COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Paulo Cruz Pinheiro de Moraes

A UTILIZAÇÃO DO *PEER INSTRUCTION* PARA ANÁLISE DO APRENDIZADO E DESENVOLVIMENTO DO DISCENTE NO ENSINO REMOTO

uma aplicação com alunos do sexto ano sobre o conceito de recorrência

Rio de Janeiro
2021

Paulo Cruz Pinheiro de Moraes

A UTILIZAÇÃO DO *PEER INSTRUCTION* PARA ANÁLISE DO APRENDIZADO E DESENVOLVIMENTO DO DISCENTE NO ENSINO REMOTO
uma aplicação com alunos do sexto ano sobre o conceito de recorrência

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Me. Tânia Maria Boffoni Simões de Faria

Rio de Janeiro
2021

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

M827 Moraes, Paulo Cruz Pinheiro de

A utilização do *Peer Instruction* para análise do aprendizado e desenvolvimento do discente no ensino remoto uma aplicação com alunos do sexto ano sobre o conceito de recorrência / Paulo Cruz Pinheiro de Moraes. - Rio de Janeiro, 2021.

103 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Tânia Maria Boffoni Simões de Faria.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Lógica. 3. Aprendizagem – Avaliação. 3. Ensino remoto. I Faria, Tânia Maria Boffoni Simões de. II. Colégio Pedro II. III Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692

Paulo Cruz Pinheiro de Moraes

A UTILIZAÇÃO DO *PEER INSTRUCTION* PARA ANÁLISE DO APRENDIZADO E DESENVOLVIMENTO DO DISCENTE NO ENSINO REMOTO
uma aplicação com alunos do sexto ano sobre o conceito de recorrência

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____
Prof[a]. Me. Tânia Maria Boffoni Simões de Faria (Orientadora)
Colégio Pedro II

____
Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins
Colégio Pedro II

____
Prof. Dr. Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense

____
Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro
2021

Aos professores do Colégio Pedro II e aos colegas de turma que, assim como eu, se empenharam ao máximo para concluir esta jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à orientadora Tânia Maria Boffoni que me ajudou muito com relação ao desenvolvimento desta dissertação e se mostrou uma pessoa bastante verdadeira e solícita, uma excelente professora que merece tudo de bom em sua vida.

Aos professores do PROFMAT, Tânia, Daniel, Ivail, Marilis, Lourdes, Luciana, Andréia e Liliana que contribuíram para o meu aprendizado com relação aos conteúdos do Mestrado.

Ao professor Fábio Luis pela ajuda prestada, como também ao professor Jhony que me auxiliou a respeito dos estudos para o Exame Nacional de Qualificação.

Gratifico, também, a minha família, base sólida para me manter firme e conseguir superar as adversidades.

Além disso, expresso minha gratidão a Deus, pois sem seu amor e generosidade nada seria possível.

RESUMO

MORAES, P.C.P. **A utilização do *Peer Instruction* para análise do aprendizado e desenvolvimento do discente no ensino remoto**: uma aplicação com alunos do sexto ano sobre o conceito de recorrência. 2021. 103 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2021.

A presente pesquisa está inserida na temática Ensino de Matemática e trabalha com o seguinte problema: elaborar ferramentas que estimulem a participação e comunicação dos alunos, como também auxiliar os professores de Matemática a avaliar o entendimento do conceito de Lógica, em particular recorrência, com estudantes do sexto ano do ensino fundamental por meio do ensino remoto. O objetivo deste trabalho é contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática nesta modalidade de ensino que ficou evidenciada devido ao momento atual de pandemia do Coronavírus. Foi utilizada para o desenvolvimento e argumentação do trabalho dissertativo a metodologia ativa do *Peer Instruction*, que é um método de ensino interativo, desenvolvido por Eric Mazur, professor da Universidade de Harvard. Os encontros remotos ocorreram por meio do *Google Meet* e os problemas propostos foram elaborados utilizando-se do *Google forms*. Ambos os serviços disponibilizados pelo *Google* têm a finalidade de auxiliar a interação entre os professores e os alunos por meio de atividades *online*. A abordagem metodológica deste trabalho é qualitativa do tipo pesquisa – participante de natureza aplicada e utiliza como instrumento de coleta de dados a observação dos integrantes, como também a interação e os debates exercidos durante os encontros remotos e as respostas dos estudantes aos problemas propostos e ao questionário. O produto educacional a ser construído é uma oficina, a princípio, com um grupo de dez alunos para trabalhar e avaliar os conhecimentos do conceito de lógica intuitiva com ênfase nas recorrências, na qual será verificada a validade da metodologia ativa da instrução por pares para o ensino remoto.

Palavras-chave: Matemática; Lógica; Recorrência; Ensino Remoto; *Peer Instruction.*

ABSTRACT

MORAES, P.C.P. **The use of Peer Instruction for the analysis of student learning and development in remote education**: an application with sixth grade students on the concept of recurrence. 2021. 103 f. Thesis (Master's Degree) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2021.

This research is about Mathematics Teaching and addresses the following problem: how to develop tools to stimulate students' participation and communication, in order to help mathematics teachers to evaluate the understanding of the concept of Logic, in particular recurrence, among elementary sixth grade students through remote education. The objective of this work is to contribute to the process of teaching and learning Mathematics through this media, which gained importance due to the current moment of coronavirus pandemic. The active methodology of Peer Instruction, which is an interactive teaching method developed by Eric Mazur, professor at Harvard University, was used for the development and argumentation of this dissertation. The remote meetings were done through *Google Meet*, and the proposed problems were made using *Google Forms*. Both services provided by *Google* are intended to assist the interaction between teachers and students through online activities. The methodological approach for this study is qualitative research of the participant observation type, in its applied nature, since it uses observation of the members as an instrument of data collection, as well as the interaction and debates produced during the remote meetings along with the students' responses to proposed problems and questionnaire. The educational product being built is a workshop, at first, with a group of ten students, which works and evaluates the knowledge of the concept of intuitive logic with emphasis on recurrences, in which we will verify the validity of the active methodology of peer instruction for remote teaching.

Keywords: Mathematics; Logic; Recurrence; Remote Teaching; Peer Instruction

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CNS	Conselho Nacional de Saúde
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FAUEL	Fundação de Apoio e Desenvolvimento da Universidade Estadual de Londrina
FCC	Fundação Carlos Chagas
FUMARC	Fundação Mariana Resende Costa
FUNDEP	Fundação de Desenvolvimento da Pesquisa
FURB	Fundação Universidade Regional de Blumenau
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
P.A.	Progressão Aritmética
P.G.	Progressão Geométrica
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O objetivo da pesquisa é auxiliar o docente a obter um método de análise do aluno considerando seu desenvolvimento com relação à aprendizagem do conteúdo, na modalidade de ensino remoto. Para isso, o professor tem como ferramenta os parâmetros encontrados na metodologia ativa de aprendizagem do *Peer Instruction* (instrução por pares), que dispõe de características próprias, como o aprendizado por meio das interações e participação dos estudantes, fornecendo ao docente, mediante as respostas aos problemas propostos, uma amostragem de como o aluno está conseguindo assimilar os conteúdos ministrados.

Com o intuito de pôr em prática a instrução por pares e verificar a validade ou não do método utilizado para o ensino remoto, foi elaborada uma oficina com estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental que foi dividida em três etapas:

1. a primeira etapa acontece no encontro inicial e consiste na disponibilização do material teórico prévio. Este material é fornecido alguns dias antes da aula para o aluno ter uma referência do tema abordado. Além disso, há a aplicação de problemas envolvendo o conteúdo de recorrência para os estudantes resolverem sem o auxílio do professor, ou seja, apenas com o que foi estudado do material inicial. O intuito desses exercícios é analisar o quanto o estudante conseguiu assimilar do conteúdo apenas com este instrumento teórico. Após a solução das atividades pelos alunos, o docente faz a explicação dos problemas propostos por meio de uma aula expositiva síncrona, nos moldes do ensino tradicional. Portanto, no primeiro encontro não ocorre a utilização da instrução por pares;
2. a segunda etapa, que é aplicada do segundo ao oitavo encontro, consiste na formulação de problemas de natureza interpretativa com a utilização de questões objetivas que são executadas durante as aulas. Nesta etapa há a utilização da metodologia ativa do *Peer Instruction* e o parâmetro a ser estabelecido acontece de acordo com as respostas apresentadas. Vale destacar que a explicação do docente com relação à parte teórica do conteúdo se dá por meio de uma aula dialogada, com o intuito de fazer os estudantes participarem de forma ativa dos encontros remotos;
3. a terceira etapa consiste da aplicação de um questionário com o objetivo de obter a opinião do discente com relação a aspectos específicos e gerais da oficina que estejam relacionados à aprendizagem e ao desenvolvimento cognitivo. Além do mais, o questionário serve de suporte em termos comparativos entre a primeira etapa e a segunda etapa. Com isso, o pesquisador pode averiguar as diferenças entre o que foi proposto inicialmente, relativo ao uso do material prévio, e a aula expositiva, com relação ao que foi proposto posteriormente, que diz

respeito à metodologia ativa do *Peer Instruction* e a aula dialogada, estabelecendo assim, as percepções de desenvolvimento dos alunos.

A escolha do tema recorrência, para trabalhar com os alunos do sexto ano foi devido à importância do reconhecimento de padrões, com o intuito de promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, o que trará no futuro um suporte para o raciocínio funcional, as progressões aritméticas e geométricas, além da matemática financeira, análise combinatória e probabilidade, que o estudante virá a aprender no Ensino Médio. O assunto não se esgota no Ensino Básico, sendo a base do Princípio de Indução Finita, que é um tipo de demonstração que pode aparecer em qualquer domínio da Matemática que trabalhe com números naturais.

A fim de verificar a relevância desta pesquisa, foi feita uma busca no acervo de dissertações da CAPES, inicialmente com o termo "recorrências", onde foram encontrados 607 resultados. Ao limitar a pesquisa a Área de Conhecimento Matemática e Ensino de Ciências e Matemática, obtiveram-se 54 resultados. Desses, nenhum tinha como área de atuação o Ensino Fundamental II. Encontrou-se uma dissertação para o Ensino Fundamental I, enquanto que os outros 53 trabalhos tinham como referência o Ensino Médio e o Ensino Superior.

Foi realizada ainda, a pesquisa do termo "*Peer instruction*" e verificou-se que há 2577 resultados. Ao definir a pesquisa apenas na área de conhecimento Matemática e Ensino de Ciências foram encontrados 132 resultados. Dentre esses, nenhum teve como tema recorrência e, ainda, não houve dissertações com enfoque no ensino remoto utilizando a instrução por pares.

Mas qual o motivo de escolher, em específico, alunos do sexto ano para trabalhar recorrência?

Ao analisar as questões do primeiro nível das Olimpíadas Brasileira de Matemática para o Ensino Público (OBMEP), correspondente ao sexto e sétimo ano, verifica-se que abordam questões em que o estudante precisa generalizar uma lei de formação para obter números ou figuras sob determinado padrão, o que envolve o aspecto conceitual da recursividade. O atual programa da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) não inclui o assunto no quinto e no sexto ano, dessa forma surgiu o interesse de começar a trabalhar o tema com alunos nessa faixa etária.

E qual a motivação para trabalhar com o tema recorrência no ensino remoto?

Devido às circunstâncias atuais da pandemia, que gerou o crescimento desta modalidade de ensino, principalmente no Ensino Básico, onde o uso ainda era muito restrito.

Acrescenta-se, também, a dificuldade do docente em perceber o desenvolvimento do aluno, como também a falta de comunicação e participação do estudante durante as aulas remotas. Por este motivo surgiu o interesse em estudar metodologias que pudessem sanar estas dificuldades. Dentre as metodologias ativas existentes, o *Peer Instruction* chama atenção justamente por utilizar as respostas dos alunos aos problemas propostos como parâmetro. Assim, mesmo por meio do ensino remoto, será possível verificar a compreensão do estudante acerca do assunto trabalhado.

Além disso, a instrução por pares tem como premissa a interação entre os alunos e entre estes e o professor, o que é de grande valia para o ensino remoto, já que uma das dificuldades do docente, nesta modalidade, é obter o *feedback* do estudante com relação ao conteúdo ministrado.

O presente estudo está inserido na temática Ensino de Matemática utilizando metodologias ativas, em particular, o *Peer Instruction* (instrução por pares) e visa auxiliar o professor durante suas aulas remotas.

O tema desenvolvido junto ao educando diz respeito ao conteúdo de Lógica Matemática, com ênfase nas sequências recursivas e problemas de caráter interpretativo que envolvam a recursividade. Vale ainda ressaltar:

1. a importância do conteúdo para o ensino e para o futuro acadêmico do aluno, visto que é um tema bastante frequente em várias áreas, não apenas na Matemática, como também na Engenharia, Economia, dentre outras;
2. a escassez de trabalhos dissertativos acerca do tema;
3. a questão da intuição do estudante, da percepção lógica, de reconhecer padrões, da capacidade dedutiva do discente, que é um fator essencial para o aprendizado da Matemática.

As aulas da oficina foram realizadas através de videoconferências utilizando o aplicativo *Google Meet* da *Google*. Para auxiliar esta pesquisa, os formulários e os questionários efetuados durante as aulas remotas foram elaborados por intermédio do *Google forms*, um aplicativo com a finalidade de auxiliar a interação entre professores e alunos, que permite dinamizar a aplicação de atividades.

A avaliação durante a oficina aconteceu de forma continua, utilizando-se de uma abordagem qualitativa, com o objetivo de identificar como o discente estava evoluindo no decorrer das atividades.

Além disso, foram aplicados questionários de opinião, também com uma abordagem qualitativa, onde o estudante teve a liberdade para expor o seu ponto de vista sobre a metodologia aplicada, e sobre a eficiência da mesma com relação ao seu aprendizado.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Metodologias ativas

As metodologias ativas de ensino propõem atrair os alunos utilizando-se de uma nova estratégia na forma do professor ministrar suas aulas. Dessa forma, Paiva *et al*. (2016) entende que as metodologias ativas surgem com uma nova abordagem em que o estudante é estimulado a apresentar uma mudança de atitude durante o aprendizado. Esta nova postura do discente tem como finalidade a busca da autonomia e da aprendizagem significativa. Com isso, este método é baseado em uma educação problematizadora que "sugere a transformação do próprio processo de conhecer". Assim, emerge como uma proposta para o saber significativo a resolução de problemas, desafios, que estimulam o aluno a analisar, refletir e agir, consolidando, assim, a participação ativa do mesmo durante o processo de aprendizagem.

Existem várias modalidades para aplicar uma metodologia ativa que pode ser utilizada pelos docentes com o objetivo de conduzir o estudante ao pensamento crítico e autônomo. Uma delas é a sala de aula invertida (*flipped classroom*). Para Pereira e Da Silva (2018) a sala de aula invertida tem como foco no processo de ensino – aprendizagem o próprio aluno e, trata-se de um método no qual o professor disponibiliza, previamente, o material com o conteúdo da aula para os estudantes. Estes, por sua vez têm como objetivo estudar e refletir sobre o assunto proposto pelo professor, com a finalidade de tornar a sala de aula um local de debates, reflexões, pois o discente, agora, terá embasamento sobre o tema e será capaz de participar de forma atuante nos debates, o que favorece o desenvolvimento cognitivo.

A gamificação, outra modalidade de metodologia ativa, aplicada em ambientes de aprendizagem, utiliza a tecnologia com os elementos dos jogos no espaço escolar com o intuito de favorecer o processo de ensino, como também o desenvolvimento do aluno. Neste sentido, Fardo (2013) compreende que os games são significativos para desenvolver as capacidades dos estudantes em diversas áreas do conhecimento. Assim, utilizar os elementos dos jogos como: "mecânica, estratégias, pensamentos" podem impulsionar os alunos no que diz respeito à solução de problemas, como também os motivar com relação ao estudo, o que contribui para o progresso do discente.

> A gamificação é um fenômeno emergente, que deriva diretamente da popularização e popularidade dos games, e de suas capacidades intrínsecas de motivar a ação, resolver problemas e potencializar aprendizagens nas mais diversas áreas do conhecimento e da vida dos indivíduos. (FARDO, 2013, p.2)

Insere-se, também, neste contexto das metodologias ativas e aprendizagem significativa, a aprendizagem baseada em equipes (*team based learning*), que conforme Fonseca e Mattar (2017) é fundamentada na formação de pequenos grupos, que realizam alguns passos durante o suceder deste método: para Lima *et al*. (2016) o primeiro passo, denominado pelos autores de "Momento I" é constituído da elaboração do material pelo docente e consequente estudo prévio por parte dos alunos. Esta fase tem como objetivo instigar a autonomia do estudante. Já o segundo momento é subdividido em quatro etapas: a primeira etapa do "Momento II" é feita com a realização de testes individuais, que tem como propósito averiguar o quanto o estudante conseguiu assimilar do conteúdo com o estudo prévio, enquanto que a segunda etapa é formada pelo compartilhamento das respostas pelos integrantes dos grupos. Dessa forma, há a discussão entre os membros da equipe para definir qual resposta o grupo irá tomar como correta. Observe, também, que nessa etapa ocorre a interação entre os participantes do grupo, logo o discente que tiver tido dificuldades em resolver o teste de forma individual poderá entender melhor sobre o conteúdo a partir dos argumentos realizados pelos outros alunos da equipe.

> O confronto entre os resultados do teste individual e os da equipe visa destacar o valor do conhecimento do outro, a possibilidade da construção coletiva do conhecimento e a adição de resultados pelo compartilhamento dos saberes que cada participante da equipe traz. (LIMA *et al*, 2016, p.5)

A terceira etapa do "Momento II" é realizada com o debate entre os grupos. Neste sentido, cada equipe terá que argumentar para as outras equipes o motivo da escolha de suas respostas ao teste proposto, e a quarta etapa é efetuada com a intervenção do docente, que irá dialogar com os alunos explicando o melhor caminho para resolução dos exercícios do teste, reafirmando, assim, o processo de ensino – aprendizagem.

Insere-se neste contexto, o "Momento III", caracterizado pela aplicação do tema apresentado, vale salientar que, neste caso, podem ser elaborados desafios para as equipes, como também apresentações que relacionem o conteúdo com suas funcionalidades no cotidiano, elaboração de exercícios de modo a aprofundar o assunto, dentre outros. Continuamente, tanto o "Momento II" quanto o "Momento III" devem ser avaliados pelos próprios integrantes das equipes. Esta avaliação deve contemplar os seguintes aspectos: trabalho em equipe, participação efetiva, colaboração, apoio ao grupo e assim por diante. Destaca-se, conjuntamente, que o professor também deverá avaliar os alunos a fim de averiguar se as notas estabelecidas pelos estudantes estão condizentes com o apresentado durante as aulas.

A aprendizagem baseada em problemas (*problem based learning – PBL)* funciona de uma forma similar à aprendizagem baseada em equipes. Os alunos são estimulados a resolver problemas em conjunto com os colegas. A proposta é que resolvam o problema de forma colaborativa e exponham as soluções encontradas. O professor atua como um mediador, prestando ajuda, mas deixando que os alunos encontrem a solução de forma autônoma. Neste sentido, De Souza e Dourado (2015) acreditam que a aprendizagem baseada em problemas é um método em que o centro do processo de ensino é o aluno, que deixa a função passiva do conhecimento e passa a buscar de forma ativa responder aos problemas propostos, a partir dos desafios que ocasionam questionamentos e investigações. Na busca pela resposta, o aluno adquire maturidade e desenvolve suas habilidades cognitivas.

Vale ressaltar, ainda, o ensino híbrido, uma proposta de metodologia ativa baseado na união entre o modelo presencial de ensino e o de forma online. Para Bacich (2016) esta metodologia agrega bastante para o ensino pelo fato de haver várias possibilidades de aprendizado, não apenas nas aulas presenciais, mas também por meio do uso das tecnologias digitais, que acrescentam tanto para a formação do professor, quanto para o aprendizado do aluno, visto que o docente, agora, terá mais ferramentas para ensinar, e o aluno, mais ferramentas para aprender.

Além disso, a proposta do ensino híbrido está vinculada com a atualidade, haja vista que, devido à pandemia, a escola volta-se para esta proposta, muitas vezes trabalhando no modelo presencial de forma reduzida, e, agregando-se a isto o modelo online, remoto, com uso das tecnologias.

Destaca-se, também, que os outros modelos de metodologias ativas, como a sala de aula invertida, aprendizagem baseada em equipes, gamificação, aprendizagem baseada em problemas e, inclusive o *Peer Instruction*, podem ser trabalhados no formato de ensino híbrido, ficando a critério do docente escolher qual método tem mais o seu perfil pedagógico.

O presente trabalho vai se focar na modalidade instrução por pares (*Peer Instruction*) que será abordado no item 2.2.

2.2 O *Peer Instruction*

A Instrução por Pares é um tipo de metodologia ativa proposta por Eric Mazur. O *Peer* Instruction investe na discussão entre os alunos como forma de contribuir para o entendimento e a aplicabilidade dos conceitos.

Segundo Mazur (2015), há problemas no método tradicional de ensino, pois a apresentação do conteúdo consiste muita das vezes, em um monólogo no qual não há a interação entre os alunos, e entre os alunos e o professor. Neste sentido, o autor percebe que a aula se torna pouco atrativa para o discente, o que dificulta o pensamento crítico do aluno e a sua autonomia.

Este acredita que os estudantes precisam participar ativamente das aulas, debatendo entre si os problemas propostos e, além disso, “É necessário que o livro e as aulas expositivas desempenhem papéis diferentes dos que costumam exercer em uma disciplina convencional” (MAZUR, 2015). Desse modo, ele ressalta a importância da utilização dos elementos relevantes do material didático com os seus respectivos temas centrais durante a apresentação do conteúdo, em detrimento de uma aula com excessos de informações que podem tornar a explicação monótona e pouco cativante para os estudantes. Com isso, o método desenvolvido por Eric Mazur, professor de Física da Universidade de Harvard, ensina os fundamentos conceituais para conduzir os estudantes a um melhor desempenho na resolução de problemas e, ainda, promove a participação do aluno, o que de fato, segundo o autor:

> Quebra a inevitável monotonia das aulas expositiva passivas, e mais importante, os estudantes não se limitam a simplesmente assimilar o material que lhes é apresentado, eles devem pensar por si mesmos e verbalizar seus pensamentos. (MAZUR, 2015, p.23)

O autor explica a necessidade de se conversar e motivar os alunos antes de aplicar o novo método (*Peer Instruction*), pois considera que uma mudança no formato tradicional da aula expositiva pode causar certa insegurança, inicialmente, no estudante. Portanto, Mazur defende que o docente dialogue com os alunos, explique passo a passo como funciona a instrução por pares e, além disso, realize questionários qualitativos, perguntando aos alunos sobre o que eles esperam com relação ao aprendizado e ao desenvolvimento do conteúdo que será ministrado. Durante o decorrer do curso, propõe que se utilize os questionários para perguntar ao estudante o que ele está achando desta nova metodologia, se ela está sendo útil como mecanismo facilitador do aprendizado.

Dessa forma, ele acredita que para converter o estilo tradicional de aula para o novo modelo do *Peer Instruction* é necessário realizar algumas etapas:

1. definir quais são os pontos fundamentais que precisam ser tratados;
2. realização de testes conceituais que devem satisfazer alguns critérios:

- focar em um único conceito;

- as perguntas devem ser de múltipla escolha e sem ambiguidades;
- os testes não devem ser muito fáceis, nem muito difíceis.

2.3 Organização do *Peer Instruction*

A argumentação de Mazur é que o docente deverá realizar "apresentações curtas sobre os pontos-chaves, cada uma seguida de um teste conceitual".

De acordo com Crouch *et al* (2007), a instrução por pares tem maior relevância, quando o percentual de acerto no teste proposto estiver entre 35% e 70%. Caso os estudantes obtenham o acerto inicial superior aos 70%, então o seu entendimento com relação ao conceito do problema ficou claro, e com isso não haverá a necessidade imediata dos debates entre os discentes, visto que a maioria optou pela mesma alternativa como resposta ao exercício. Assim, o professor pode explicar o problema sem as interações entre os alunos e a aula prossegue para o próximo tópico.

Por outro lado, se os estudantes obtiverem resultado inferior a 35% de acerto, então o docente deverá explicar novamente, de forma minuciosa, o tema proposto, já que neste caso, os alunos não tiveram o entendimento satisfatório dos conceitos para realizarem as discussões. Além disso, realizar-se-á um novo teste, mantendo o assunto abordado inicialmente, com o intuito de se obter uma porcentagem de acerto superior a 70%.

Em contrapartida, caso o percentual de acerto dos discentes esteja entre 35% e 70%, o professor deverá realizar os debates com os alunos para que eles expliquem entre si e ao próprio professor o motivo de ter escolhido a alternativa que ele acha correta. Após as discussões, os discentes responderão novamente à pergunta, até que a porcentagem de acertos supere os 70%. Após isto, o docente explicará o exercício e seguirá com seu planejamento para o próximo tópico da aula.

2.4 A importância dos conceitos e do raciocínio lógico para a Matemática

O Raciocínio lógico é significativo para o entendimento da Matemática, pois estimula a autonomia do aluno, o que ajuda o estudante na tomada de decisões, assim como também tem valor para o discente associar a Matemática aos problemas do cotidiano.

Conforme Crato (2010), é necessário insistir no domínio conceitual e em métodos ativos que trabalhem os diversos aspectos da aprendizagem, assim como na fluidez dos procedimentos de ensino para instigar o desenvolvimento cognitivo, a fim de estimular no aluno o raciocínio independente e a sua autonomia. Neste sentido, vale ressaltar a conexão entre os conceitos e o raciocínio lógico, pois conforme o estudante aprimora o seu entendimento conceitual, este consegue raciocinar e entender melhor os problemas matemáticos.

> O domínio de conceitos, técnicas e algoritmos matemáticos é um dos principais factores de exercício de uma vida activa e plena. Não estão só em causa as capacidades que são directamente derivadas do treino matemático. Estão também em causa as capacidades de raciocínio lógico rigoroso, de quantificação de resultados e de distinção entre certeza e probabilidade. (CRATO, 2010, p.3-4).

Acrescentam-se, ainda, diferentes maneiras de entender determinado assunto, por meio das vastas situações e formas de analisar e raciocinar sobre o desenvolvimento das ideias necessárias para resolução de problemas. Com isso, Pontes (2019) evidencia a necessidade de desenvolver novas técnicas de ensino para estimular o aluno com relação à aprendizagem da Matemática. Neste sentido, o autor destaca quatro pilares para o ensino eficiente ao qual denomina de “RICA”: Raciocínio lógico, inteligência Matemática, Criatividade e Aprendizagem. Além disso, o autor destaca a importância da lógica como uma “sequência de argumentos para se chegar a uma conclusão”. Assim, estimula o aluno a pensar, refletir, desenvolver o raciocínio de forma autônoma, crítica e construtiva.

2.5 Recorrência e o raciocínio algébrico e funcional

Um dos aspectos do raciocínio algébrico é a capacidade do aluno de determinar qualquer termo de uma sequência, seja numérica ou não, generalizando-a por meio de uma regra.

Uma das formas de expressar a generalização é a recorrência. Tal processo é chamado de raciocínio funcional, ou seja, a relação existente entre duas grandezas particulares, por meio de uma lei de formação.

