

**COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA,
EXTENSÃO E CULTURA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA**

FELIPE LUIZ PIMENTEL LOURES

**ATIVIDADES ENVOLVENDO O TEOREMA DE PICK PARA
CRIANÇAS**

Rio de Janeiro
2023



FELIPE LUIZ PIMENTEL LOURES

**ATIVIDADES ENVOLVENDO O TEOREMA DE PICK PARA
CRIANÇAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em **Educação Matemática** ofertado pela Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Sc. Daniel Felipe Neves Martins

Rio de Janeiro

2023

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

L892 Loures, Felipe Luiz Pimentel

Atividades envolvendo o Teorema de Pick para crianças / Felipe Luiz Pimentel Loures. - Rio de Janeiro, 2023.

40 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática (Ensino fundamental) – Estudo e ensino. 2. Geometria – Estudo e ensino. 3. Pick, Teorema de. 4. Teoria da aprendizagem significativa. I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Colégio Pedro II. III Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB-7: 5692.

FELIPE LUIZ PIMENTEL LOURES

**ATIVIDADES ENVOLVENDO O TEOREMA DE PICK PARA
CRIANÇAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de História, ofertado pela Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Aprovado em 26 de agosto de 2023.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins - CP II
Orientador

Prof Dr. Ivail Muniz Júnior - CP II
Membro Interno

Prof M. Ronaldo Quintanilha Guimarães Gomes - CP II
Membro Externo

Rio de Janeiro
2023

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus que me deu o auxílio e a sabedoria necessária para que eu pudesse chegar ao final do curso.

Agradeço meu pai Rogério Luiz de Andrade Loures , meu irmão Diogo Pimentel Loures, minha avó Sebastiana de Andrade Loures e a minha namorada Maria Eduarda de Melo Motta que torceram e me apoiaram.

Agradeço a todos os colegas de turma e a todos os professores, no qual sempre nos apoiaram a não desistir.

RESUMO

Loures, Felipe Luiz Pimentel. **ATIVIDADES ENVOLVENDO O TEOREMA DE PICK PARA CRIANÇAS**. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso Especialização em Educação Matemática – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2023.

Este trabalho tenta mostrar uma possível dinamização de um resultado forte e importante de geometria plana no Ensino Fundamental através da ludicidade, o Teorema de Pick. Os aspectos formais matemáticos contidos no texto são provenientes da demonstração do teorema que norteiam cinco propostas de trabalho em sala de aula. As tarefas foram criadas de modo que usassem como base conhecimentos prévios já adquiridos pelos alunos e que estes servissem de caminho para a construção de um novo conhecimento, assim a Teoria da Aprendizagem Significativa é o principal referencial teórico do trabalho, pois também permitiu diálogo com um método japonês de aprendizagem em matemática, campo de atuação profissional do autor.

Palavras-chave: teorema de Pick; áreas;

ABSTRACT

Loures, Felipe Luiz Pimentel. **ATIVIDADES ENVOLVENDO O TEOREMA DE PICK PARA CRIANÇAS**. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso Especialização em Educação Matemática – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2023.

This work tries to show a possible dynamization of a strong and important result of plane geometry in Elementary School through ludicity, Pick's Theorem. The mathematical formal aspects contained in the text come from the demonstration of the theorem that guide five work proposals in the classroom. The tasks were created in such a way that they used prior knowledge already acquired by the students as a basis and that these served as a path for the construction of new knowledge, thus the Theory of Meaningful Learning is the main theoretical reference of the work, as it also allowed dialogue with a Japanese method of learning mathematics, the author's field of professional activity.

Keywords: pick's theorem; areas;

Conteúdo

1. INTRODUÇÃO.....	11
2. CONCEITOS BÁSICOS.....	12
2.1. DEFINIÇÃO	12
3. TEOREMA DE PICK	16
3.1. HISTÓRIA	16
3.2. FÓRMULA DE PICK.....	18
3.3. ADITIVIDADE DO TEOREMA	19
3.4. POLÍGONOS COM CAVIDADE	20
4. DAVID PAUL AUSUBEL.....	21
4.1. Teoria de Aprendizagem Significativa.....	22
5. ATIVIDADE PROPOSTA.	25
5.1. Atividade 1	27
5.2. Atividade 2	27
5.3. Atividade 3	29
5.4. Atividade 4	29
5.5. Atividade 5	30
5.6. CONCLUSÃO DAS ATIVIDADES.....	31
6. CONCLUSÃO.....	31
REFERÊNCIAS.....	33
ANEXO 1 – ATIVIDADES.....	34

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho tenta mostrar uma possível dinamização de um resultado forte e importante de geometria plana no Ensino Fundamental através da ludicidade. Os aspectos formais matemáticos contidos no texto são provenientes da demonstração da afirmação que norteiam cinco propostas de trabalho em sala de aula de matemática com alunos trabalhando, minimamente, aos pares a fim de que se valorize a discussão e a troca de ideias entre crianças. A comunicação oral também procurará ser exportada pelo professor a partir da premissa de que todo resultado encontrado pela dupla ou pelo grupo de alunos deverá ser levado à classe através de uma explanação do raciocínio empregado durante a construção da solução do problema.

A nossa preocupação foi em criar tarefas que usassem como base conhecimentos prévios já adquiridos pelos alunos e que estes servissem de caminho para a construção de um novo conhecimento, a determinação geométrica da área de um polígono através de uma representação numérica ou em função de uma unidade padrão de medida, sejam elas dentro do sistema métrico decimal ou um símbolo qualquer, como um quadrado.

O capítulo 2 traz um resumo das principais definições e resultados matemáticos que usamos ao longo do texto, desde a noção simples da poligonal aberta, passando pela definição de polígono até chegar a alguns teoremas que auxiliam na compreensão do Teorema de Pick.

Optando por uma abordagem sucinta, apresentamos o Teorema de Pick e o encaminhamento de sua demonstração a fim de que professores da educação básica acompanhem o raciocínio lógico que justifica a afirmativa. A biografia de Pick mostra o quanto sua produção matemática foi expressiva, especificamente em Análise Real, Análise Funcional e Geometria.

Na tentativa de popularizar o Teorema de Pick entre alunos das séries finais do Ensino Fundamental I e nas séries iniciais do Ensino Fundamental II da educação básica e de mostrar que teorias que priorizam a construção do conhecimento podem ser aplicadas em ambientes escolares (no contexto mais amplo possível de compreensão do termo) diversos é que buscamos em David Ausubel e Raymond Duval alternativas didáticas para realizar as atividades propostas num curso livre de metodologia tradicional japonesa. Esta última, pouco compreendida por muitos, ao ponto de acharem que está apoiada em teorias behavioristas.

No capítulo 4 apresentamos cinco atividades que permitem determinar a área de regiões poligonais fechadas a partir do teorema de Pick. Estas tarefas exploram o tema de maneira leve e lúdica, sem o compromisso da demonstração do enunciado, mas de sua verificação para alguns casos propostos e que estão inteiramente contidos na hipótese do teorema, a fim de que se tenha valor lógico matemático verdadeiro.

Nas considerações finais discutimos com o leitor, a aplicabilidade das tarefas em sala de aula, os ganhos pedagógicos e a possibilidade do aluno desenvolver autonomia e trabalhar em equipe.

2. CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos de geometria plana que darão o apoio necessário para a demonstração do teorema de Pick. Onde poderão ser alcançados os resultados apropriados nas atividades dos capítulos seguintes.

2.1. DEFINIÇÃO

Definição 2.1.1 – Uma poligonal é uma figura formada por uma sequência de pontos A_1, A_2, \dots, A_n e pelo segmento $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$.

Definição 2.1.2 – Um polígono é uma poligonal em que as seguintes três condições são satisfeitas:

i) $A_n = A_1$

ii) os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades

iii) dois lados com a mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta

Imagem 1: Polígono e não polígono



Fonte: O autor, 2023

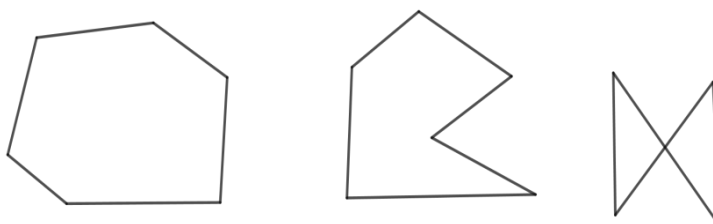
A primeira figura representa um polígono, isso porque satisfaz as 3 condições de definição acima. Entretanto, a segunda figura não satisfaz as condições de definição impostas no parágrafo anterior, visto que os lados se interceptam em

pontos diferentes além das extremidades.

