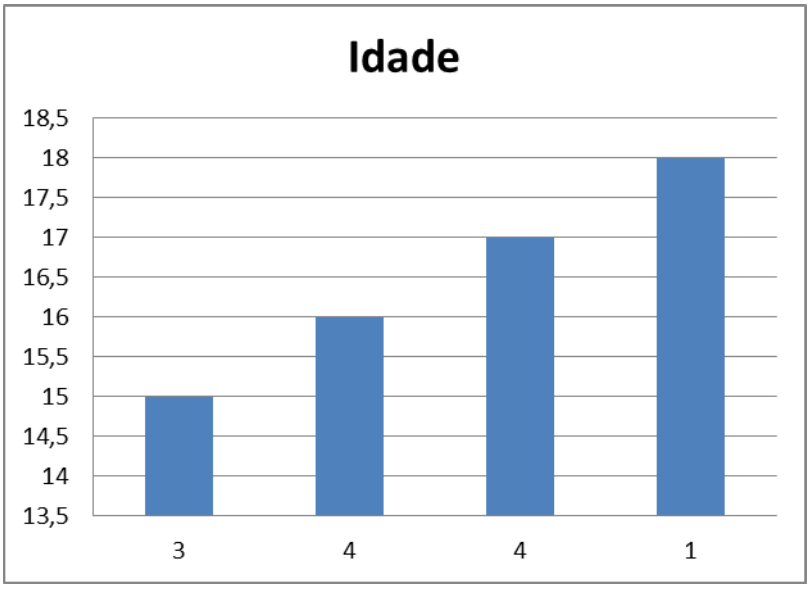
Gráfico 1: Renda familiar



Fonte: O autor, 2020.

Quanto à idade observa-se a tabela

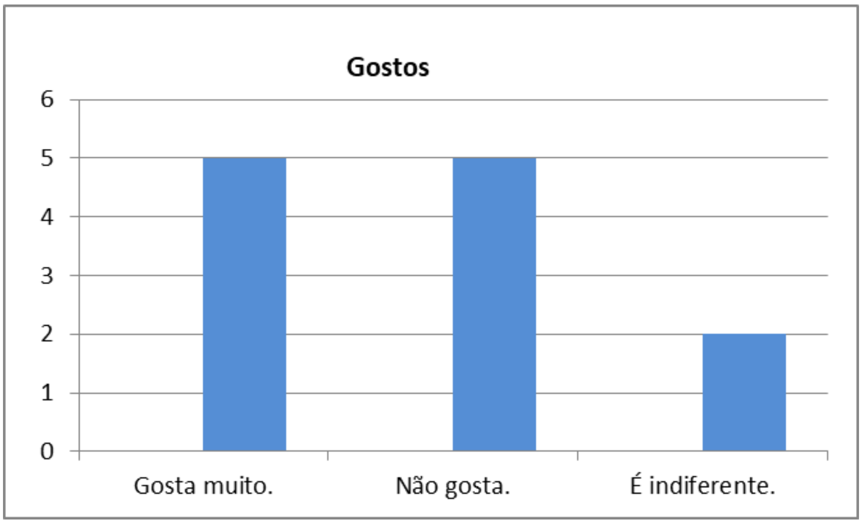
Gráfico 2: Idade dos alunos.



Fonte: O autor, 2020.

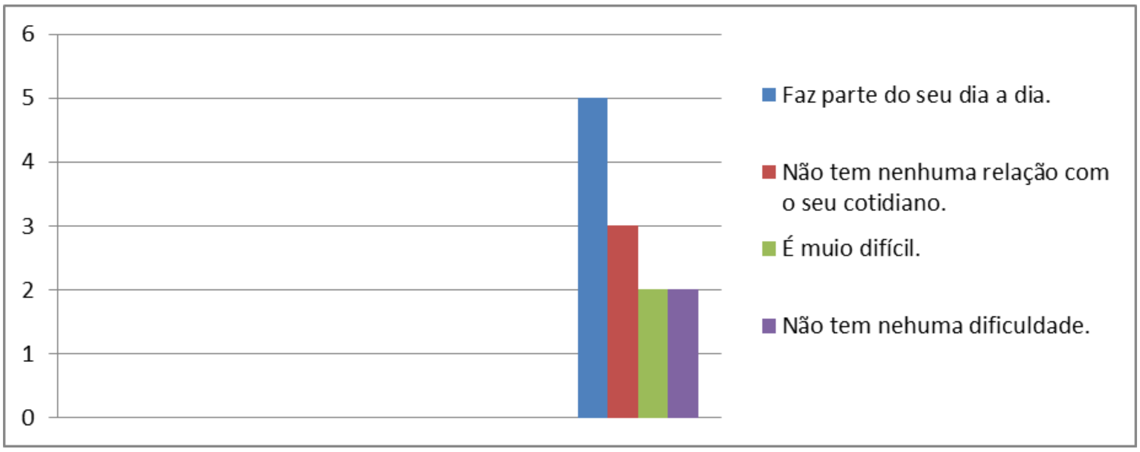
Sobre a relação deles com a Matemática e sobre a Matemática que estudam na escola, obteve-se o descrito nos gráficos 3 e 4:

Gráfico 3: Relação com a Matemática



Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 4: Matemática que estudam na escola



Fonte: O autor, 2020.

Outras respostas ainda obtidas com o questionário, em respeito ao que “mais gosta na matemática?” obteve-se como respostas: nada, tabuada, cálculos, converter graus em radianos, converter radianos em graus, delta, tudo menos trigonometria, praticamente nada, Báskara e álgebra. Ao se tratar do que “consideram mais difícil”, responderam: tudo, somas, ângulos notáveis, frações, trigonometria, problemas e inequação.

