COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

RENÊ MACHADO FILHO

O ESTUDO DOS POLINÔMIOS NO 8º ANO: desafios e práticas

Rio de Janeiro

2025

RENÊ MACHADO FILHO

O ESTUDO DOS POLINÔMIOS NO 8º ANO: desafios e práticas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em 18/12/2025, ofertado pela Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins

Rio de Janeiro

2025

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

M149 Machado Filho, Renê
O estudo dos polinômios no 8º ano : desafios e práticas / Renê Machado Filho. – Rio de Janeiro, 2025.

63 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino. 2. Polinômios. 3. Álgebra. 4. Teoria dos registros de representações semióticas (TRRS). 5. Jogos no ensino de matemática. I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Colégio Pedro. II. III. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB-7: 5692.

RENÊ MACHADO FILHO

O ESTUDO DOS POLINÔMIOS NO 8º ANO: desafios e práticas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, ofertado pela Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Aprovado em 18 de dezembro de 2025.

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins

Colégio Pedro II – Dept. de Matemática / PROFMAT-CP2

Orientador

____

Prof. M. Renato de Carvalho Alves

Colégio Pedro II – Dept. de Matemática / EEM-CP II

____

Prof. M. Rony Henrique Barros

Colégio Pedro II – Dept. de Matemática CP II

Rio de Janeiro

2025

Aos meus familiares e amigos, dedico este trabalho com todo o meu amor. Obrigado por acreditarem em mim mesmo quando eu duvidei. Esta vitória também é de vocês.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus e à minha esposa, cuja força e presença foram fundamentais para que eu pudesse permanecer firme em cada fase desta jornada. À minha família, que sempre esteve ao meu lado, oferecendo apoio, compreensão e acolhimento, expresso meu reconhecimento pelo apoio incondicional, pela compreensão nos momentos mais desafiadores e pela motivação constante que sempre me proporcionaram.

Aos meus amigos de curso, que fizeram a diferença em tornar os sábados letivos ainda mais produtivos e divertidos, e também aos amigos de longa data Paulo Maria e Douglas Monteiro, que compartilharam comigo desafios, incertezas, risadas e extensas horas de estudo, expresso minha profunda gratidão. A convivência e o apoio de vocês tornaram essa jornada mais leve e cheia de significado, e cada um, com suas experiências, me proporcionou uma admiração incomparável.

Também registro minha gratidão aos professores que contribuíram para minha formação ao longo do curso. Cada aula, cada orientação e cada comentário trocado foram primordiais para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

Ao meu orientador, Daniel Martins, deixo meu sincero agradecimento pela atenção, paciência e disposição durante o desenvolvimento deste trabalho. Sua orientação atenta e suas contribuições foram essenciais para o progresso desta pesquisa. Cada conversa e cada conselho levarei para a vida com muito carinho. Agradeço também pelo incentivo para que eu embarque em mais um ano de estudos em outro curso, e pode ter certeza de que irei lhe perturbar, está aqui consagrado o convite para a banca do próximo trabalho.

Agradeço igualmente à banca avaliadora, composta pelos professores Renato de Carvalho Alves e Rony Henrique Barros, pela leitura cuidadosa, e pelo comprometimento em participar deste processo, mesmo diante de múltiplas responsabilidades e do tempo reduzido para análise do texto. Fica aqui minha gratidão e admiração por vocês.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste estudo. Cada gesto, conselho ou palavra de apoio foi de grande importância para que este trabalho pudesse se concretizar.

O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.
(Einstein, 1923)

RESUMO

MACHADO FILHO, Renê. **O estudo dos polinômios no 8º ano: desafios e práticas**. 2025. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2025.