Definição 2.1.3 – *Um polígono é convexo se está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm os seus lados.*

Definição 2.1.3.1 – *Um polígono é simples quando cada um de seus vértices é extremidade de apenas dois lados. Um polígono que não é simples é dito complexo.*

Imagem 2: Polígonos

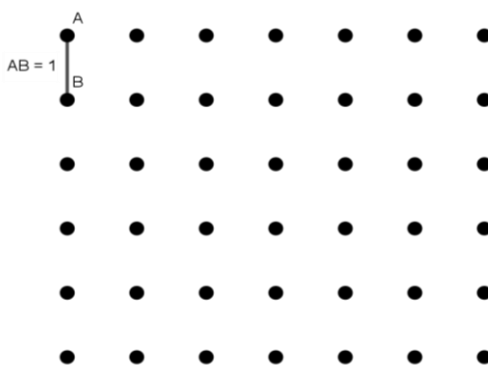


Fonte: O autor, 2023

A primeira (esquerda) figura representa um polígono convexo e simples, já a segunda (meio) figura é um polígono não convexo e simples, já a terceira (direita) figura é um polígono não convexo e não simples.

Definição 2.1.4 – *Uma rede de pontos no plano é um conjunto de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles ao ponto mais próximo na horizontal ou na vertical é igual a 1.*

Imagem 3: grade



Fonte: O autor, 2023

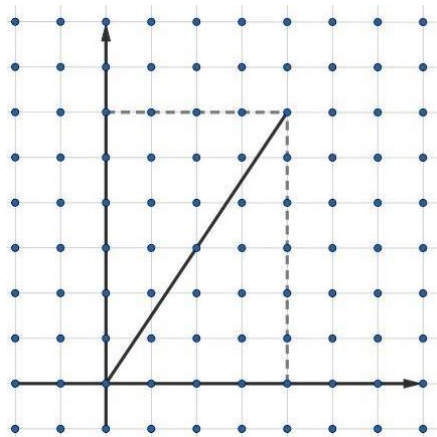
Na rede de pontos as suas coordenadas são inteiras. A rede de pontos será de grande importância para a aplicação do Teorema de Pick.

Definição 2.1.5 – Um triângulo chama-se fundamental quando têm os três vértices e mais nenhum outro ponto (do bordo ou do interior) sobre a rede.

Teorema 2.1.1 – A área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$.

Demonstração – (A demonstração apresentada foi retirada do livro do Elon) Sejam $A(0,0)$ e $B(m,n)$ as coordenadas (inteiras) dos dois primeiros vértices do triângulo fundamentais ABC . Mostremos, inicialmente, que m e n são primos entre si. Com efeito, se $d > 1$ fosse um divisor comum de m e n , o ponto $P\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$ estaria na rede e no interior do segmento de reta AB (veja Figura X), logo ABC não seria fundamental.

Imagem 4: Triângulo fundamental



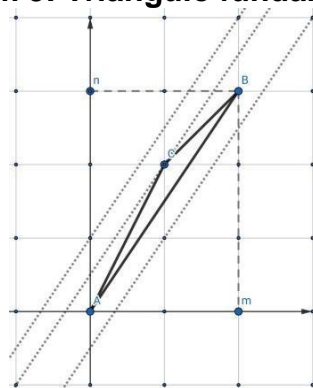
Fonte: O autor, 2023

Suponhamos $m \neq 0$. A equação da reta que passa pelo ponto C e é paralela a AB é $y = \left(\frac{n}{m}\right)x + b$, onde b é a ordenada do ponto $D(0, b)$ no qual a reta corta o eixo vertical. Todos os triângulos que têm AB como base e cujo terceiro vértice está sobre essa reta têm a mesma área que ABC . Em particular $\text{área } ABC = \text{área } ABD = \frac{|bm|}{2}$, pois $|b|$ é a medida da base e $|m|$ da altura de ABC . Resta-nos então provar que $|b| = \frac{1}{|m|}$.

Para isto consideremos, mais geralmente, a equação $y = \left(\frac{n}{m}\right)x + \beta$ de qualquer reta paralela a AB . Sabemos que β é a ordenada do ponto de interseção da reta com eixo vertical. Se a reta passa por algum ponto da rede com coordenadas (s, t) então $t = \left(\frac{n}{m}\right)s + \beta$, donde

$$\beta = t - \frac{n}{m}s = \frac{tm - sm}{m}.$$

Imagem 5: Triângulo fundamental 2



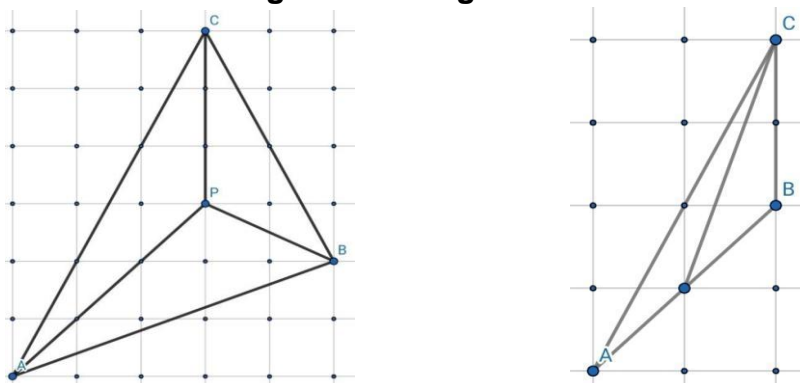
Fonte: O autor, 2023

Dentre estas retas, nenhuma está mais próxima da reta AB do que a que passa pelo ponto C , para qual temos $\beta = b$. Logo b é o menor valor positivo que b pode assumir. Por outro lado, como m e n são primos entre si, o lema abaixo nos assegura que existem inteiros s, t tais que $tm - sm = 1$. Portando $\frac{1}{|m|}$ é o menor valor positivo de $|\beta|$, donde $|b| = \frac{1}{|m|}$.

Para completar a demonstração, falta considerar o caso $m = 0$. Mas $m = 0$ obriga $n = \pm 1$ e ABC é um triângulo retângulo, metade de um dos quadrados da rede, logo sua área é $\frac{1}{2}$.

Teorema 2.1.2 – *Todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais.*

Demonstração – (A demonstração apresentada foi retirada do livro do Elon) Basta considerar o caso em que polígono dado é um triângulo de ABC que contém n pontos da rede (no interior ou no bordo). Se existir realmente algum ponto P da rede no interior do triângulo, traçamos segmentos de reta ligando os pontos aos vértices A, B e C e deste modo decomparamos ABC em três triângulos, cada um contendo um número $< n$ de pontos da rede. Se houver pontos da rede sobre os lados ABC , escolhemos um deles, digamos sobre AB , e o ligamos ao vértice C . Assim decomparamos ABC em 2 triângulos, cada um contendo um número $< n$ de um ponto da rede. Prosseguindo desta maneira, com um número finito de etapas chegaremos a uma decomposição de ABC em triângulos fundamentais.

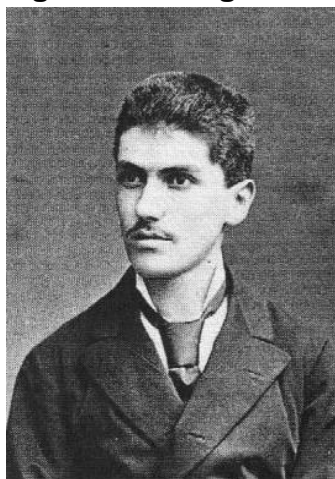
Imagem 6: Triângulo fundamental 3

Fonte: O autor, 2023

3. TEOREMA DE PICK

Neste capítulo será abordada um pouco da história do Matemático Georg Alexander Pick, além dos conceitos básicos de sua teoria. O teorema de Pick trata-se de uma maneira de calcular a área de polígonos que possuam coordenadas dos vértices inteiras, uma vez que esse polígono esteja sobre um plano quadriculado, e também tem o objetivo de apresentar aditividade de polígonos e o cálculo de área de polígonos que tenham buracos (cavidades), além de algumas propriedades deste belíssimo teorema.