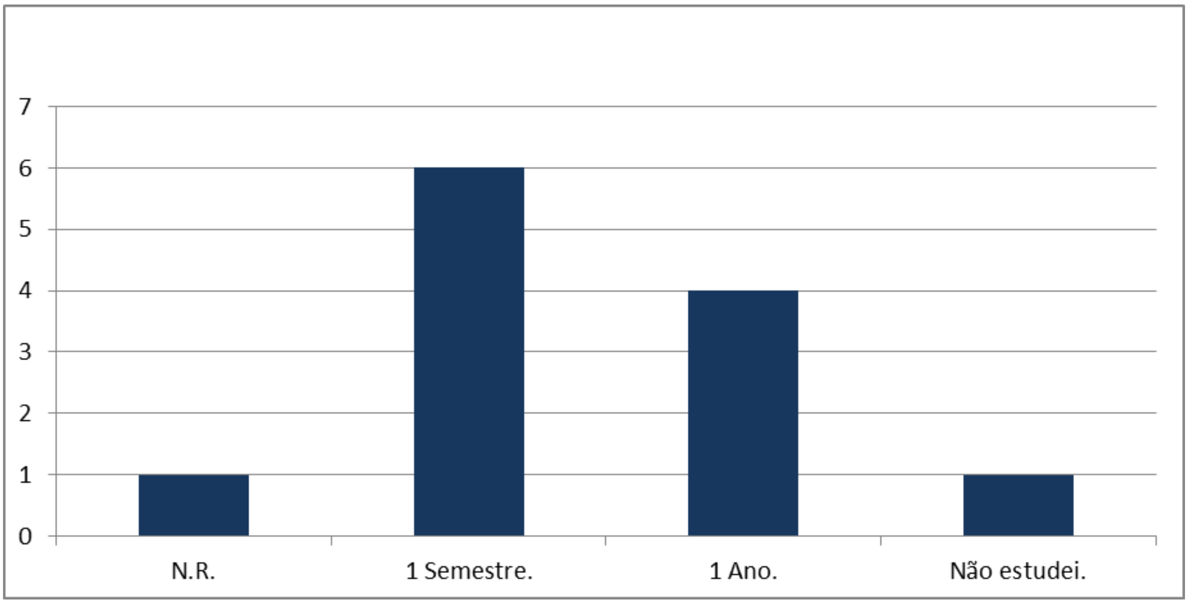
Questionados se haviam reprovado alguma disciplina, metade disse que sim; dentre os que lembraram a disciplina de reprovação, destacaram Matemática, Inglês e História (7 não responderam). Quanto às series, os que lembraram apontaram 3º, 6º, 7º e 8º ano do Ensino Fundamental (6 não responderam). Dois deles repetiram uma mesma série porque foram reprovados em matemática, os outros 10 não.

Houve confusão na resposta à pergunta “Qual o motivo da sua reprovação na 1ª fase do E.M., em matemática?”, portanto não será feita análise acerca dela. Na pergunta “O que você sugere para a melhoria do processo ensino e aprendizagem de Matemática?” não houve resposta alguma, o que aponta, talvez pela imaturidade do público alvo, que embora por vezes desgostem, não conseguem apontar como poderiam gostar das aulas desta disciplina.

Três alunos disseram ter feito parte do programa de aceleração, que é um programa da prefeitura do Rio de Janeiro, que em função da distorção idade/série permite ao aluno avançar duas séries em um mesmo ano letivo.

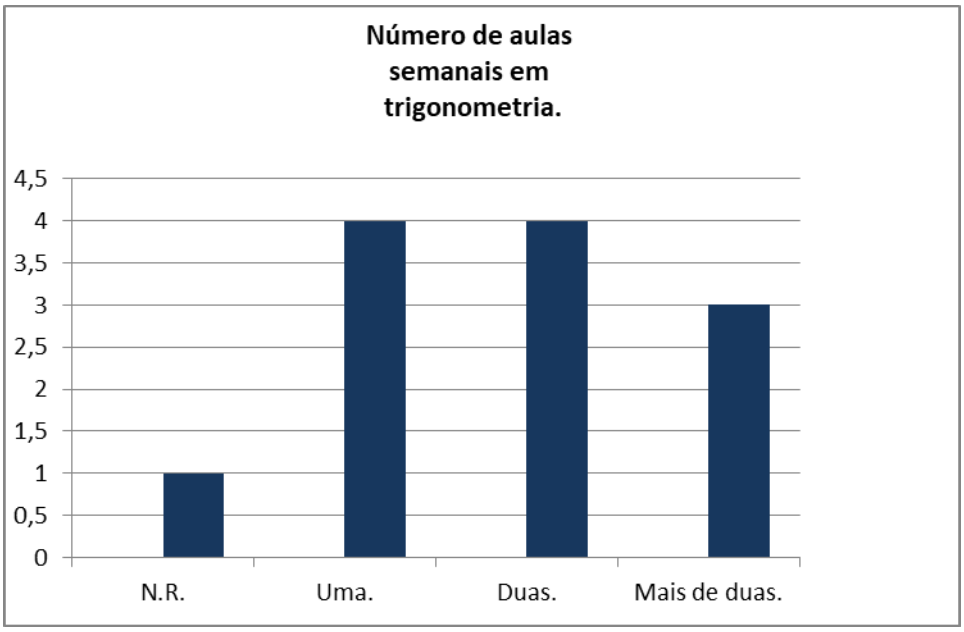
Quanto ao estudo da Trigonometria especificamente, as contribuições foram colocadas nos gráficos 6, 7, 8 e 9. Dez alunos disseram que o professor de trigonometria era o mesmo de álgebra.

Gráfico 5: Duração de estudo anterior de trigonometria.



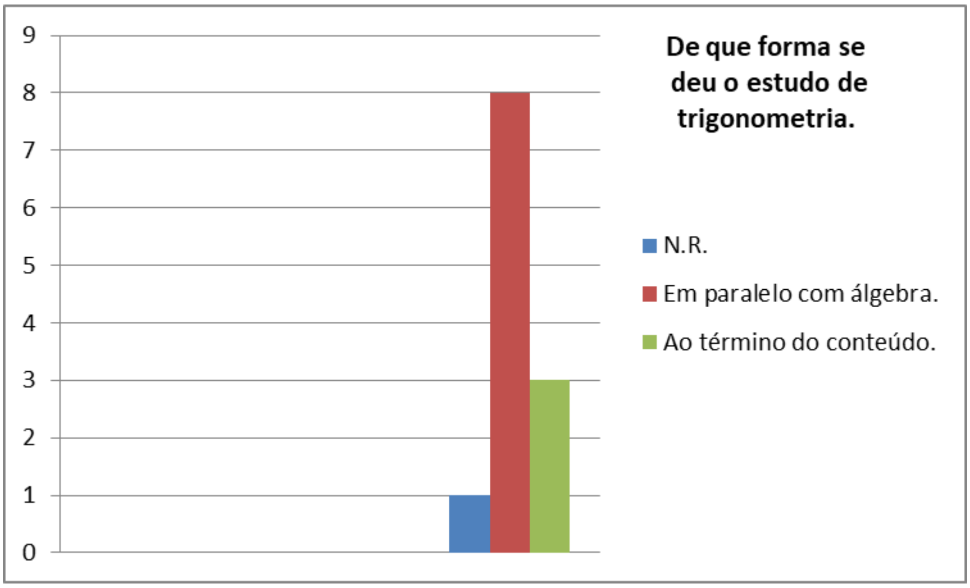
Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 6: Número de aulas semanais de trigonometria