Segundo Kaput *et al.* (2017) o raciocínio algébrico tem como âmago a generalização de ideias matemáticas a partir de casos particulares. Neste sentido, o autor percebe que o raciocínio funcional está inserido no eixo do raciocínio algébrico, já que trata da construção e da generalização das ideias matemáticas com o intuito de estabelecer relações e padrões. Desta forma, com a concepção do raciocínio funcional, o estudante deve ser capaz de obter uma lei de formação que associa o problema a qualquer caso particular. Assim, pode-se citar como exemplo a generalização dos números pares para o conjunto dos números naturais maiores que zero. Observe a sequência a seguir com os quatro primeiros números pares, excluindo-se o zero: $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$. Para conseguir obter uma generalização a partir dos dados fornecidos da sequência, torna-se útil escrever os números da seguinte maneira:

$$2 = 2 \times 1$$
$$4 = 2 \times 2$$
$$6 = 2 \times 3$$
$$8 = 2 \times 4$$
$$\vdots$$
$$Generalizando\ para\ um\ número\ par\ \text{"}N\text{"}\ qualquer, obtém - se$$
$$\boxed{N = 2 \times n}$$

Ou seja, a lei de formação será $N = 2n, \forall\, n \in$ Naturais maiores que zero. O importante a ser observado é que para qualquer valor de $n > 0$ tomado, encontra-se um valor para N que pertence ao conjunto dos números pares maiores que zero.

Perceba, agora, a associação destes conceitos do raciocínio algébrico e funcional com as recorrências. Para Pinheiro e Lazzarin (2015, p.14) “Uma equação é de natureza recursiva quando é definida em função dela mesma aplicada a valores anteriores”. Ou seja, pode-se determinar qualquer termo desta recorrência a partir de valores precedentes. Observe: a sequência dos números naturais pares é da forma $A_{n+1} = A_n + 2$, com $n \geq 1$ e com valor inicial $A_1 = 2$. Logo, verifique a determinação de alguns valores desta sequência em ordem crescente. Veja:

$$A_1 = 2$$
$$A_{1+1} = A_1 + 2 = 2 + 2 = 4, \text{ logo: } A_2 = 4$$
$$A_{2+1} = A_2 + 2 = 4 + 2 = 6, \text{ logo: } A_3 = 6$$
$$A_{3+1} = A_3 + 2 = 6 + 2 = 8, \text{ logo: } A_4 = 8$$

Constate, assim, que qualquer valor desta sequência pode ser determinado ao obter-se o valor do termo anterior. Assim o estudante será capaz ao analisar esta sequência recursiva de obter uma lei de formação geral para os números pares maiores que zero, que não dependa do termo anterior, com isso ele chegará à equação que foi vista anteriormente:

$$A_n = 2n, \forall\, n > 0 \text{ e } n \in \text{naturais.}$$

Perceba, também, que diferentemente do que foi visto anteriormente, em que foi obtida a lei de formação a partir de casos particulares. Caso seja fornecida a lei de formação, pode-se chegar a qualquer caso particular que se queira. Assim, verifique os seguintes exemplos:

1. Caso particular para $n = 9 \rightarrow A_9 = 2 \times 9 = 18$;
2. Caso particular para $n = 90 \rightarrow A_{90} = 2 \times 90 = 180$.

2.6 A sequência de Fibonacci

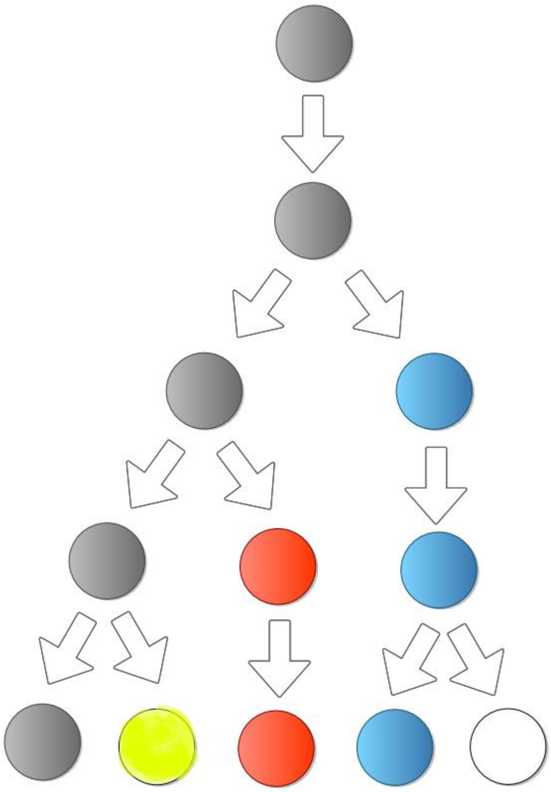
A sequência de Fibonacci foi formada a partir de um problema apresentado no livro *Liber Abacci* de 1202 (capítulo 12), onde este problema é apresentado da seguinte forma:

- suponha que, inicialmente, tem-se um par de coelhos (macho e fêmea). Estes coelhos vão se reproduzir a partir do 1º mês e sempre gerarão um casal de coelhos a cada mês subsequente, ou seja, a partir do 2º mês este casal irá gerar um novo casal de coelhos, no 3º mês outro casal de coelhos, e assim sucessivamente. Agora, suponha que estes coelhos vivam indefinidamente e que, o casal de filhote gerado sempre obedecerá à mesma regra de reprodução inicialmente estabelecida. Pergunta-se: Após um ano, quantos casais de coelhos haverá no total?

Para responder a esta pergunta, vamos analisar a representação a seguir:

- considere na figura seguinte que cada círculo representa um casal de coelhos, ou seja, um par misto (macho e fêmea);

Figura 1 - Representação da sequência de Fibonacci



Fonte: O autor, 2021

- admita, também, que inicialmente tem-se a ilustração no mês zero e, após cada etapa representada na figura é passado o tempo de um mês, ou seja, a representação acima está mostrando o que acontece no período de zero até quatro meses;

- observe que na figura, percebe-se a seguinte sequência que diz respeito à quantidade de casal de coelhos de acordo com o tempo n decorrido: $\{ \underbrace{1}_{n=0}, \underbrace{1}_{n=1}, \underbrace{2}_{n=2}, \underbrace{3}_{n=3}, \underbrace{5}_{n=4} \}$;
- o padrão percebido para esta sequência é que o terceiro termo será a soma dos dois termos antecessores, ou seja, o primeiro termo mais o segundo, portanto:
- $A_3 = A_1 + A_2 = 1 + 1 = 2$. Da mesma forma que;
- $A_4 = A_2 + A_3 = 1 + 2 = 3$. Analogamente percebe-se o fato de que;
- $A_5 = A_3 + A_4 = 2 + 3 = 5$;
- generalizando para qualquer termo, obtém-se: $A_{n+2} = A_n + A_{n+1}$.

Portanto para se chegar ao que acontecerá com a quantidade de casal de coelhos após um ano, é necessário observar o décimo terceiro termo, isto é, o A_{13}.

Para chegar à quantidade de casais do A_{13}, é preciso construir a sequência até o A_{12}, já que pela generalização percebida, sabe-se que $A_{13} = A_{11} + A_{12}$.

- $A_6 = A_4 + A_5 = 3 + 5 = 8$
- $A_7 = A_5 + A_6 = 5 + 8 = 13$
- $A_8 = A_6 + A_7 = 8 + 13 = 21$
- $A_9 = A_7 + A_8 = 13 + 21 = 34$
- $A_{10} = A_8 + A_9 = 21 + 34 = 55$
- $A_{11} = A_9 + A_{10} = 34 + 55 = 89$
- $A_{12} = A_{10} + A_{11} = 55 + 89 = 144$
- $A_{13} = A_{11} + A_{12} = 89 + 144 = 233$

Finalmente, conclui-se que após um ano haverá 233 casais de coelhos no total. Para facilitar o entendimento do estudante, o professor ao explicar a sequência de Fibonacci pode representar o início do problema como sendo o termo A_0. Dessa forma, após um mês o termo encontrado é o A_1, após dois meses, obtém-se o A_2, e analogamente, após 12 meses, acha-se o termo A_{12}. Observe abaixo como fica a esquematização a partir da Tabela 1 que relaciona o tempo decorrido em meses, representado por "*n*" e a quantidade de casal de coelhos que são os termos representados por A_n.

Tabela 1 – Relação entre o tempo decorrido e a quantidade de casal de coelhos

Tempo decorrido (meses)	Quantidade de casal de coelhos
$\boldsymbol{n = 0}$	$A_0 = 1$
$\boldsymbol{n = 1}$	$A_1 = 1$
$\boldsymbol{n = 2}$	$A_2 = 2$
$\boldsymbol{n = 3}$	$A_3 = 3$
$\boldsymbol{n = 4}$	$A_4 = 5$
$\boldsymbol{n = 5}$	$A_5 = 8$
$\boldsymbol{n = 6}$	$A_6 = 13$
$\boldsymbol{n = 7}$	$A_7 = 21$
$\boldsymbol{n = 8}$	$A_8 = 34$
$\boldsymbol{n = 9}$	$A_9 = 55$
$\boldsymbol{n = 10}$	$A_{10} = 89$
$\boldsymbol{n = 11}$	$A_{11} = 144$
$\boldsymbol{n = 12}$	$A_{12} = 233$

Fonte: O autor, 2021

Verifica-se que as duas representações que foram mostradas resolvem o problema. Todavia, utilizar o primeiro termo como sendo o A_0, acaba por ser mais didático e de melhor entendimento para o público – alvo que são alunos do Ensino Fundamental II.

2.7 A relação entre o *Peer Instruction* e as recorrências

De acordo com o que foi visto acima, é perceptível que as recorrências de um modo geral se comunicam com o raciocínio funcional e com o raciocínio algébrico. Além disso, Mazur (2015) acredita que o entendimento e a compreensão dos conceitos são essenciais para o desenvolvimento cognitivo do discente. Desse modo, aplicar a instrução por pares no conteúdo de recorrência para o ensino remoto torna-se aconselhável, à medida que "Os problemas propostos na OBMEP englobam uma grande variedade de conceitos matemáticos" (PINHEIRO; LAZZARIN, 2015, p.3), e foi observado que há questões conceituais envolvendo recursividade não apenas na prova da OBMEP, como também na prova Brasil. Dessa forma, como a recorrência é um assunto de natureza conceitual, e o *Peer Instruction* tem como base a utilização dos conceitos, nota-se que há harmonia entre os conceitos que envolvem recursividade e a instrução por pares.

3 OBJETIVOS

3.1 Objetivo Geral

Contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática no sexto ano do Ensino Fundamental II, por meio da aplicação de uma proposta baseada em metodologia ativa, na modalidade do *Peer Instruction*. Esta será mediada pelas Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação e, além disso, é uma forma de legitimar a instrução por pares como ferramenta de auxílio ao docente com o objetivo de estimular o desenvolvimento e aprendizado do estudante.

3.2 Objetivos Específicos

1. aproximar as metodologias de ensino às necessidades do novo perfil do discente, utilizando o ensino remoto;
2. promover uma aprendizagem significativa por meio de recursos tecnológicos;
3. despertar o interesse do aluno pela disciplina utilizando a instrução por pares como recurso para a participação efetiva do estudante;
4. tornar as aulas de Matemática, por meio do ensino remoto, mais dinâmicas e atrativas;
5. apresentar aos professores uma forma de abordar os conceitos de recorrência para o Ensino da Matemática, no sexto ano do Ensino Fundamental.

3.3 Justificativa

É importante destacar alguns fatores determinantes para fundamentar a pertinência desta pesquisa. Um deles é a importância de implementar novas metodologias na área de educação para o ensino remoto, pois há a escassez de conteúdos e trabalhos dissertativos com este intuito. Além disso, vale destacar a necessidade de se trabalhar no Ensino Fundamental II o raciocínio lógico dedutivo. Neste sentido, destacam-se problemas que envolvam conceitos de recorrência, aos quais concebem ao estudante uma perspectiva mais ampla sobre os padrões que se estabelecem na Matemática, o que é relevante para aprimorar no discente uma visão intuitiva e fundamentada sobre sequências. Além disso, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Fundamental, há uma lacuna com relação ao ensino de sequências, reconhecimento de padrões e recursividade. No quinto e sexto ano não existem tópicos relativos a este tema, apesar do assunto ser trabalhado nos outros anos do Ensino Fundamental, o que gera uma quebra de continuidade da aprendizagem.

Observe as habilidades previstas acerca do assunto na BNCC ao longo do Ensino Fundamental.

- **Primeiro ano do ensino fundamental**;

➢ EF01MA10: "Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras".

- **Segundo ano do ensino fundamental;**

➢ EF02MA09: "Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente e partir de qualquer número, utilizando uma regularidade estabelecida".

➢ EF02MA10: "Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos".

➢ EF02MA11: "Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras".

- **Terceiro ano do ensino fundamental**;

➢ EF03MA10: "Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes".

- **Quarto ano do ensino fundamental – Unidade temática – Álgebra;**

➢ Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.

➢ Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser dividido por um mesmo número natural diferente de zero.

- **Sétimo ano do ensino fundamental**;

➢ EF07MA14: "Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na Matemática, mas também nas artes e na literatura".

➢ EF07MA15: "Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas".

- **Oitavo ano do ensino fundamental**;

➢ EF08MA10: "Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes".

- **Nono ano do ensino fundamental**;

- não há nenhum tópico que fale sobre recorrência, entretanto há vários itens que falam sobre funções e há também tópicos que discorrem sobre proporcionalidade, que são assuntos interligados ao conteúdo de recorrência, principalmente quando se utiliza uma abordagem voltada ao conjunto dos números inteiros.

Verifica-se, então, a ausência nas habilidades da BNCC referente ao conteúdo de recorrência para o quinto e sexto ano, justamente os anos que são aplicadas a prova Brasil e a prova da OBMEP (Nível 1), onde muitas questões são resolvidas usando-se a recursividade.

A prova Brasil tem o objetivo de "avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro" e a Prova da OBMEP "estimular o estudo da Matemática por meio da resolução de problemas que despertem o interesse e a curiosidade de professores e estudantes". Assim, torna-se pertinente que haja uma abordagem sobre recursividade para alunos tanto do quinto, quanto do sexto ano, como também se faz necessário apresentar meios para que o estudante consiga compreender o conteúdo que está sendo ensinado. Desta forma, o *Peer Instruction*, apresenta-se como um mecanismo de assistência ao professor, pois implementa debates, discussões entre os alunos, a partir das respostas obtidas ao problema proposto, o que sugere que haverá uma progressão gradual com relação ao aprendizado.

Considerando o ensino remoto, utilizar a instrução por pares torna-se importante à medida que é um desafio para o docente obter a participação do aluno. Passando a ser um parâmetro para o professor considerar o entendimento ou não do estudante com relação ao conteúdo ministrado. Destaca-se, ainda, que esta pesquisa será aplicada a uma parte específica do conteúdo matemático, entretanto o intuito é validar a Instrução por pares no ensino remoto como mecanismo de apoio ao professor.

4 METODOLOGIA

Essa pesquisa possui uma classificação participativa uma vez que se caracteriza pela interação entre o pesquisador e o grupo de alunos que fará parte da pesquisa.

A intenção é que esses alunos aumentem seu entendimento do assunto, no caso, aprendizagem de recorrência, utilizando-se do *Peer Instruction* por meio do ensino remoto. Fazendo assim parte de uma ação de mudança na forma de interagir e na maneira de aprender e compartilhar o conhecimento com os outros estudantes.

Nesse sentido, é fundamental que os alunos conheçam todos os passos da pesquisa sem fazer diferença entre o pesquisador e os pesquisados.

A pesquisa participativa é normalmente utilizada quando se pretende elaborar, após cada encontro com os alunos, descrições qualitativas. Daí pode-se afirmar que se trata de uma pesquisa qualitativa participante, mais especificamente uma pesquisa qualitativa participante virtual. A observação por participante virtual é uma adaptação da proposta de Mann e Stewart (2000) para estudar comunidades *online*.

A especificação com relação a abordagem metodológica é de forma qualitativa e de tratamento participativo, conforme já foi mencionado anteriormente e, além disso, pode ser classificado, quanto à natureza, como sendo uma pesquisa aplicada, pois tem como intenção gerar conhecimentos na área da Matemática, com relação à prática docente para o ensino remoto.

Além do mais, o trabalho envolveu pesquisa com seres humanos nos termos das resoluções CNS nº 510/2016 e nº 466/2012 e obteve parecer de aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa do Colégio Pedro II (CEP/CPII); por meio do Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE) Nº 44451221.6.0000.9047.

5 OFICINA SOBRE SEQUÊNCIAS RECURSIVAS E NÃO RECURSIVAS (Material teórico utilizado)

A oficina sobre padrões recursivos e não recursivos foi dividida em oito encontros remotos com duração de 90 minutos para cada aula. Dessa forma, em sua totalidade, foram destinados 12 horas para o estudo de sequências.

5.1 Introdução as sequências e o estudo dos padrões – Material inicial

Inicialmente foi elaborado um material prévio com os conceitos, exemplificação e aprofundamento sobre as sequências recursivas. Esta proposta inicial é baseada na metodologia ativa da sala de aula invertida adaptada para o ensino remoto, pois a intenção é analisar o quanto o aluno consegue assimilar do conteúdo apenas com o uso do material teórico sem a aula expositiva e sem a utilização da instrução por pares. Veja abaixo o material teórico prévio preparado.

Uma sequência é recursiva quando um termo qualquer da sequência pode ser determinado a partir de termos anteriores. Analogamente, uma sequência não é recursiva quando o padrão encontrado não tem relação com os termos antecessores. Para conseguir perceber se uma sequência é recursiva ou não é necessário identificar padrões. Estes por sua vez, podem aparecer de várias maneiras nos exercícios. Atente-se aos exemplos abaixo e entenda melhor sobre a percepção dos padrões.

$\boldsymbol{Exemplo_1}$: Tânia tem um saldo bancário de $R\$\ 1800{,}00$. Se ela fez cinco saques no valor de $R\$\ 500{,}00$ cada, quanto ficou o saldo final de Tânia? Ela ficou devendo ao banco?

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$: neste primeiro exercício, o aluno pode resolver o problema sem ter a percepção da sequência recursiva, porém o intuito é mostrar para o discente que os padrões acontecem em muitas ocasiões, mesmo que não sejam percebidos. Observe que ao denominar o primeiro termo $A_0 = 1800$, fica compreensível que o próximo termo será $A_1 = 1800 - 500 = 1300$, analogamente $A_2 = 1300 - 500 = 800$, e assim por diante. Veja a tabela 2 a seguir que associa a quantidade de saques realizados, representado por "n" com o saldo bancário de Tânia, retratado por A_n.

Tabela 2 – Associação entre a quantidade de saques realizados e o saldo bancário

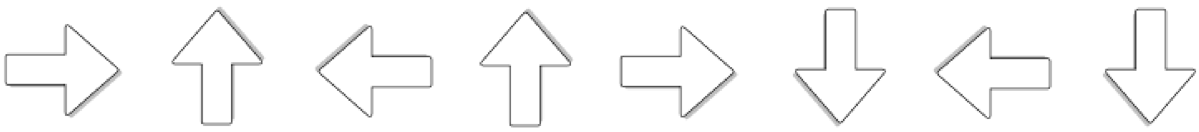
Quantidade de saques realizados	Saldo bancário (Reais)
$n = 0$	$A_0 = 1800$
$n = 1$	$A_1 = 1300$
$n = 2$	$A_2 = 800$
$n = 3$	$A_3 = 300$
$n = 4$	$A_4 = -200$
$n = 5$	$A_5 = -700$
Generalização Recursiva	$\boldsymbol{A_{n+1} = A_n - 500}$

Fonte: O autor, 2021

Após desenvolver todos os termos desse problema, é perceptível que de cada termo posterior é retirado o valor do saque ($R\$500,00$) em relação ao termo anterior, portanto $A_{n+1} = A_n - 500$ é a lei de formação recursiva da sequência. Todavia há ainda outra generalização, que não leva em consideração o termo anterior, mas sim a quantidade de saques que foram realizados e o termo inicial A_0. Veja que $A_n = A_0 - 500n$ e com esta lei de formação não recursiva o problema se torna mais acessível, visto que o exercício já fornece o $A_0 = 1800$ e a quantidade de saques desejada será fornecida para se obter o saldo final. Vale ressaltar que esta representação é denominada de fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, conteúdo este que é introduzido no Ensino Médio.

$\boldsymbol{Exemplo_2}$: um labirinto é formado por um padrão que é percebido por meio do sentido das setas que mostram o caminho para a saída. No início do percurso são fornecidas as oito primeiras setas para um grupo de estudantes que tentarão achar a saída do labirinto e também é disponibilizada a informação de que são treze setas no total. Observe a figura abaixo que mostra as oito primeiras setas, descubra o padrão e diga qual o caminho para a saída deste labirinto.

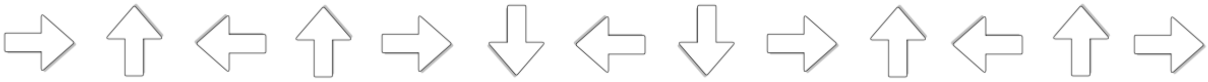
Figura 2 – Setas indicativas do percurso para a saída do labirinto



Fonte: O autor, 2021

Resposta comentada: perceba que o padrão desta sequência é que entre duas setas de sentidos opostos na horizontal, haverá uma seta de direção vertical. Vale ressaltar que as setas na horizontal se alternam, respectivamente, na ordem direita e esquerda, já as setas na vertical aparecem duas vezes no mesmo sentido para depois inverter sua orientação, ou seja duas vezes de sentido para cima para depois aparecer duas vezes de sentido para baixo. Observe a figura 3 em seguida que mostra as treze setas deste labirinto.

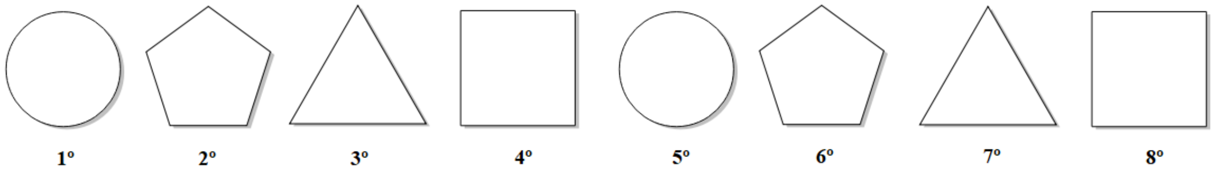
Figura 3 – Todas as setas indicativas do percurso para a saída do labirinto



Fonte: O autor, 2021

$\boldsymbol{Exemplo_3}$: observe a sequência a seguir formada pelas figuras planas abaixo, perceba o padrão da sequência e diga qual figura geométrica aparecerá na posição 230.

Figura 4 – Sequência formada por figuras planas



Fonte: O autor, 2021

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$: veja que o padrão desta sequência é formado pelas figuras planas na seguinte ordem: circunferência, pentágono, triângulo e quadrado. Observe, também, que como a intenção é descobrir a figura na posição 230, fica inviável fazer a sequência de maneira contínua, ou seja, descobrir a figura na posição 9, depois na posição 10 e assim por diante até a posição 230. Portanto, torna-se vantajoso utilizar dos conceitos de divisibilidade, pois o padrão é repetido em blocos de quatro, isto é, a cada quatro figuras é estabelecido um ciclo que se repete indefinidamente. Sendo assim, para resolver este problema basta verificar o resto na divisão de 230 por 4. Analise os seguintes casos:

- resto igual a zero: a figura geométrica será um quadrado;
- resto igual a um: a figura geométrica será uma circunferência;
- resto igual a dois: a figura geométrica será um pentágono;
- resto igual a três: a figura geométrica será um triângulo.

Observação: vale lembrar que na divisão por quatro os restos possíveis são zero, um, dois ou três.

Efetuando a divisão de 230 por 4 verifica-se que o resto vale dois e, consequentemente, a figura na posição 230 será um pentágono.

5.2 A diferença entre sequências recursivas e não recursivas – segundo encontro

Anteriormente foi visto que para uma sequência ser recursiva, é necessário que um termo qualquer da sequência seja determinado a partir de termos anteriores. Analogamente, uma sequência é não recursiva quando um termo qualquer da sequência não tem relação com os termos anteriores. Observe os exemplos a seguir e analise as sequências quanto a recursividade e não recursividade.

$\boldsymbol{Exemplo_1}$: $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \ldots\}$

Esta sequência pode ser escrita de forma recursiva, ao se analisar que cada termo seguinte é o termo anterior somado de duas unidades, ou seja: $A_{n+1} = A_n + 2$. Perceba que esta lei de formação é recursiva, pois para determinar o termo subsequente é indispensável ter, também, o termo antecedente.

Agora, caso seja percebido que a sequência é formada pelos números naturais pares, então esta é uma percepção não recursiva, pois a determinação dos termos da sequência não tem relação com os termos anteriores, citando como exemplo, os números 432, 680, 1000, que fazem parte desta sequência e isto é conhecido apenas pelo fato deles serem números naturais e pares.

Nesta sequência, pode-se encontrar uma lei de formação não recursiva que é da forma $A_n = 2n$, e com isso cada valor vai depender apenas da posição do número desejado na sequência. Perceba, ainda, que na primeira posição está o número zero, portanto nesta posição inicial $n = 0$, implica em $A_0 = 0$. Caso seja preciso saber o número na posição 10, basta tomar $n = 9$, o que resulta em $A_9 = 2 \times 9 = 18$. Analogamente, para determinar o termo 1001, basta tomar $n = 1000$, o que resulta em $A_{1000} = 2000$. Observe então que neste caso a posição, o termo do número par na sequência será sempre uma unidade a mais que o valor de "n". Todavia, ao considerar a lei de formação da seguinte forma: $A_{n+1} = 2n$, este aspecto será "corrigido", pois para $n = 0$, implica em $A_{0+1} = A_1 = 2 \times 0 = 0$. Analogamente, para $n = 49$, resulta em $A_{49+1} = A_{50} = 2 \times 49 = 98$ e, desta forma, o termo já aparece no índice da fórmula, ou seja, o $A_1 = 0$ representa o primeiro termo, assim como o $A_{50} = 98$ corresponde ao quinquagésimo termo.

$\boldsymbol{Exemplo_2}$: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots\}$

Perceba que esta sequência é não recursiva. Neste caso, em específico, não há como determinar a lei de formação para a sequência, porém dá para identificar o padrão analisando os termos, que é o de uma sequência formada pelos números primos.

$\boldsymbol{Exemplo_3}$: $\{2, 18, 3, 30, 5, 25, 29, \ldots\}$

Neste exemplo fica evidente que se trata de uma sequência não recursiva e, além disso não há como determinar uma lei de formação, tal qual não é possível identificar um padrão. Portanto, trata-se de uma sequência de números aleatórios.

Finalmente, é válido destacar que em uma sequência recursiva sempre haverá um padrão, como também uma lei de formação, além do que cada termo analisado estará associado a termos antecessores. Todavia, ao analisar uma sequência de forma não recursiva, a única afirmação possível é que não há relação entre o termo considerado e os termos anteriores, porém esta mesma sequência pode ter ou não uma lei de formação, assim como pode seguir ou não um determinado padrão.

5.3 Progressão aritmética de primeira ordem – terceiro encontro

A progressão aritmética de primeira ordem é toda sequência em que cada termo, válido a partir do segundo, é igual ao termo anterior somado por uma constante r, ao qual é denominada de razão de uma P.A. Observe:

$$A_2 = A_1 + r$$
$$A_3 = A_2 + r$$
$$A_4 = A_3 + r$$
$$\vdots$$
$$A_n = A_{n-1} + r$$
$$A_{n+1} = A_n + r$$

Perceba que esta lei de formação mostrada acima é de forma recursiva, pois o termo desejado depende do termo anterior, todavia uma progressão aritmética também pode ser analisada de uma maneira não recursiva, verifique a construção abaixo:

$$A_2 = A_1 + r$$
$$A_3 = A_1 + 2r$$
$$A_4 = A_1 + 3r$$
$$A_5 = A_1 + 4r$$
$$\vdots$$
$$A_n = A_1 + (n-1)\,r$$
$$A_{n+1} = A_1 + nr$$

Observe que um termo qualquer A_n depende apenas do termo inicial, da razão e do número de termos acrescidos a partir de A_1, não dependendo, assim, do termo anterior A_{n-1}. Atente-se aos exemplos a seguir e tente reconhecer os padrões de uma progressão aritmética.