3.1. HISTÓRIA

Imagem 7: George A. Pick

Fonte: Wikipedia, 2023

George Alexander Pick foi um matemático austríaco que viveu entre 10 de julho de 1859 e 26 de julho de 1942. Entrou na universidade de Viena em 1875 com os seus 16 anos, e em 1879 quando fez 20 anos, George Pick terminou sua graduação em Matemática e Física no qual permitia que ele ensinasse as duas disciplinas. Um ano antes, Leo Königsberger ocupou uma cadeira na Universidade

de Viena, com isso Leo Königsberger se tornou o professor orientador de Pick. Em 16 de abril de 1880 com os seus 21 anos, Pick recebeu seu doutorado com o tema de sua tese “*Über eine Klasse abelscher Integrale*” no qual ele falava sobre uma classe de integrais abelianas.

Quando o doutorado foi finalizado, Pick foi assistente de Ernest Mach na universidade de Karl-Ferinand, em Praga. Os dois professores estudaram na mesma universidade em Viena, mas quando Pick se tornou o seu assistente, March era considerado o melhor cientista da Europa. Com isso Pick começou almejar ser professor da universidade de Praga para que pudesse conquistar o direito de palestrar. Com isso ele teve que fazer uma tese de habilitação, mas rapidamente conseguiu essa habilitação com o tema “*Über die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen*” que falava sobre a integração de diferenciais hiper elípticos por logaritmos.

Em 1884 e 1885, Pick estudou na universidade de Leipzig junto com o seu amigo Felix Klein, Pick permaneceu em Praga pelo resto de sua vida. Entretanto, em 1888 foi promovido a professor extraordinário de matemática e em 1892 foi nomeado professor titular ordinário na universidade alemã de Praga. Seu trabalho foi extremamente amplo, sempre contribuindo para análise matemática juntamente com contribuições para a geometria, álgebra linear e topologia que estão distribuídos em seus 67 artigos, entretanto, mas do que a metade dos seus trabalhos era sobre funções de variáveis complexas, equações diferenciais e geometria diferencial. Todavia, o seu trabalho que ficou conhecido foi o Teorema de Pick, no qual aparece em um artigo de oito páginas no *Geometrisches zur Zahlenlehre* publicado em 1899.

Sendo assim, um dos teoremas mais populares, por onde pode-se relacionar cálculos de área de polígonos (polígonos cujo vértices são de coordenadas inteiras), polígonos esses que se encontram sobre uma malha quadriculada. Entretanto, só ganhou maior reconhecimento depois de ser citado pelo matemático polonês H. Steinhaus em 1969 em um dos seus livros, este resultado atraiu muita atenção por ser de fácil entendimento e elegante.

Pick publicou muitos artigos e foi eleito membro da Academia das Ciências e das Artes da República Tcheca. Além disso, seu trabalho foi reconhecido através do seu teorema que leva o seu nome, mas os estudos de Pick foram interrompidos pelo holocausto, depois que ele foi levado para o campo de concentração de Theresienstadt em Boêmia em 1942, morrendo aos 82 anos.

3.2. FÓRMULA DE PICK

TEOREMA 3.2.1 – A área A de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela função

$$A = \frac{f}{2} + I - 1$$

onde f é o número de pontos da rede situado sobre o bordo do polígono e I é o número de pontos da rede existentes no interior do polígono.

Demonstração – (A demonstração apresentada foi retirada de [1]) Seja P um polígono cujos vértices pertencem a uma rede. Indiquemos com B e I , respectivamente, os números de pontos da rede situados sobre o bordo e no interior de P .

Para provar que $\frac{B}{2} + I - 1$ é a área do polígono P , basta mostrar que o número T de triângulos fundamentais da decomposição de P (dada pelo o teorema 2.1.2) é igual a $B + 2I + 2$, pois área de P é igual a $\frac{T}{2}$, em virtude do Teorema 2.1.1)

Podemos chegar a essa soma por dois caminhos.

Primeiro é evidente: se há T triângulos, a soma dos seus ângulos internos é igual a $T \cdot \pi$.

O segundo consiste em calcular separadamente a soma S_b dos ângulos que tem vértices no bordo e a soma S_i dos ângulos cujos vértices estão no interior de P . Sejam B' o número de vértices de P e B'' o número de pontos da rede que estão sobre o bordo de P , mas não são vértices. Então

$$B = B' + B''.$$

Então, S_b é igual à soma $(B' - 2)\pi$ dos ângulos internos de P mais $B'' \cdot \pi$ (pois os ângulos dos triângulos fundamentais, com vértices de P , somam um ângulo raso, ou seja, π). Logo

$$S_b = (B' - 2)\pi + B'' \cdot \pi = (B - 2)\pi.$$

Por outro lado, em cada ponto da rede interior de P , os ângulos que têm como vértice somam quatro retos,

Logo

$$S_i = 2I \cdot \pi.$$

Portanto

$$S_b + S_i = (B - 2 + 2I)\pi.$$

Comparando as duas contagens, vem:

$$T \cdot \pi = (B + 2I - 2)\pi,$$

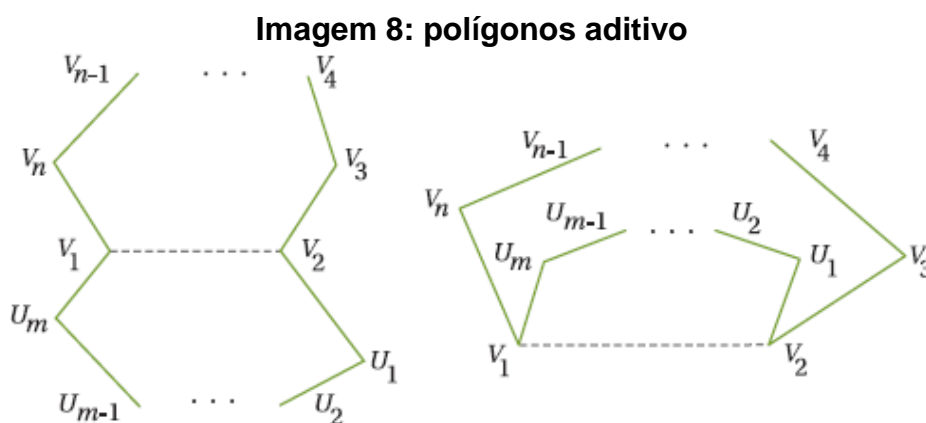
ou seja,

$$T = B + 2I - 2,$$

Como queríamos demonstrar.

3.3. ADITIVIDADE DO TEOREMA

Proposição 3.3.1 – *Dados dois polígonos P e Q que possuem um segmento comum, onde suas extremidades pertencem à malha. Se o teorema de Pick é verdadeiro tanto para P quanto para Q , também é válido para o polígono R , que é obtido pela adição de P e Q .*



Fonte: RPM, 2023

Demonstração – Como o Teorema de Pick é válido para P quanto para Q , temos :

$$A(P) = \frac{f_P}{2} + I_P - 1$$

$$A(Q) = \frac{f_Q}{2} + I_Q - 1$$

Sendo f_P e f_Q pontos de fronteira de P e Q , assim como I_P e I_Q são os pontos do interior de P e Q . Os polígonos P e Q tem uma aresta em comum, então os K pontos dessa aresta com restrição de dois pontos finais da fronteira, se tornarão pontos internos de R . Logo,

$$I_R = (I_P + I_Q) + (K - 2)$$

$$f_R = (f_P + f_Q) - 2(K - 2) - 2$$

Então,

$$I_P + I_Q = I_R - (k - 2)$$

$$f_P + f_Q = f_R + 2(K - 2) + 2$$

O teorema de Pick é verdade para P e Q, logo:

$$\begin{aligned} A_R &= A_P + A_Q \\ &= \left(\frac{f_P}{2} + I_P - 1 \right) + \left(\frac{f_Q}{2} + I_Q - 1 \right) \\ &= \frac{f_P}{2} + I_P - 1 + \frac{f_Q}{2} + I_Q - 1 \\ &= \left(\frac{f_P + f_Q}{2} \right) + (I_P + I_Q) - 2 \\ &= \frac{f_R + 2(K - 2) + 2}{2} + I_R - (k - 2) - 2 \\ &= \frac{f_R}{2} + I_R + (K - 2) + 1 - (k - 2) - 2 \\ &= \frac{f_R}{2} + I_R - 1 \end{aligned}$$

Podemos concluir que o teorema de Pick é aditivo.