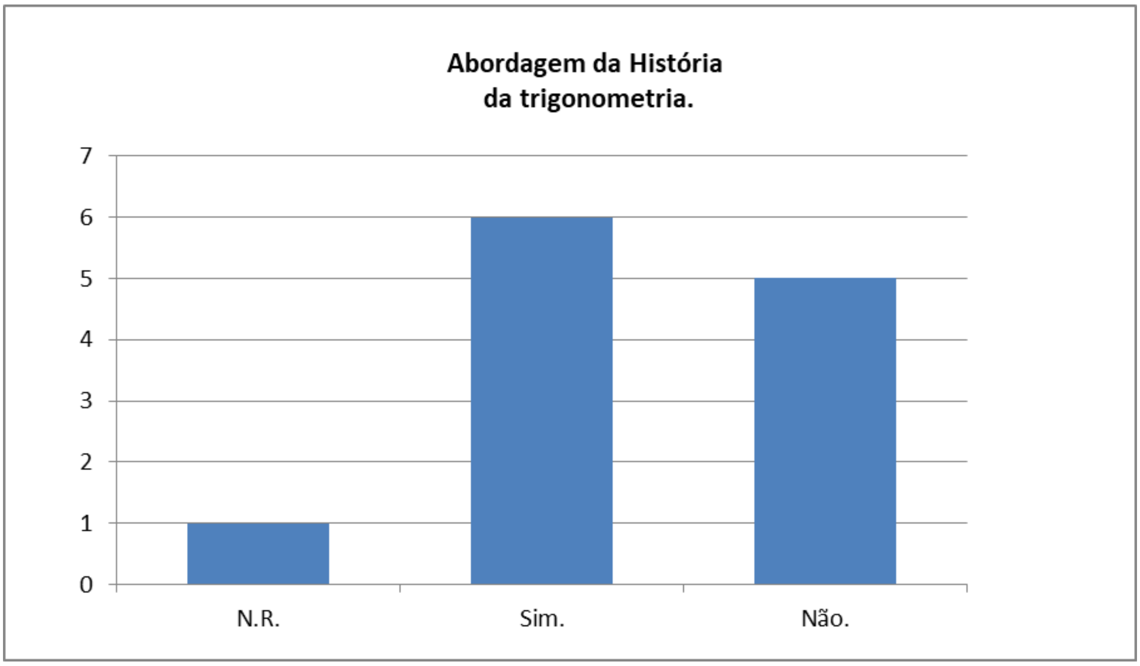
Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 7: Forma como estudou trigonometria



Fonte: O autor, 2020.

Gráfico 8: Abordagem pelos professores anteriores



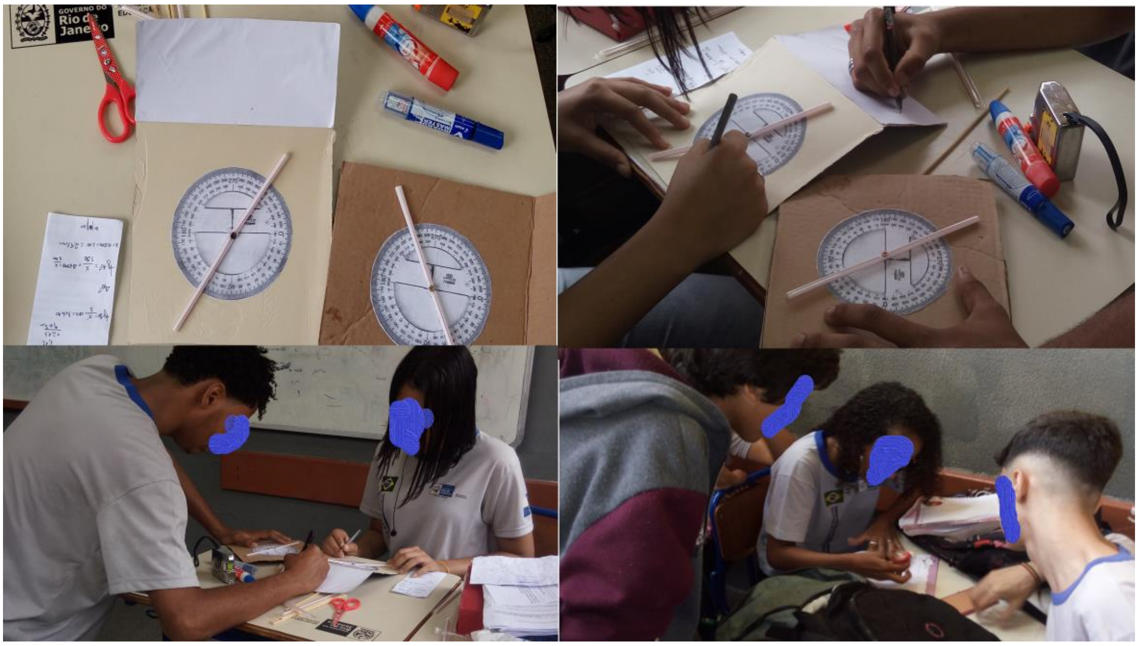
Fonte: O autor, 2020.

Feita esta análise, pode-se perceber o perfil do público alvo com o qual esta pesquisa foi implementada.

Durante o trabalho de campo com os grupos nesta turma, observou-se o comportamento destes jovens, muitos conseguiram realizar a atividade conforme instrução dada, no entanto, muitos deles foram devidamente conduzidos pelo professor para que pudessem obter o resultado final satisfatório (função do professor).

A sequência de fotos abaixo mostra os alunos participando ativamente da produção do teodolito alternativo.

Figura 12: Construção da ferramenta em sala de aula.



Fonte: O próprio autor.