Este trabalho explora a maneira como os polinômios são abordados no Ensino Fundamental, com ênfase no 8º ano, e faz conexão entre a formação inicial dos professores e os obstáculos que os alunos enfrentam no processo de aprendizado. Primeiramente, o trabalho discute o tratamento tradicional dos polinômios em álgebra, abrangendo definições, operações, propriedades e os algoritmos que envolvem a adição, subtração e multiplicação de polinômios, assim como a divisão de polinômios por monômios. A pesquisa, é feita por meio de uma análise qualitativa de três materiais didáticos aprovados pelo PNLD, comparando as abordagens dos autores no ensino de polinômios, os tipos de registros de representação utilizados e a forma como relacionam o conteúdo às competências estabelecidas na BNCC. A pesquisa identifica falhas na abordagem tradicional, caracterizada por uma ênfase excessiva em algoritmos, quase nenhuma contextualização e omissão de temas relevantes, como a divisão de polinômios. Com base nessas limitações, são discutidas as dificuldades mais comuns enfrentadas pelos alunos, como reconhecer termos semelhantes, distinguir entre variáveis e incógnitas, e aplicar as propriedades da potenciação, acompanhadas de exemplos reais de erros em sala de aula. Para contornar essas dificuldades, propõe-se uma abordagem fundamentada na Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) de Raymond Duval, argumentando que um aprendizado significativo ocorre quando os alunos transitem entre diferentes registros: algébrico, verbal, geométrico e numérico. Finalmente, propostas didáticas são sugeridas, incluindo jogos, atividades manipulativas e problemas contextualizados, que tornam o estudo dos polinômios mais dinâmico e conectado à realidade dos alunos, promovendo uma melhor compreensão conceitual e maior autonomia matemática.

Palavras-chave: Polinômios, TRRS, Jogos e Álgebra.

ABSTRACT

Machado Filho, Renê. **O estudo dos polinômios no 8º ano: desafios e práticas**. 2025. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2025.

This work explores how polynomials are approached in elementary school, with an emphasis on the 8th grade, and makes a connection between the initial training of teachers and the obstacles that students face in the learning process. Firstly, this work discusses the traditional treatment of polynomials in algebra, covering definitions, operations, properties, and the algorithms involved in the addition, subtraction, and multiplication of polynomials, as well as the division of polynomials by monomials. The research is conducted through a qualitative analysis of three teaching materials approved by the PNLD (National Textbook Program), comparing the authors' approaches to teaching polynomials, the types of representational registers used, and how they relate the content to the competencies established in the BNCC (National Common Core Curriculum). This research identifies flaws in the traditional approach, characterized by an excessive emphasis on algorithms, almost no contextualization, and omission of relevant topics such as polynomial division. Based on these limitations, the most common difficulties faced by students are discussed, such as recognizing similar terms, distinguishing between variables and unknowns, and applying the properties of exponentiation, accompanied by real-world examples of classroom errors. To overcome these difficulties, an approach grounded in Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Registers (TRRS) is proposed, arguing that meaningful learning occurs when students move between different registers: algebraic, verbal, geometric, and numerical. Finally, didactic proposals are suggested, including games, manipulative activities, and contextualized problems, which make the study of polynomials more dynamic and connected to the students' reality, promoting a better conceptual understanding and greater mathematical autonomy.

Keywords:

Polynomials, TRRS, Games and Algebra.

LISTA DE FIGURAS (ILUSTRAÇÕES)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos polinômios desempenha um papel importante na transição do raciocínio aritmético para o pensamento algébrico durante o Ensino Fundamental.
No 8º ano, os alunos são apresentados as expressões algébricas, realizam operações simbólicas e fazem as primeiras generalizações matemáticas com polinômios. Tais fatos requerem novas habilidades cognitivas que muitas vezes não foram iniciadas corretamente na série anterior. O que observamos de mais comum nas salas de aula de matemática é um tempo enorme dedicado às equações polinomiais do primeiro grau sem mesmo discutir a natureza de seus raízes ao variar o conjunto universo ou mesmo apresentar situações problemas cujas modelagens dessas equações sejam condizentes com os aspectos cognitivos dos alunos que estão nesta etapa da escolaridade.

O ensino de polinômios na educação básica tem se mostrado limitado e fragmentado, resultando em lacunas conceituais que impedem o avanço dos estudos no Ensino Médio, em especial, nos conteúdos que se baseiam na álgebra, como produtos notáveis, fatorações, resoluções de equações algébricas, sistemas lineares com duas incógnitas, inequações, frações algébricas, e funções. Acreditamos que uma boa introdução ao estudo dos polinômios permite a passagem do campo aritmético para o campo algébrico de maneira menos traumática, isto é, apresentar este conteúdo embasado em uma teoria adequada as necessidades dos alunos permitem ganhos na aprendizagem.