3.4. POLÍGONOS COM CAVIDADE

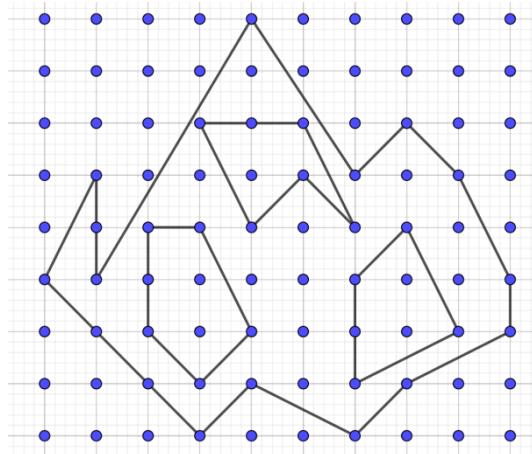
TEOREMA 3.4.1 – A área de um polígono P com n buracos(cavidade) é dada por:

$$A(P) = \frac{f}{2} + I + n - 1$$

Onde f é o número de pontos no bordo de P e no bordo dos buracos(cavidade) e I é o número de pontos no interior de P, excluindo os pontos que estão no interior dos buracos.

Demonstração – Consideremos uma região poligonal R com B_1, \dots, B_n , como representa a figura abaixo.

Imagem 8: Polígono com cavidade(buracos)



Fonte: O autor, 2023

Chama-se de P o polígono que delimita a região do polígono R e de $B_i, 1 \leq i \leq n$, suas cavidades. Segundo as regiões poligonais da Figura 8 tanto o polígono P e as suas cavidades podem-se aplicar ao Teorema de Pick.

Assim temos:

$$A(P) = \frac{f}{2} + I - 1 \text{ e } A(B_i) = \frac{f_i}{2} + I_i - 1$$

A área de R será $A(R) = A(P) - A(B_i)$, ou seja,

$$A(R) = A(P) - A(B_1) - A(B_2) - \dots - A(B_n),$$

Aplicando o Teorema de Pick temos:

$$A(R) = \frac{f}{2} + I - 1 - \left(\frac{f_1}{2} + I_1 - 1\right) - \left(\frac{f_2}{2} + I_2 - 1\right) - \dots - \left(\frac{f_n}{2} + I_n - 1\right)$$

$$A(R) = \frac{f}{2} + I - 1 - \frac{f_1}{2} - I_1 + 1 - \frac{f_2}{2} - I_2 + 1 - \dots - \frac{f_n}{2} - I_n + 1$$

$$A(R) = \frac{f}{2} - \frac{f_1}{2} - \frac{f_2}{2} - \dots - \frac{f_n}{2} + I - I_1 - I_2 - \dots - I_n - 1 + 1 + 1 - \dots + 1$$

$$A(R) = \frac{f}{2} - \frac{f_1}{2} - \frac{f_2}{2} - \dots - \frac{f_n}{2} + I - I_1 - I_2 - \dots - I_n - 1 + n$$

Fazendo $I^* = I - I_1 - I_2 - \dots - I_n$, temos:

$$A(R) = \frac{f}{2} - \frac{f_1}{2} - \frac{f_2}{2} - \dots - \frac{f_n}{2} + I^* - 1 + n$$

Usando o método de somar e subtrair f_i vamos obter.

$$A(R) = \frac{f}{2} - \frac{f_1}{2} + f_1 - \frac{f_2}{2} + f_2 - \dots - \frac{f_n}{2} + f_n - f_1 - f_2 - \dots - f_n + I^* - 1 + n$$

$$A(R) = \frac{f}{2} + \frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{2} - \dots + \frac{f_n}{2} - f_1 - f_2 - \dots - f_n + I^* - 1 + n$$

$$A(R) = \frac{f + f_1 + f_2 + \dots + f_n}{2} + I^* - f_1 - f_2 - \dots - f_n - 1 + n$$

Sabe-se que $f + f_1 + f_2 + \dots + f_n = f$, pois são todos os pontos que pertencem à fronteira de R e $I^* - f_1 - f_2 - \dots - f_n = I$, são os pontos de P menos os internos e da fronteira dos buracos(cavidades), o que nos resta são os pontos internos de R , assim obteve-se:

$$A(R) = \frac{f}{2} + I + n - 1$$

4. DAVID PAUL AUSUBEL

David Paul Ausubel¹ nasceu no dia 25 de outubro de 1918 na cidade do Brooklyn, Nova Iorque, onde se graduou pela Universidade da Pensilvânia em 1939 em psicologia. Mais tarde, ele se formou em medicina em 1943, pela Universidade

¹ David Paul Ausubel será chamado pelo sobrenome Ausubel no decorrer do texto.

de Middlesex, trabalhando como cirurgião assistente e como psiquiatra na Saúde Pública Norte Americana, e em 1950 Ausubel concluiu o seu mestrado e doutorado em psicologia do desenvolvimento pela Universidade de Columbia.

Em 1963, no seu livro: *“The Psychology of Meaningful Verbal Learning”* que traz a sua principal teoria da aprendizagem significativa, no qual foi influenciado pelos ensinamentos de Jean Piaget. A teoria de Ausubel traz a semelhança sobre padrões conceituais, teorizando uma explicação de como as pessoas alcançam o conhecimento.

Em 1973, Ausubel decidiu se dedicar à prática da psicologia cognitiva, nesse tempo de dedicação foram publicados muitos livros, bem como artigos em revistas de psicologia e psiquiatria, que foram primordiais para o recebimento do Prêmio Thorndike da American Psychological, em 1977, isso porque seus estudos tiveram um grande significado para o conhecimento, tanto teórico quanto prático, envolvendo a psicologia educacional.

Em 1994 aos 75 anos, Ausubel dedicou-se integralmente à escrita, publicando quatro livros: *Desenvolvimento do ego e psicopatologia(1996)*; *A Aquisição e Retenção do Conhecimento(2000)*; *Teoria e problemas do desenvolvimento do adolescente(2002)*; *A Morte e a Condição Humana(2002)*, e em 9 de julho de 2008 com 89 anos, David Paul Ausubel faleceu.

4.1. Teoria de Aprendizagem Significativa

A atividade proposta é do caráter da Teoria de Aprendizagem Significativa de David Paul Ausubel(1918 – 2008). Essas metodologias acompanharão todo o estudo até aqui descrito.

Para maior compreensão necessita-se compreender a teoria de aprendizagem significativa abordando algumas definições, nas quais:

- **Tipos gerais de aprendizagem:**

Os tipos de aprendizagem podem ser separados em 3 tópicos: Cognitiva, Afetiva e Psicomotora.

- **A aprendizagem cognitiva** é a maneira de organizar as informações na mente do aluno/indivíduo, criando uma estrutura cognitiva. Ou seja, é a forma que o aluno organiza a matéria que está estudando.
- **A aprendizagem afetiva** é o resultado de sinais internos do indivíduo, que pode ser identificada como prazer e dor, alegria ou ansiedade, entre

outros. Essa aprendizagem afetiva vem junto com as experiências cognitivas.

- **A aprendizagem psicomotora** é adquirida por meio de práticas, são definidas por meio de treinos e práticas, as aprendizagens cognitivas são importantes para o alcance de habilidades psicomotoras.

De acordo com as leituras relativas sobre a teoria de Ausubel, ela se debruçará em uma diretriz importante, na qual o aluno conseguirá ampliar e reconfigurar, e outra quando o aluno tem contato com um material novo, ampliando os seus estudos ou reconfigurando aquilo que foi aprendido, agregando um novo conhecimento e revertendo isso a um novo conhecimento prévio, formando sempre um ciclo de aprendizagem.

- **Aprendizagem significativa** ocorre quando o aluno já chega à escola com um conhecimento prévio adquirido, sendo assim quando o aluno entrar em contato com um assunto novo, o aluno deve vincular com os conhecimentos prévios adquiridos até aquele momento. Portanto, o professor compreendendo essa interligação disciplinar deve realizar perguntas introdutórias para que o aluno seja capaz de fazer descobertas e chegar a uma conjectura com o conhecimento prévio que ele já tinha.