$\boldsymbol{Exemplo_1}$: observe a sequência a seguir e descubra o valor da razão.

$$\text{Sequência: } \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$$

Ao analisar a sequência, fica perceptível que a razão $\boxed{r = 3}$, pois:

$$4 - 1 = 7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 3.$$

Ou ainda, é percebível de forma recursiva que:

$$A_2 = A_1 + 3$$

$$A_3 = A_2 + 3$$

$$A_4 = A_3 + 3$$

$$Conclui - se, \text{então}, que$$

$$\boxed{razão = 3}$$

Ao descobrir o valor da razão, pode-se encontrar qualquer termo desta sequência de forma não recursiva. Tomando como exemplo o trigésimo termo, obtém-se que:

$$A_{30} = A_1 + 29r$$

$$A_{30} = 1 + 29 \times 3$$

$$\boxed{A_{30} = 88}$$

A partir do resultado obtido para o trigésimo termo, é possível encontrar, por exemplo, o valor do trigésimo quinto termo de forma recursiva, como também de maneira não recursiva. Compreenda que, ao utilizar o recurso recursivo, é necessário avançar para o trigésimo primeiro termo, já que $A_{31} = A_{30} + 3$, o que implica em $\boxed{A_{31} = 91}$. Seguindo este mesmo raciocínio constata-se:

$$A_{32} = A_{31} + 3 \rightarrow A_{32} = 91 + 3 \rightarrow \boxed{A_{32} = 94}$$

$$A_{33} = A_{32} + 3 \rightarrow A_{33} = 94 + 3 \rightarrow \boxed{A_{33} = 97}$$

$$A_{34} = A_{33} + 3 \rightarrow A_{34} = 97 + 3 \rightarrow \boxed{A_{34} = 100}$$

$$A_{35} = A_{34} + 3 \rightarrow A_{35} = 100 + 3 \rightarrow \boxed{A_{35} = 103}$$

Agora, caso seja utilizada a forma não recursiva. O aluno pode tomar como ponto de partida o primeiro termo A_1, assim como também adotar o termo A_{30} como referência, uma vez que foram obtidos os valores de ambos os termos.

Para encontrar o termo A_{35} tomando como base o primeiro termo, basta perceber que: $A_{35} = A_1 + 34r \rightarrow A_{35} = 1 + 34 \times 3 \rightarrow \boxed{A_{35} = 103}$.

Da mesma forma que, tomando como ponto de partida o termo A_{30} verifica-se o seguinte: $A_{35} = A_{30} + 5r$, portanto obtém-se que $A_{35} = 88 + 5 \times 3 \rightarrow \boxed{A_{35} = 103}$.

5.3.1 Soma dos termos de uma progressão aritmética – terceiro encontro

Para conseguir realizar a soma de uma P.A de forma mais eficiente, torna-se válido entender o seguinte pensamento contido na explicação do exemplo a seguir:

$\boldsymbol{Exemplo_2}$: qual a soma dos 1000 primeiros termos da sequência a seguir: $\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 1000\}$?

Primeiramente, a sequência acima é uma progressão aritmética de razão $r = 1$. Para realizar esta soma, provavelmente o estudante poderia pensar em somar termo a termo, porém como esta soma vai até o A_{1000}, então, torna-se inviável desenvolver o exercício desta maneira. Todavia, pode-se perceber o seguinte padrão mostrado na figura 5 a seguir:

Figura 5 – Padrão para soma dos termos de uma progressão aritmética

$$1+2+3+4+5+\ldots+1000$$

$$1000+999+998+997+996+\ldots+1$$

Fonte: O autor, 2021

Veja que nesta figura, a soma dos termos da sequência foi realizada duas vezes, uma na ordem direta e outra na ordem inversa, entretanto ao analisar a figura, fica perceptível que ao somarmos:

$$A_1 + A_{1000} = 1001$$
$$A_2 + A_{999} = 1001$$
$$A_3 + A_{998} = 1001$$
$$A_4 + A_{997} = 1001$$
$$\vdots$$
$$A_{997} + A_4 = 1001$$
$$A_{998} + A_3 = 1001$$
$$A_{999} + A_2 = 1001$$
$$A_{1000} + A_1 = 1001$$

Com isto, observa-se que há 1000 somas sendo feitas, pois em cada soma há duas parcelas e o resultado obtido em cada operação é 1001, o que implica em: $\text{Soma} = 1001 \times 1000$, só que foram utilizadas, conforme mencionado acima, duas sequências, uma na ordem direta e outra na ordem inversa, portanto a quantidade de somas acaba sendo a quantidade de termos da progressão aritmética inicial. É válido ressaltar, ainda, que é preciso efetuar a divisão por dois no cálculo da soma dos termos desta progressão. Como se tem duas sequências iguais sendo somadas, mas, o exercício pede a soma de uma sequência apenas, então a divisão acaba por "corrigir" o fato de se ter utilizado duas sequências ao invés de uma.

$$\text{Soma dos } 1000 \text{ termos} = S_{1000} = \frac{1001 \times 1000}{2} = 500.500$$

Finalmente, pode-se fazer uma conjectura mais abrangente com relação à soma dos "n" termos de uma progressão aritmética: $S_n = \frac{(A_1 + A_n) \times n}{2}$.

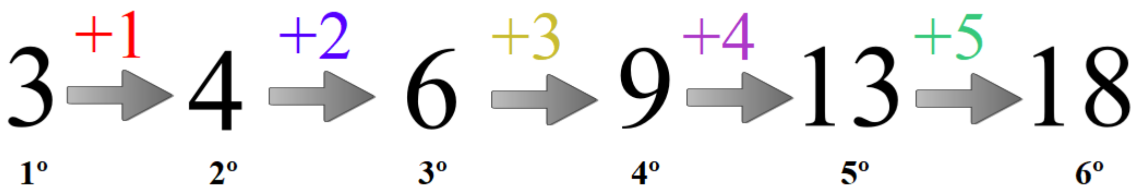
5.4 Progressão aritmética de segunda ordem – quarto encontro

Uma progressão aritmética de segunda ordem é toda sequência em que a diferença entre o termo A_n e o termo A_{n-1} é uma progressão aritmética de primeira ordem, ou seja, a diferença entre o termo analisado e o termo antecessor é uma P.A. Outra forma de compreender uma sequência com este padrão é percebendo que os acréscimos sucessivos para avançar aos termos posteriores serão uma progressão aritmética de primeira ordem. Veja alguns exemplos:

$\boldsymbol{Exemplo_1}$: dada a sequência $S = \{3, 4, 6, 9, 13, \ldots\}$. Identifique seu padrão e determine o sexto termo e o décimo termo.

Para perceber o padrão desta sequência, observe a figura 6 a seguir:

Figura 6 – Padrão recursivo de uma progressão aritmética de segunda ordem



Fonte: O autor, 2021

Verifique que o acréscimo para se chegar ao termo seguinte obedece ao padrão de uma progressão aritmética, analise:

$A_1 \rightarrow A_2$ há o acréscimo de uma unidade

$A_2 \rightarrow A_3$ há o acréscimo de duas unidades

$A_3 \rightarrow A_4$ há o acréscimo de três unidades

$A_4 \rightarrow A_5$ há o acréscimo de quatro unidades

$A_5 \rightarrow A_6$ há o acréscimo de cinco unidades

Portanto, a sequência formada pelos acréscimos sucessivos é uma P.A com os seguintes termos: $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, com isso, chega-se à resposta da primeira parte do exemplo, já que o sexto termo $A_6 = 18$.

Além disso, foram utilizadas duas formas para calcular o décimo termo A_{10}.

$\boldsymbol{Forma_1}$: continuar os acréscimos sucessivos até obter o décimo termo, vide figura 7 abaixo:

Figura 7 – Continuação da figura 6 – Padrão recursivo de uma P.A de segunda ordem

$$\underset{6^{\text{o}}}{18} \xrightarrow{+6} \underset{7^{\text{o}}}{24} \xrightarrow{+7} \underset{8^{\text{o}}}{31} \xrightarrow{+8} \underset{9^{\text{o}}}{39} \xrightarrow{+9} \underset{10^{\text{o}}}{48}$$

Fonte: O autor, 2021

$\boldsymbol{Forma_2}$: perceber o seguinte padrão:

$$A_2 = 3 + 1$$

$$A_3 = 3 + 1 + 2$$

$$A_4 = 3 + 1 + 2 + 3$$

$$\vdots$$

$$A_{10} = 3 + \underbrace{\underbrace{(1 + 2 + 3 + \cdots + 9)}_{\textbf{Soma de uma P.A de razão=1}}}_{S_n = \frac{(A_1 + A_n) \times n}{2}}$$

$$A_{10} = 3 + \frac{[(1 + 9) \times 9]}{2} \rightarrow \boxed{A_{10} = 48}$$

$$\vdots$$

Conjecturando para qualquer termo “n” $\rightarrow A_n = 3 + \underbrace{[1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1)]}_{\substack{\textbf{Soma de uma P.A de razão=1} \\ \textbf{e } (\mathbf{n-1}) \textbf{ termos} \\ S_{n-1} = \frac{(1 + (n-1)) \times (n-1)}{2}}}$

$$\boxed{A_n = 3 + \frac{(n^2 - n)}{2}}$$

Perceba que esta fórmula só depende da quantidade de termos “n”, para calcular o A_{10} por esta forma, basta fazer:

$$A_{10} = 3 + \frac{(10^2 - 10)}{2} \rightarrow A_{10} = 45 + 3 \rightarrow \boxed{A_{10} = 48}$$

5.5 Progressão geométrica – quinto encontro

A progressão geométrica é toda sequência em que cada termo, válido a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q, que é denominada de razão de uma P.G. Observe:

$$A_2 = A_1 \times q$$

$$A_3 = A_2 \times q$$

$$A_4 = A_3 \times q$$

$$\vdots$$

$$A_n = A_{n-1} \times q$$

$$A_{n+1} = A_n \times q$$

Perceba que esta lei de formação mostrada acima é de forma recursiva, pois o termo desejado depende do termo anterior. Todavia uma progressão geométrica também pode ser analisada de uma maneira não recursiva, verifique a construção abaixo:

$$A_2 = A_1 \times q$$

$$A_3 = A_1 \times q^2$$

$$A_4 = A_1 \times q^3$$

$$\vdots$$

$$A_n = A_1 \times q^{n-1}$$

$$A_{n+1} = A_1 \times q^n$$

Observe que um termo qualquer A_n depende apenas do termo inicial, da razão e da quantidade de termos inseridos a partir de A_1, não dependendo, assim do termo anterior A_{n-1}. Atente-se aos exemplos a seguir e tente reconhecer os padrões de uma progressão geométrica

$\boldsymbol{Exemplo_1}$: analise a sequência abaixo e descubra o valor da razão.

$$\text{Sequência:} \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$$

Após analisar a sequência, verifica-se que o valor da razão $q = 2$, pois:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$$

ou ainda, é percebível de forma recursiva que:

$$A_2 = A_1 \times 2$$

$$A_3 = A_2 \times 2$$

$$A_4 = A_3 \times 2$$

$$\vdots$$

$$A_n = A_{n-1} \times \boxed{\underbrace{2}_{raz\tilde{a}o\ q=2}}$$

Ao descobrir o valor da razão, pode-se encontrar qualquer termo da sequência de forma não recursiva. Tomando como exemplo o décimo termo, observa-se que:

$$A_{10} = A_1 \times q^9$$

$$A_{10} = 1 \times 2^9$$

$$A_{10} = 1 \times 512 \rightarrow \boxed{A_{10} = 512}$$

A partir do resultado obtido para o décimo termo, é possível encontrar, por exemplo, o valor do décimo quinto termo de forma recursiva, assim como também de maneira não recursiva. Perceba que ao utilizar o método recursivo, é necessário avançar para o décimo primeiro termo, já que $A_{11} = A_{10} \times 2$, o que implica em $A_{11} = 512 \times 2 \rightarrow \boxed{A_{11} = 1.024}$. Seguindo este mesmo raciocínio, chega-se em:

$$A_{12} = A_{11} \times 2 \rightarrow A_{12} = 1024 \times 2 \rightarrow \boxed{A_{12} = 2.048}$$

$$A_{13} = A_{12} \times 2 \rightarrow A_{13} = 2048 \times 2 \rightarrow \boxed{A_{13} = 4.096}$$

$$A_{14} = A_{13} \times 2 \rightarrow A_{14} = 4096 \times 2 \rightarrow \boxed{A_{14} = 8.192}$$

$$A_{15} = A_{14} \times 2 \rightarrow A_{15} = 8192 \times 2 \rightarrow \boxed{A_{15} = 16.384}$$

Caso seja utilizada a forma não recursiva, é possível estabelecer como ponto de partida o primeiro termo A_1, como também adotar o termo A_{10} como referência, uma vez que foram obtidos os valores de ambos os termos.

Para encontrar o termo A_{15} tomando como base o primeiro termo, basta perceber que: $A_{15} = A_1 \times 2^{14} \rightarrow A_{15} = 1 \times 2^{14} \rightarrow \boxed{A_{15} = 16.384}$.

Agora, tomando como ponto de partida o décimo termo A_{10} percebe-se que: $A_{15} = A_{10} \times 2^5$, então, $A_{15} = 512 \times 2^5 \rightarrow A_{15} = 512 \times 32 \rightarrow \boxed{A_{15} = 16.384}$.

5.6 Recorrência linear de segunda ordem – sexto encontro

A recorrência linear de segunda ordem acontece quando um termo qualquer da sequência A_n depende dos dois termos antecessores A_{n-1} e A_{n-2}. Ela é chamada de linear pois não há termos quadráticos, cúbicos, dentre outros. Veja a não linearidade no caso a seguir: $A_n = (A_{n-1})^2 - A_{n-2}$. Perceba que, como há um termo antecessor quadrático, então esta sequência não é linear. A recorrência linear de segunda ordem tem o seguinte formato:

$$A_n = f(n)A_{n-1} \mp g(n)A_{n-2} + h(n)$$

- caso $g(n) = 0 \rightarrow$ recorrência linear de primeira ordem;
- $f(n), g(n)$ e h(n) são funções que dependem da quantidade de termos "n".

Observação: os alunos do sexto ano ainda não têm uma construção formal bem estruturada sobre função, então este formato padronizado para o termo geral A_n foi utilizado apenas como exemplificação e caracterização para as recorrências lineares de segunda ordem.

Observe alguns exemplos de sequências definidas por recorrências lineares de segunda ordem:

$\boldsymbol{Exemplo_1}$: seja $S = \{2, 2, 4, 6, 10, 16, \ldots\}$. Descubra o oitavo termo e encontre a lei de formação recursiva para esta sequência.

Para este exemplo, fica compreensível o seguinte padrão:

$$A_3 = A_1 + A_2$$
$$A_4 = A_2 + A_3$$
$$A_5 = A_3 + A_4$$
$$A_6 = A_4 + A_5$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{\boxed{A_n = A_{n-1} + A_{n-2}}}_{Lei\ de\ formação\ recursiva}$$

- para encontrar o oitavo termo pela fórmula recursiva é nítido a necessidade de se obter o sétimo termo, pois: $A_8 = A_6 + A_7$. Portanto, como o exercício fornece os valores até o sexto termo, obtém-se que: $A_7 = A_5 + A_6 \rightarrow A_7 = 10 + 16 \rightarrow \boxed{A_7 = 26}$;
- portanto, $A_8 = A_6 + A_7 \rightarrow A_8 = 16 + 26 \rightarrow \boxed{A_8 = 42}$.

$\boldsymbol{Exemplo_2}$: encontre a lei de formação recursiva e diga qual o valor do décimo termo da sequência $A = \{1, 3, 5, 11, 21, 43, \ldots\}$.

Observe o seguinte padrão para esta sequência:

$$A_3 = 2A_1 + A_2$$
$$A_4 = 2A_2 + A_3$$
$$A_5 = 2A_3 + A_4$$
$$A_6 = 2A_4 + A_5$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{\boxed{A_n = 2A_{n-2} + A_{n-1}}}_{Fórmula\ Recursiva}$$

Como o problema forneceu até o sexto termo da sequência, então, ao se obter a lei de formação recursiva, é necessário encontrar o sétimo termo, em seguida o oitavo termo, para posteriormente encontrar o nono termo e, assim, poder encontrar o valor do décimo termo. Observe:

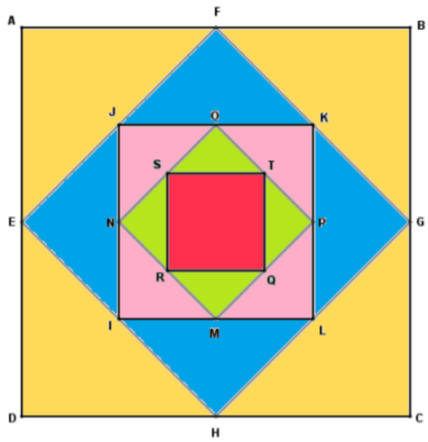
$$A_7 = 2A_5 + A_6 \rightarrow A_7 = 2 \times 21 + 43 \rightarrow A_7 = 85$$
$$A_8 = 2A_6 + A_7 \rightarrow A_8 = 2 \times 43 + 85 \rightarrow A_8 = 171$$
$$A_9 = 2A_7 + A_8 \rightarrow A_9 = 2 \times 85 + 171 = 341$$
$$A_{10} = 2A_8 + A_9 \rightarrow A_{10} = 2 \times 171 + 341 \rightarrow \underbrace{\boxed{A_{10} = 683}}_{Décimo\ termo}$$

5.7 Estudo inicial da geometria dos fractais com ênfase nos padrões e recursividade – sétimo encontro

Os fractais são arranjos de estruturas geométricas, constituídos por partes fragmentadas, reduzidas e que mantém o mesmo padrão, semelhança em relação à figura inicial. Veja a seguir alguns exemplos de fractais:

$\boldsymbol{Exemplo_1}$ **– Fractal a partir de um quadrado:** analise a figura para entender o padrão.

Figura 8 - Exemplo de um fractal de forma quadrangular



Fonte: Moreira 2017, p.55

- perceba que inicialmente há um quadrado de lado L qualquer representado na cor laranja. Unindo-se os pontos médios desse quadrado são formados os segmentos $\overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}$ e $\overline{HE}$ que formam um quadrado simbolizado na cor azul (primeira iteração);
- agora, ao unir os segmentos $\overline{JK}, \overline{KL}, \overline{LI}, \overline{IJ}$, que são pontos médios do quadrado representado em azul, obtém-se o quadrado caracterizado na cor rosa (segunda iteração);
- continuando o mesmo processo, obtém-se novos quadrados cada vez menores.

Verifica-se que a cada iteração serão gerados quatro novos triângulos. Portanto, há uma sequência que mostra a quantidade de novos triângulos formados a cada iteração, como também há um padrão recursivo que pode ser escrito por meio de uma sequência que representa a quantidade total de triângulos neste fractal. A tabela 3 fornece a quantidade de novos triângulos formados a cada iteração e a tabela 4 mostra a quantidade total de triângulos até uma determinada quantidade "n" de iterações.

Tabela 3 – Quantidade de novos triângulos a cada iteração

Quantidade "n" de iterações	**Quantidade de triângulos gerados a cada iteração**
$n = 1$	$A_1 = 4$
$n = 2$	$A_2 = 4$
$n = 3$	$A_3 = 4$
$n = 4$	$A_4 = 4$
$n = 5$	$A_5 = 4$
Generalização	$\boldsymbol{A_n = 4}$

Fonte: O autor, 2021

- esta tabela 3 pode ser escrita como uma sequência constante "S_1" que fornece a quantidade de triângulos formados a cada iteração. Portanto:

$$S_1 = \{\underbrace{4}_{A_1}, \underbrace{4}_{A_2}, \underbrace{4}_{A_3}, \cdots, \underbrace{4}_{A_n}, \cdots\}$$

Tabela 4 – Quantidade total de triângulos

Quantidade "$\boldsymbol{n}$" de iterações	**Quantidade total de triângulos na figura**
$n = 1$	$A_1 = 4$
$n = 2$	$A_2 = 8$
$n = 3$	$A_3 = 12$
$n = 4$	$A_4 = 16$
$n = 5$	$A_5 = 20$
Generalização Recursiva	$\boldsymbol{A_n = A_{n-1} + 4}$
Generalização Não – Recursiva	$\boldsymbol{A_n = 4n}$

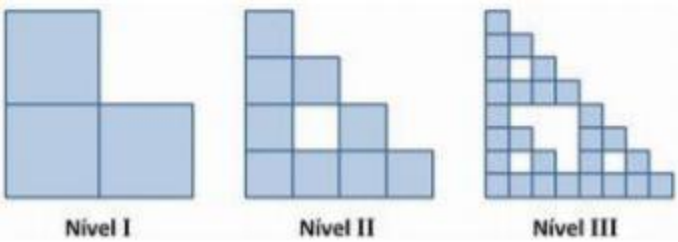
Fonte: O autor, 2021

- ao escrever a tabela 4 como uma sequência "S_2", percebe-se que está sequência é uma progressão aritmética. Logo:

$$S_2 = \{4, 8, 12, \cdots, A_n, \cdots\}$$

$\boldsymbol{Exemplo_2}$ **– Fractal de Triminó:** observe a figura abaixo que mostra o arranjo geométrico do fractal de triminó.

Figura 9 – Fractal de Triminó do nível I ao nível III



Fonte: Vargas *et al*, 2014, p.4

1. para formar a figura do fractal de triminó em sua forma inicial (nível I) são necessários três quadrados ou cubos e depois realizar o acoplamento geométrico em forma de L;
2. agora, para se chegar ao fractal em nível II é necessário converter cada quadrado da figura do nível I em 3 quadrados menores em formato de L, ou seja, em um triminó;
3. para se obter a figura do fractal de triminó em nível III, é preciso pegar cada quadrado do fractal em nível II e transformá-lo em um triminó, ou seja, em três quadrados menores em forma de L;
4. para alcançar o fractal de triminó em nível IV, basta seguir a mesma ideia utilizada até então.

A tabela 5 a seguir, mostra a quantidade de quadrados obtidos em cada nível do fractal de triminó.

Tabela 5 – Relação da quantidade de quadrados para cada nível do fractal de triminó

Nível do fractal de triminó	Quantidade de quadrados
$n = 1$	$3 = 3^1$
$n = 2$	$9 = 3^2$
$n = 3$	$27 = 3^3$
$n = 4$	$81 = 3^4$
$n = 5$	$243 = 3^5$
Generalização Recursiva	$\boldsymbol{A_n = 3 \times A_{n-1}}$
Generalização Não – Recursiva	$\boldsymbol{A_n = 3^n}$

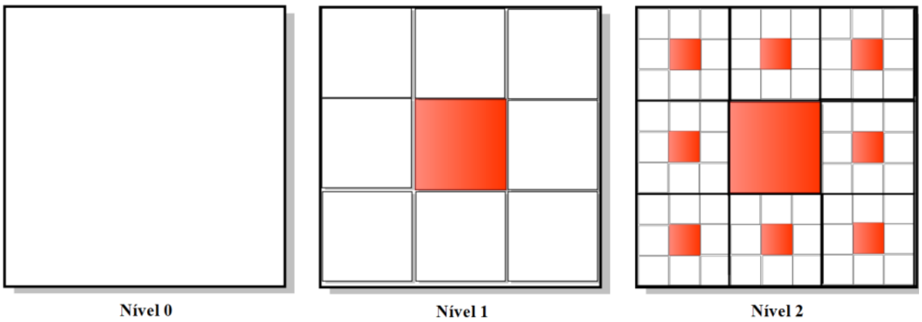
Fonte: O autor, 2021

- com o fractal de triminó é possível trabalhar com sequências em progressão geométrica, já que uma sequência para esse padrão é da seguinte forma:

$$T = \{3, 9, 27, 81, 243, \dots\}$$

$\boldsymbol{Exemplo_3}$ **– Tapete de Sierpinski:** Veja a figura a seguir que mostra o padrão geométrico do Tapete de Sierpinski.

Figura 10 – Tapete de Sierpinski do Nível 0 ao Nível 2



Fonte: O autor, 2021

1. inicialmente há um tapete em formato quadrangular (nível 0). Este tapete quadrangular foi fragmentado em 9 quadrados menores idênticos e pintou-se o quadrado central de vermelho (nível 1);
2. cada um dos oitos quadrados idênticos que não foram pintados será dividido em outros nove quadrados menores e, novamente, o quadrado central formado dessa divisão será pintado, obtendo-se assim o nível 2;
3. a forma de se obter o nível 3 do tapete de Sierpinski é análogo ao que foi feito anteriormente.

Para este fractal é interessante perceber alguns padrões, como a análise da quantidade de quadrados que não foram pintados em um nível "n" qualquer. Neste sentido, é importante destacar uma sequência com esses quadrados que não foram pintados. Desta forma, com o intuito de facilitar o entendimento, será considerado o nível 1 como ponto de partida, já que a primeira fragmentação (iteração) ocorre neste nível. Portanto, tomando "S" como sendo a sequência formada pelos quadrados que não foram pintados, obtém-se que: $S = \{8, 64, A_3, \ldots\}$

- destaca-se que cada quadrado não pintado do nível 2 será fragmentado em nove quadrados menores e idênticos, porém apenas o quadrado central é marcado, dessa forma oito quadrados não serão pintados. Então como há um total de 64 quadrados não pintados no nível 2 e para cada um desses 64 quadrados serão gerados oito quadrados não pintados no nível 3, implica-se em um total de 8×64 quadrados não pintados no nível 3, o que resulta em $A_3 = 512$ quadrados.
- analogamente, $A_4 = 8 \times 512 \rightarrow A_4 = 4096$. Portanto;

$$S = \{8, 64, 512, 4096, \ldots\}$$

Percebe-se, então, que esta sequência S é uma progressão geométrica de razão 8, pois de forma recursiva tem-se que $\boxed{A_n = A_{n-1} \times 8}$ e de maneira não recursiva $\boxed{A_n = 8^n}$.

Outro padrão interessante é sobre a quantidade de quadrados pintados de vermelho em um nível "n" qualquer. Para responder a este questionamento, tome "P" como sendo a sequência formada pelos quadrados pintados de vermelho, então no nível 1 há um quadrado, no nível 2 há $8 + 1$ quadrados, o que implica em $P = \{1, (8 + 1), A_3, \ldots\}$.

- para achar o terceiro termo desta sequência, basta observar que cada quadrado não pintado no nível 2 irá gerar um quadrado menor pintado no nível 3, e como há 64 quadrados não pintados no nível 2, então haverá um total de $64 + 8 + 1$ quadrados pintados no nível 3, pois os quadrados que já foram pintados se mantêm em todos os outros níveis. Portanto, a sequência pode ser escrita da seguinte forma para facilitar o entendimento: $P = \{1, (1 + 8), (1 + 8 + 64)\ , (1 + 8 + 64 + 512) \ldots\}$, ou ainda:

$$P = \{\underbrace{8^0}_{A_1}, \underbrace{(8^0 + 8^1)}_{A_2}, \underbrace{(8^0 + 8^1 + 8^2)}_{A_3}, \ldots, \underbrace{(8^0 + 8^1 + 8^2 + 8^{n-1})}_{A_n}$$

5.8 Questionário sobre a oficina e revisão do conteúdo – oitavo encontro

Para o último encontro não foi elaborado o material teórico, visto que, o tempo destinado a esta reunião foi utilizado para os alunos responderem ao questionário qualitativo. O objetivo deste é obter a opinião do aluno sobre a oficina, pontos positivos e negativos, como também, o ponto de vista do estudante sobre a metodologia ativa da instrução por pares. Além disso, foram realizados mais três problemas propostos com o intuito de retomar alguns aspectos de sequências recursivas e não recursivas em forma de revisão do conteúdo.