Alguns estudantes durante o processo de aferição **não** estavam considerando a sua própria altura na hora de realizar o cálculo, como consequência direta deste ato obteve-se resultado diferente do observado quando calculado com a trena, então, estes estudantes foram orientados quanto à maneira correta de coletar os dados.

Outros estudantes não compreendiam como posicionar a ferramenta ou teodolito alternativo no próprio corpo para obter o melhor posicionamento do grau ou visada; por vezes, posicionavam a frente do corpo ou mesmo sobre a cabeça. Para estes grupos foram realizadas algumas demonstrações práticas, pelo professor.

Figura 13: Descobrindo a altura da sala de aula, a distância do observador até a parede.

Fonte: O próprio autor.

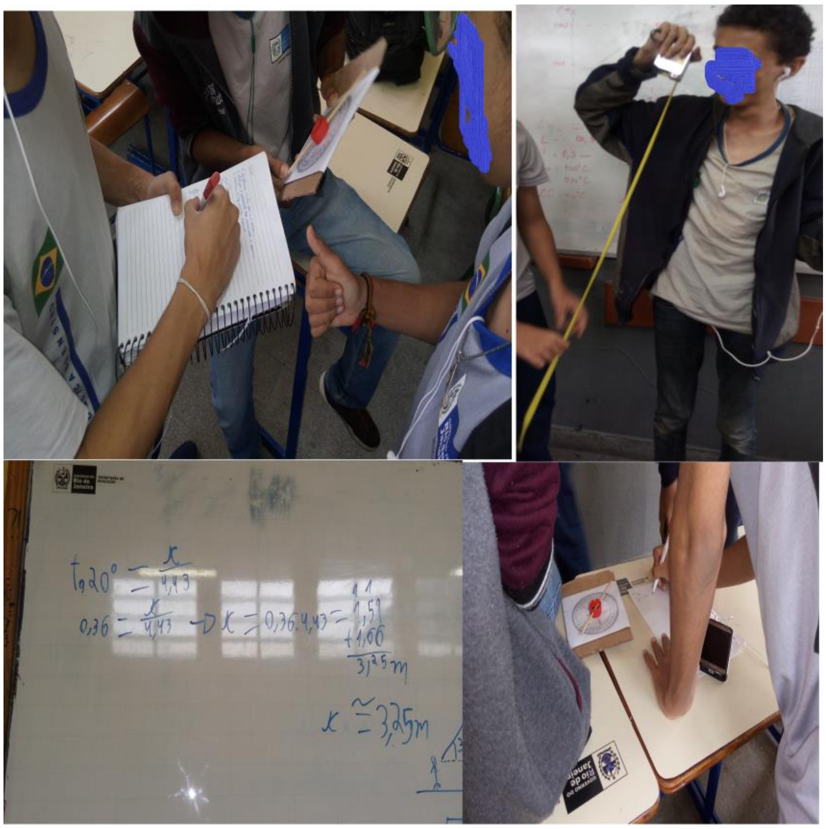
Uma vez que não lembraram o valor da tangente de 30 graus, uma parte dos alunos não realizou o cálculo corretamente, por este motivo. Nestes casos, uma tabela contendo valores para diversas tangentes foi fornecida (ANEXO A) o que nos ajudou nas tarefas seguintes.

Alguns estudantes não marcaram corretamente o ponto de encontro das três retas no teto da sala (vértice) gerando o valor inconsistente para efeito de cálculo. Isto ocorreu em momento de calibração do teodolito logo após a montagem da ferramenta e novamente foram devidamente orientados quanto a isso.

No decorrer da aula de montagem de preparação da ferramenta as coisas foram se acalmando e alguns foram apresentando um elevado grau de amadurecimento.

Na sequência, os alunos foram estimulados a realizar a "calibragem" de suas ferramentas em sala de aula, onde deveriam calcular a altura do pé direito, um momento de muita diversão e aprendizado.

Figura 14: Finalizando o cálculo da altura da sala de aula e aferindo a altura do observador.



Fonte: O próprio autor.

O fato de os alunos aprenderem corretamente a maneira de realizar o cálculo da distância do observador até o vértice da sala de aula, permitiu que pudéssemos realizar as atividades externas com mais confiança.

6.2 Segundo encontro

Ao realizar a entrevista, inicialmente os alunos estavam um pouco travados, entretanto, eles logo se soltaram e acabaram falando bastante sobre os mais diversos tópicos. O objetivo desta entrevista foi de obter o máximo de informações sobre a relação entre trigonometria e a proposta experimentada. Realizamos algumas perguntas verbalmente, baseadas na experiência obtida na aula anterior, onde os alunos foram situados sobre o que estávamos testando.

O resultado consolidado das respostas obtidas na entrevista trouxe à luz algumas informações sobre o conhecimento de trigonometria que possuíam. Foram suscitados, por exemplo, **"**O que vocês não entenderam do questionário?**"**: Neste momento, eles realizaram uma releitura dos questionários, a medida em que surgiam as dúvidas eu fui respondendo-os; **“**O que vocês acharam da experiência de construir uma ferramenta?**”** : Como uma resposta unanime, eles afirmaram que foi uma experiência incrível com a matemática, alguns sugeriram que as atividades de casa fossem sempre desta maneira; **“**Entenderam como funciona um teodolito?**”:** Muitos não entenderam o seu funcionamento, muitos não sabiam a sua função, estas dúvidas foram surgindo e aos poucos sanadas; **“**Em algum momento da vida escolar, vocês tiveram a oportunidade de trabalhar com manipulação de objetos?**”**: Diversos alunos responderam que sim, porém, nem todos tiveram a oportunidade de experimentar materiais manipulativos no ensino fundamental.

Já com relação ao exercício proposto em sala de aula, conforme descrito na metodologia, os alunos foram tentando resolver o problema de diversas formas, até que um dos alunos enxergou e falou sobre a tangente de 60º, embora não tenha realizado as contas para se obter o valor da distância. Essa lembrança corrobora com a ideia de apreensão do conteúdo, pois com esta afirmação de que para calcular a distância, x, da asa delta ao ponto de aterrisagem, conforme figura 10, era necessário utilizar uma relação trigonométrica, nos dá indícios sobre a eficácia do processo ensino aprendizado.