Para compreender de maneira mais global o tema, iniciamos o estudo dos polinômios baseados nos conceitos de corpos da álgebra abstrata, a seguir comparamos o que diz a literatura matemática com o que é levado pelos professores para a sala de aula, através dos livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático, o PNLD.

Embora a análise dos livros didáticos aprovados pelo PNLD indica que, apesar de atenderem às exigências da BNCC, muitos desses livros apresentam o conteúdo de maneira tradicional com ênfase nas representações algébricas abstratas, ainda é possível encontrar tentativas fracas de contextualização da temática. Muitas dessas tentativas desconsideram o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e suas interações com a sociedade atual trazendo os mesmos exemplos que os manuais dos anos 1980 traziam. Esta analise permitiu observar que a memorização mecânica de regras, seguidas de uma sequência de operações, tornam o conteúdo um emaranhado de cálculos que não dialogam com o que os alunos concebem por matemática, uma vez que o pensamento aritmético ainda é muito presente na vida dos estudantes.

Como resultado não muito positivo, surgem problemas frequentes em sala de aula como a não distinção entre os conceitos de variável e incógnita, erros relacionados a simplificação de termos semelhantes e operações básicas entre eles, uso incorreto das propriedades da potenciação e a tendência de transformar toda expressão algébrica em uma equação a ser resolvida.

Nesse contexto é imprescindível repensar o ensino de polinômios com base em referenciais teóricos e metodologias que tragam mais significados para os alunos. A Teoria da Representação dos Registros Semióticos (TRRS), desenvolvida por Raymond Duval, oferece um sólido referencial teórico ao sustentar que o aprendizado da matemática requer a articulação de diversos registros algébrico, verbal, geométrico e numérico e a conversão de informações entre eles sem perder o significado. Desse modo, este estudo investiga o ensino de polinômios, analisa as dificuldades que os alunos enfrentam e sugere atividades didáticas que utilizam representações diversas, visando tornar o processo de aprendizagem mais acessível, dinâmico e alinhado às exigências estabelecidas na BNCC.

2 COMO PROFESSOR ACESSOU O CONTEÚDO NOS CURSOS DE ÁLGEBRA?

Neste tópico iremos apresentar como os polinômios são apresentados nas licenciaturas em Matemática. Esperamos com esse texto fazer o link entre a formação inicial do professor e como esse conhecimento adquirido é gerenciado na educação básica.

2.1. Estudando os polinômios

Seja K um corpo qualquer. Denotaremos por K[x] o conjunto de todos os polinômios, sobre K em uma variável x.

Iremos chamar de polinômio sobre K em uma variável x a uma expressão com a seguinte forma $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \cdots$ onde $a_i \in K, \forall\, i \in \mathbb{N}\, e\, \exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = 0\ \forall\, j \geq n.$

Dizemos que dois polinômios $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \cdots e\ q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k + \cdots$ sobre k são iguais se e somente se $a_i = b_i\ em\ K, \forall\, i \in \mathbb{N}$. Exemplo: $p(x) = (x+3)^3 - 27.(x+1)$ e $q(x) = x^3 + 9x^2$ são iguais sobre o corpo $\mathbb{Q}$.

Se $p(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^m + \cdots$ indicaremos p(x) por 0 e o chamamos de polinômio identicamente nulo sobre K. Assim um polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \cdots$ sobre K é identicamente nulo $\Leftrightarrow$ $a_i = 0 \in K\ \forall\, i \in \mathbb{N}$.

Se $a \in K$ indicaremos por a ao polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \cdots$ onde $a_0 = a, e\ a_i = 0\ \forall\, i \geq 1.$

Chamamos ao polinômio $p(x) = a, a \in K$ de polinômio constante a.

Se $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$ é tal que $a_n \neq 0\ e\ a_j = 0\ \forall\, j > n$ dizemos que n é o grau do polinômio $p(x)$, e nesse caso indicamos $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, e o grau de $p(x)$ por $\partial p(x) = n$. Exemplos: $p(x) = 9x^3 - 5x + 2$ é um polinômio do 3º grau e $q(x) = (x^2 - 4)^2$ é um polinômio do 4º grau.