6 RESPOSTAS DOS ALUNOS AOS PROBLEMAS PROPOSTOS REALIZADOS DURANTE A OFICINA (aplicação do *Peer Instruction*)

6.1 Primeiro encontro

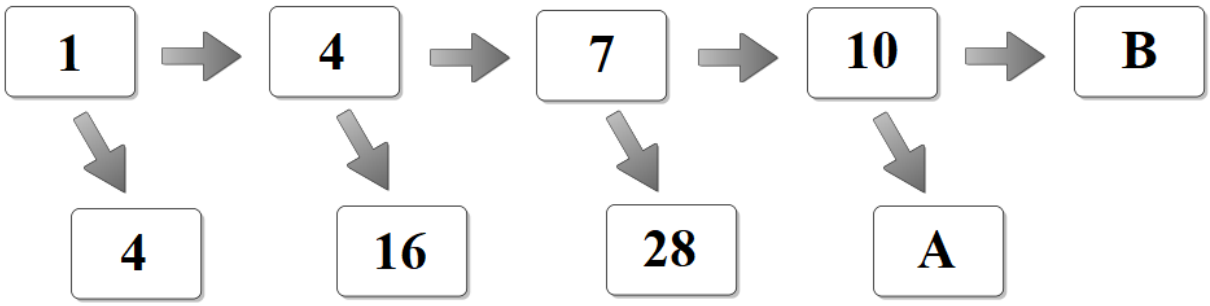
Para o primeiro encontro com os discentes não foi utilizada a metodologia ativa do *Peer Instruction*. Foi elaborado um material prévio, e a partir deste os alunos resolveram os problemas propostos. Após a resolução dos estudantes o professor fez a solução dos "problemas 1 e 2" no modelo da metodologia tradicional de ensino. A resolução do docente com relação aos problemas propostos estará disponível no Apêndice A desta dissertação.

6.2 Segundo encontro

Para o segundo encontro foram elaborados dois problemas (problemas 3 e 4) a fim de verificar a percepção dos alunos com relação aos padrões recursivos e não recursivos de uma sequência. Observe a seguir a solução de alguns estudantes aos exercícios:

$\boldsymbol{Problema_3}$: **(FCC – 2013 – Sergipe Gás S.A – Assistente técnico administrativo – RH)** Observe o diagrama e seu padrão de organização.

Figura 11 – Padrão de organização



Fonte: O autor, 2021

- a diferença numérica entre A e B, quando se completa o diagrama de acordo com o padrão, é igual a?

$\boldsymbol{Aluno_3}$: realizou o exercício de maneira recursiva, percebeu que na primeira linha a sequência aumenta de três unidades a cada termo posterior, obtendo assim $B = 13$. Já na segunda linha percebeu que a cada termo posterior havia um acréscimo de doze unidades em relação ao termo anterior, alcançando desta forma $A = 40$. Para encontrar a solução realizou a operação $\boxed{A - B = 40 - 13 = 27}$.

$\boldsymbol{Aluno_5}$: fez os procedimentos de forma recursiva, encontrando $A = 40$ e $B = 13$, porém esqueceu de realizar a diferença numérica entre A e B. Portanto, não conseguiu finalizar o exercício mesmo tendo raciocinado de maneira correta.

$\boldsymbol{Alunos_{2,7}}$: estes estudantes identificaram de forma recursiva o que acontece na primeira linha, obtiveram assim $B = 13$, porém analisaram, ainda, que para chegar aos termos da segunda linha, basta efetuar a multiplicação por quatro dos elementos correspondentes da primeira linha. Observe:

$$\times 4 \downarrow \begin{pmatrix} Primeira\ linha: 1, 4, 7, 10 \\ Segunda\ linha: 4, 16, 28, A \end{pmatrix}$$

- portanto, $\boxed{A = 10 \times 4 = 40}$.

$\boldsymbol{Link - Problema_3}$: para acesso ao vídeo com o que foi feito na oficina para este exercício, basta usar o link abaixo:

https://drive.google.com/file/d/1NAbW1HNeWm0LSuGhkH5XEaiCK2s_PvsR/view?usp=sharing

$$\boldsymbol{Problema_4}$$

Analise a sequência a seguir e marque a alternativa que corresponde ao sexto termo da sequência: $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$

$\boldsymbol{Aluno_5}$: fez de forma recursiva analisando que para se chegar ao quinto termo $A_5 = 25$ precisa somar 9 unidades em relação ao quarto termo que vale 16. Percebeu também que para se chegar ao quarto termo $A_4 = 16$ precisa somar 7 unidades ao terceiro termo de valor 9, assim como, para se chegar ao terceiro termo $A_3 = 9$ é necessário somar 5 unidades ao segundo termo que vale 4, analogamente, para se chegar ao segundo termo $A_2 = 4$ é preciso somar 3 unidades ao primeiro termo cujo valor é 1. Portanto, percebeu que os avanços sucessivos implicavam em somas que cresciam sempre de 2 unidades ao acréscimo anterior, logo, concluiu que para se chegar ao sexto termo é preciso somar 11 unidades, ou seja, o sexto termo $A_6 = 25 + 11 \rightarrow \boxed{A_6 = 36}$.

$\boldsymbol{Link - Problema_4}$: veja o vídeo com a solução deste problema feita pelo "$Aluno_5$" ao utilizar o link a seguir:

https://drive.google.com/file/d/17L1t37XomVdSpytSAQp0GNpCTMNd4fdg/view?usp=sharing

6.3 Terceiro encontro

Neste encontro houve a adição do "$Aluno_{11}$" que demonstrou interesse em participar da oficina mesmo após o seu início, e além disso, foram elaborados dois problemas que serão analisados a seguir. Observe abaixo os exercícios com as respostas de alguns estudantes.

$Problema_5$: (INEP – ENEM – 2011)

O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: Em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro 34.500; em março 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

$Aluno_5$: percebeu que as passagens iam crescendo de 1500 unidades a cada mês posterior. Como em março foram vendidas 36.000 passagens e de março até julho decorre um total de 4 meses, então, para obter o total de passagens vendidas em julho basta acrescentar 1500×4 ao valor obtido em março. Portanto, o $Aluno_5$ obteve o seguinte resultado: $Julho = 36.000 + 1500 \times 4 \ \rightarrow \boxed{Julho = 42.000}$ que é uma forma não recursiva de raciocinar a questão, já que o estudante foi de março para julho, sem antes passar por abril, maio e junho.

$Aluno_4$: raciocinou de forma recursiva, pois percebeu, que a cada mês subsequente há o acréscimo de 1500 passagens vendidas, só que agora o estudante foi de março para abril, depois de abril para maio, em seguida de maio para junho e, posteriormente, de junho para julho, ou seja:

$$\text{Abril} = \text{Março} \ + \ 1500 \rightarrow \text{Abril} = 36.000 + 1500 = 37.500;$$
$$\text{Maio} = \text{Abril} + 1500 \rightarrow \text{Maio} = 37.500 + 1500 = 39.000;$$
$$\text{Junho} = \text{Maio} \ + 1500 \rightarrow \text{Junho} = 39.000 + 1500 = 40.500;$$
$$\text{Julho} = \text{Junho} + 1500 \rightarrow \text{Julho} = 40.500 + 1500 = 42.000.$$

Observação: o discente se equivocou em algumas situações no momento de efetuar as operações, porém pensou de maneira correta e com a orientação do professor conseguiu terminar o problema.

$Link - Problema_5$: durante um breve período foi escurecido o vídeo para preservar a imagem dos estudantes que aparecem na conferência. Assista ao vídeo utilizando o link a seguir:
https://drive.google.com/file/d/1g7X2ZkufpJceoOPpfc-pi3G-NgHhX2Ou/view?usp=sharing

$Problema_6$: (INEP – ENEM – 2012)

Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente, são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem 3 cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem 7 cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é?

$\boldsymbol{Aluno_4}$: primeiramente o estudante fez o desenho das cartas que não estão no monte, com isso, percebeu que a quantidade de cartas nas colunas será a soma $1+2+3+4+5+6+7$, realizou a soma de maneira direta, sem utilizar a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética e obteve o valor 28. Após isto, notou que ao pegar o total das 52 cartas do baralho, e retirar a quantidade que está nas colunas, ele obterá a quantidade de cartas no monte, assim realizou a seguinte operação: $Monte = 52 - 28 = 24$ e obteve a resposta do problema.
$\boldsymbol{Link - Problema_6}$: para visualizar a resposta em vídeo acesse o link a seguir:
https://drive.google.com/file/d/1bjLNLwPPVwE-lUxs3d5oojTgx4ALz7qZ/view?usp=sharing

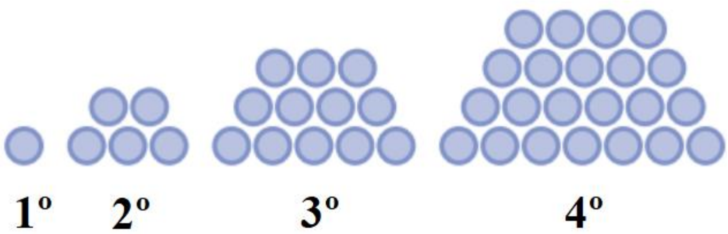
6.4 Quarto encontro

Neste encontro houve a inclusão do "$Aluno_{12}$" na oficina e foram trabalhados três problemas referentes ao conteúdo de progressão aritmética de segunda ordem, veja abaixo a solução dos discentes:

$\boldsymbol{Problema_7}$

Para vencer em um jogo, um grupo de estudantes precisa agrupar 51 bolinhas sem que elas escorreguem, porém para chegar até o nível correspondente as 51 bolinhas, os alunos precisam passar, primeiramente, pelos níveis mais fáceis. Observe a figura abaixo que mostra o padrão formado nos níveis de dificuldade de 1 a 4 e diga qual o nível condizente com as 51 bolinhas.

Figura 12 – Padrão formado para cada nível de dificuldade



Fonte: Van de Walle, 2009, p.299

$\boldsymbol{Aluno_3}$: contou a quantidade total de bolinhas em cada nível, obtendo assim 1 bolinha para o primeiro nível, 5 bolinhas para o segundo nível, 12 bolinhas para o terceiro nível, 22 bolinhas para o quarto nível. Percebeu que o acréscimo para cada nível posterior formava a sequência adiante: $\{4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$ ou seja, o incremento para cada nível sucessivo era de 3 unidades a mais em relação ao incremento para o nível anterior, portanto para se chegar ao quinto nível era preciso acrescentar 13 unidades em relação ao quarto nível, e para obter o sexto nível, era necessário acrescentar 16 unidades em relação ao quinto nível, ou seja:

$$2^{\underline{o}}\text{Nível} = 1^{\underline{o}}\text{Nível} + 4 \rightarrow \boxed{2^{\underline{o}}\text{Nível} = 1 + 4 = 5}$$

$$3^{\underline{o}}\text{Nível} = 2^{\underline{o}}\text{Nível} + 7 \rightarrow \boxed{3^{\underline{o}}\text{Nível} = 5 + 7 = 12}$$

$$4^{\underline{o}}\text{Nível} = 3^{\underline{o}}\text{Nível} + 10 \rightarrow \boxed{4^{\underline{o}}\text{Nível} = 12 + 10 = 22}$$

$$5^{\underline{o}}\text{Nível} = 4^{\underline{o}}\text{Nível} + 13 \rightarrow \boxed{5^{\underline{o}}\text{Nível} = 22 + 13 = 35}$$

$$6^{\underline{o}}\text{Nível} = 5^{\underline{o}}\text{Nível} + 16 \rightarrow \boxed{6^{\underline{o}}\text{Nível} = 35 + 16 = 51}$$

$\boldsymbol{Aluno_4}$**:** percebeu que na base de cada nível o aumento era constante e de duas unidades em relação ao termo anterior. Verificou que a partir do segundo termo, no segundo alinhamento, o aumento também era constante, e de 2 unidades em relação termo anterior. Analogamente, a partir do terceiro termo no terceiro alinhamento o aumento também era constante, e de 2 unidades, foi utilizando este mesmo raciocínio para cada termo posterior até obter a quantidade de bolinhas para cada fileira, desde a base até o sexto alinhamento. Veja as sequências a seguir que mostram o pensamento do aluno para cada fileira:

$$\text{Base } \rightarrow \{1, 3, 5, 7, 9, \underbrace{11}_{6^{\underline{o}}\text{Nível}}\}$$

$$\text{Segundo alinhamento formado a partir do } 2^{\underline{o}} \text{ nível } \rightarrow \{2, 4, 6, 8, \underbrace{10}_{6^{\underline{o}}\text{Nível}}\}$$

$$\text{Terceiro alinhamento formado a partir do } 3^{\underline{o}}\text{nível} \rightarrow \{3, 5, 7, \underbrace{9}_{6^{\underline{o}}\text{ Nível}}\}$$

$$\text{Quarto alinhamento formado a partir do } 4^{\underline{o}}\text{nível} \rightarrow \{4, 6, \underbrace{8}_{6^{\underline{o}}\text{Nível}}\}$$

$$\text{Quinto alinhamento formado a partir do } 5^{\underline{o}}\text{nível} \rightarrow \{5, \underbrace{7}_{6^{\underline{o}}\text{Nível}}\}$$

$$\text{Sexto alinhamento formado a partir do } 6^{\underline{o}}\text{Nível} \rightarrow \{\underbrace{6}_{6^{\underline{o}}\text{Nível}}\}$$

- somando a quantidade de bolinhas no sexto nível, o estudante obteve o seguinte resultado: $11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 51\ bolinhas$. Logo obteve como resposta para as 51 bolinhas o sexto nível.

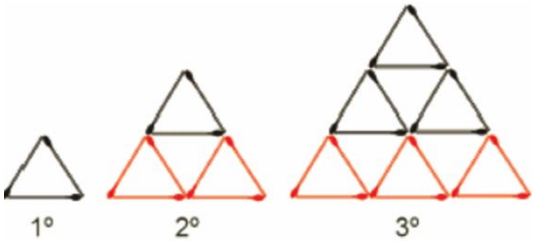
$\boldsymbol{Link - Problema_7}$**:** utilize o link a seguir para visualizar o vídeo com a solução dos estudantes.

https://drive.google.com/file/d/1Cbz-tonhurcHIvT-Gf15YWx8pm4kEr8F/view?usp=sharing

$\boldsymbol{Problema_8}$: (OBMEP – Nível I – 2012)

Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Quantos palitos ela vai usar para construir o quinto triângulo da sequência?

Figura 13 – Padrão para a sequência de triângulos



Fonte: obmep.org.br/provas.htm

$\boldsymbol{Aluno_{10}}$**:** resolveu o problema pensando no acréscimo de palitos para cada termo posterior e inferiu o seguinte:

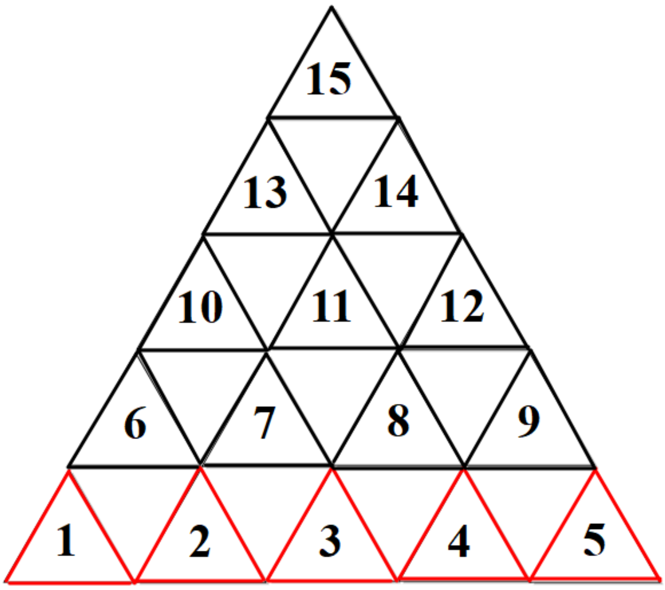
$$\text{Primeiro termo } \rightarrow 3;$$
$$\text{Segundo termo } \rightarrow 3 + 6;$$
$$\text{Terceiro termo } \rightarrow 3 + 6 + 9;$$
$$\text{Quarto termo } \rightarrow 3 + 6 + 9 + 12;$$
$$\text{Quinto termo } \rightarrow 3 + 6 + 9 + 12 + 15;$$

- portanto a solução encontrada é formada pela soma $3 + 6 + 9 + 12 + 15 = \boxed{45\ palitos}$.

$\boldsymbol{Observa}$**ção:** o docente teve que realizar algumas intervenções para ajudar o aluno na construção do padrão da sequência, pois o estudante demonstrou um pouco de dificuldade para finalizar a ideia levantada para a resolução do problema.

$\boldsymbol{Aluno_{11}}$**:** utilizou o padrão das figuras para construir o desenho do quinto triângulo e contar a quantidade de palitos. Observe a figura 13 a seguir com a ilustração.

Figura 14 – Formato do quinto triângulo da sequência



Fonte: O autor, 2021

$\boldsymbol{Observação}$:

1. vale ressaltar que o padrão e o desenho foram percebidos pelo estudante apenas pela observação, o mesmo não realizou o desenho no caderno e nem utilizou da escrita. Desta forma, o exercício foi resolvido de forma mental, o que é uma maneira singular de resolução;

2. Acrescenta-se, ainda, que o padrão da figura considera apenas os triângulos que estão numerados, os triângulos internos que estão invertidos e o triângulo externo não são considerados.

$\boldsymbol{Aluno_4}$: resolveu o problema raciocinando em uma sequência composta pela quantidade de triângulos formada pelos palitos, percebeu que o primeiro termo tem um triângulo, analisou que no segundo termo há três triângulos que contém os palitos e, posteriormente, observou que existem seis triângulos que contém os palitos no terceiro termo. Assim, inferiu que o padrão para os acréscimos sucessivos era sempre de uma unidade a mais em relação ao acréscimo anterior. Obteve, portanto, a seguinte sequência:

$$\text{Primeiro termo} \rightarrow 1 \text{ triângulo}$$

$$\text{Segundo termo} \rightarrow 3 \text{ triângulos}$$

$$\text{Terceiro termo} \rightarrow 6 \text{ triângulos}$$

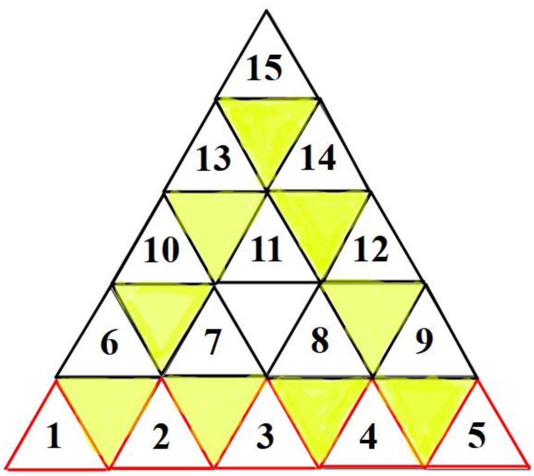
$$\text{Quarto termo} \rightarrow 10 \text{ triângulos}$$

$$\text{Quinto termo} \rightarrow 15 \text{ triângulos}$$

- como cada triângulo possui três palitos, então 15 triângulos possuem $15 \times 3 = 45\ palitos$.

Veja a figura 14 abaixo que mostra os triângulos que são utilizados no quinto termo da sequência. Destaca-se, ainda, que os triângulos que estão grifados em amarelo não são contabilizados para não haver contagem indevida com relação à quantidade de palitos.

Figura 15 – Quantidade de triângulos para o quinto termo da sequência



Fonte: O autor, 2021

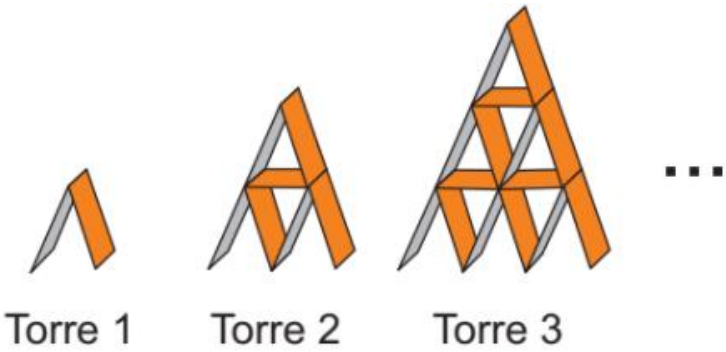
$\boldsymbol{Link - Problema_8}$**:** acesse o link a seguir para visualizar o vídeo com a solução dos alunos.

https://drive.google.com/file/d/1dI8z3ZV4edj1Zi_CxSHJuxa8KEF_TQ-_/view?usp=sharing

$\boldsymbol{Problema_9}$**: (OBMEP – Nível 1 – 2018)**

Janaina faz torres com cartões, seguindo o padrão da figura. A primeira torre foi feita com 2 cartões, a segunda torre com 7 cartões, a terceira com 15 e assim por diante. Quantos cartões ela deve acrescentar à décima torre para obter a décima primeira?

Figura 16 – Padrão das torres formadas por cartões



Fonte: obmep.org.br/provas.htm

$\boldsymbol{Aluno_4}$**:** percebeu que o problema se tratava apenas do acréscimo da quantidade de cartões para se alcançar a torre seguinte, conseguiu identificar o padrão inicial dos acréscimos sucessivos, obtendo o seguinte:

$$Torre_1 \rightarrow Torre_2 = \ Acréscimo\ de\ 5\ cartões$$
$$Torre_2 \rightarrow Torre_3 = Acréscimo\ de\ 8\ cartões$$
$$Torre_3 \rightarrow Torre_4 = Acréscimo\ de\ 11\ cartões$$

Dessa forma, mantendo o padrão do acréscimo acima, chegou à seguinte sequência;

$$\{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, \boxed{\underbrace{\mathbf{32}}_{\boldsymbol{Torre\ 10 \rightarrow Torre\ 11}}}\}$$

- assim, concluiu que o acréscimo de cartões necessário para ir da $torre_{10}$ para a $torre_{11}$ é igual a 32.

$\boldsymbol{Aluno_{3,4}}$**:** após a solução de forma recursiva do $Aluno_4$, o professor iniciou uma indagação acerca de uma forma não recursiva de solução para esse problema. Assim, os estudantes conseguiram perceber de forma conclusiva a seguinte equação.

$$A_{10} = A_1 + 9r \rightarrow A_{10} = 5 + 9 \times 3 \rightarrow \boxed{A_{10} = 32}.$$

$\boldsymbol{Link - Problema_9}$**:** para o visualizar o vídeo com a solução dos alunos, acesse o link a seguir:

https://drive.google.com/file/d/1gdBivhMyzgpsI_Q1o31qwEFBOjh-uVCI/view?usp=sharing

6.5 Quinto encontro

Para este encontro foi feita a revisão do conteúdo de progressão aritmética e apresentado o conceito de progressão geométrica. Além disso, salientaram-se as diferenças entre P.A e P.G. Após isto, o professor utilizou a instrução por pares para debater com os alunos três problemas que serão apresentados a seguir.

$\boldsymbol{Problema_{10}}$: (UDESC – Universidade do Estado de Santa Catarina – 2011)

Em uma escola com 512 alunos, um aluno apareceu com o vírus do sarampo. Se esse aluno permanecesse na escola, o vírus se propagaria da seguinte forma: no primeiro dia, um aluno estaria contaminado; no segundo, dois estariam contaminados; no terceiro, quatro, e assim sucessivamente. A diretora dispensou o aluno contaminado imediatamente, pois concluiu que todos os 512 alunos teriam sarampo em qual dia?

$\boldsymbol{Aluno_5}$: percebeu, de forma recursiva, que para se chegar ao termo seguinte era necessário multiplicar o termo anterior por dois, obtendo a seguinte sequência:

$$\{\underbrace{1}_{1^{\underline{o}}dia}, \underbrace{2}_{2^{\underline{o}}dia}, \underbrace{4}_{3^{\underline{o}}dia}, \underbrace{8}_{4^{\underline{o}}dia}, \underbrace{16}_{5^{\underline{o}}dia}, \underbrace{32}_{6^{\underline{o}}\,dia}, \underbrace{64}_{7^{\underline{o}}dia}, \underbrace{128}_{8^{\underline{o}}dia}, \underbrace{256}_{9^{\underline{o}}dia}, \boxed{\underbrace{512}_{10^{\underline{o}}dia}}\}$$

- concluiu, então, que no décimo dia os 512 alunos seriam contaminados.

$\boldsymbol{Aluno_4}$: este aluno também pensou de forma recursiva, assim como o $Aluno_5$. Todavia o professor, para obter novas formas de resolução, perguntou como ele pensaria no problema de forma não recursiva. Dessa forma, o aluno, de maneira perspicaz, percebeu que para se chegar ao décimo termo da sequência, bastava utilizar o primeiro termo e multiplicar pela razão que vale dois, e depois elevar esta razão a nona potência, ou seja:

$$A_{10} = A_1 \times 2^9 \rightarrow A_{10} = 1 \times 512 \rightarrow \boxed{A_{10} = 512}$$

- portanto, o estudante percebeu de forma não recursiva, que no décimo dia haveriam 512 alunos infectados.

$\boldsymbol{Link - Problema_{10}}$: logo abaixo está disponibilizado o link para este problema com a solução dos alunos em vídeo. Durante um breve período foi escurecido o vídeo para preservar a imagem dos alunos que aparecem na conferência do *Google meet*.

https://drive.google.com/file/d/1pCNpgZwW6J3Lp0LzBF5puv33Vcsa3PNq/view?usp=sharin
g

$\boldsymbol{Problema_{11}}$: (FAUEL – 2021 – Prefeitura de Catanduvas – Assistente administrativo)

Assinale a sequência de números que é uma progressão aritmética e, ao mesmo tempo, uma progressão geométrica.

Figura 17 – Alternativas do problema$_{11}$

A { 1; 2; 3; 4; 5}

B { 1; -1; 1; -1; 1}

C { 0; 0; 0; 0; 0}

D { 1; 2; 4; 8; 16}

Fonte: qconcursos.com

$\boldsymbol{Alunos_{3,11}}$**:** os discentes foram participando do exercício de forma alternada. O $Aluno_{11}$ demonstrou dificuldade com relação ao conceito de progressão aritmética e geométrica, enquanto que o $Aluno_3$ conseguiu debater o exercício sem muitas dificuldades.

- para o “item A”, o $Aluno_3$, percebeu que se trata de uma progressão aritmética, pois cada termo seguinte da sequência é igual ao termo anterior somado de uma unidade. O docente aproveitou a explicação do estudante para esclarecer o conceito de P.A e P.G para o $Aluno_{11}$, e consequentemente para os participantes;
- para o “item B”, o $Aluno_{11}$, percebeu que não se trata de uma progressão aritmética, pois não há padrão de acréscimos sucessivos constantes. Enquanto que, o $Aluno_3$, analisou que este exemplo é uma progressão geométrica, pois para chegar a cada termo posterior da sequência é necessário multiplicar o termo anterior por -1;
- com relação ao “item C”, o $Aluno_{11}$, teve dúvidas para responder, pois pensava que uma progressão acontecia sempre que havia uma sequência exclusivamente crescente, o docente aproveitou a dúvida do aluno para esclarecer a todos o conceito de progressão. O $Aluno_3$ identificou que esta sequência é uma progressão aritmética, pois há um acréscimo sucessivo e constante por zero a cada termo, e além disso afirmou se tratar, também, de uma progressão geométrica, uma vez que cada termo sucessivo é igual ao termo anterior multiplicado sempre pela mesma constante;
- Acerca do “item D”, os discentes identificaram que esta sequência era uma progressão geométrica, visto que, cada termo seguinte é o termo anterior multiplicado por um fator igual a dois.