6.3 Terceiro encontro

A fim de organizar os dados medidos na quadra poliesportiva do colégio foi elaborada a tabela 1, conforme a seguir

Tabela 1: Tabela de suporte para coleta de dados

Distância da cesta até o observador	Medida do ângulo de visada	Altura do Observador	Altura da cesta de basquete
5 metros			
10 metros			
20 metros			
30 metros			

Fonte: O próprio autor

Combinamos alguns nomes dos ângulos, como são dois ângulos obtidos, um ângulo, chamamos de alfa, este será o ângulo encontrado no teodolito alternativo e coincide com o segundo ângulo que chamamos de beta que é o ângulo de visada, ou seja, é o ângulo obtido pela ferramenta.

Confrontamos os resultados encontrados e sentimos falta de uma informação. Não tínhamos o valor padrão da altura de uma tabela de basquete, então como já estávamos ao final da aula, solicitou-se uma atividade para casa, na qual os alunos pesquisassem qual seria o valor padrão de medida da altura tabela (adequado) e se o valor estava próximo do resultado da coleta de dados registrada.

Figura 15: Medida da altura da tabela da cesta de basquete da quadra de esportes da escola.

Fonte: O próprio autor.

6.4 Quarto encontro

Os impactos observados nos grupos que realizaram a tarefa em suas casas foram bastante proveitosos; eles receberam a atividade proposta no item 3.5.2 do capítulo 3, onde sugeria que fossem a campo e escolhessem um edifício para calcular a sua altura, todos os grupos responderam positivamente e trouxeram seus resultados para discussões e enriqueceram o debate em sala de aula.

Mostrou-se positivamente que todos eles lembraram, intuitivamente, das fórmulas apresentadas na relação trigonométrica do triângulo retângulo e demonstraram interesse quando solicitaram que mais atividades como estas fossem realizadas fora da sala de aula, inclusive insistiram para que todas as tarefas de casa seguissem o mesmo padrão, enfatizando que gostariam que todos os finais de semana fossem assim.

Nenhum membro, quando questionado, relatou que recebeu a ajuda de algum familiar neste TPC.

A atividade realizada na praça foi fundamental para que os estudantes se estimulassem a executar a TPC, motivando-os a organizarem-se nos seus grupos fora do horário e ambiente escolar, para buscar dados para resolução da questão proposta pelo professor e fixação dos conteúdos matemáticos propostos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É parte essencial que o professor realize o acompanhamento das atividades propostas também em sala de aula, que proporciona ao educando a sensação de que todo o esforço despendido em casa valeu a pena. Foi um grande aprendizado para todos que participaram deste trabalho, ganhamos eu e os estudantes. Pude constatar que os alunos estiveram engajados com a execução do trabalho e verificar o aumento da frequência dos alunos desta turma, tive a oportunidade vê-los debater os conteúdos, comentar seus pontos de vista e, sobretudo o de adquirir uma nova opinião sobre a matemática.

Uma análise comparativa das médias dos dois primeiros bimestres com as notas bimestrais dos dois últimos destes educandos, ou seja, foram dois bimestres sem o uso dos objetos manipulativos e os dois últimos lançando mão dos objetos manipulativos, é verificado um aumento significativo nessas avaliações, onde alguns chegaram a melhorar mais de 100% sua média bimestral. Analisando a turma ao final da execução do trabalho, fica claro melhoria de desempenho, que se reflete matematicamente em torno de 30%.

Minha experiência ao trabalhar com os materiais concretos e manipulativos em sala de aula foi bastante difícil, mas em contrapartida, posso afirmar que foi bastante gratificante. O complicador inicial está na execução do currículo mínimo anual, que é determinado pela Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro e, utilizar em sala de aula uma metodologia com estes materiais manipulativos, requer mais tempo e acaba pode comprometer a execução de todo o restante do currículo, por isso necessita de maior planejamento.

Todavia, mesmo com algumas adversidades, posso classificar como “operação com sucesso”, sobretudo pela participação de toda a turma, embora nem todos tenham autorizado a participação na pesquisa pelo apoio e suporte recebido da direção escolar à época e pela colaboração de alguns professores na aplicação.

Já na execução, diferentemente das aulas tradicionais, a utilização dos materiais manipulativos e concretos proporcionou a mim o enorme prazer em ver o entusiasmo de diversos educandos na busca do conhecimento matemático, ver o interesse de muitos em saber como trazer para o “concreto” os conteúdos já vistos por eles e, em outros casos se percebeu um início de familiarização com a matemática, mesmo que tímido, no entanto, significativo.

Os educandos, ao trabalhar com os materiais sugeridos nas aulas, passaram a ter o domínio do executar, observar, manipular e analisar peculiaridades da matemática.

Destaco aqui a existência de professores preocupados com uma boa educação matemática e que estão inovando em suas práticas de ensino uma vez que estão antenados a um ensino mais dinâmico. Agradeço aos estudantes desta turma que aceitaram participar ativamente, pois sem o envolvimento deles dentro e fora de sala não seria possível fechar as análises.

Por fim, a experiência em utilizar materiais concretos e manipulativos nas aulas e em conjunto com o TPC, além de proporcionar aos educandos, no que diz respeito à construção do conhecimento e sem sombra de dúvidas a aprendizagem matemática, proporcionou para mim um enorme incentivo para o exercício da minha prática como docente. Além disso, minha experiência como residente dentro da que considero a melhor instituição de ensino foi enormemente enriquecedora a quem deixo aqui em destaque meus agradecimentos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em 12 de dezembro de 2019.

COELHO, Alex de Brito. **Teorema de Pitágoras: Qual a sua importância para o ensino das ciências da natureza?.** 2016 78f. Dissertação (Mestrado em ensino de Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio. (UNIRIO), Rio de Janeiro, RJ,2010.

FILHO, Benigno Barreto. **Matemática Aula por Aula.** Volume único**.** Editora FTD**,** Rio de Janeiro, 2005.

FURQUIM, Augusto Sérgio. FLORIO, Bruna. PONTES, Artur Ribeiro. **TRIGONOMETRIA: uma abordagem dinâmica.** XXV Semana de Matemática. 2013. 41f. São José do Rio Preto. SP. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". São Paulo. 2013.

GERVÁZIO, Suemilton Nunes. **Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da matemática e incentivar ã pesquisa.** Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Rio de Janeiro, v. 9, Julho 2017. Disponível em https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v09a04-materiais-concretos-e-manipulativos.pdf. Acesso em 03 de janeiro de 2020.