Observe que o grau do polinômio 0 não está definido, e ∂ pode ser interpretado como uma função do conjunto de todos os polinômios não nulos, no conjunto $\mathbb{N}$.

Assim

$\partial : k[x] - \{0\} \to \mathbb{N}$

$p(x) \rightsquigarrow \partial p(x) = grau\ de\ p(x)$

2.2. Operações com polinômios

Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \cdots$ e $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_rx^r + \cdots$ dois elementos do conjunto K[x].

2.2.1. Adição e subtração de polinômios

Definimos a adição[1] entre polinômios por:
$p(x) + q(x) = c_0 + c_1 + \cdots + c_tx^t + \cdots$ onde $c_i = (a_i + b_i) \in K$. Exemplo: Sejam os polinômios $p(x) = 2x^2 + 3$ e $q(x) = x^3 - 7x^2 + x - 8$, o polinômio $r(x) = p(x) + q(x) = (0 + 1)x^3 + (2 - 7)x^2 + (1 + 0)x + (3 - 8) = x^3 - 5x^2 + x - 5$

2.2.2. Multiplicação de polinômios

Definimos a multiplicação entre polinômios por:
$p(x).q(x) = c_0 + \cdots + c_hx^h + \cdots$ onde $c_0 = a_0b_0, c_1 = a_0b_1 + a_1b_0,\ c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \ldots, c_l = a_0b_l + a_1b_{l-1} + \cdots + a_{l-1}b_1 + a_lb_0, K\ \in \mathbb{N}$. Exemplo: Sejam os polinômios $p(x) = x^2 + 9$ e $q(x) = 5 - x$, o polinômio $r(x) = p(x) \cdot q(x) = 5x^2 - x^3 + 45 - 9x = -x^3 + 5x^2 - 9x + 45$ é o produto entre eles. É interessante notar que o grau de $p(x)$ é 2, o grau de $q(x)$ é 1 e o grau do produto é 3.

Perceba que a definição acima de produtos de polinômios provém das propriedades distributiva da multiplicação em relação a adição e subtração e da potenciação cujas potências possuem a mesma base, a saber, $x^m.x^n = x^{m+n}$, $x^m \div x^n = x^{m-n}$ e $(x^m)^n = x^{m.n}$ [2].

É de fácil verificação que (K[x],+,·) é um domínio de integridade, onde o polinômio 0 é o elemento neutro em K[x] e o polinômio constante 1 é a unidade K[x][3].

Observe que se identificarmos os elementos $a \in K$ com os polinômios constantes $p(x) = a$ podemos pensar em K[x] contendo o corpo K.

---

[1] O mesmo vale para a subtração, onde $c_i = (a_i - b_i) \in K$

[2] Potências de bases não nulas cujos expoentes são 0 ou 1 são representadas por $x^0 = 1\ e\ x^1 = x.$

[3] É de fácil verificação que K[x], +,· é um domínio de integridade, onde o polinômio 0 é o elemento neutro em K[x] e o polinômio constante 1 é a unidade K[x]. Um **domínio de integridade** é um anel comutativo com unidade. Esta unidade é o elemento neutro da multiplicação e para quaisquer dois elementos diferentes x e y do domínio de integridade, o produto entre eles será 0 quando x=0 ou y=0 (esta última afirmativa equivale a dizer que num domínio de integridade não existem divisores de 0. O conjunto dos números inteiros é um exemplo de domínio de integridade. O anel dos polinômios sobre um corpo K é um domínio de integridade.

Segue imediatamente das definições que a função grau ∂ possui as seguintes propriedades:

(i) $\partial\big(f(x)+g(x)\big) \leq \max\{\partial f(x),\ \partial g(x)\}$, quaisquer que sejam os polinômios não nulo $f(x), g(x) \in K[x]\ tais\ que\ f(x)+g(x) \neq 0$.