$\boldsymbol{Link - Problema_{11}}$**:** assista ao vídeo com a solução dos alunos ao utilizar o link a seguir. https://drive.google.com/file/d/1Hy6uXq1YFR7ahxlrf8OytfuwFKcQkR7H/view?usp=sharing

$Problema_{12}$: (INEP – ENEM – 2018)

Alguns modelos de rádios automotivos estão protegidos por um código de segurança. Para ativar o sistema de áudio, deve-se digitar o código secreto composto por quatro algarismos. No primeiro caso de erro na digitação, a pessoa deve esperar 60 segundos para digitar o código novamente. O tempo de espera duplica, em relação ao tempo de espera anterior, a cada digitação errada. Uma pessoa conseguiu ativar o rádio somente na quarta tentativa, sendo de 30 segundos o tempo gasto para digitação do código secreto a cada tentativa. Nos casos da digitação incorreta, ela iniciou a nova tentativa imediatamente após a liberação do sistema de espera. O tempo total, em segundo, gasto por essa pessoa para ativar o rádio foi igual a?

$Alunos_{3,4,11}$: resolveram o problema analisando o fato de que como houve o acerto da digitação do código apenas na quarta tentativa, então, a pessoa gastou os 30 segundos para inserir o código por quatro vezes, ou seja, $30 \times 4 = 120$ segundos. Além disso, a pessoa errou o código por três vezes, portanto, como o tempo de espera para o erro do código começa com 60 segundos e, posteriormente esse tempo duplica para o próximo código digitado errado, então, o tempo gasto será, respectivamente de $60{,}120$ e 240 segundos. Deste modo, o tempo de espera para o erro de digitação é de $60 + 120 + 240 = 420$ segundos. Por fim, os discentes concluíram que era necessário realizar a soma entre o tempo para inserir o código e o tempo de espera relativo ao erro, logo obtiveram $120 + 420 = \boxed{540 \text{ segundos}}$.

$Link - Problema_{12}$: acesse o vídeo com a solução dos alunos ao utilizar o link abaixo: https://drive.google.com/file/d/1fHOpu61LwrKGQj3zDxDwGYURkYZQ3rf8/view?usp=sharing

6.6 Sexto encontro

Para este encontro foram elaborados três problemas sobre o conteúdo de recorrências lineares de segunda ordem, com ênfase na sequência de Fibonacci.

$Problema_{13}$: (Makiyama – 2013 – Instituto Federal de Rondônia – Administrador)

"É uma sucessão de números que, misteriosamente, aparece em muitos fenômenos da natureza. Descrita no final do século 12 pelo italiano Leonardo Fibonacci, ela é infinita e começa com 0 e 1. Assim a sequência fica: {0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...}". A partir do padrão observado e de acordo com o texto acima, o 14º elemento da Sequência de Fibonacci é:

$Alunos_{4,7,9}$: resolveram o problema de forma recursiva, pois perceberam que o termo seguinte é igual à soma dos dois termos antecessores, ou seja: $\boxed{A_n = A_{n-1} + A_{n-2}}$. Com isso, obtiveram a seguinte sequência.

$$\{\underbrace{0}_{A_1},\underbrace{1}_{A_2},\underbrace{1}_{A_3},\underbrace{2}_{A_4},\underbrace{3}_{A_5},\underbrace{5}_{A_6},\underbrace{8}_{A_7},\underbrace{13}_{A_8},\underbrace{21}_{A_9},\underbrace{34}_{A_{10}},\underbrace{55}_{A_{11}},\underbrace{89}_{A_{12}},\underbrace{144}_{A_{13}},\underbrace{233}_{A_{14}}\}$$

- portanto, concluíram que o décimo quarto termo desta sequência é $\boxed{A_{14} = 233}$.

$\boldsymbol{Aluno_8}$**:** teve, também, o pensamento recursivo de forma correta para resolver o problema, porém acabou contando apenas até o décimo terceiro termo, portanto, obteve como resposta o $A_{13} = 144$.

$\boldsymbol{Link\ -\ Problema_{13}}$**:** para assistir à solução dos discentes utilize o link abaixo. Vale ressaltar, que foi escurecido o vídeo por alguns segundos a fim de preservar a identidade dos participantes.

https://drive.google.com/file/d/1qFMxl66NquGkohQo06bMwTTSKorLsGS6/view?usp=sharing

$\boldsymbol{Problema_{14}}$**: (FCC – 2018 – Secretaria de Educação do Estado da Bahia – Professor)**

A sequência de Fibonacci começa com os números 1 e 2 e, em seguida, cada novo número da sequência é a soma dos dois números imediatamente anteriores, como se vê a seguir:

$$\{1, 2, \underbrace{3}_{1+2}, \underbrace{5}_{2+3}, \underbrace{8}_{3+5}, \underbrace{13}_{5+8}, \underbrace{21}_{8+13}, \cdots\}$$

Na figura a seguir, observe a numeração estabelecida em um conjunto de 60 teclas de um piano.

Figura 18 – Conjunto das teclas de um piano

Fonte: qconcursos.com

Se um pianista decide tocar apenas as teclas marcadas com números da sequência de Fibonacci nesse piano, dentre as 60 teclas indicadas na figura, ele tocará quantas teclas?

$\boldsymbol{Aluno_8}$**:** compreendeu pelo enunciado e pela sequência fornecida que um termo qualquer, a partir do terceiro, será a soma dos dois antecessores, com isso, o estudante obteve o oitavo termo e, posteriormente, o nono termo, alcançando assim a seguinte sequência.

$$\{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \underbrace{34}_{13+21}, \underbrace{55}_{21+34}\}$$

Analisou, ainda, que o décimo termo $A_{10} = \underbrace{89}_{34+55}$ não faz parte do resultado do problema, já que o valor máximo permitido é sessenta. Portanto, chegou à solução que o pianista irá tocar um total de nove teclas.

$\boldsymbol{Link - Problema_{14}}$**:** utilize o link a seguir para visualizar a solução dos discentes.
https://drive.google.com/file/d/14mt1IwVjief06Tic4Fqm0CDb4-U0g9vE/view?usp=sharing

$\boldsymbol{Problema_{15}}$

Perceba o padrão da sequência a seguir e marque a alternativa que corresponde a soma entre o 8º termo e o 9º termo.

$$S = \{5, 5, 10, 15, 25, 40, \cdots\}$$

$\boldsymbol{Alunos_{7,8}}$**:** entenderam o seguinte padrão para esta sequência.

$$A_3 = A_1 + A_2 \rightarrow \boxed{A_3 = 5 + 5 = 10}$$

$$A_4 = A_2 + A_3 \rightarrow \boxed{A_4 = 5 + 10 = 15}$$

$$A_5 = A_3 + A_4 \rightarrow \boxed{A_5 = 10 + 15 = 25}$$

$$A_6 = A_4 + A_5 \rightarrow \boxed{A_6 = 15 + 25 = 40}$$

$$A_7 = A_5 + A_6 \rightarrow \boxed{A_7 = 25 + 40 = 65}$$

$$A_8 = A_6 + A_7 \rightarrow \boxed{A_8 = 40 + 65 = 105}$$

$$A_9 = A_7 + A_8 \rightarrow \boxed{A_9 = 65 + 105 = 170}$$

Portanto, analisaram que a soma entre o oitavo termo e o nono termo será igual a 275.

$\boldsymbol{Link - Problema_{15}}$**:** veja as respostas dos estudantes acessando o link abaixo:
https://drive.google.com/file/d/1iLKQOIx4tnIDfkFrEUEd0u9a8KEXhEj1/view?usp=sharing

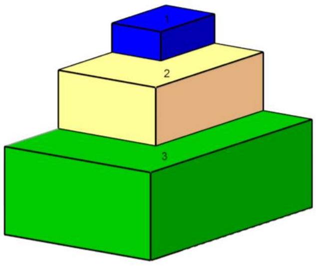
6.7 Sétimo encontro

Dois problemas foram explorados acerca do conteúdo da geometria dos fractais com ênfase na recursividade. Abaixo serão apresentados os exercícios com as soluções de alguns estudantes.

$\boldsymbol{Problema_{16}}$**: (Moreira 2017, p.62)**

Observe a imagem abaixo formada por três paralelepípedos. O paralelepípedo_1 possui 1cm de altura, 3cm de comprimento e 2cm de largura. O paralelepípedo_2 tem 2cm de altura, 6cm de comprimento e 4cm de largura. Já o paralelepípedo_3 possui 3cm de altura, 9cm de comprimento e 6cm de largura.

Figura 19 – Paralelepípedos inspirados em fractais



Fonte: Moreira, 2017, p.62

- qual será a altura do 15º paralelepípedo, o comprimento do 10º paralelepípedo e a largura do 12º paralelepípedo?

$\boldsymbol{Aluno_{3,8}}$**:** ambos os estudantes conseguiram resolver o problema. Foi pedido ao $Aluno_3$ para determinar a altura do 15º paralelepípedo. Assim, o discente analisou o problema e percebeu que a cada paralelepípedo seguinte a altura aumenta de uma unidade, e como é dado no exercício que o primeiro termo é igual a um, e a sequência analisada trata-se de uma progressão aritmética de razão também igual a um, tem-se o seguinte: $\{\underbrace{1}_{A_1}, \underbrace{2}_{A_2}, \underbrace{3}_{A_3}, \cdots, \underbrace{15}_{A_{15}}\}$. Com isso, o estudante obteve que a altura do 15º paralelepípedo vale 15cm. Acrescenta-se, ainda, outra forma que o estudante abordou durante a aula para resolver o exercício que foi por meio da tabuada do número 1. Observe:

$$A_1 = 1 \times 1 = 1$$
$$A_2 = 1 \times 2 = 2$$
$$A_3 = 1 \times 3 = 3$$
$$A_4 = 1 \times 4 = 4$$
$$\vdots$$
$$\text{Mantendo} - \text{se o padrão}, \text{obtém} - \text{se que}$$
$$\boxed{A_{15} = 1 \times 15 = 15}$$

O $Aluno_8$ utilizou uma forma análoga de raciocínio para encontrar o comprimento do 10º paralelepípedo ao perceber que os termos da sequência eram formados pela tabuada do 3.

$$A_1 = 3 \times 1 = 3$$
$$A_2 = 3 \times 2 = 6$$
$$A_3 = 3 \times 3 = 9$$
$$A_4 = 3 \times 4 = 12$$
$$\vdots$$
$$\boxed{A_{10} = 3 \times 10 = 30}$$

Portanto, o 10º paralelepípedo terá comprimento de 30cm. Vale ressaltar que o estudante percebeu, também, que esta sequência formada pelo comprimento dos paralelepípedos é uma progressão aritmética. Por fim, o $Aluno_8$ constatou que a largura do 12º paralelepípedo vale 24cm, pois percebeu que para a largura a sequência é formada pela tabuada do 2. Logo:

$$A_1 = 2 \times 1 = 2$$
$$A_2 = 2 \times 2 = 4$$
$$A_3 = 2 \times 3 = 6$$
$$\vdots$$
$$\boxed{A_{12} = 2 \times 12 = 24}$$

$\boldsymbol{Link - problema_{16}}$**:** Utilize o link para assistir à solução dos discentes.
https://drive.google.com/file/d/1CcxLsZv75DmYBdKn0T8zEyNYN_vz6B1g/view?usp=sharing

$\boldsymbol{Problema_{17}}$: **(FUMARC – 2018 – Secretaria do Estado de Educação de Minas Gerais – Professor de Educação Básica – Matemática – Adaptado)**

O triângulo de Sierpinsky é um fractal criado a partir de um triângulo equilátero, da seguinte forma: divide-se cada lado do triângulo ao meio, unem-se estes pontos médios e forma-se um novo triângulo equilátero.

Figura 20 – O triângulo de Sierpinsky

Fonte: qconcursos.com

- se continuarmos o processo, quantos triângulos brancos haverá no Estágio 3?

$\boldsymbol{Aluno_5}$**:** percebeu o seguinte padrão de repetição: toda vez que acontece o avanço de um estágio na figura, o triângulo preto dará espaço a um triângulo branco de menor tamanho. Assim, o estudante compreende o seguinte fato:

1. no triângulo original há um triângulo preto, portanto no estágio 1 haverá o surgimento de um triângulo branco de menor tamanho;
2. já no estágio 1 tem três triângulos pretos, portanto no estágio 2 surgirá três triângulos brancos menores que o triângulo preto do estágio 1, acrescido, também, do triângulo branco que já constava no estágio 1. Portanto, no estágio 2 haverá $\boxed{3 + 1 = 4 \text{ triângulos brancos}}$;

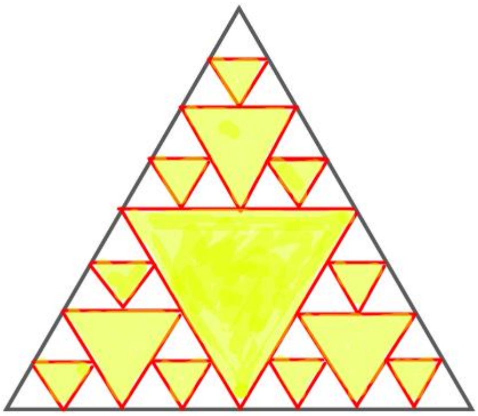
3. agora, como no estágio 2 há nove triângulos pretos, além dos quatro triângulos brancos, então no estágio 3 esses nove triângulos pretos darão lugar a nove triângulos brancos de menor tamanho, ou seja, no estágio 3 haverá $\boxed{9 + 4 = 13 \text{ triângulos brancos}}$.

Vale destacar, ainda, que o aluno resolveu o problema e entendeu esse padrão de forma mental, ou seja, não precisou realizar o desenho nem efetuar contas para solucionar o exercício.

$\boldsymbol{Aluno_{10}}$**:** resolveu o problema e obteve a resposta correta do exercício, porém diferentemente do $Aluno_5$, este estudante teve a necessidade de fazer o desenho da figura no estágio 3 que fica no seguinte formato.

Observação: considerar para a contagem da solução do problema, os triângulos que estão grifados em amarelo.

Figura 21 – Estágio 3 do triângulo de Sierpinsky



Fonte: O autor, 2021

$\boldsymbol{Link - Problema_{17}}$**:** Veja a seguir o link com as respostas dos alunos.
https://drive.google.com/file/d/1qN4-V_azswirfWyG7InN8xfJgNtL3tPC/view?usp=sharing

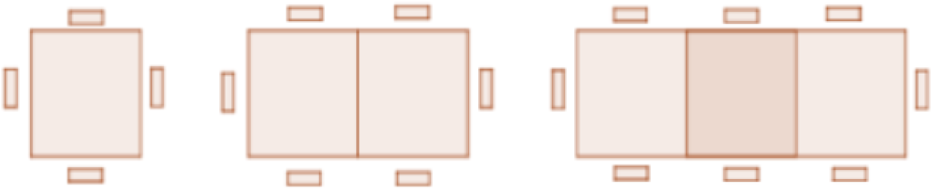
6.8 Oitavo encontro

Este foi o último encontro realizado com os alunos, foram elaborados três problemas revisando o conteúdo visto nas aulas anteriores. Além disso, os estudantes responderam ao questionário qualitativo sobre a oficina.

$\boldsymbol{Problema_{18}}$: **(FURB – 2019 – Câmara de Timbó – SC – Técnico em Informática)**

Em um restaurante, usam-se mesas com 4 cadeiras. Se juntarem duas dessas mesas, consegue-se espaço para 6 cadeiras. Se juntarem três dessas mesas, o espaço fica restrito a 8 cadeiras. A imagem a seguir ilustra essa situação:

Figura 22 – Padrão da distribuição das mesas e cadeiras



Fonte: qconcursos.com

Seguindo esse padrão, pode-se afirmar que a quantidade de mesas que se deve juntar para que a quantidade de lugares disponíveis (cadeiras) seja igual a 22 é:

$\boldsymbol{Aluno_{4,5}}$: montaram uma sequência recursiva no qual o primeiro termo é a quantidade de cadeiras para uma mesa, o segundo termo a quantidade de cadeiras para duas mesas, o terceiro termo a quantidade de cadeiras para três mesas e assim sucessivamente, portanto os estudantes obtiveram a seguinte sequência:

$$\{\underbrace{4}_{A_1},\underbrace{6}_{A_2},\underbrace{8}_{A_3},\underbrace{10}_{A_4},\underbrace{12}_{A_5},\underbrace{14}_{A_6},\underbrace{16}_{A_7},\underbrace{18}_{A_8},\underbrace{20}_{A_9},\underbrace{22}_{A_{10}}\}$$

- com esta sequência, perceberam que a quantidade de cadeiras disponíveis vai ser igual a 22 no décimo termo, portanto, quando houver dez mesas.

$\boldsymbol{Aluno_6}$**:** utilizou o chat do *Google meet* para comunicar a sua solução, escreveu o seguinte; "Eu percebi que a partir da mesa de 6 lugares em cada ponta teria 1 cadeira, para ter 22 lugares teria que ter 10 cadeiras de cada lateral, mais as 2 cadeiras da ponta, ou seja, 10 cadeiras em cada lateral para 10 mesas". O pensamento deste aluno se resume a fixar os lugares das pontas, pois em todos os casos possíveis haverá as duas cadeiras das pontas. A partir daí serão analisadas apenas as cadeiras que estão na lateral da mesa. Para cada cadeira nas laterais opostas é preciso ter uma mesa, ou seja, para cada mesa haverá sempre uma cadeira em cada lateral, portanto para obter 22 cadeiras nessa disposição do enunciado, serão necessárias as 2 cadeiras das pontas que estão fixas, acrescido de 10 cadeiras em cada lateral, consequentemente são necessárias 10 mesas. Observe a tabela 6, a seguir, que elucida esse raciocínio.

Tabela 6 – Padrão de distribuição das mesas em relação à quantidade de cadeiras em cada lateral

Quantidade de mesas (n)	Quantidade de cadeiras em cada lateral
$n = 1$	1
$n = 2$	2
$n = 3$	3
$n = 4$	4
$n = 5$	5
$\vdots$	$\vdots$
$n = 10$	10
Generalização Recursiva	$\boldsymbol{A_n = A_{n-1} + 1}$
Generalização Não – Recursiva	$\boldsymbol{A_n = n}$

Fonte: O autor, 2021

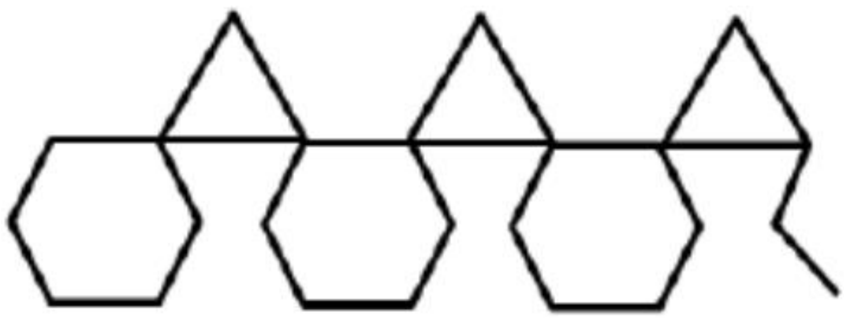
- com esta tabela, bastaria entender que são duas laterais dispostas para cada mesa, logo o valor $A_{10} = 10$ deve ser multiplicado por 2 e depois acrescido de duas unidades para contar as duas cadeiras da ponta que estão fixas. Obtendo, assim, a quantidade de 10 mesas para 22 cadeiras.

$\boldsymbol{Link - Problema_{18}}$**:** assista ao vídeo com a solução dos estudantes ao utilizar o link a seguir:
https://drive.google.com/file/d/1vmhIoiW0hWdnaI-D04ES1Yj79hcI3y_I/view?usp=sharing

$\boldsymbol{Problema_{19}}$**: (FUNDEP – 2019 – Prefeitura de Nova Serrana – MG – Professor)**

Numa brincadeira com palitos, Ricardo construiu hexágonos e triângulos, como mostra a figura a seguir.

Figura 23 – Padrão formado por hexágonos e triângulos



Fonte: qconcursos.com

Se ele construiu 30 hexágonos, mantendo esse padrão (hexágonos e triângulos) quantos palitos que ele usou?

$\boldsymbol{Alunos_{3,5,8}}$**:** resolveram o problema da seguinte forma: como cada hexágono tem 6 palitos, então para o primeiro hexágono há 6 palitos. Já o primeiro hexágono somado com o segundo possuem 12 palitos, enquanto que o primeiro, o segundo e o terceiro, juntos, dispõem de 18 palitos. Dessa forma, é possível inferir que do primeiro até o trigésimo hexágono haverá $6 \times 30 = 180$ palitos. Assim, os discentes concluíram que a quantidade de palitos utilizada é de 180.

$\boldsymbol{Observa}$**ção**$\boldsymbol{o}$**:** estes estudantes não perceberam que ainda está faltando a contagem dos palitos com relação aos triângulos, pois a sequência começa com um hexágono, porém, a figura seguinte é um triângulo, ou seja, para se chegar ao segundo hexágono é obrigatório ter passado pelo primeiro triângulo. Da mesma forma, que para se chegar até o trigésimo hexágono, é imprescindível contar a quantidade de palitos utilizada do primeiro triângulo até o vigésimo nono triângulo.

$\boldsymbol{Aluno_4}$**:** utilizou um raciocínio análogo aos $Alunos_{3,5,8}$, mas fragmentou o hexágono em duas partes, uma com 5 lados e outra com 1 lado. Ao fazer isso, descobriu que a quantidade de palitos necessárias para se obter o trigésimo hexágono será a soma da quantidade considerada para 5 lados somada com a quantidade considerada para 1 lado. Portanto, basta analisar o resultado da seguinte expressão: $(5 \times 30 + 1 \times 30) \rightarrow 150 + 30 = \boxed{180 \text{ palitos}}$.

$\boldsymbol{Observa}$**ção**$\boldsymbol{o}$**:** como os discentes demonstraram um pouco mais de dificuldade em interpretar o padrão da figura formada por hexágonos e triângulos, o professor explicou algumas maneiras de examinar o problema, assim como formas de resolução. O que pode ser visto no vídeo disponibilizado no link deste exercício, ou ainda, realizar a leitura do apêndice A, onde consta a resolução do professor.

$\boldsymbol{Link - Problema_{19}}$**:** Acesse o link abaixo e veja a resposta dos participantes.
https://drive.google.com/file/d/11CC4tmVAxVvINotpSCoxmWpZH3jr6L71/view?usp=sharing

$\boldsymbol{Problema_{20}}$: (INEP – 2008 – ENEM – Prova amarela)

Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares. O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);

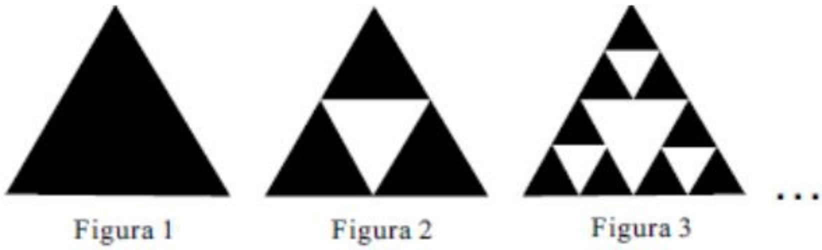
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;

3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;

4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

- de acordo com o procedimento descrito, qual é o desenho da figura 4 da sequência apresentada abaixo.

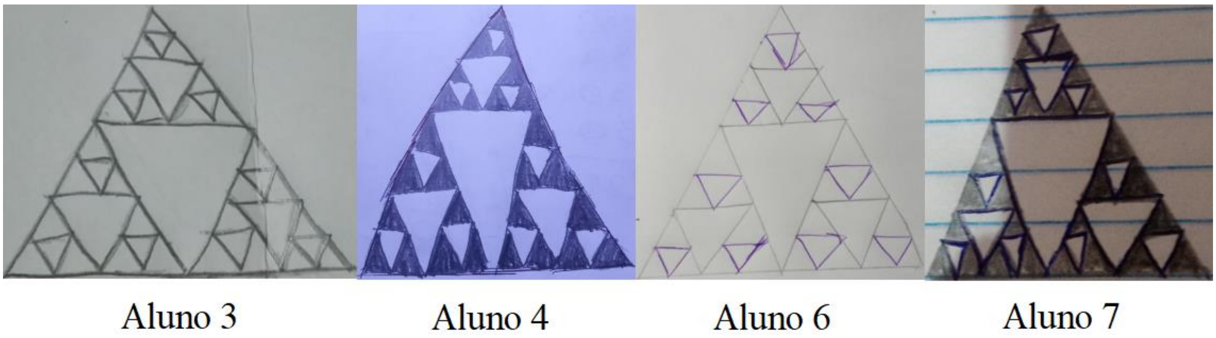
Figura 24 – Padrão do triângulo de Sierpinski



Fonte: qconcursos.com

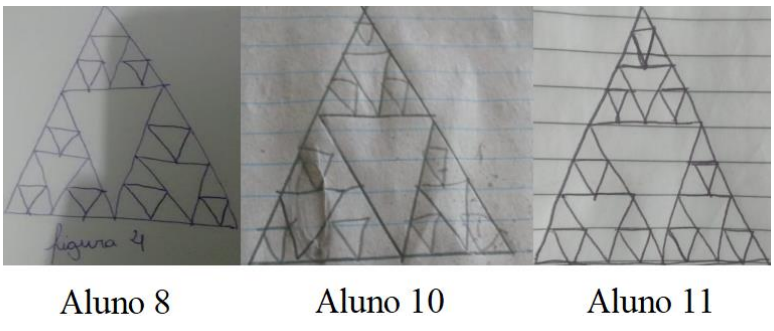
***Observação*:** para este problema, o professor pediu que os alunos fizessem o desenho da figura 4 e enviassem a foto pelo *whatsapp*. Veja abaixo o desenho feito por alguns alunos.

Figura 25 – Desenho realizado do nível 4 do triângulo de Sierpinski



Fonte: O autor, 2021

Figura 26 – Desenho realizado do nível 4 do triângulo de Sierpinski



Fonte: O autor, 2021

6.9 Análise do capítulo 6

Vale ressaltar alguns aspectos que foram notados com relação ao aprendizado, participação e considerações que dizem respeito à oficina, aos participantes e a metodologia empregada:

1. a metodologia ativa da instrução por pares foi pensada para o ensino presencial, dessa forma o docente fez algumas adaptações com o intuito de potencializar a participação e comunicação dos estudantes nos encontros remotos. Assim, a partir do segundo encontro, foi utilizado o *Peer Instruction* em todos os problemas propostos, como também foram feitas as discussões acerca dos exercícios, mesmo quando, o índice de acerto foi superior a 70%. Além disso, quando a taxa de acerto foi inferior a 35% o docente realizou uma explicação mais minuciosa do conteúdo, por meio de uma aula dialogada;
2. a inclusão do $Aluno_{11}$ no terceiro encontro, e do $Aluno_{12}$ no quarto encontro, foram possíveis porque os participantes comentaram, de forma positiva, sobre a oficina com outros estudantes do sexto ano;
3. muitos participantes manifestaram interesse pelo prosseguimento da oficina e mostraram entusiasmo pelo aprendizado de conteúdos matemáticos;
4. a evolução da oratória dos participantes, a perda da timidez de alguns estudantes que tinham dificuldades para expressar sua opinião foram notáveis e merecem destaque;
5. mesmo os discentes que ficaram com mais receio em manifestar a sua solução oralmente mostraram interesse pelas respostas dos outros alunos, alguns inclusive, utilizaram o chat do *Google meet* para expressar suas opiniões e participarem dos debates;
6. o professor deixou os participantes a vontade com relação à participação na oficina e nos debates para a solução de problemas. Desta forma, é válido salientar a necessidade de executar um trabalho sem pressionar os alunos, pois com o decorrer das aulas, os participantes se sentirão mais confiantes e seguros em transmitir suas ideias e opiniões, participando ativamente dos encontros remotos;
7. a melhoria com relação à autonomia dos discentes ficou evidente ao final da oficina.

7 RESULTADOS

Para considerar a aplicação da metodologia ativa da instrução por pares no ensino remoto foi elaborado um questionário com abordagem qualitativa. O objetivo deste é que os estudantes expressem sua opinião sobre aspectos específicos e gerais que dizem respeito ao aprendizado. Assim como, tópicos relacionados à participação, comunicação e desenvolvimento cognitivo, com relação ao conteúdo de recorrência que foi abordado durante os encontros remotos.