GASPARI, Claudete Aparecida Almeida de, GERÔNIMO, João Roberto. **O uso de materiais manipuláveis no ensino da trigonometria**. – Disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2188-8.pdf. Acesso em 31/03/2020.

KUARK**,** Fabiana da Silva **;** MANHÃES**,** Fernanda Castro; MEDEIROS**,** Carlos .Henrique; **Metodologia da Pesquisa: guia prático**. Itabuna: Via litterarum, 2010. 88p. Disponível em http://www.pgcl.uenf.br/arquivos/livrodemetodologiadapesquisa2010_011120181549.pdf. Acesso em 19/09/2020

LIMA, Thais Ramos de. **Dever de casa: os diferentes pontos de vista.** 2013 80f. Monografia (Licenciatura em pedagogia) – Escola de educação do centro de ciências humanas e sociais da universidade federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), Rio de Janeiro, RJ, 2013.

LIMA, Elon Lage. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias.** Coleção do professor de matemática. SBM, Rio de Janeiro, 1987.

MARQUES, Rubens Matheus dos Santos, MORAES, Mônica Suelen Ferreira de. **Proposta de ensino de trigonometria através do uso de materiais concretos e jogos.**

Anais do XII ENEM, 2016. 12f. Universidade Federal do Tocantins, TO. 2016.

PAIM, Marcos Antônio, SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos. **Conceitos iniciais necessários para a aprendizagem das razões trigonométricas no triângulo retângulo através do uso de materiais manipuláveis.** – Anais do XI ENEM, 2013. 7f. Curitiba, PR, 2013.

ROSÁRIO, Pedro. MOURÃO, Rosa. SOARES, Serafim. CHALETA, Elisa. GRÁCIO, Luísa. SIMÕES, Fátima. NÚÑEZ, José Carlos. GONZALEZ-PIENDA, Júlio A. **Trabalho de casa, tarefas escolares, autorregulação e envolvimento parental.** psicologia em estudo, Maringá, v. 10, n. 3, p. 343- 351. 2005.

SÃO PEDRO, Carlos Henrique Andrade de. **Determinação de distâncias inacessíveis com o auxílio aplicativos.** 2016 45f. Dissertação (Mestrado) – Mestrado em matemática em rede nacional – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. (IMPA), Rio de Janeiro, RJ, 2016.

SIQUEIRA, Thiago Carneiro de Barros. **Trigonometria no triângulo retângulo: conhecimentos para seu ensino na formação de professores.** 2013 135f. Dissertação (Mestrado) - Mestrado em educação matemática – Universidade federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, MS, 2013.

SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática aula por aula.** Coleção matemática aula por aula. Editora FTD, 2ºed. Rio de Janeiro, 2005.

VEIGA, Luis Augusto Koenig., ZANETTI, Maria Aparecida Zehnpfennig. FAGGION, Pedro Luis. **Fundamentos da Topografia**, 2012. 288f. Universidade Federal do Paraná (UFPR), 2012.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

QUESTIONÁRIO

Você está sendo convidado (a) a participar como voluntário (a) da pesquisa denominada **UMA PROPOSTA DE ENSINO DOS CONCEITOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO UTILIZANDO O MATERIAL MANIPULATIVO TEODOLITO**. realizada no âmbito do Programa de Residência docente do Colégio Pedro Segundo CPII e que diz respeito a um produto acadêmico final (PAF)**.**

1. Quantos anos você tem?

2. Qual sua relação com a matemática?
() Gosta muito () Não gosta () É indiferente

3. Sobre a matemática que você estuda na escola?
() Faz parte do seu dia a dia
() Não tem nenhuma relação com o seu cotidiano
() É muito difícil
() Não tem nenhuma dificuldade

4. O que você mais gosta na Matemática?

5. O que você considera mais difícil na Matemática?

6. Durante a sua vida escolar, você já reprovou em outra disciplina? Qual e em que fase ou série?
Sim () Não ()

Qual:____.

Série:____
____.

7. Você já repetiu uma mesma série porque foi reprovado em Matemática?
Sim () Não ()

8. Qual o motivo da sua reprovação na 1ª fase de Ensino Médio, em Matemática?

() Não gosta da matemática
() Tinha muita dificuldade em entender os assuntos trabalhados
() Falta de estudo
() Pouco interesse seu
() A metodologia e os recursos usados pelo professor
() Frequentava pouco as aulas
() Outros

9. O que você sugere para a melhoria do processo ensino e aprendizagem de Matemática?

10. Você mora com seus pais?
Sim () Não ()

11. Você trabalha?
Sim () Não ()

12. Sua renda familiar é acima de três salários-mínimos?
Sim () Não ()

13. Já usou ou usa algum tipo de droga?
Sim () Não ()

14. Você prática algum esporte?

Sim () Não ()

15. Em sua casa moram mais de três pessoas?
Sim () Não ()

16. Você estudou na classe de aceleração?
Sim () Não ()

17. Você estudou trigonometria durante.

() 1 Semestre
() 1 Ano
() Não estudei

18 Se você estudou trigonometria, o número de aulas semanais era(m)?
() Uma
() Duas
() Mais de duas

19. O professor de trigonometria

() Era o mesmo professor de Álgebra
() Era outro professor

20. Você estudou trigonometria.

() Em paralelo com Álgebra
() Ao término do conteúdo de Álgebra

21. Com relação a história da trigonometria, seu professor de matemática durante as aulas de matemática comentou?

Sim () Não ()

APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (6 a 17 anos de idade)

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) para participar da pesquisa **UMA PROPOSTA DE ENSINO DOS CONCEITOS DE TRIGONOMETRIA UTILIZANDO A FERRAMENTA TEODOLITO**. Queremos saber e analisar de que forma o uso do teodolito no ensino da trigonometria pode favorecer a compreensão desses conceitos pelos educandos do ensino médio.