Essa dimensão refere-se à maneira como o aluno recebe os conteúdos que deve aprender: quanto mais se aproxima do pólo de aprendizagem por descoberta, mais esses conteúdos são recebidos de modo não completamente acabado e o aluno deve defini-los ou “descobri-los” antes de assimilá-los; inversamente, quanto mais se aproxima do pólo da aprendizagem receptiva, mais os conteúdos a serem aprendidos são dados ao aluno em forma final, já acabada. (Pelizzari et al, 2002, p.39)

- **Aprendizagem mecânica** é uma aprendizagem de memorização, na qual o aluno realiza a memorização de fórmulas, leis e conceitos, sem interação entre a nova informação e aquela já obtida (conhecimento prévio). Sendo assim, o conhecimento fica sem ter uma conexão com um conceito definido.

Segundo Ausubel se algum aluno não possuir nenhum conhecimento prévio, para que possamos ancorar² um novo conceito, Ausubel diz que podemos utilizar a

² Ancoragem é uma metáfora que significa que algum conhecimento prévio atua como ideias de âncora. Em outras palavras, o novo conhecimento se baseia no conhecimento existente e, assim, adquire significado. Podendo ser chamado de subsunção.

aprendizagem mecânica para que o aluno possa agregar um conhecimento prévio que vai servir de ancoragem para um novo conceito. A aprendizagem significativa de Ausubel é distinguida em três tipos de aprendizagens que possuem uma relação direta entre o que vai se aprender e o que é conhecimento prévio. São conhecidos por subordinação, superordenação e modo combinatório de aprendizagem.

- **Aprendizagem Subordinada** são ideias aprendidas que se encontram hierarquicamente subordinadas a uma ideia pré-existente, ou seja, é um conceito que faz interação entre si mediante a uma relação de subordinação.
- **Aprendizagem superordenada** é um novo conceito mais geral com potencial significativo que inclui novas ideias e conceitos já estabelecidos na estrutura cognitiva do aluno/indivíduo. Esta nova aprendizagem traz uma ideia inclusiva e surgimento de novas ideias.
- **Aprendizagem combinatória** é a aprendizagem que não apresenta relação entre as outras duas aprendizagens subordinada e superordenada, mas contém um conteúdo mais amplo, com ideias adquiridas anteriormente na estrutura cognitiva do aluno/indivíduo.

A combinação desses tipos de aprendizagem tem como objetivo construir estruturas mentais através de mapas conceituais que facilitam desvendar novos conhecimentos ou reconstruir conhecimentos previamente descobertos.

A aprendizagem é muito mais significativa à medida que o novo conteúdo é incorporado às estruturas de conhecimento de um aluno e adquire significado para ele a partir da relação com seu conhecimento prévio. Ao contrário, ela se torna mecânica ou repetitiva, uma vez que se produziu menos essa incorporação e atribuição de significado, e o novo conteúdo passa a ser armazenado isoladamente ou por meio de associações arbitrárias na estrutura cognitiva. (Pelizzari et al, 2002, p.38)

Para recolher os dados propostos, foram aplicadas as atividades de forma particular e os comentários, realizados pelos alunos, foram registrados pelo Professor. As entrevistas tiveram duração de 30 minutos e foram realizadas no ambiente da unidade do Kumon. Foram cinco atividades propostas resolvidas pelos

alunos. A preparação das atividades foi empreendida para que ficasse semelhante às atividades propostas hodiernamente pelo Kumon, atividades essas as quais os alunos estão acostumados a realizar. No momento em que uma dúvida surgia acerca do exercício, o professor conduzia o questionamento, com o intuito de orientar em suas resoluções, uma vez que a grande maioria dos alunos tinha aptidão em resolver com o método Kumon.

O Kumon é separado por estágio que vai do 7A até O, sendo que a partir do A é o equivalente ao 1ºano do Fundamental, B é equivalente ao 2ºano do Fundamental, e assim por diante até chegar ao K, equivalente ao 3ºano do ensino médio. Os estágios L, M, N e O já são conteúdos de nível superior.

A metodologia Kumon possui grande similaridade com as metodologias de Ausubel. Entretanto, o método Kumon traz uma aprendizagem mecânica, como Ausubel vai dizer que esta aprendizagem pode servir de ponto de partida para que novas habilidades e para eu novos conceitos possam existir.

Para esse estudo de casos, um grupo com 5 pessoas foi formado. Essas 5 pessoas são alunos de rede particular de ensino e que realizam atividades extras de matemática no Kumon, Os alunos foram selecionados, porque já tinham um conhecimento prévio de cálculo de frações e alguns deles um breve conhecimento de geometria em níveis diferentes, uns deles iniciantes e outros avançados.

A atividade foi montada de acordo com os seguintes temas: contagem de pontos, área de quadrados e triângulos, área do polígono, aditividade de polígonos e área de polígonos com cavidade (buracos). Ela foi elaborada para seguir uma ordem crescente de dificuldade. O primeiro exercício sempre estará resolvido para que o aluno possa investigar e partir dos conhecimentos prévios já adquiridos. Antes da atividade, o professor levanta um questionamento sobre cálculo de áreas de figuras planas e cálculos de fração.

A atividade está apresentada no anexo 1.

5. ATIVIDADE PROPOSTA.

Neste capítulo, serão descritas algumas habilidades e competências que fazem a conexão com a Base Nacional Comum Nacional (BNCC)³ e também a Teoria de Aprendizagem de Ausubel.

³ A Base Nacional Comum Curricular é um documento para as escolas públicas e privadas, como referência obrigatória para elaboração de propostas pedagógicas para a educação infantil, ensino fundamental e ensino médio no Brasil. Base Nacional Comum Curricular, vai ser referido como BNCC.

As atividades que serão propostas e analisadas são de cunho simples, que têm um significado para os discentes, pois alguns alunos já possuíam algumas habilidades e competências para que pudesse servir de ancoragem como a teoria de Ausubel, citada no capítulo anterior.

TABELA: Objetivo e habilidades de acordo com a BNCC.

Ano/ Faixa	Objetivo de Conhecimento	Habilidades
4° Ano	Áreas de figuras construídas em malhas quadriculadas	(EF04MA21) Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.
5°Ano	Áreas e perímetros de figuras poligonais: algumas relações	(EF05MA20) Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.
6°Ano	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
	Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados	(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.

Fonte:BNCC, 2023

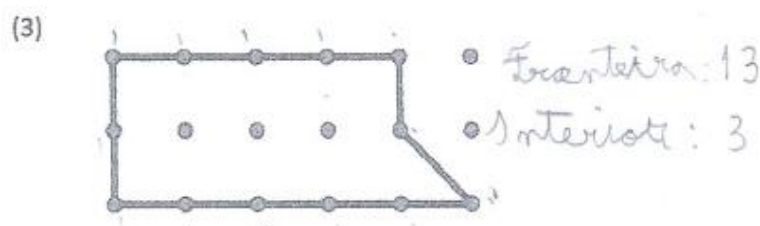
As atividades vão levar ao conhecimento do aluno de como resolver problemas de polígonos através do plano quadriculado, fazendo aplicação do teorema de Pick. Na primeira atividade era esperado que o aluno soubesse fazer contagem de pontos, tanto para pontos de fronteira quanto para pontos internos. Já na segunda atividade era esperado que o aluno fizesse contagem de quadrados, correlacionando o números de quadrados e triângulos como números da área do polígono apresentado. Na terceira atividade, era esperado que o aluno conseguisse relacionar os pontos de fronteira e internos como f e I , e que pudesse calcular corretamente as frações de números inteiros. A quarta atividade tem o intuito de o aluno perceber que pode dividir o polígono principal em polígonos menores para facilitar o cálculo da área. A quinta atividade traz uma curiosidade de polígonos com

cavidades (buracos), que muitos alunos desconhecem.

5.1. Atividade 1

Objetivo geral da atividade foi elaborado para fazer a contagem de pontos para que os alunos possam identificar quem são pontos de fronteira e pontos internos. Os alunos não tiveram muita dificuldade, mas a grande maioria marcaram os pontos como é mostrado na imagem abaixo.