$\boldsymbol{Observa}$ções$\boldsymbol{es}$:

- o $Aluno_2$ faltou ao oitavo encontro, que foi o momento acordado para aplicação do questionário,
- a primeira etapa é baseada no estudo do material prévio sobre recorrências que foi elaborado pelo professor;
- na primeira etapa não foi utilizado a metodologia ativa do *Peer Instruction*. Os alunos resolveram aos problemas propostos apenas com o estudo do material inicial;
- após a solução dos participantes aos problemas propostos da primeira etapa houve a aula expositiva na qual o docente explicou os exercícios e o material prévio;
- a primeira etapa foi executada apenas no primeiro encontro com os estudantes;
- para a primeira etapa tanto o $Aluno_{11}$, quanto o $Aluno_{12}$ não participaram do questionário, pois ambos ainda não estavam inscritos na oficina;
- do segundo ao oitavo encontro, foi aplicado a metodologia ativa da instrução por pares e a explicação teórica do conteúdo foi por meio de uma aula dialogada;
- todas as figuras incluídas neste capítulo, ou seja, da figura 26 até a figura 45 foram retiradas do *Google forms* e dizem respeito aos resultados obtidos às respostas dos alunos.

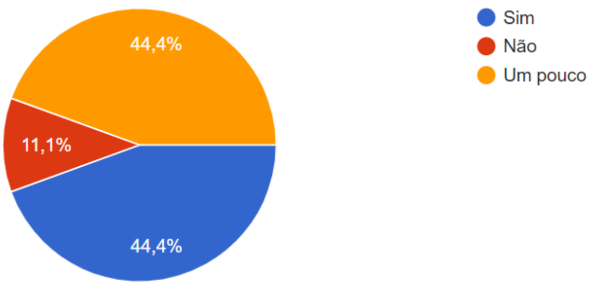
7.1 O questionário

7.1.1 Primeira etapa – Material prévio

Figura 27 – Respostas dos participantes ao primeiro item

1. Você achou que o material prévio elaborado pelo professor foi o suficiente para você conseguir entender o conceito de recorrência?

9 respostas

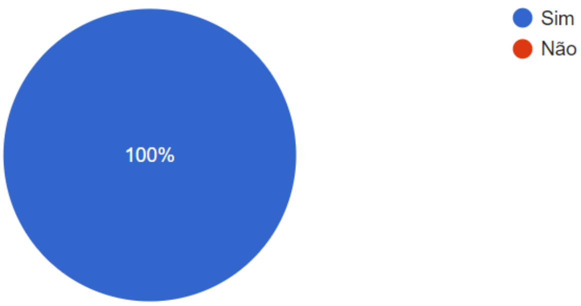


Fonte: O autor, 2021

Figura 28 – Respostas dos participantes ao segundo item

2. O material prévio estava em concordância com o que foi ensinado na aula expositiva?

9 respostas

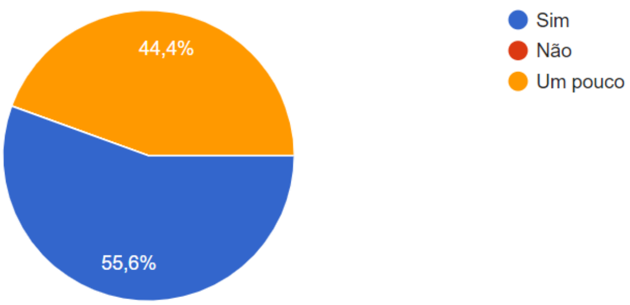


Fonte: O autor, 2021

Figura 29 – Respostas dos participantes ao terceiro item

3. Você se sentiu confiante de realizar o primeiro teste apenas com o estudo do material prévio?

9 respostas



Fonte: O autor, 2021

Tabela 7 – Respostas dos participantes para as perguntas da primeira etapa

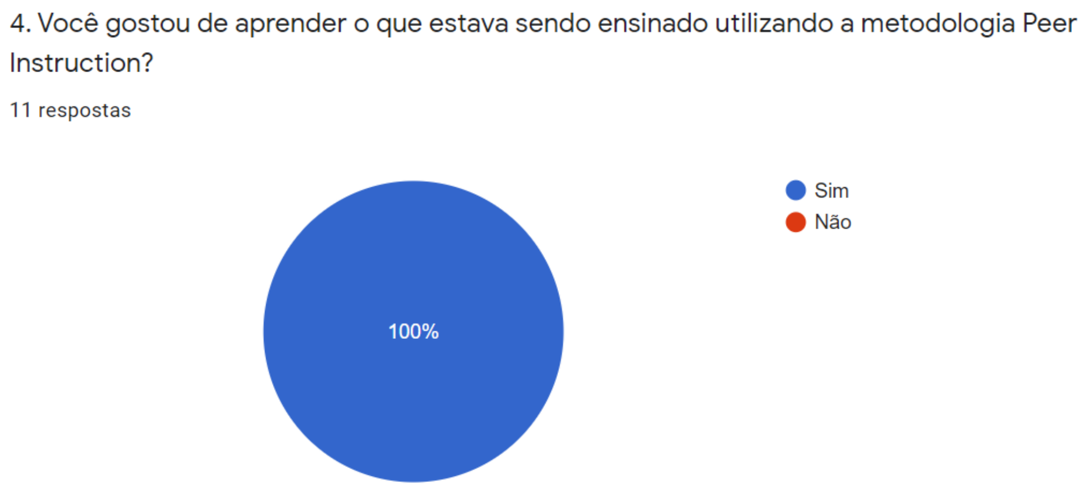
Alunos	Pergunta 1	Pergunta 2	Pergunta 3
$Aluno_1$	Sim	Sim	Sim
$Aluno_3$	Não	Sim	Um pouco
$Aluno_4$	Um pouco	Sim	Sim
$Aluno_5$	Um pouco	Sim	Sim
$Aluno_6$	Um pouco	Sim	Um pouco
$Aluno_7$	Sim	Sim	Sim
$Aluno_8$	Sim	Sim	Um pouco
$Aluno_9$	Um pouco	Sim	Um pouco
$Aluno_{10}$	Sim	Sim	Sim

Fonte: O autor, 2021

***Comentários*:** Todos os estudantes acharam que o material prévio estava de acordo com o que foi ensinado na aula. Todavia, 44,4% destes alunos consideraram que apenas com este material inicial não foi o suficiente para entender e resolver os problemas propostos em sua totalidade. Além disso, constataram que o material prévio ajuda a entender o conceito de recorrência, entretanto não o suficiente para haver o entendimento mais amplo do conteúdo.

7.1.2 Segunda etapa, primeiro tópico – Ensino e aprendizagem utilizando o *Peer Instruction* por meio do ensino remoto

Figura 30 – Respostas dos discentes ao quarto item do questionário

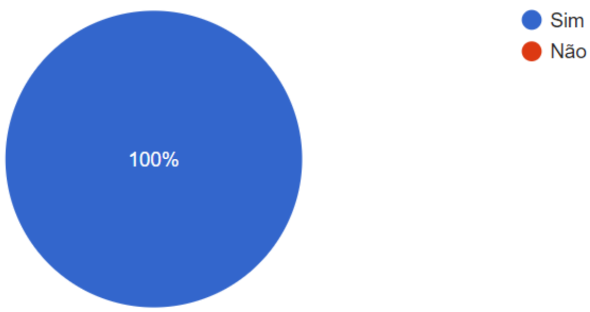


Fonte: O autor, 2021

Figura 31 – Respostas dos alunos ao sexto item

6. Você achou o Peer Instruction um instrumento importante para ser utilizado nas aulas de ensino remoto?

11 respostas

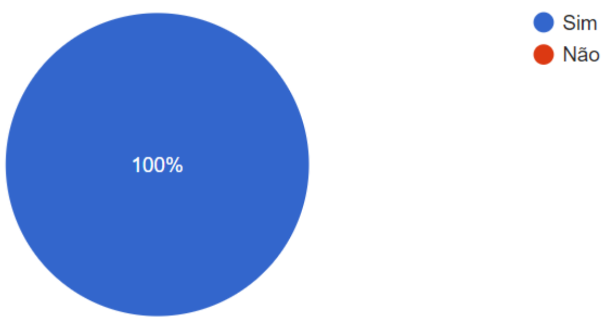


Fonte: O autor, 2021

Figura 32 – Respostas dos estudantes ao sétimo item

7. Você acha que o Peer Instruction facilita o aprendizado?

11 respostas

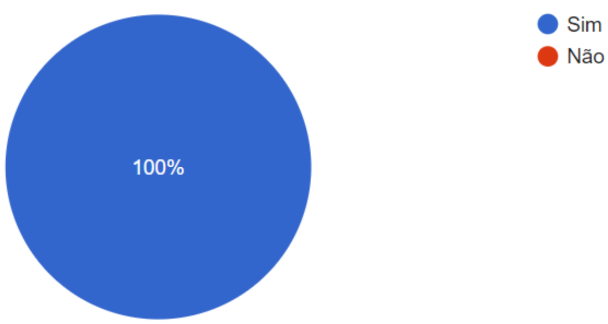


Fonte: O autor, 2021

Figura 33 – Respostas dos discentes ao oitavo item

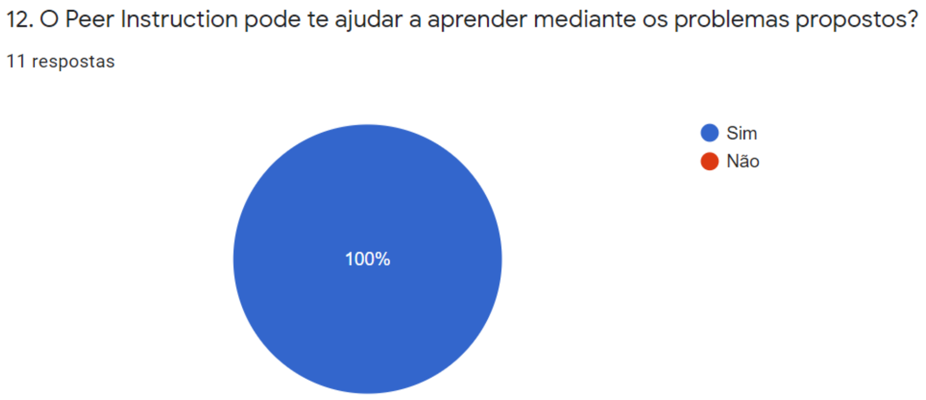
8. Você acha que o Peer Instruction torna a aula mais dinâmica?

11 respostas



Fonte: O autor, 2021

Figura 34 – Respostas dos discentes ao item doze

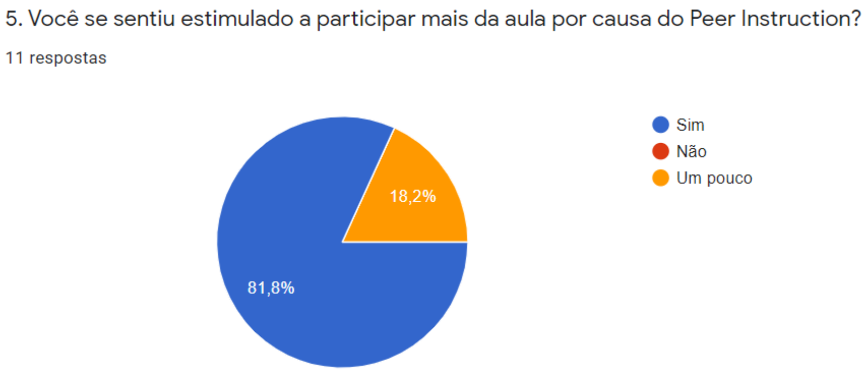


Fonte: O autor, 2021

***Comentários*:** a totalidade dos participantes da oficina qualificaram como sendo importante o *Peer Instruction* para o ensino remoto, no que diz respeito ao ensino e aprendizagem do conteúdo.

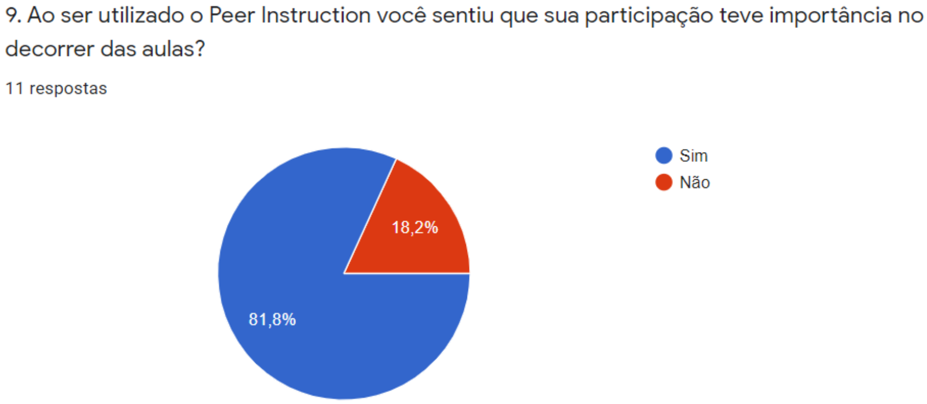
7.1.3 Segunda etapa, segundo tópico – Motivação e participação por meio da instrução por pares

Figura 35 – Respostas dos estudantes ao quinto item



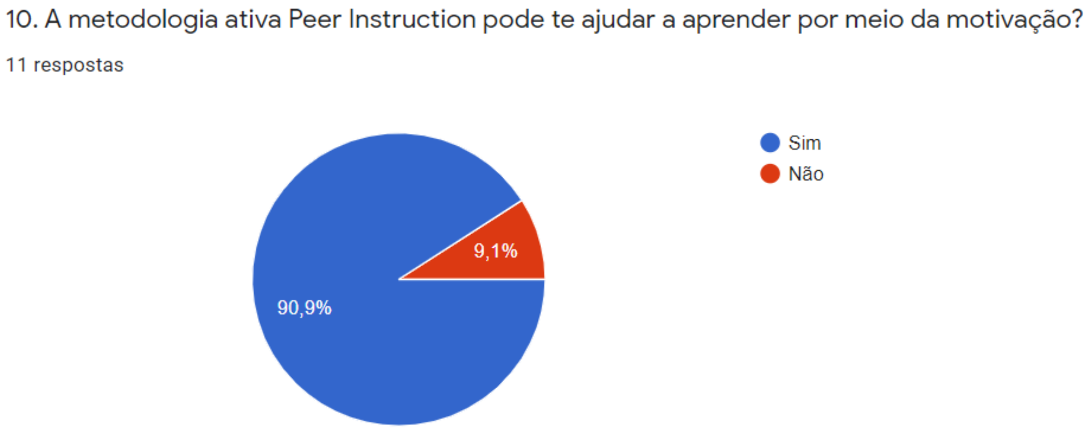
Fonte: O autor, 2021

Figura 36 – Respostas dos discentes ao nono item do questionário



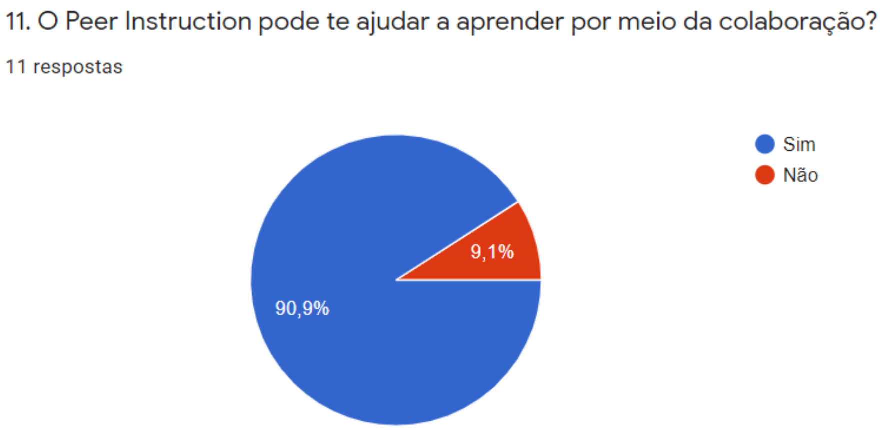
Fonte: O autor, 2021

Figura 37 – Respostas dos alunos ao décimo item



Fonte: O autor, 2021

Figura 38 – Respostas dos discentes ao item onze

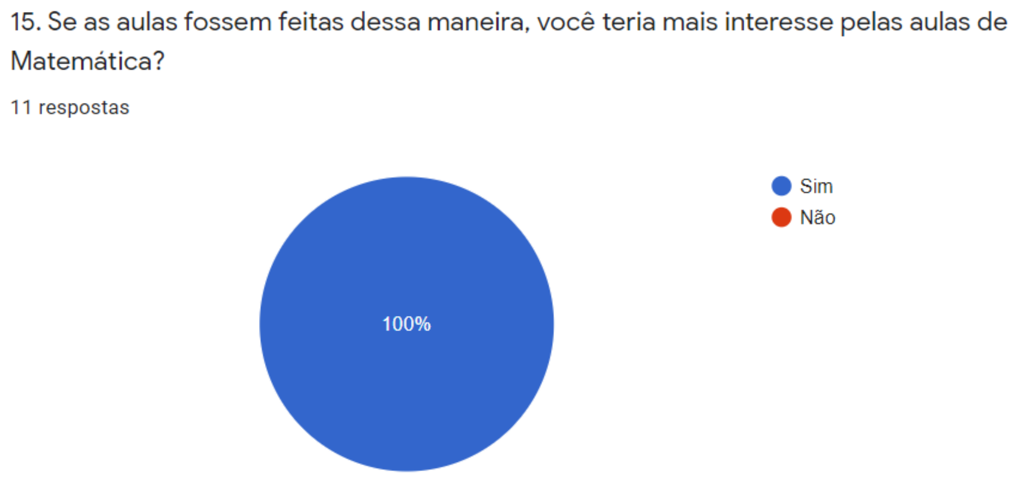


Fonte: O autor, 2021

Figura 39 – Respostas dos alunos ao item treze

Fonte: O autor, 2021

Figura 40 – Respostas dos estudantes ao item quinze

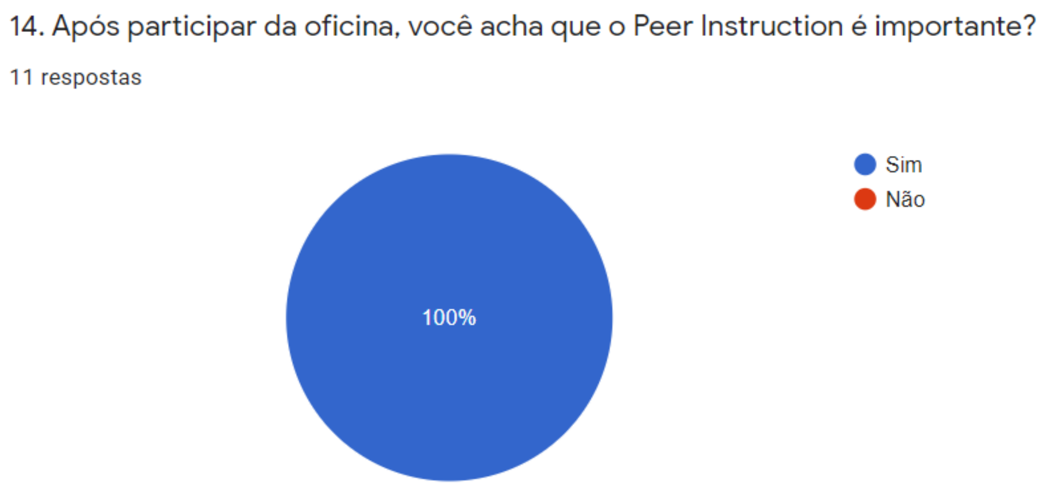


Fonte: O autor, 2021

Comentários**:** os participantes da oficina foram unânimes em considerar que o *Peer Instruction* ajuda no aprendizado, por meio das interações entre os estudantes. Como também, consideraram que se fosse utilizado a instrução por pares nas aulas regulares da escola, isso iria aumentar o interesse pelo conteúdo ensinado. Evidencia-se, ainda, que dois discentes, isto é, 18,2% dos participantes se sentiram moderadamente estimulados a participar da aula por causa do *Peer Instruction*. Porém, não avaliaram esse estímulo como sendo pleno. Além do mais, dois alunos acharam que suas participações não tiveram relevância nos encontros ministrados, e um estudante achou que a instrução por pares não facilitou o aprendizado por meio da motivação e da colaboração.

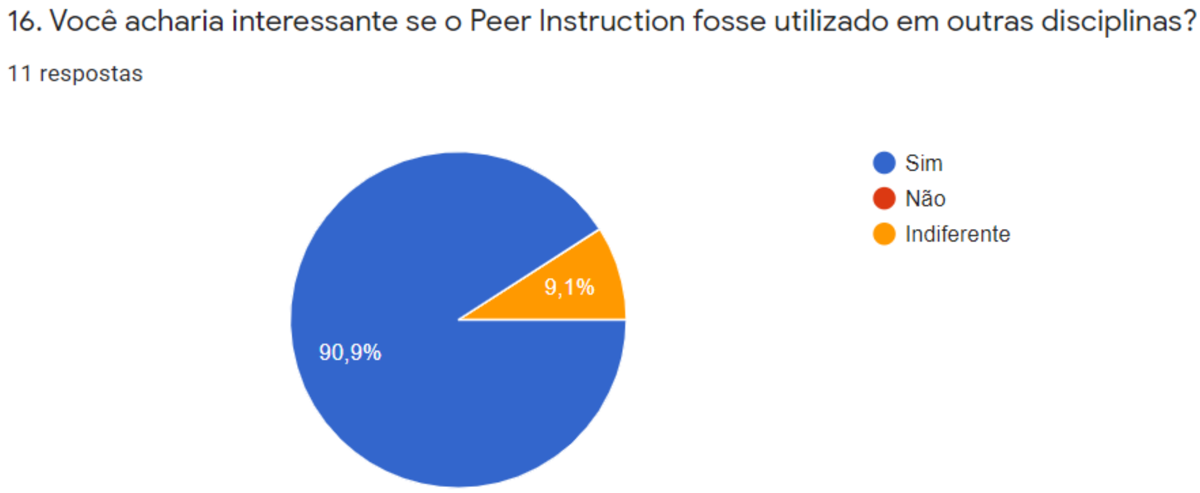
7.1.4 Segunda etapa, terceiro tópico – A análise dos participantes sobre a metodologia do *Peer Instruction*

Figura 41 – Respostas ao item quatorze do questionário



Fonte: O autor, 2021

Figura 42 – Respostas dos estudantes ao décimo sexto item



Fonte: O autor, 2021

***Comentários*:** todos os discentes consideraram a instrução por pares como sendo importante. Todavia, um aluno qualificou como sendo indiferente a utilização do *Peer Instruction* em outras disciplinas. Enquanto que, os restantes dos participantes acharam que seria interessante a aplicação da instrução por pares em outras disciplinas.

7.1.5 Perguntas discursivas sobre o conteúdo de recorrência e o *Peer Instruction*

***Observação*:** as respostas dos alunos foram retiradas sem nenhuma modificação do *Google forms*, ou seja, na íntegra. Assim, em algumas dessas respostas pode haver alguns descuidos com relação à ortografia, concordância e regência. O que não deixa de estar dentro do aceitável em se tratando de alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

Figura 43 – Respostas dos discentes ao questionário: item dezessete

17. O que você mais gostou nas aulas remotas de recorrência usando a metodologia Peer Instruction?

11 respostas

Aluno 1	Gostei bastante, muito divertido participar de forma remota com mais alunos, e me ajudou bastante nos meus conhecimentos
Aluno 3	Na hora de responder
Aluno 4	Discutir o assunto ajudando uns aos outros
Aluno 5	O fato da gente ter a oportunidade de explicar os problemas e aprender uns com os outros
Aluno 6	Os alunos explicando, pois conseguir ver o jeito que cada um fez a atividade e pude ver no que poderia me ajudar.
Aluno 7	Eu gostei de tudo porque a matemática e a minha materia preferida
Aluno 8	nos participamos mas e temos mas interesse
Aluno 9	Nós vemos várias respostas diferentes e assim nos faz pensar sobre a nossa resposta e nossa fórmula pra chegar no resultado.
Aluno 10	As opiniões jeitos diferentes de se expressar
Aluno 11	O fato do desenvolvimento das aulas serem uma aplicação de diferentes ideias de desenvolvimento dos exercícios
Aluno 12	Os problemas

Fonte: O autor, 2021

***Comentários*:** de acordo com as respostas, percebe-se que os estudantes evidenciaram as explicações e as interações durante as aulas. Bem como, a participação dos alunos no decorrer da oficina. Outro ponto que merece destaque são os problemas propostos, que os participantes acharam relevantes.

Figura 44 – Respostas dos alunos ao item dezoito

18. O que você não gostou nas aulas remotas de recorrência usando o Peer Instruction?

11 respostas

Aluno 1	Não tem o que eu não gostar
Aluno 3	Nada, na verdade gostei de tudo.
Aluno 4	Eu gostei de tudo
Aluno 5	O fato de levar mais tempo da aula por causa do tempo que cada um leva para explicar
Aluno 6	As vezes eu demorava para enterder o metodo de outra pessoa.
Aluno 7	Eu gostei de tudo achei bem interessante
Aluno 8	nada as duvidas sao todas respondidas
Aluno 9	Não tem algo que eu não tenha gostado, eu achei bem interessante na verdade.
Aluno 10	Nada sinceramente gostei de tudo
Aluno 11	Gostei de tudo
Aluno 12	Nada

Fonte: O autor, 2021

***Comentários*:** os resultados obtidos para este item indicam que, de modo geral, os alunos gostaram da oficina. O aspecto mais relevante citado como desfavorável foi o fato da explicação do estudante não ter sido conclusiva em alguns momentos. O que acabou por dificultar o entendimento dos outros alunos

Figura 45 – Respostas dos discentes ao item dezenove do questionário

19. Durante a oficina nós vimos o conceito de recorrência. Você acha que ele é importante? Por quê?

11 respostas

Aluno 1	Sim
Aluno 3	Sim. Porque vai que um dia nos precisaremos dele. Por isso que é bom aprender e ficar preparado.
Aluno 4	Sim , porquê está ajudando bastante na aprendizagem de todos
Aluno 5	SIM , porque cai no vestibular e em concursos e vão servir para eu conseguir emprego
Aluno 6	Sim, pois pude perceber varias formas de resover uma progreção.
Aluno 7	Sim.porque vou aprender coisas q possa me ajudar no futuro
Aluno 8	sim
Aluno 9	Sim. Talvez pra quem não tenha entendido em outra aula, tem importância.
Aluno 10	Sim
Aluno 11	Sim
Aluno 12	Sim, porque melhora o aprendizado

Fonte: O autor, 2021

***Comentários*:** Os estudantes foram unânimes em considerar o conceito de recorrência como importante. Alguns alunos não justificaram o motivo, enquanto outros disseram que o conceito de recorrência ajuda na aprendizagem de sequências e na análise das progressões. Citaram, também, a importância de aprender conteúdos que os ajudem no futuro e que estejam presentes em concursos e vestibulares.

7.1.6 Opinião dos alunos sobre assuntos que não foram abordados anteriormente

Figura 46 – Respostas dos estudantes ao vigésimo item

20. O que você gostaria de falar sobre sua experiência com o Peer Instruction no ensino remoto que não foi perguntado acima?