As pessoas que irão participar desta pesquisa têm de 6 a 17 anos de idade. A pesquisa será feita no **Colégio Estadual Olavo Bilac**. Durante a pesquisa, você irá **responder a questionários, participar de oficinas, participar de rodas de conversa.** Para isso, serão usados questionários. O uso de questionários é considerado seguro, mas é possível você se sentir tímido, envergonhado, acanhado em uma ou mais atividades. Caso aconteça algo errado, você pode procurar o(a) pesquisador(a) ANDRÉ LUÍS NUNES pelo telefone 21 988313430. Mas há coisas boas que podem acontecer, pois essa pesquisa pode contribuir para tornar o processo ensino-aprendizagem da trigonometria algo prazeroso e possível aos que gostam e aos que não gostam da matemática, além de dar a possibilidade de construir instrumentos alternativos de medição, trabalhando os conceitos de mudança de unidade e trigonometria.

Você não precisa participar desta pesquisa se não quiser. Ninguém ficará irritado ou chateado com você se você disser "não": a escolha é sua. Você pode pensar nisto e falar depois se você quiser. Você pode dizer "sim" agora e mudar de ideia depois e tudo continuará bem. É importante que você converse com seus responsáveis sobre a sua decisão. Saiba o que eles acham, fale a eles o que pretende fazer, se quer ou não participar. Você tem o tempo que precisar para isso. Também pode discutir com o pesquisador, quando quiser. Vamos responder todas as suas dúvidas, em qualquer momento. Estamos aqui para fazer a pesquisa juntos.

Você não receberá nenhum dinheiro nem terá que pagar nada para participar da pesquisa. Ninguém saberá que você está participando da pesquisa, não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados, mas sem identificar as pessoas que participaram da pesquisa.
===
===============

ASSENTIMENTO

Eu ____ aceito participar da pesquisa **UMA PROPOSTA DE ENSINO DOS CONCEITOS DE TRIGONOMETRIA UTILIZANDO A FERRAMENTA TEODOLITO**. Entendi as coisas ruins e as coisas boas que podem acontecer. Entendi que posso dizer "sim" e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer "não" e desistir e que ninguém vai ficar furioso. O(a) pesquisador(a) tirou minhas dúvidas e conversou com os meus responsáveis. Recebi uma via deste termo de assentimento. Li este termo e concordo em participar da pesquisa.

Nome do Participante	Assinatura	Data: ___/___/_____
Nome do Pesquisador Responsável **ANDRÉ LUÍS NUNES**	Assinatura	Data: ___/___/_____

APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (Responsável Legal)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) responsável/representante legal:

Gostaríamos de solicitar o seu consentimento para o(a) menor ________________________________ participar como voluntário(a) da pesquisa denominada **UMA PROPOSTA DE ENSINO DOS CONCEITOS DE TRIGONOMETRIA UTILIZANDO A FERRAMENTA TEODOLITO**, realizada no âmbito do Programa de Residência docente do Colégio Pedro Segundo (CPII) e que diz respeito a um produto acadêmico final (PAF)**.**

OBJETIVO: O objetivo do estudo é saber e analisar de que forma o uso do teodolito no ensino da trigonometria pode favorecer a compreensão desses conceitos pelos educandos do ensino médio.

PROCEDIMENTOS: a forma de participação do(a) menor consistirá em**: responder a questionários, participar de oficinas, participar de rodas de conversa. Por ocasião das atividades os registros poderão ser feitos por gravação em áudio, registro em fotografia, registro em vídeo.**

POTENCIAIS RISCOS E BENEFÍCIOS: Toda pesquisa oferece algum tipo de risco. Nesta pesquisa, o risco pode ser avaliado como **baixo**, isto é, o participante poderá se sentir tímido, envergonhado, acanhado. Objetivando conter e sanar esses riscos, o participante tem a possibilidade de interromper o procedimento procurando o pesquisador ANDRÉ LUÍS NUNES**.** Por outro lado, são esperados os seguintes benefícios da participação na pesquisa: possibilidade de contribuir para tornar o processo ensino-aprendizagem da trigonometria algo prazeroso e possível aos que gostam e aos que não gostam da matemática, além de dar a possibilidade de construir instrumentos alternativos de medição, trabalhando os conceitos de mudança de unidade e trigonometria.

GARANTIA DE SIGILO: os dados da pesquisa serão publicados/divulgados em livros e revistas científicas. Asseguramos que a privacidade do(a) menor será respeitada e o nome dele(a) ou qualquer informação que possa, de alguma forma, o(a) identificar, será mantida em sigilo.

LIBERDADE DE RECUSA: a participação do(a) menor neste estudo é voluntária e não é obrigatória. Você poderá se recusar a permitir que ele(a) participe do estudo, ou retirar seu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar. Se desejar que o(a) menor saia da pesquisa ele(a) não sofrerá qualquer prejuízo.

CUSTOS, REMUNERAÇÃO E INDENIZAÇÃO: a participação neste estudo não terá custos adicionais para você. Também não haverá qualquer tipo de pagamento devido à participação do (a) menor no estudo. Fica garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

ESCLARECIMENTOS ADICIONAIS, CRÍTICAS, SUGESTÕES E RECLAMAÇÕES: os pesquisadores garantem a você livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências. Você poderá ter acesso ao(a) pesquisador(a) ANDRÉ LUÍS NUNES pelo telefone 21 988313430.

Se você decidir autorizar a participação do(a) menor nesta pesquisa, será necessário um consentimento por escrito.

CONSENTIMENTO

Acredito ter sido suficientemente esclarecido(a) a respeito das informações sobre o estudo acima citado que li ou que foram lidas para mim. Ficaram claros para mim quais são os objetivos do estudo, os procedimentos a serem realizados, seus desconfortos e riscos, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes. Ficou claro também que a participação no estudo é isenta de despesas e/ou remuneração. Minhas dúvidas foram devidamente esclarecidas pelos pesquisadores responsáveis. Estou ciente de que a participação do(a) menor ____ neste estudo é voluntária e que posso me recusar a autorizar a sua participação ou retirar a minha autorização a qualquer momento, sem penalidade ou perda dos benefícios aos quais o(a) menor tenha direito. Concordo que os resultados do estudo podem ser comunicados à comunidade acadêmica e publicados em periódicos científicos, sendo mantidas em sigilo informações que identifiquem o(a) menor. Autorizo comitês de ética, autoridades regulatórias locais ou estrangeiras, a examinarem, se assim o desejarem, estes registros para confirmação das informações coletadas. Concordo voluntariamente em permitir que o(a) menor participe deste estudo. Eu receberei uma via deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e a outra ficará com os pesquisadores responsáveis por esta pesquisa. Além disso, estou ciente de que eu e os pesquisadores responsáveis devemos rubricar todas as folhas desse TCLE e assinar na última folha.