Imagem 9: atividade 1



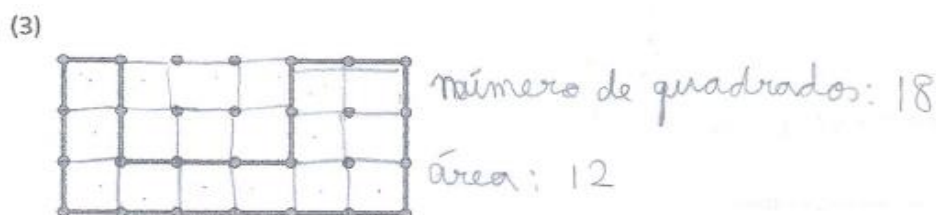
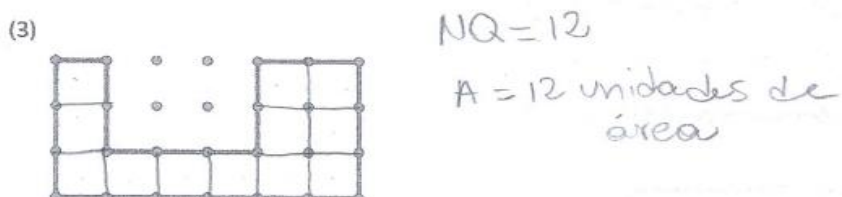
Fonte: O autor, 2023

5.2. Atividade 2

A atividade foi elaborada com o objetivo de que o aluno visualizar-se quadrados unitários e utilizar a contagem desses quadrados unitários, que se encontram no interior da região limitada, para calcular a área do polígono. Tais quadrados representam a unidade de medida de área utilizada na atividade.

O aluno da segunda figura foi feita marcações em todos os quadrados presentes, mas só realizou a contagem dos quadrados que estão dentro da área do polígono.

Imagem 10: atividade 2

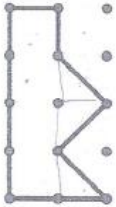



Fonte: O autor, 2023

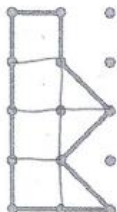
No exercício 5 o objetivo era identificar que 2 triângulos formam 1 quadrado.

Alguns alunos utilizaram das formas de resolução chegando ao resultado esperado, tanto como fração imprópria quanto na forma de número misto.

Imagem 11: atividade 2.1

(5)  $NQ: 4$ $N+: 3$ $A: 5\frac{7}{2}$ $4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

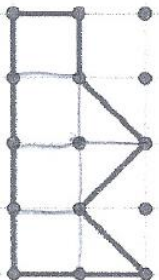
(5)  $NQ: 4$ $N+: 3$ $A: 5\frac{7}{2}$ $4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

(5)  $NQ = 4$ $NT = 3$ $A = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$ unidades de área

Fonte: O autor, 2023

Nesta atividade um aluno comentou: “Pera aí! Eu acho que 2 triângulos fazem 1 quadrado, então eu posso juntá-los. Se eu puder, eu tenho 5 quadrados e 1 triângulo”.

Imagem 12: atividade 2.2

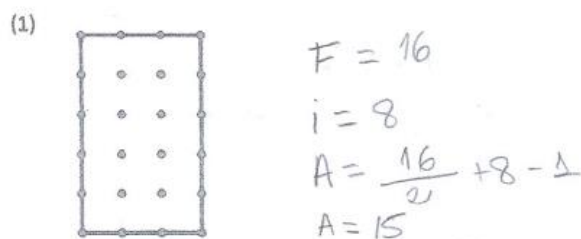
(5)  $NQ: 5$ $N+: 1$ $A: 5\frac{1}{2}$

Fonte: O autor, 2023

5.3. Atividade 3

O objetivo desta atividade é que o aluno consiga fazer substituições em fórmulas, contando os pontos e substituindo na fórmula.

Imagem 13: atividade 3

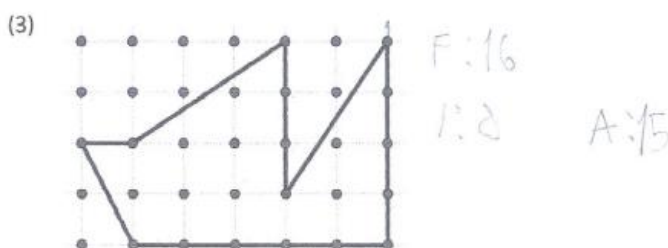


Fonte: O autor, 2023

Mas um aluno fez o seguinte comentário: “Professor não é mais fácil eu contar os quadrados? Mas pera aí, no ultimo - figura a seguir - não são quadrados, aí me ferrou, não sei se esse pedaço é $\frac{1}{3}$, eu não vou arriscar, é mais fácil eu fazer pela fórmula mesmo, essa fórmula me ajuda a calcular qualquer área de figura”.

O mesmo aluno que fez o comentário realizou a conta com cálculo mental.

Imagem 14: atividade 3.1



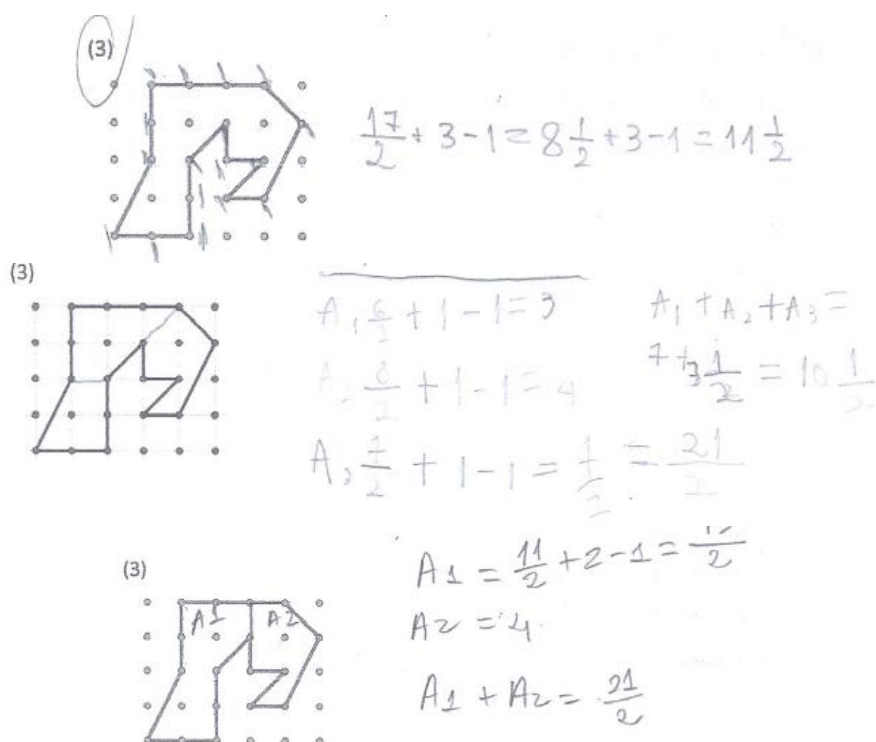
Fonte: O autor, 2023

5.4. Atividade 4

O objetivo desta atividade é que o aluno possa perceber que pode dividir o polígono principal em vários polígonos menores.

Nesta atividade alguns alunos fizeram várias divisões, outros não realizaram nenhum procedimento de divisão, isso porque consideraram desnecessários – primeira figura. Entretanto, outro aluno dividiu a figura em 2 polígonos menores – segunda figura, alegando que era o suficiente para calcular a área do todo. Outros dividiram o polígono em 3 – terceira figura.

Imagem 15: atividade 4



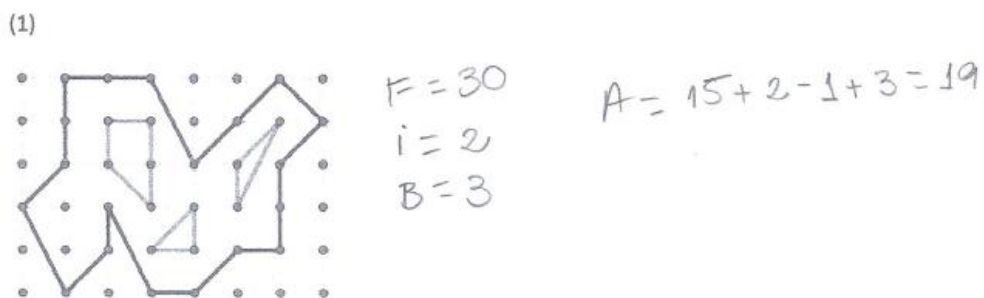
Fonte: O autor, 2023

5.5. Atividade 5

O objetivo proposto foi que os alunos pudessem conhecer um novo método de cálculo da área de polígonos, além de apresentar aos alunos a existência de polígonos com cavidade e que eles consigam realizar o cálculo dessas áreas.