11 respostas

Aluno 1	Gostei bastante do peer instruction, nunca havia participado, me ajudará muito no futuro
Aluno 3	Que ele foi muito bom, que eu gosto de participar assim da aula, que eu aprendi bastante
Aluno 4	Essa é uma forma remota que ajuda os alunos a aprender , discutindo o assunto ,ajudando uns aos outros.
Aluno 5	Sobre as coisas novas que eu aprendi com os outros
Aluno 6	Devido a minha timidez, eu não me sentia avontade de falar nas aulas, mas o professor compreendeu o meu lado e não me forçou a falar.
Aluno 7	Acredito que nada
Aluno 8	que nos interagimos mas
Aluno 9	Eu gostei muito, porque é um espaço totalmente aberto aos alunos para discutirem suas opiniões, seus pontos de vistas, suas respostas.
Aluno 10	Nada
Aluno 11	Acho importante e também acho que deveria ser aplicado em mais matérias,menos em inglês.
Aluno 12	Nada

Fonte: O autor, 2021

***Comentários*:** neste tópico, os participantes apresentaram algumas questões mais abrangentes quanto à metodologia da instrução por pares. Alguns discentes qualificaram a importância do aprendizado e da interação com os colegas. Um estudante destacou a importância do *Peer Instruction* e afirmou que, gostaria que a instrução por pares fosse aplicada em outras disciplinas. Excluiu Inglês, ou seja, este participante provavelmente não se sente confortável em dialogar na língua estrangeira. Outro participante abordou a questão da timidez, e o fato da compreensão do professor em relação à subjetividade do discente.

7.1.7 Análise geral a respeito do questionário e das respostas dos discentes

Após aplicar o questionário e obter as respostas dos estudantes, ficaram em evidência alguns pontos que serão abordados a seguir:

- apenas um aluno não participou do questionário de opinião;
- dentre as dezesseis perguntas objetivas, os estudantes foram unânimes em nove delas. Os itens a seguir tiveram a unanimidade dos participantes.

1. o material prévio elaborado pelo professor na primeira etapa estava em concordância com o que foi exposto na aula;
2. os alunos gostaram de aprender o que foi ensinado utilizando a metodologia ativa do *Peer Instruction;*

3. os estudantes acharam a instrução por pares um instrumento importante para ser trabalhado nas aulas de ensino remoto;
4. os participantes consideraram que o *Peer Instruction* facilita o aprendizado;
5. os discentes qualificaram que a instrução por pares torna a aula mais dinâmica;
6. julgaram que o *Peer Instruction* ajuda no aprendizado mediante os problemas propostos;
7. consideraram que a instrução por pares ajuda no aprendizado, por intermédio das interações e discussões;
8. os alunos qualificaram que se as aulas do currículo normal fossem ministradas dessa forma, estes teriam mais interesse pelas aulas de Matemática;
9. julgaram que a metodologia do *Peer Instruction* é importante para o ensino x aprendizagem.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia ativa do *Peer Instruction* se mostrou eficiente ao que foi proposto na introdução deste trabalho, no que diz respeito a um método que auxilie o professor no desenvolvimento do estudante para a modalidade do ensino remoto. Neste sentido, é notável a evolução gradual dos discentes do início da oficina até o seu término, no oitavo encontro. Houve progressos com relação ao domínio do conteúdo estudado. A fluidez das aulas e o interesse dos estudantes também são aspectos que merecem ser ressaltados.

No que diz respeito às respostas dos participantes aos problemas propostos, ficou evidenciada a evolução dos discentes com relação à comunicação e ao desenvolvimento na exposição de ideias. Nota-se que, em muitos casos, houve diferentes soluções apresentadas para o mesmo exercício, o que mostra maturidade conceitual por parte dos estudantes.

Acrescenta-se, ainda, a opinião dos participantes sobre a oficina. Neste sentido, destaca-se o que foi apresentado com a aplicação do questionário no capítulo 7.

Além disso, inicialmente foi planejado trabalhar apenas com questões que envolvessem o conceito de recorrência sem o aprofundamento em conteúdos que abrangessem assuntos mais complexos da Matemática ou relacionados a uma escolaridade mais avançada em relação a série dos participantes. Todavia, com a fluidez dos encontros remotos, o professor se sentiu motivado a incluir outros temas que envolviam o conceito de recorrência. Assim, acrescentou-se os conceitos de progressões aritméticas de primeira e de segunda ordem, progressões geométricas, recorrência linear de segunda ordem e a geometria dos fractais, que são assuntos que necessitam de mais maturidade conceitual, percepção dos padrões e noções mais aprofundadas da Matemática. Vale ressaltar, que só foi possível chegar a esta ampliação do conteúdo ministrado devido ao progresso contínuo dos estudantes a cada encontro realizado.

Outro aspecto, que deve ser evidenciado, é referente à utilização das metodologias ativas. Neste sentido, notou-se que, apesar da dissertação ter enfatizado o *Peer Instruction*, foram utilizadas outras metodologias ativas. Na primeira etapa, o material prévio fornecido aos alunos é baseado na metodologia da sala de aula invertida. Como também, os problemas propostos na primeira etapa, e principalmente na segunda etapa, podem ser considerados a aprendizagem baseada em problemas. Pois, nesta segunda etapa, houve interações e discussões sobre estes problemas. Além disso, os exercícios propostos podem ser considerados como um desafio para os estudantes. Assim, percebeu-se que o rendimento dos participantes poderia ser ainda mais satisfatório se fosse empregado junto com a instrução por pares outras metodologias ativas, como a gamificação, a sala de aula invertida, aprendizagem baseada em problemas, dentre outras. Observe a seguir algumas considerações percebidas pelo docente, que podem ser investigadas em trabalhos posteriores para aperfeiçoar o modelo do ensino remoto:

1. elaboração e fornecimento do material prévio teórico para os alunos antes de cada encontro remoto realizado em vídeo conferência, com pelo menos cinco dias de antecedência para dar tempo do estudante conseguir assimilar o conteúdo (sala de aula invertida);
2. utilização da planilha do *Google forms* para elaborar problemas que sirvam como desafios aos estudantes, e também possibilitar o debate e a interação para solução destes, incentivando a comunicação e a participação dos discentes (*Peer Instruction* e aprendizagem baseada em problemas);
3. utilização dos parâmetros do *Peer Instruction* que dizem respeito às respostas dos alunos para analisar se há a necessidade de uma explicação mais minuciosa por parte do professor, ou se apenas com a interação entre os estudantes e a mediação do docente é suficiente para o entendimento da matéria (*Peer Instruction)*;
4. agrupamento de elementos dos jogos, como formação de equipes, pontuação e torneios com o intuito de estimular os estudantes (gamificação e aprendizagem baseada em equipes).

Observa-se que, além destes tópicos acima, é importante a utilização da mesa digitalizadora para as aulas do ensino remoto de Matemática, como também o uso de equipamentos de som para captação de áudio, e possuir um microfone condensador, que melhora a qualidade da voz. A importância desses instrumentos é significativa, pois são ferramentas facilitadoras para as aulas no formato do ensino remoto.

Desta forma, considera-se que a instrução por pares foi relevante para o desenvolvimento de métodos de aprendizagem para a modalidade do ensino remoto. Contudo, seria interessante analisar o *Peer Instruction* em combinação com outras metodologias ativas. O objetivo seria aprofundar, ainda mais, o objeto de estudo e desenvolver mais maneiras de obter a participação e o interesse dos estudantes.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, F. G. da S.; MARINS, A. S. Introduzindo a geometria fractal no ensino médio por meio da perspectiva de modelagem matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 6, n. 18, p. 21-34, 2019.

BACICH, L. Ensino Híbrido: Proposta de formação de professores para uso integrado das tecnologias digitais nas ações de ensino e aprendizagem. *In*: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA, 2016, Porto Alegre. **Anais** [...]. Porto Alegre: Congresso Brasileiro de Informática na Educação, 2016. p. 679-687.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular:** A etapa do ensino fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

CRATO, N. Melhorar o ensino da matemática com ferramentas do século XXI. **Reaserch Gate**, [S.l], v. 11, p. 10-2018, 2010. Disponível em: https://pt. scribd. com/document/99981511/Nuno-Crato-Matematica. Acesso em: 12 out. 2020.

CROUCH, C. H. *et al*. Peer instruction: Engaging students one-on-one, all at once. **Research-based reform of university physics**, [S.l], v. 1, n. 1, p. 40-95, 2007.

FARDO, M. L. A gamificação aplicada em ambientes de aprendizagem. **RENOTE-Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 11, n. 1, p. 01-09 2013.

FONSECA, S. M.; MATTAR, J. Metodologias ativas aplicadas à educação a distância: revisão da literatura. **Revista EDaPECI**, São Cristóvão/SE, v. 17, n. 2, p. 185-197, 2017.

KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (Ed.). **Algebra in the early grades**, New York: Routledge, 2017.

LIMA, V. V. *et al*. Aprendizagem baseada em equipes: diretrizes, etapas e recomendações. **Nota técnica**, São Paulo, n. 4, p. 01-11, 2016.

MANN, C.; STEWART, F. **Internet communication and qualitative research**: A handbook for researching online. London: Sage, 2000.

MAZUR, E. **Peer instruction:** a revolução da aprendizagem ativa. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

MOREIRA, V. S. S. S. M. **Geometria Fractal na Educação Básica**. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática – Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2017.

OLÍMPIADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. **Provas e soluções**. 2012 e 2018. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em: 05 ago. 2020.

PAIVA, M. R. F. *et al*. Metodologias ativas de ensino-aprendizagem: revisão integrativa. **SANARE-Revista de Políticas Públicas**, Sobral/CE, v. 15, n. 2, p. 145-153, 2016.

PEREIRA, Z. T. G.; DA SILVA, D. Q. Metodologia ativa: Sala de aula invertida e suas práticas na educação básica. **REICE: Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación**, Madrid, v. 16, n. 4, p. 63-78, 2018.

PINHEIRO, T. A.; LAZZARIN, J. R. Recorrência matemática na OBMEP. **Ciência e Natura**, Santa Maria/RS, v. 37, n. 3, p. 36-46, 2015.

PONTES, E. A. S. A Capacidade de Gerar Soluções Eficientes e Adequadas no Processo Ensino e Aprendizagem de Matemática. **Revista Psicologia & Saberes**, Maceió/AL, v. 8, n. 10, p. 193-205, 2019.

SOUZA, S. C. de; DOURADO, L. Aprendizagem baseada em problemas (ABP): um método de aprendizagem inovador para o ensino educativo. **Holos**, Natal, v. 5, p. 182-200, 2015.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula**. Porto Alegre: Penso Editora, 2009.

VARGAS, A. F. *et al*. Aprendendo Matemática através dos fractais: Uma experiência no Ensino Médio. *In:* EREMAT-ENCONTRO REGIONAL DE ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL, 20., 2014, Bagé/RS. **Anais** [...]. Bagé/RS: Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), 2014. p. 13-16.

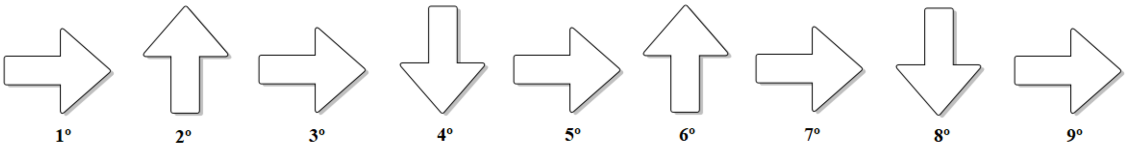
APÊNDICE A – Resolução do professor aos problemas propostos

Resolução dos problemas propostos sobre sequências e padrões – primeiro encontro

$\boldsymbol{Problema_1}$

Um labirinto possui um padrão designado pelas setas que mostram o caminho para a saída, sabe-se que os nove primeiros caminhos são os indicados na figura abaixo:

Figura 47 – Sequência com os nove primeiros caminhos do labirinto



Fonte: O autor, 2021

Se neste labirinto há um total de 58 caminhos, qual será a seta que indicará o último caminho que dá acesso a saída?

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$**:** Espera-se que o aluno consiga resolver este problema ao realizar o estudo do material prévio, pois está diretamente relacionado aos exemplos dois e três do material. Para resolver o exercício é necessário, primeiramente, perceber o padrão desta sequência a partir da figura fornecida. Verifique que o padrão das setas é o seguinte: Direita, cima, direita, baixo. Ou seja, há um ciclo completo para estas quatro figuras que irão ficar se repetindo até o múltiplo de quatro mais próximo de cinquenta e oito, ao efetuar as operações é averiguado que $4 \times 14 = 56$, logo este é o múltiplo de quatro mais próximo de cinquenta e oito, isto significa que há quatorze ciclos completos e ainda restam as duas próximas setas para se chegar ao final do labirinto, que será a seta para a direita (posição 57) e a seta para cima (posição 58). De forma matemática infere-se que: $58 = 4 \times 14 + 2$, portanto outra forma de analisar o problema é pelo resto na divisão por quatro. Observe:

- resto igual a zero: Seta para baixo
- resto igual a um: Seta para a direita
- resto igual a dois: Seta para cima
- resto igual a três: Seta para a direita

Como o resto encontrado na divisão de cinquenta e oito por quatro é dois:

- $58 \div 4 \rightarrow Resto = 2$, então a seta que está na posição 58 será para cima.

$\boldsymbol{Problema_2}$

Observe a figura a seguir, perceba o padrão e responda à pergunta abaixo:

Figura 48 – Sequência formada por blocos de formato quadrangular

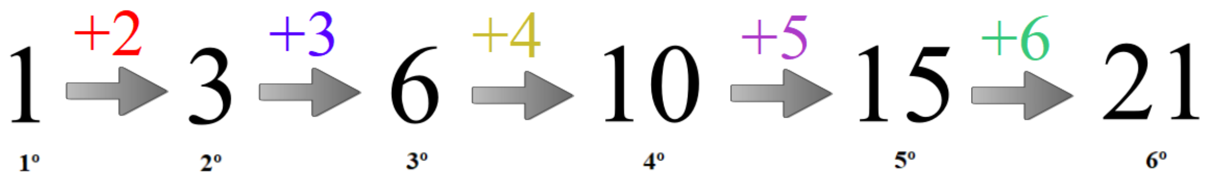
Fonte: Van de Walle, 2009, p. 299

- ao continuar esta sequência, quantos quadrados serão necessários para se formar a figura correspondente ao sexto termo (6º termo)?

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$: Este problema é mais acessível em relação ao anterior pelo fato de que o termo pedido é muito próximo ao da figura fornecida, portanto o aluno pode fazer o desenho até o sexto termo, ou ainda somar a quantidade de quadrados que é acrescentado a cada termo posterior em relação ao anterior, entretanto em ambos os casos é necessário perceber o padrão do problema. Observe três formas para encontrar o padrão:

$\boldsymbol{Forma_1}$: Somar a quantidade de quadrados em cada termo e obter a seguinte sequência: $\{1, 3, 6, 10, \ldots\}$. Agora veja a figura 48 que mostra o padrão desta sequência:

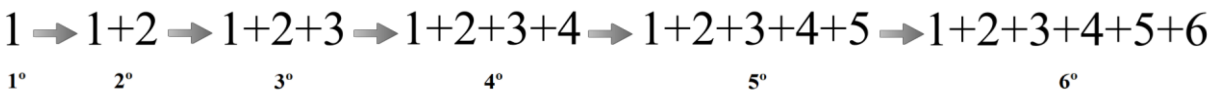
Figura 49 – Padrão da sequência



Fonte: O autor, 2021

$\boldsymbol{Forma_2}$: Similar a primeira forma, a diferença é que nesta o aluno perceberia o padrão pela quantidade de quadrados acrescentados na última coluna, logo se obtém a seguinte sequência mostrada na figura 49:

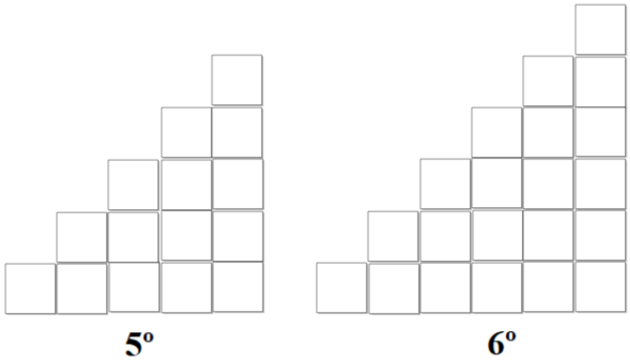
Figura 50 – Padrão pelo acréscimo em cada coluna



Fonte: O autor, 2021

$\boldsymbol{Forma_3}$: Outra maneira possível de encontrar o padrão é realizando o desenho, como a imagem fornecida no exercício vai até o quarto termo, então basta fazer o desenho para o quinto termo e para o sexto termo, ambos serão mostrados na figura abaixo:

Figura 51 – Padrão a partir do desenho



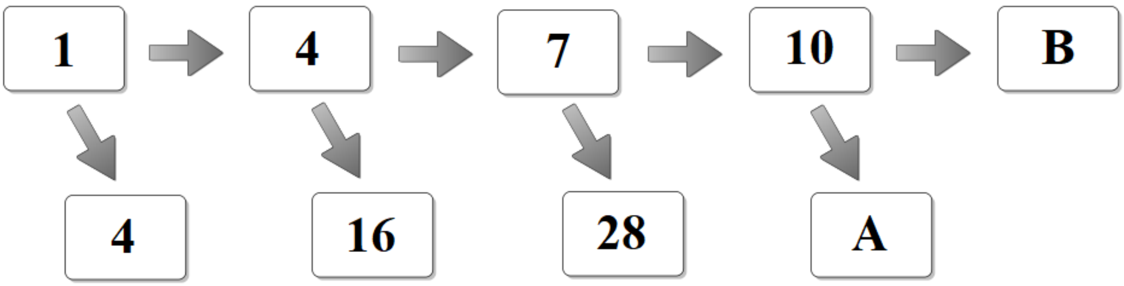
Fonte: O autor, 2021

Resolução dos problemas propostos sobre sequência recursivas e não recursivas – segundo encontro

$\boldsymbol{Problema_3}$**: (FCC – 2013 – Sergipe Gás S.A – Assistente técnico administrativo – RH)**

Observe o diagrama e seu padrão de organização.

Figura 52 – Padrão de Organização



Fonte: O autor, 2021

A diferença numérica entre A e B, quando se completa o diagrama de acordo com o padrão, é igual a?

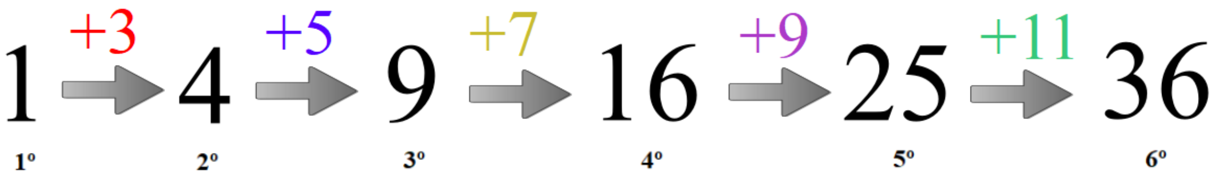
$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$: Para resolver a este problema, espera-se que haja a percepção do padrão mostrado na figura 51. Analise que na primeira linha há uma sequência recursiva cuja lei de formação pode ser expressa da seguinte maneira: $A_n = A_{n-1} + 3$. Portanto, a sequência será $\{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$ e, com isso, pode-se afirmar que o valor de $\boxed{B = 13}$. Já para a segunda linha, é interessante ressaltar duas formas de encontrar o padrão, a primeira é compreendendo que cada termo posterior da sequência é igual ao anterior somado de doze unidades, o que resulta na seguinte lei de formação recursiva: $A_n = A_{n-1} + 12$ e, com isso, constata-se que o valor de $A = 28 + 12 = 40$. O segundo modo de perceber o padrão é utilizando-se da primeira linha. Perceba, assim, que o primeiro termo da segunda linha é quatro vezes o primeiro termo da primeira linha. Analogamente, o segundo termo da segunda linha também é quatro vezes o segundo termo da primeira linha. Considerando o termo da segunda linha como T_n e o termo da primeira linha como B_n, pode-se inferir a seguinte lei de formação: $T_n = 4B_n$ e como o valor correspondente ao "A" é o quarto termo, então $T_4 = 4 \times 10 = 40 \rightarrow \boxed{A = 40}$. Desse modo, a diferença entre A e B será $A - B = 40 - 13 = 27$.

$Problema_4$

Analise a sequência a seguir e marque a alternativa que corresponde ao sexto termo da sequência: $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$

$Resposta\ comentada$: Para perceber o padrão deste problema e encontrar o sexto termo, observe a figura abaixo:

Figura 53 – Padrão da sequência



Fonte: O autor, 2021

Outra forma de encontrar o padrão é perceber que estes números são quadrados perfeitos, ou seja, o sexto termo será o próximo número que é um quadrado perfeito, portanto a resposta procurada é $\boxed{A_6 = 36}$.

Resolução dos problemas propostos sobre progressão aritmética e soma dos termos de uma P.A – terceiro encontro

$Problema_5$: (INEP – ENEM – 2011)

O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro 34.500; em março 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

$Resposta\ comentada$: Para resolver este exercício é esperado que o aluno identifique o padrão estabelecido pelo problema, o estudante pode perceber o padrão de forma recursiva ou de forma não recursiva. Veja a figura a seguir com a percepção do padrão de forma recursiva e a consequente resposta do exercício.

Figura 54 – Padrão de forma recursiva

Fonte: O autor, 2021

Portanto, de forma recursiva se verifica que a lei de formação é da forma $A_n = A_{n-1} + 1500$ e que o mês de julho que é o sétimo termo da sequência será $A_7 = 42.000$.

Agora, para encontrar o padrão de maneira não recursiva, basta perceber que o problema é uma progressão aritmética e que a razão $r = 1500$. Com isso, obtém-se que $A_7 = A_1 + 6r$ e isto implica em $A_7 = 33.000 + 6 \times 1500 \rightarrow \boxed{A_7 = 42.000}$.

$\boldsymbol{Problema_6}$: (INEP – ENEM – 2012)

Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente, são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem 3 cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem 7 cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é?

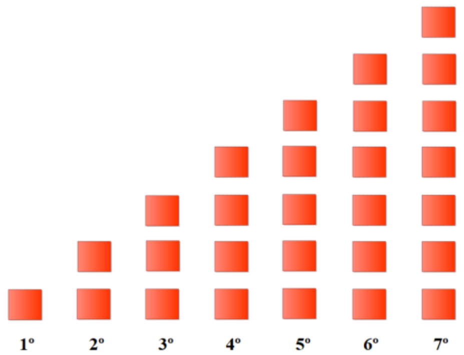
$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$: Para resolver este problema primeiramente se deve encontrar a quantidade de cartas que formam as colunas de um a sete, conforme o enunciado do problema, é perceptível que essas colunas são formadas por uma soma dos termos em progressão aritmética da seguinte forma:

$$\text{Soma} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{(A_1 + A_7) \times 7}{2} = \frac{(1 + 7) \times 7}{2}$$

$$\boxed{\text{Soma das colunas} = 28}$$

- para encontrar a quantidade de cartas que forma o monte, basta pegar o total de cartas disponíveis e retirar aquelas que estão dispostas nas colunas, com isso se chega ao seguinte resultado: $\text{Monte} = 52 - 28 \rightarrow \boxed{\text{Monte} = 24}$.
- vale ressaltar, ainda, que caso o estudante tenha dificuldade em perceber o padrão estabelecido pelas cartas que estão dispostas nas colunas, o mesmo pode realizar o desenho da figura o que facilita o entendimento do problema. Observe abaixo a imagem que mostra a disposição das cartas nas colunas de um a sete. Para isso, suponha que cada quadrado feito represente uma carta qualquer do baralho.

Figura 55 – Disposição das cartas nas colunas de um a sete



Fonte: O autor, 2021

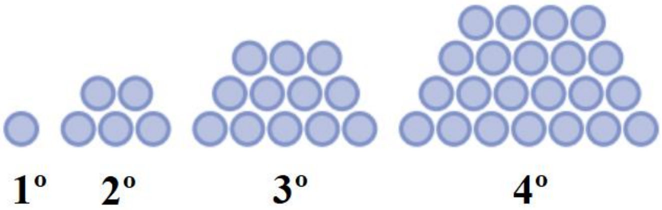
- veja que com a figura acima, fica mais acessível perceber o padrão formado pelas cartas nas colunas, e caso o discente, mesmo assim, ainda encontre dificuldades para perceber a soma dos termos de uma progressão aritmética, basta ele contar na própria figura a quantidade de cartas presentes nas colunas.

Resolução dos problemas sobre progressão aritmética de segunda ordem – quarto encontro

$$\boldsymbol{Problema_7}$$

Para vencer em um jogo, um grupo de estudantes precisa agrupar 51 bolinhas sem que elas escorreguem, porém para chegar até o nível correspondente as 51 bolinhas, os alunos precisam passar, primeiramente, pelos níveis mais fáceis. Observe a figura abaixo que mostra o padrão formado nos níveis de dificuldade de 1 a 4 e diga qual o nível condizente com as 51 bolinhas.

Figura 56 – Padrão formado para cada nível de dificuldade



Fonte: Van de Walle, 2009, p.299

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$**:** uma das formas de resolver este problema é analisar a quantidade de bolinhas em cada nível e perceber o padrão de acréscimos sucessivos. Observe:

$$\text{Primeiro nível: } 1 \text{ bolinha}$$

$$\text{Segundo nível: } 5 \text{ bolinhas} \rightarrow (1 + 4) \text{ bolinhas}$$

$$\text{Terceiro nível: } 12 \text{ bolinhas} \rightarrow (1 + 4 + 7) \text{ bolinhas}$$

$$\text{Quarto nível: } 22 \text{ bolinhas} \rightarrow (1 + 4 + 7 + 10) \text{ bolinhas}$$

Portanto, mantendo este padrão para achar o quinto e o sexto nível, encontra-se os seguintes valores:

$$\text{Quinto nível: } (1 + 4 + 7 + 10 + 13) \text{ bolinhas} \rightarrow 35 \text{ bolinhas}$$

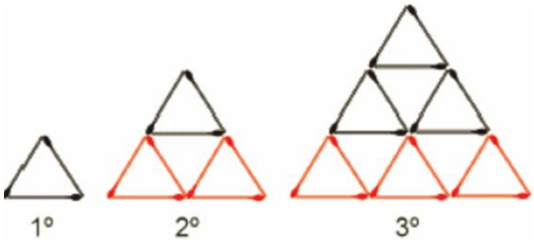
$$\text{Sexto nível: } (1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16) \text{ bolinhas} \rightarrow 51 \text{ bolinhas}$$

- logo, as 51 bolinhas estão relacionadas ao sexto nível do jogo.

$\boldsymbol{Problema_8}$**: (OBMEP – Nível 1 – 2012)**

Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Quantos palitos ela vai usar para construir o quinto triângulo da sequência?

Figura 57 – Padrão para a sequência de triângulos



Fonte: obmep.org.br/provas.htm

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$: Uma das formas de solução que os estudantes podem perceber é contando a quantidade de palitos para cada termo da figura acima. Após isto, espera-se que os discentes percebam o seguinte padrão:

Primeiro termo: 3 palitos

Segundo termo: 9 palitos $\rightarrow (3+6)$ palitos

Terceiro termo: 18 palitos $\rightarrow (3+6+9)$ palitos

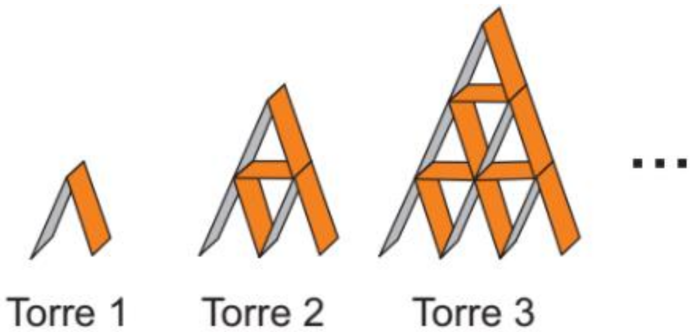
Quarto termo: 30 palitos $\rightarrow (3+6+9+12)$ palitos

Quinto termo: 45 palitos $\rightarrow (3+6+9+12+15)$ palitos

$\boldsymbol{Problema_9}$: **(OBMEP – Nível 1 – 2018)**

Janaína faz torres com cartões, seguindo o padrão da figura. A primeira torre foi feita com 2 cartões, a segunda torre com 7, a terceira com 15 e assim por diante. Quantos cartões ela deve acrescentar à décima torre para obter a décima primeira?