Nome do Participante (ou responsável legal)	Assinatura	Data: ___/___/_____
Nome do Pesquisador Responsável **ANDRÉ LUÍS NUNES**	Assinatura	Data: ___/___/_____

APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (Maiores de idade)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar como voluntário(a) da pesquisa denominada **UMA PROPOSTA DE ENSINO DOS CONCEITOS DE TRIGONOMETRIA**

UTILIZANDO A FERRAMENTA TEODOLITO, realizada no âmbito do Programa de Residência docente do Colégio Pedro Segundo CPII e que diz respeito a um produto acadêmico final (PAF)**.**

OBJETIVO: O objetivo do estudo é saber e analisar de que forma o uso do teodolito no ensino da trigonometria pode favorecer a compreensão desses conceitos pelo educando do ensino médio.

PROCEDIMENTOS: a sua participação consistirá em**: responder a questionários, participar de oficinas, participar de rodas de conversa. Por ocasião das atividades os registros poderão feitos por gravação em áudio, registro em fotografia, registro em vídeo.**

POTENCIAIS RISCOS E BENEFÍCIOS: Toda pesquisa oferece algum tipo de risco. Nesta pesquisa, o risco pode ser avaliado como **baixo**, isto é, o participante pode se sentir tímido, envergonhado, acanhado. Objetivando conter e sanar esses riscos, o participante tem a possibilidade de interromper o procedimento procurando o pesquisador ANDRÉ LUÍS NUNES. Por outro lado, são esperados os seguintes benefícios da participação na pesquisa: possibilidade de contribuir para tornar o processo ensino-aprendizagem da trigonometria algo prazeroso e possível aos que gostam e aos que não gostam da matemática, além de dar a possibilidade de construir instrumentos alternativos de medição, trabalhando os conceitos de mudança de unidade e trigonometria.

GARANTIA DE SIGILO: os dados da pesquisa serão publicados/divulgados em livros e revistas científicas. Asseguramos que a sua privacidade será respeitada e o seu nome ou qualquer informação que possa, de alguma forma, o(a) identificar, será mantida em sigilo.

LIBERDADE DE RECUSA: a sua participação neste estudo é voluntária e não é obrigatória. Você poderá se recusar participar do estudo, ou retirar seu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar. Se desejar sair da pesquisa você não sofrerá qualquer prejuízo.

CUSTOS, REMUNERAÇÃO E INDENIZAÇÃO: a participação neste estudo não terá custos adicionais para você. Também não haverá qualquer tipo de pagamento devido a sua participação no estudo. Fica garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

ESCLARECIMENTOS ADICIONAIS, CRÍTICAS, SUGESTÕES E RECLAMAÇÕES: os pesquisadores garantem a você livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências. Você poderá ter acesso ao(a) pesquisador(a) ANDRÉ LUÍS NUNES pelo telefone 21 988313430.

Se você decidir autorizar a participação do(a) menor nesta pesquisa, será necessário um consentimento por escrito.

CONSENTIMENTO

Rubrica Pesquisador: ___________________

Rubrica participante: ____________________

Acredito ter sido suficientemente esclarecido(a) a respeito das informações sobre o estudo acima citado que li ou que foram lidas para mim. Ficaram claros para mim quais são os objetivos do estudo, os procedimentos a serem realizados, seus desconfortos e riscos, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes. Ficou claro também que a participação no estudo é isenta de despesas e/ou remuneração. Minhas dúvidas foram devidamente esclarecidas pelos pesquisadores responsáveis. Estou ciente de que a minha participação neste estudo é voluntária e que posso me recusar a participar ou retirar a minha autorização a qualquer momento, sem penalidade ou perda dos benefícios aos quais eu tenha direito. Concordo que os resultados do estudo podem ser comunicados à comunidade acadêmica e publicados em periódicos científicos, sendo mantidas em sigilo informações que me identifiquem. Autorizo comitês de ética, autoridades regulatórias locais ou estrangeiras, a examinarem, se assim o desejarem, estes registros para confirmação das informações coletadas. Concordo voluntariamente em participar deste estudo. Eu receberei uma via deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e a outra ficará com os pesquisadores responsáveis por esta pesquisa. Além disso, estou ciente de que eu e os pesquisadores responsáveis devemos rubricar todas as folhas desse TCLE e assinar na última folha.

Nome do Participante (ou responsável legal)	Assinatura	Data: ___/___/_____
Nome do Pesquisador Responsável **ANDRÉ LUIS NUNES**	Assinatura	Data: ___/___/_____

ANEXO A – TABELA DE TANGENTES

TABELA DE TANGENTES

Âng	Tang	Âng	Tang	Âng	Tang	Âng	Tang
0	0,0000	22	0,4040	44	0,9657	67	2,3559
1	0,0175	23	0,4245	45	1,0000	68	2,4751
2	0,0349	24	0,4452	46	1,0355	69	2,6051
3	0,0524	25	0,4663	47	1,0724	70	2,7475
4	0,0699	26	0,4877	48	1,1106	71	2,9042
5	0,0875	27	0,5095	49	1,1504	72	3,0777
6	0,1051	28	0,5317	50	1,1918	73	3,2709
7	0,1228	29	0,5543	51	1,2349	74	3,4874
8	0,1405	30	0,5774	52	1,2799	75	3,7321
9	0,1584	31	0,6009	53	1,3270	76	4,0108
10	0,1763	32	0,6249	54	1,3764	77	4,3315
11	0,1944	33	0,6494	55	1,4281	78	4,7046
12	0,2126	34	0,6745	56	1,4826	79	5,1446
13	0,2309	35	0,7002	57	1,5399	80	5,6713
14	0,2493	36	0,7265	58	1,6003	81	6,3138
15	0,2679	37	0,7536	59	1,6643	82	7,1154
16	0,2867	38	0,7813	60	1,7321	83	8,1443
17	0,3057	39	0,8098	61	1,8040	84	9,5144
18	0,3249	40	0,8391	62	1,8807	85	11,4301
19	0,3443	41	0,8693	63	1,9626	86	14,3007
20	0,3640	42	0,9004	64	2,0503	87	19,0811
21	0,3839	43	0,9325	65	2,1445	88	28,6363
				66	2,2460	89	57,2900