Os alunos tiveram dificuldade de entenderem o que seria um polígono com buracos. Neste caso, o professor demonstrou o mesmo exercício recortado os buracos no papel.

Imagem 16: atividade 5



Fonte: O autor, 2023

5.6. CONCLUSÃO DAS ATIVIDADES.

A experiência desenvolvida nessa atividade, revela que o teorema de Pick proporciona uma oportunidade de explorar conceitos matemáticos importantes e de diferentes níveis, promovendo o desenvolvimento da capacidade do processo matemático.

Todos os alunos que participaram desse teste, puderam visualizar um novo método de realizar o cálculo de áreas. Entre os alunos participantes, em especial, dois alunos ficaram impressionados pois não sabiam que poderia existir polígonos em malha quadriculada ou até mesmo polígonos com cavidade. Um aluno deu o seguinte relato: “Bem tranquilo de fazer, só precisa contar pontos e aplicar na fórmula. Não achei muito difícil, o mais difícil na atividade é resolver as frações e faz muito tempo que eu já saí do estágio E”. Outro aluno disse: “Para quem está no estágio J, isso foi bem tranquilo, o bom foi que eu conseguir aprender mais um novo método para calcular área, não sabia que poderia existir buracos nessas figuras.”

Com esses relatos pode-se perceber que a proposta do trabalho foi bem desenvolvida e despertou curiosidade nos alunos, promovendo o interesse dos mesmos, principalmente em relação à Geometria e ao Cálculo de área de polígonos diversos, já que muitos só estão acostumados ao cálculo da área de quadrados, retângulos e triângulos.

6. CONCLUSÃO

A aprendizagem torna-se mais atrativa quando ela possui um significado para o aluno. Neste sentido, o trabalho descrito foi realizado para contribuir e aguçar a curiosidade de alunos para o cálculo de áreas de polígonos quaisquer utilizando o teorema de Pick.

Com base neste teorema, foi realizada uma atividade com cunho de aprendizagem significativa, para que o conhecimento prévio do aluno a respeito do cálculo de áreas, pudesse servir de âncora para um novo conhecimento a ser agregado, nesse caso, o Teorema de Pick.

A partir dessa pesquisa realizada com os alunos, pode-se concluir que o tópico tem potencial a ser explorado de várias formas e níveis, sempre trazendo uma simplicidade visual em cada atividade a medida que as dificuldades sejam acrescentadas, fazendo com que o aluno seja capaz de evoluir nos seus estudos.

O teorema de Pick, pode ser utilizado em cálculo de áreas de regiões de

ciudades, com auxílio de imagens de satélites.

REFERÊNCIAS

Lima, Elon Lages, *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, 3a Edição, Rio de Janeiro, SBM, 1991, p.101-114.

SÉ, Fabiola Caroline Luz Sento. *O teorema de Pick e algumas aplicações para os Ensinos Fundamental II e Médio*. 2016.

RODRIGUES, Ivana do Monte. *Área de figuras planas e Teorema de Pick: uma abordagem diferenciada para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental*. 2014. 61 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2014.

Disponível: <https://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.html>. Acesso em: 20 fev. 2023.

Rêgo, Aderbal Soares do. "O Teorema de Pick no ensino-aprendizagem da geometria plana: cálculo de áreas de polígonos simples." (2022).

de Jesus, Danilo Augusto Ferreira, et al. "2A015 Você já sabe contar? Então vamos calcular a área da Colômbia! Uma proposta para abordar cálculo de áreas irregulares na Educação Básica." *Tecné, Episteme y Didaxis: TED* (2018).

da Silva Junior, Francisco Silverio, and Fernando Pereira Micena. "Sugestoes para Aplicação do Teorema de Pick na Educação Básica."

Pelizzari, Adriana, et al. "Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel." *revista PEC 2.1* (2002): 37-42.

Disponível:https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3369246/mod_resource/content/1/Capitulo%2010%20-%20A%20teoria%20da%20aprendizagem%20significativa%20de%20Ausubel%20-%20Teorias%20de%20Aprendizagem%20-%20Moreira%2C%20M.%20A.pdf.

Acesso em: 20 abr. 2023

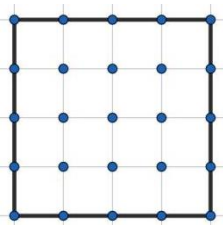
Souza, Rubens Caio de. *Teorema de Pick como proposta para a construção de aula de geometria*. MS thesis. 2021.

ANEXO 1 – ATIVIDADES.

Atividade 1:

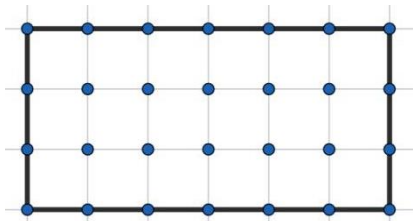
Marque os pontos de fronteiras e pontos internos existentes nas figuras.

(1)



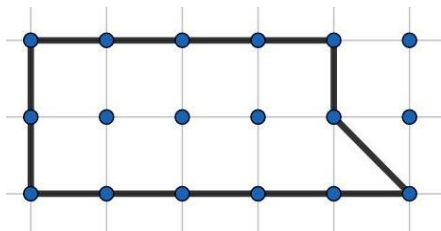
Fronteira = 16 pontos
Interior = 9 pontos

(2)

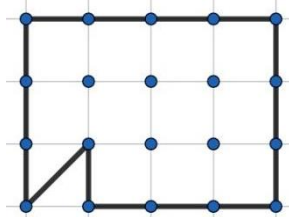


Fronteira = _____
Interior = _____

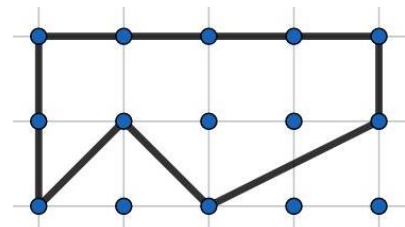
(3)



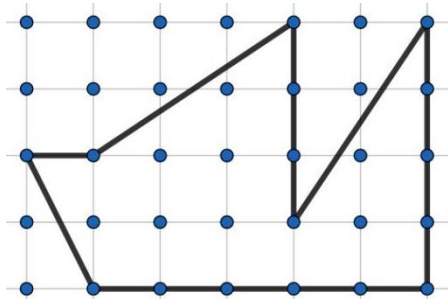
(4)



(5)



(6)



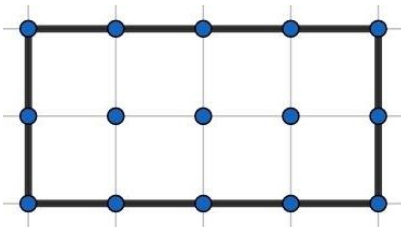
Atividade 2:
Qual é a área da figura?

Sabendo que cada quadrado



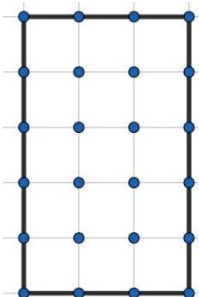
tem 1 unidade de área, identifique:

(1)



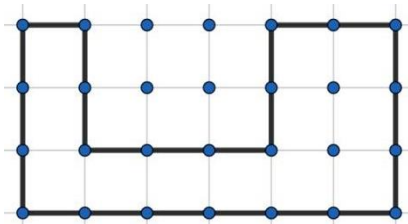
Números de quadrados = 8 quadrados
Área = 8 unidades de área

(2)



Números de quadrados = _____
Área = _____

(3)

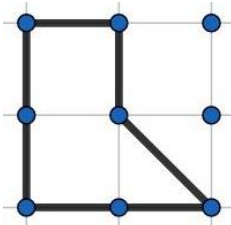


A metade de um quadrado



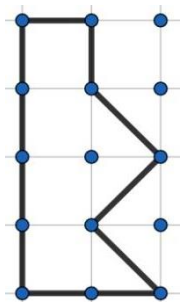
vai ter a área de $\frac{1}{2}$ unidade de área, observe o exemplo.