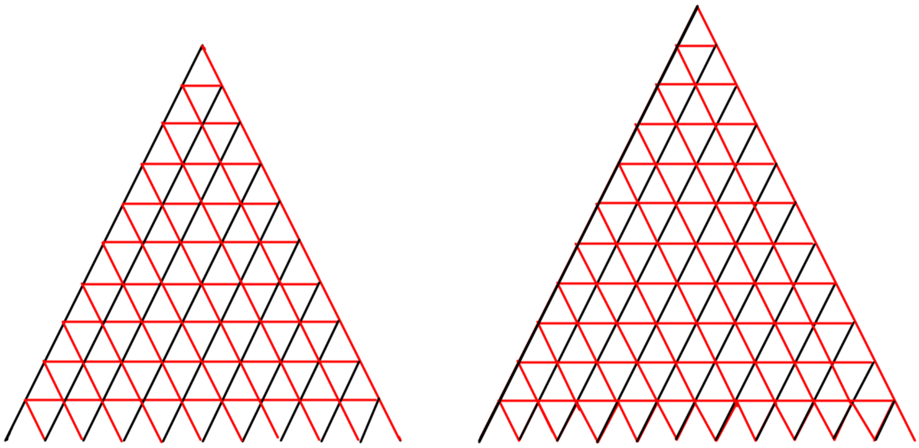
Figura 58 – Padrão das torres formadas por cartões



Fonte: obmep.org.br/provas.htm

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$**:** como os estudantes já resolveram o problema de forma recursiva e não recursiva, então a forma de resolução, agora, será utilizando o padrão do desenho para cada torre. Observe o desenho abaixo que fornece a quantidade de cartões para a décima torre e para a décima primeira torre.

Figura 59 – Figura da $\mathbf{torre_{10}}$ e da $\mathbf{torre_{11}}$



Torre 10 **Torre 11**

Fonte: O autor, 2021

- ao perceber o formato da figura, é possível concluir que na $torre_{10}$ há 155 cartões, enquanto que na $torre_{11}$ existem 187 cartões. Portanto, o acréscimo necessário para avançar da $torre_{10}$ para a $torre_{11}$ é de $187 - 155 = \boxed{32 \text{ cartões}}$.

Resolução dos problemas sobre progressão geométrica – quinto encontro

$\boldsymbol{Problema_{10}}$**: (UDESC – Universidade do Estado de Santa Catarina – 2011)**

Em uma escola com 512 alunos, um aluno apareceu com o vírus do sarampo. Se esse aluno permanecesse na escola, o vírus se propagaria da seguinte forma: no primeiro dia, um aluno estaria contaminado; no segundo, dois estariam contaminados; no terceiro, quatro, e assim sucessivamente. A diretora dispensou o aluno contaminado imediatamente, pois concluiu que todos os 512 alunos teriam sarampo em qual dia?

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$**:** Uma forma pertinente para resolver este problema é montar a sequência correspondente aos casos de sarampo para cada dia associado. Ou seja, analisar a sequência de forma recursiva para obter o dia condizente com os 512 casos.

$$\{\underbrace{1}_{A_1}, \underbrace{2}_{A_2}, \underbrace{4}_{A_3}, \underbrace{8}_{A_4}, \underbrace{16}_{A_5}, \underbrace{32}_{A_6}, \underbrace{64}_{A_7}, \underbrace{128}_{A_8}, \underbrace{256}_{A_9}, \underbrace{512}_{A_{10}}\}$$

- portanto, no décimo dia haverá 512 alunos contaminados. Espera-se, também, que os discentes percebam que esta sequência é uma progressão geométrica de razão igual a dois.

$\boldsymbol{Problema_{11}}$**: (FAUEL – 2021 – Prefeitura de Catanduvas – Assistente administrativo)**

Assinale a sequência de números que é uma progressão aritmética e, ao mesmo tempo, uma progressão geométrica.

Figura 60 – Alternativas do $\boldsymbol{problema_{11}}$

A { 1; 2; 3; 4; 5}

B { 1; -1; 1; -1; 1}

C { 0; 0; 0; 0; 0}

D { 1; 2; 4; 8; 16}

Fonte: qconcursos.com

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$**:** Para melhor interpretar o exercício, será feita uma análise para cada item do problema. Observe:

1. a sequência $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ é uma progressão aritmética, pois cada termo considerado, a partir do segundo, é igual ao seu antecessor somado de uma unidade, ou seja, $A_n = A_{n-1} + 1$;
2. o segundo item $\{1;\ \ 1; 1;\ \ 1; 1\}$ refere-se a uma progressão geométrica, já que cada termo analisado é igual ao termo anterior multiplicado pela razão que vale -1. Portanto, a lei de formação é da seguinte forma: $A_n = A_{n-1} \times -1$.
3. a sequência $\{0, 0, 0, 0, 0\}$ é tanto uma progressão aritmética, já que $A_n = A_{n-1} + 0$, quanto uma progressão geométrica, pois ao considerar a seguinte lei de formação $B_n = B_{n-1} \times q$, onde a razão "q" é uma constante pertencente ao conjuntos dos números reais, visto que como todos os termos da sequência são nulos, então qualquer que seja o valor da razão multiplicado por zero terá como resultado o próprio zero.
4. o quarto item de sequência $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ é uma progressão geométrica, dado que o termo posterior é o termo antecessor multiplicado pela razão que, neste caso, vale dois. Desse modo, a lei de formação tem o seguinte padrão: $A_n = A_{n-1} \times 2$.

$\boldsymbol{Problema_{12}}$: (INEP – ENEM – 2018)

Alguns modelos de rádios automotivos estão protegidos por um código de segurança. Para ativar o sistema de áudio, deve-se digitar o código secreto composto por quatro algarismos. No primeiro caso de erro na digitação, a pessoa deve esperar 60 segundos para digitar o código novamente. O tempo de espera duplica, em relação ao tempo de espera anterior, a cada digitação errada. Uma pessoa conseguiu ativar o rádio somente na quarta tentativa, sendo de 30 segundos o tempo gasto para digitação do código secreto a cada tentativa. Nos casos da digitação incorreta, ela iniciou a nova tentativa imediatamente após a liberação do sistema de espera. O tempo total, em segundo, gasto por essa pessoa para ativar o rádio foi igual a?

Resposta comentada: Uma forma concisa de solução é possibilitada ao montar uma tabela com os dados do problema. Assim, fica mais acessível entender o padrão do exercício.

Tabela 8 – Padrão relacionado ao tempo utilizado na digitação e ao tempo gasto devido ao erro do código

Tentativas	Tempo utilizado na digitação (segundos)	Erro do código (segundos)
Primeira	30	60
Segunda	30	120
Terceira	30	240
Quarta	30	0
Tempo gasto	**120**	**420**

Fonte: O autor, 2021

- como o tempo utilizado para a digitação foi de 120 segundos e o tempo gasto relativo ao erro do código foi de 420 segundos, então o tempo total empregado para ativar o sistema foi de $420 + 120 = 540$ segundos.

Resolução dos problemas propostos relativos ao conteúdo de recorrências lineares de segunda ordem – sexto encontro

$\boldsymbol{Problema_{13}}$: **(Makiyama – 2013 – Instituto Federal de Rondônia – Administrador)**

"É uma sucessão de números que, misteriosamente, aparece em muitos fenômenos da natureza. Descrita no final do século 12 pelo italiano Leonardo Fibonacci, ela é infinita e começa com 0 e 1. Assim a sequência fica: {0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...}". A partir do padrão observado e de acordo com o texto acima, o 14º elemento da Sequência de Fibonacci é:

Resposta comentada: Espera-se que seja notado o padrão desta sequência por meio da seguinte lei de formação: $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$. Após obter a lei de formação, é necessário desenvolver a sequência, de forma recursiva, para se obter o décimo quarto elemento. Dessa maneira, obtém-se o seguinte:

$$\{\underbrace{0}_{A_1}, \underbrace{1}_{A_2}, \underbrace{1}_{A_3}, \underbrace{2}_{A_4}, \underbrace{3}_{A_5}, \underbrace{5}_{A_6}, \underbrace{8}_{A_7}, \underbrace{13}_{A_8}, \underbrace{21}_{A_9}, \underbrace{34}_{A_{10}}, \underbrace{55}_{A_{11}}, \underbrace{89}_{A_{12}}, \underbrace{144}_{A_{13}}, \underbrace{233}_{A_{14}}\}$$

- logo, o resultado obtido para o décimo quarto termo é $\boxed{A_{14} = 233}$.

$\boldsymbol{Problema_{14}}$: **(FCC – 2018 – Secretaria de Educação do Estado da Bahia – Professor)**

A sequência de Fibonacci começa com os números 1 e 2 e, em seguida, cada novo número da sequência é a soma dos dois números imediatamente anteriores, como se vê a seguir:

$$\{1, 2, \underbrace{3}_{1+2}, \underbrace{5}_{2+3}, \underbrace{8}_{3+5}, \underbrace{13}_{5+8}, \underbrace{21}_{8+13}, \cdots\}$$

Na figura a seguir, observe a numeração estabelecida em um conjunto de 60 teclas de um piano.

Figura 61 – Conjunto das teclas de um piano

Fonte: qconcursos.com

Se um pianista decide tocar apenas as teclas marcadas com números da sequência de Fibonacci nesse piano, dentre as 60 teclas indicadas na figura, ele tocará quantas teclas?

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$**:** Este problema já fornece o padrão da sequência, pois no enunciado é exposto o seguinte:

$$A_3 = A_1 + A_2$$
$$A_4 = A_2 + A_3$$
$$A_5 = A_3 + A_4$$
$$\vdots$$
$$A_n = A_{n-2} + A_{n-1}$$

Como há sessenta teclas numeradas deste piano, então é necessário encontrar os outros termos da sequência sem que o valor ultrapasse a última tecla do piano. Com isso, obtém-se a sequência $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\}$. Conclui-se, então, que nove teclas serão tocadas nesse piano.

$\boldsymbol{Problema_{15}}$

Perceba o padrão da sequência a seguir e marque a alternativa que corresponde a soma entre o 8º termo e o 9º termo.

$$S = \{5, 5, 10, 15, 25, 40, \cdots\}$$

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$**:** O padrão para esta sequência pode ser notado a partir da seguinte análise recursiva:

$$\underbrace{10}_{A_3} = \underbrace{5}_{A_1} + \underbrace{5}_{A_2}$$
$$\underbrace{15}_{A_4} = \underbrace{5}_{A_2} + \underbrace{10}_{A_3}$$
$$\underbrace{25}_{A_5} = \underbrace{10}_{A_3} + \underbrace{15}_{A_4}$$
$$\underbrace{40}_{A_6} = \underbrace{15}_{A_4} + \underbrace{25}_{A_5}$$
$$\vdots$$

$$A_n = A_{n-2} + A_{n-1}\ (Lei\ de\ formação)$$
$$Então, obtém - se\ que$$
$$A_7 = A_5 + A_6 \rightarrow A_7 = 25 + 40 = 65$$
$$A_8 = A_6 + A_7 \rightarrow A_8 = 40 + 65 = 105$$
$$A_9 = A_7 + A_8 \rightarrow A_9 = 65 + 105 = 170$$

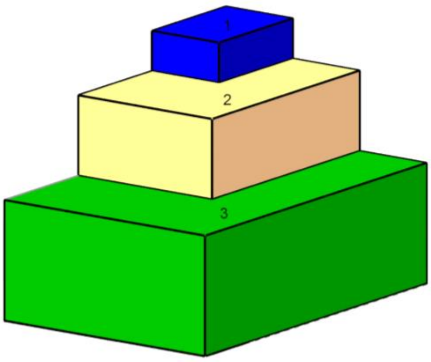
- desse modo, a soma entre o oitavo termo A_8 e o nono termo A_9 é igual a 275.

Resolução dos problemas propostos referentes ao assunto da geometria dos fractais – sétimo encontro

$\boldsymbol{Problema_{16}}$: (Moreira 2017, p.62)

Observe a imagem abaixo formada por três paralelepípedos. O paralelepípedo_1 possui 1cm de altura, 3cm de comprimento e 2cm de largura. O paralelepípedo_2 tem 2cm de altura, 6cm de comprimento e 4cm de largura. Já o paralelepípedo_3 possui 3cm de altura, 9cm de comprimento e 6cm de largura.

Figura 62 – Paralelepípedos inspirados em fractais



Fonte: Moreira, 2017, p.62

- qual será a altura do 15º paralelepípedo, o comprimento do 10º paralelepípedo e a largura do 12º paralelepípedo?

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$: Para o melhor entendimento do problema, será elaborada três sequências, uma para a altura, outra para o comprimento e a última para a largura. Assim, ficará mais compreensível a percepção do padrão para cada sequência.

1. para a altura, é apresentado no enunciado que cada paralelepípedo seguinte terá o acréscimo de uma unidade em relação ao anterior. Portanto, chega-se ao seguinte resultado: $\{\underbrace{1}_{H_1}, \underbrace{2}_{H_2}, \underbrace{3}_{H_3}, \underbrace{4}_{H_4}, \underbrace{5}_{H_5}, \underbrace{6}_{H_6}, \underbrace{7}_{H_7}, \underbrace{8}_{H_8}, \underbrace{9}_{H_9}, \underbrace{10}_{H_{10}}, \underbrace{11}_{H_{11}}, \underbrace{12}_{H_{12}}, \underbrace{13}_{H_{13}}, \underbrace{14}_{H_{14}}, \underbrace{15}_{H_{15}}\}$. Logo, o 15º paralelepípedo terá $15cm$ de altura. Outra forma de resolver este exercício é realizando uma análise não recursiva. Para isso, é necessário perceber que a sequência é uma progressão aritmética de razão igual a um, portanto $H_{15} = H_1 + 14 \times r \rightarrow H_{15} = 1 + 14 \times 1 \rightarrow \boxed{H_{15} = 15cm}$.

2. em relação ao comprimento, é fornecido os três primeiro termos da sequência, ou seja: $\{\underbrace{3}_{C_1}, \underbrace{6}_{C_2}, \underbrace{9}_{C_3}\}$. Assim, espera-se que o estudante consiga perceber que cada termo seguinte é igual ao termo anterior somado de três unidades, logo se trata de uma progressão aritmética de razão igual a três. Dessa forma, o comprimento do décimo paralelepípedo será:

$$C_{10} = C_1 + 9 \times r \rightarrow C_{10} = 3 + 9 \times 3 \rightarrow \boxed{C_{10} = 30cm}.$$

A sequência completa até o décimo termo para o comprimento dos paralelepípedos tem a seguinte característica: $\{\underbrace{3}_{C_1}, \underbrace{6}_{C_2}, \underbrace{9}_{C_3}, \underbrace{12}_{C_4}, \underbrace{15}_{C_5}, \underbrace{18}_{C_6}, \underbrace{21}_{C_7}, \underbrace{24}_{C_8}, \underbrace{27}_{C_9}, \underbrace{30}_{C_{10}}\}$.

3. em referência à largura, é concedido os valores para os três primeiros paralelepípedos. Neste sentido, têm-se que $L_1 = 2cm$, $L_2 = 4cm$, $L_3 = 6cm$. Desse modo, de forma não recursiva obtém-se que $L_{12} = L_1 + 11 \times r \rightarrow L_{12} = 2 + 11 \times 2 \rightarrow \boxed{L_{12} = 24cm}$, pois o padrão fornecido é o de uma progressão aritmética de razão igual a dois. Enquanto que de forma recursiva, chega-se na sequência: $\{\underbrace{2}_{L_1}, \underbrace{4}_{L_2}, \underbrace{6}_{L_3}, \underbrace{8}_{L_4}, \underbrace{10}_{L_5}, \underbrace{12}_{L_6}, \underbrace{14}_{L_7}, \underbrace{16}_{L_8}, \underbrace{18}_{L_9}, \underbrace{20}_{L_{10}}, \underbrace{22}_{L_{11}}, \underbrace{24}_{L_{12}}\}$.

$\boldsymbol{Problema_{17}}$: **(FUMARC – 2018 – Secretaria do Estado de Educação de Minas Gerais – Professor de Educação Básica – Matemática – Adaptado)**

O triângulo de Sierpinsky é um fractal criado a partir de um triângulo equilátero, da seguinte forma: divide-se cada lado do triângulo ao meio, unem-se estes pontos médios e forma-se um novo triângulo equilátero.

Figura 63 – O triângulo de Sierpinsky

Fonte: qconcursos.com

- se continuarmos o processo, quantos triângulos brancos haverá no Estágio 3?

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$: Conforme foi dito no enunciado, para formar o triângulo na cor branca é necessário pegar cada triângulo na cor preta e segmenta-lo no ponto médio de cada lado correspondente. Assim, cada triângulo equilátero na cor preta se torna um triângulo branco de menor comprimento no estágio seguinte. Observe, desta forma, que no Estágio inicial há um triângulo preto apenas, com isso no estágio seguinte haverá um triângulo branco (estágio 1). Veja, também, que no estágio 1 foi formado três triângulos pretos menores, então no estágio 2 haverá $(1 + 3)$ triângulos brancos, pois esses triângulos na cor preta são convertidos em triângulos brancos menores no estágio seguinte (estágio 2). Agora, no estágio 2 há nove triângulos pretos formados, portanto o estágio 3 possuirá $(1 + 3 + 9) = 13$ triângulos brancos, já que cada um desses nove triângulos pretos do estágio 2 darão lugar a nove triângulos brancos menores para o estágio subsequente (estágio 3). Desse modo, pode-se perceber o seguinte padrão a partir do estágio 1 em relação aos triângulos brancos:

$$Estágio_1: 1\ triângulo\ branco$$

$$Estágio\ _2: (1 + 3)\ triângulos\ brancos$$

$$Estágio_3: (1 + 3 + 9)\ triângulos\ brancos$$

$$Estágio_4: (1 + 3 + 9 + 27)\ triângulos\ brancos$$

$$\vdots$$

$$E\ assim\ sucessivamente$$

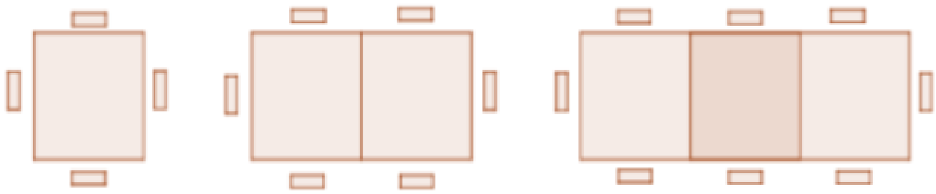
- perceba então que o padrão analisado, a partir do estágio 2, é o da soma de uma progressão geométrica, pois cada termo subsequente da soma é igual ao termo anterior multiplicado por três. Dessa maneira, se fosse pedido a quantidade de triângulos brancos para o estágio 5, bastaria realizar a soma dos seguintes valores de uma P.G: $(1 + 3 + 9 + 27 + 81) = 121\ triângulos\ brancos$.

Resolução dos problemas de revisão do conteúdo – oitavo encontro

$\boldsymbol{Problema_{18}}$: **(FURB – 2019 – Câmara de Timbó – SC – Técnico em Informática)**

Em um restaurante, usam-se mesas com 4 cadeiras. Se juntarem duas dessas mesas, consegue-se espaço para 6 cadeiras. Se juntarem três dessas mesas, o espaço fica restrito a 8 cadeiras. A imagem a seguir ilustra essa situação:

Figura 64 – Padrão da distribuição das mesas e cadeiras



Fonte: qconcursos.com

Seguindo esse padrão, pode-se afirmar que a quantidade de mesas que se deve juntar para que a quantidade de lugares disponíveis (cadeiras) seja igual a 22 é:

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$: Este problema relaciona duas grandezas; a quantidade de cadeiras e a quantidade de mesas. Neste sentido, é válido analisar o padrão da quantidade de cadeiras e verificar a relação desta com a quantidade de mesas. Desse modo, observe a tabela abaixo e o respectivo padrão do exercício.

Tabela 9 – Relação entre a quantidade de cadeiras e a quantidade de mesas de acordo com o modelo de organização do enunciado

Modelo de organização	Quantidade de cadeiras	Quantidade de mesas
Primeiro	4	1
Segundo	6	2
Terceiro	8	3

Fonte: O autor, 2021

- apenas com estes dados fornecidos pelo enunciado é possível verificar que a cada duas cadeiras acrescentadas é necessário inserir uma mesa para este modelo de organização. Desta forma, é possível chegar na seguinte sequência ao utilizar o pensamento recursivo:

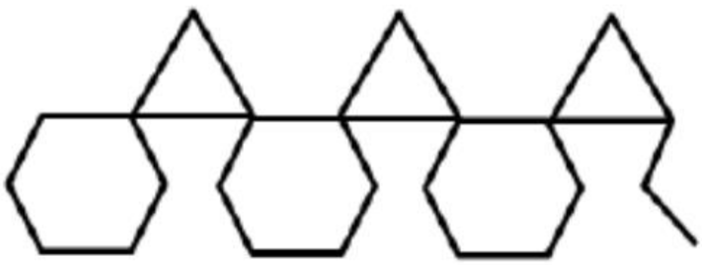
$$\{\ \underbrace{4}_{1\,mesa}\ ,\ \underbrace{6}_{2\,mesas}\ ,\ \underbrace{8}_{3\,mesas}\ ,\ \underbrace{10}_{4\,mesas}\ ,\ \underbrace{12}_{5\,mesas}\ ,\ \underbrace{14}_{6\,mesas}\ ,\ \underbrace{16}_{7\,mesas}\ ,\ \underbrace{18}_{8\,mesas}\ ,\ \underbrace{20}_{9\,mesas}\ ,\ \underbrace{22}_{10\,mesas}\ \}$$

- para realizar uma investigação não recursiva, é preciso observar novamente a tabela 9 e perceber que a quantidade de mesas é a metade da quantidade de cadeiras subtraído de uma unidade. Portanto, a quantidade de mesas necessárias para que haja 22 cadeiras disponíveis é igual a $\frac{22}{2} - 1 = 10\,mesas$.

$\boldsymbol{Problema_{19}}$**: (FUNDEP – 2019 – Prefeitura de Nova Serrana – MG – Professor)**

Numa brincadeira com palitos, Ricardo construiu hexágonos e triângulos, como mostra a figura a seguir.

Figura 65 – Padrão formado por hexágonos e triângulos



Fonte: qconcursos.com

Se ele construiu 30 hexágonos, mantendo esse padrão (hexágonos e triângulos) quantos palitos que ele usou?

$\boldsymbol{Resposta\ comentada}$**:** Perceba que para construir trinta hexágonos será necessário dispor de vinte e novo triângulos, visto que após o vigésimo nono triângulo será construído o trigésimo hexágono. Desse modo, como cada hexágono dispõe de seis lados, ou seja, seis palitos, então para obter trinta hexágonos basta efetuar $6 \times 30 = 180\,palitos$. Analogamente, para produzir vinte e novo triângulos, é necessário realizar a seguinte operação $3 \times 29 = 87\ palitos$. Somando os dois resultados obtidos obtém-se um total de $267\ palitos$.

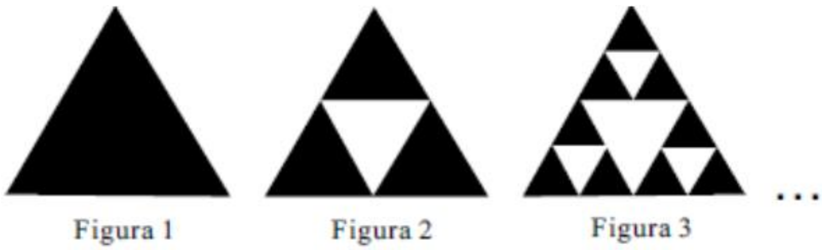
$Problema_{20}$: (INEP – 2008 – ENEM – Prova amarela)

Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares. O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

- de acordo com o procedimento descrito, qual é o desenho da figura 4 da sequência apresentada abaixo.

Figura 66 – Padrão do triângulo de Sierpinski



Fonte: qconcursos.com

$Resposta\ comentada$: Para solucionar este problema, é necessário perceber o padrão do triângulo de Sierpinski. Como este padrão já foi explicado no $problema_{17}$ deste apêndice A, relativo à explicação do professor, quanto no capítulo 6, referente à solução dos alunos, então o docente irá mostrar o desenho feito pelo $aluno_7$ para obter o resultado do exercício.

Figura 67 – Desenho feito pelo $aluno_7$ relativo ao nível 4 do triângulo de Sierpinski

Aluno 7

Fonte: O autor, 2021

APÊNDICE B – Questionário de opinião sobre a oficina

Lembrando: A oficina é constituída de três etapas

- a primeira etapa se constitui da disponibilização do material teórico prévio, como também da aplicação de problemas envolvendo o conteúdo de recorrência para os estudantes resolverem sem o auxílio do professor. Nesta etapa não há a utilização do *Peer Instruction*;
- a segunda etapa é constituída das aulas dialogadas com a resolução dos problemas por meio do *Peer Instruction*;
- a terceira etapa é formada pela aplicação deste formulário para saber a opinião do estudante acerca da metodologia de ensino utilizada.

PRIMEIRA ETAPA

1. Você achou que o material prévio elaborado pelo professor foi o suficiente para você conseguir entender o conceito de recorrência?

☐ Sim ☐ Não ☐ Um pouco

2. O material prévio estava em concordância com o que foi ensinado nas aulas expositivas?

☐ Sim ☐ Não

3. Você se sentiu confiante de realizar o primeiro teste apenas com o estudo do material prévio?

☐ Sim ☐ Não ☐ Um pouco

SEGUNDA ETAPA

4. Você gostou de aprender o que estava sendo ensinado utilizando a metodologia *Peer Instruction*?

☐ Sim ☐ Não

5. Você se sentiu estimulado a participar mais da aula por causa do *Peer Instruction*?

☐ Sim ☐ Não ☐ Um pouco

6. Você achou o *Peer Instruction* um instrumento importante para ser utilizado nas aulas de ensino remoto?

☐ Sim ☐ Não

7. Você acha que o *Peer Instruction* facilita o aprendizado?

☐ Sim ☐ Não

8. Você acha que o *Peer Instruction* torna a aula mais dinâmica?

☐ Sim ☐ Não

9. Ao ser utilizado o *Peer Instruction* você sentiu que sua participação teve importância no decorrer das aulas?

☐ Sim ☐ Não

10. A metodologia ativa *Peer Instruction* pode te ajudar a aprender por meio da motivação?

☐ Sim ☐ Não

11. O *Peer Instruction* pode te ajudar a aprender por meio da colaboração?

☐ Sim ☐ Não

12. O *Peer Instruction* pode te ajudar a aprender mediante os problemas propostos?

☐ Sim ☐ Não

13. O *Peer Instruction* pode te ajudar a aprender por intermédio das discussões, interações?

☐ Sim ☐ Não

14. Após participar da oficina, você acha que o *Peer Instruction* é importante?

☐ Sim ☐ Não

15. Se as aulas fossem feitas dessa maneira, você teria mais interesse pelas aulas de Matemática?

☐ Sim ☐ Não ☐ Indiferente

16. Você acharia interessante se o *Peer Instruction* fosse utilizado em outras disciplinas?

☐ Sim ☐ Não ☐ Indiferente

PERGUNTAS DISCURSIVAS

17. O que você mais gostou nas aulas remotas de recorrência usando a metodologia *Peer Instruction*?

18. O que você não gostou nas aulas remotas de recorrência usando o *Peer Instruction*?

19. Durante a oficina nós vimos o conceito de recorrência. Você acha que ele é importante? Por quê?

20. O que você gostaria de falar sobre sua experiência com o *Peer Instruction* no ensino remoto que não foi perguntado acima?