(4)



Números de quadrados = 2 quadrados
Números de triângulos = 1 triângulo
Área = $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ unidades de área

(5)

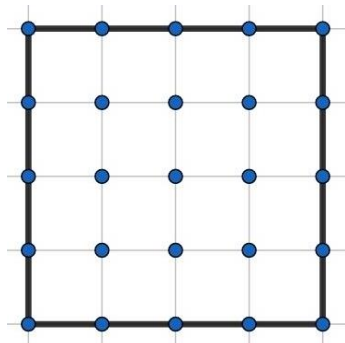


Atividade 3:
Calcule a área do polígono.

Para calcular área de quaisquer polígonos podemos utilizar a fórmula:

$$A = \frac{f}{2} + I - 1$$

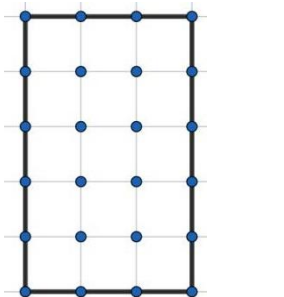
f = Fronteira; I = Interior



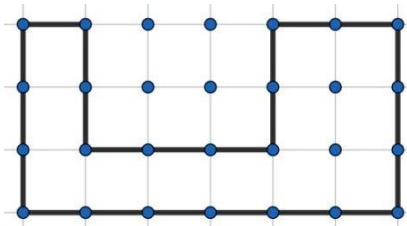
Fronteira(f) = 16 pontos
Interior(I) = 9 pontos
Aplicando na fórmula temos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{16}{2} + 9 - 1 \\ A &= 8 + 9 - 1 \\ A &= 8 + 8 \\ A &= 16 \end{aligned}$$

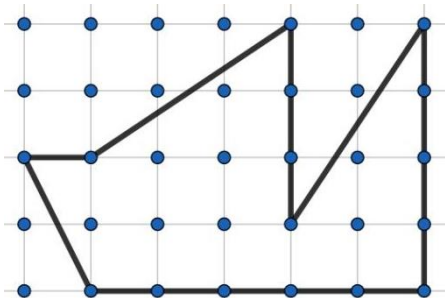
(1)



(2)

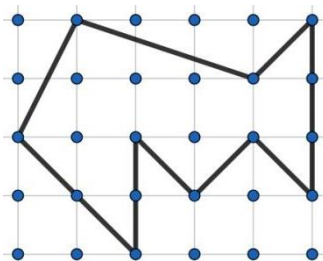


(3)



Atividade 4:
Calcule a área do polígono.

Para calcular áreas de polígonos não regulares, podemos calcular a área separadamente.



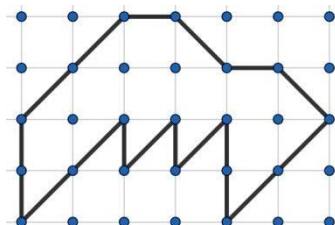
$$A_1 = \frac{6}{2} + 2 - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$$

$$A_2 = \frac{4}{2} + 3 - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$$

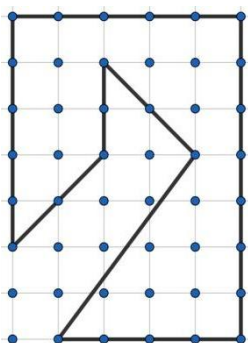
$$A_3 = \frac{7}{2} + 0 - 1 = \frac{5}{2}$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = 4 + 4 + \frac{5}{2} = \frac{21}{2}$$

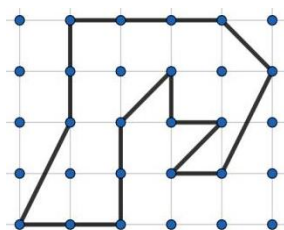
(1)



(2)



(3)



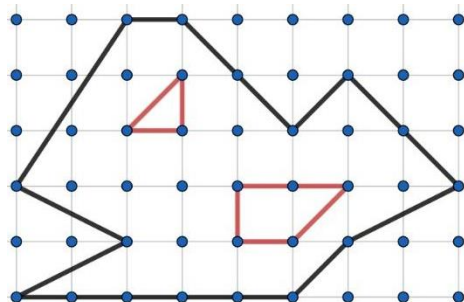
Atividade 5:
Calcule a área do polígono.

Para calcular a área de polígonos que existem um buraco, vamos utilizar a fórmula:

$$A = \frac{f}{2} + I - 1 + b$$

Sendo o b a quantidade de buracos.

A fronteira são todos os pontos destacados da borda mais os pontos das bordas de dentro.



Fronteira(f) = 24 pontos

Interior(I) = 9 pontos

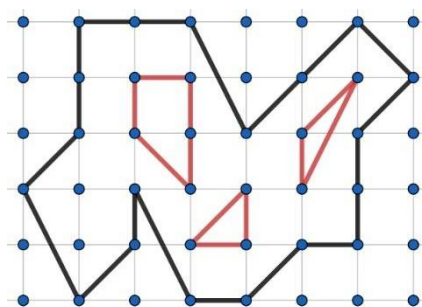
Buraco(b) = 2

$$A = \frac{24}{2} + 9 - 1 + 2$$

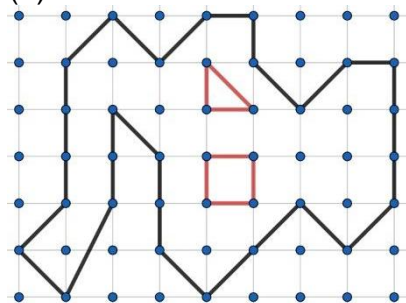
$$A = 12 + 9 - 1 + 2$$

$$A = 22$$

(1)



(2)

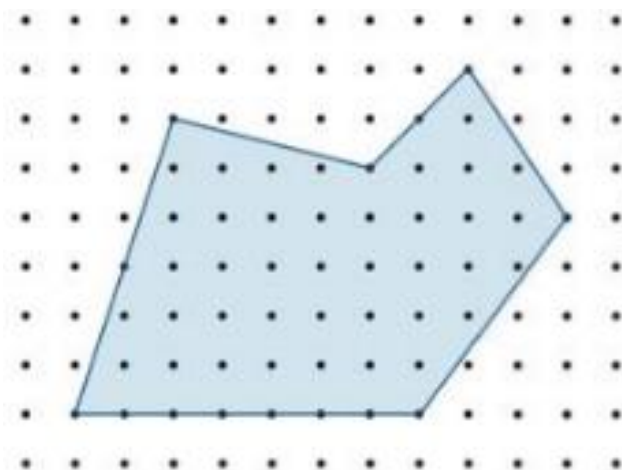


Atividade Extra: Aplicação do teorema de Pick com realização em grupo.

6- O teorema de Pick, descrito pelo matemático austriaco Georg Pick(1859 - 1942), é capaz de fornecer a medida de área de um região limitada por um polígono simples que esteja sobre uma malha pontilhada levando em consideração apenas a quantidade de pontos internos(i) e a quantidade de pontos na fronteira do polígono(f). A relação é a seguinte:

$$A = \frac{f}{2} + I - 1$$

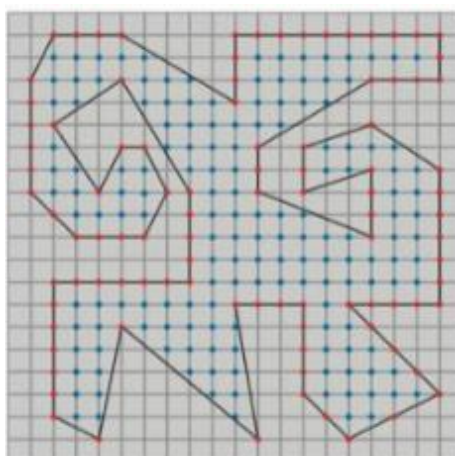
Na figura apresentada a seguir, por exemplo , a quantidade de pontos internos e 39 e quantidade de pontos na fronteira e 14.



Então a medida de área da região limitada pelo polígono é:

$$A = \frac{14}{2} + 39 - 1 \Rightarrow A = 45 \text{ unidade de area}$$

- a) Use o teorema de Pick para determinar a medida de área de a região poligonal apresentada a seguir .



- b) Construa um polígono cujos vértices sejam pontos de uma malha pontilhada. Em seguida, peça a um colega para calcular a medida de área da região limitada por esse polígono utilizando o teorema de Pick enquanto você calcula a medida de área da região limitada pelo polígono que ele construiu. Depois, confirmam a resolução juntos.