(ii) $\partial\big(f(x).g(x)\big) = \partial f(x) + \partial g(x)$ quaisquer que sejam os polinômios não nulos $f(x), g(x)\ \in K[x]$. Suponhamos que um polinômio $p(x) \neq 0$ possua um inverso multiplicativo em K[x]. Assim existe $q(x) \neq 0\ em\ K[x]\ tal\ que\ p(x).q(x) = 1$. Pela propriedade (ii) acima segue que $p(x) = a \neq 0$ é um polinômio constante. Portanto, os únicos polinômios invertíveis em K[x] são os polinômios não nulos.

Percebemos que a notação formal de polinômios aqui apresentada é bastante conveniente, porém esconde um pouco o significado preciso do que seja uma indeterminada “x”. De fato, os polinômios $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$ nada mais são do que n’uplas $(a_0, a_1, \dots, \dots, a_n, \dots)\ onde\ a_i \neq 0$ somente para um número finito de índices e com a canônica definição de igualdade entre n’uplas.

A operação de soma de polinômios corresponde a natural operação de soma de n’uplas através das suas coordenadas enquanto a operação de produto de polinômios corresponde a seguinte regra de multiplicação $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots).(b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots)$, onde $c_m = a_0b_m + a_1b_{m-1} + \cdots + a_{m-1}b_1 + a_mb_0, \forall\ K\ \in\ \mathbb{N}$.

Agora, Identificando:

$1 \leftrightarrow (1,0,0, \dots, 0, \dots)$ neste caso o termo independente de x é 1 e todos os outros coeficientes do polinômio são 0. Esta é anotação em n’uplas do polinômio constante $p(x) = 1$

$x \leftrightarrow (0,1,0, \dots, 0, \dots)$ neste caso $p(x) = 0 + 1x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots + 0x^n + \cdots$ e a escrita geral do polinômio em n’uplas é $a_0 + a_1 + \cdots + a_nx^n \leftrightarrow (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$

$2x^3 - x - 5 \leftrightarrow (-5, -1, 0, 2, 0, 0, \dots)$ ou seja, o polinômio pode ser escrito em n’uplas conforme mostrado entre parênteses.

Isso nos possibilita melhor entender a diferença entre funções polinomiais (em uma variável) sobre um corpo K[x] e polinômios em uma indeterminada sobre um corpo K[x].

Por uma função polinomial (em uma variável) sobre um corpo K entendemos uma função $f: K\ \to K$ onde existem $a_0, \dots, a_n\ \in K$ tais que $f(u) = a_0 + a_1u + \cdots +$

$a_n u^n, \forall\, u \in K.$

Exemplos: $f(u) = u + 4\ ou\ f(u) = (u+2)^2 = u^2 + 4u + 4$

Uma função polinomial f sobre um corpo K[x] é dita identicamente nula se $f(u) = 0\ \forall\, u \in K$.

Exemplo: $f(x) = 0$, ou seja, para qualquer valor do domínio “x” o resultado é 0. Pois a função é $f(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0$

Por exemplo, se $K = \mathbb{Z}_p, p$ número primo, sabemos que $u^p = u\ \forall\, u \in K$, ou seja a função polinomial $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ definida por $f(y) = y^p - y$ é a função identicamente nula sobre $\mathbb{Z}_p$. Mas é claro pela nossa definição de polinômios em uma indeterminada “x” que $p(x) = x^p - x$ não é o polinômio 0 sobre $\mathbb{Z}_p$.

Em termos de n'uplas esse polinômio seria $(0, -1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ onde 1 figura na $(p+1)$ésima coordenada. Assim dois polinômios distintos podem induzir a mesma função polinomial sobre um corpo K[x].

Se D é um domínio de integridade, então de modo inteiramente análogo à construção de K[x] onde K é um corpo, podemos construir o domínio de integridade D[x] de todos os polinômios na indeterminada “x” com coeficientes em D. Por exemplo:

a) $\mathbb{Z}$[x] é o conjunto de todos os polinômios com coeficientes inteiros $p(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$, onde $a_i \in \mathbb{Z}$.
b) O domínio k[x,y] dos polinômios em duas indeterminadas “x” e “y” com coeficientes em um corpo K. Para isso é bastante construir o domínio D[y] em uma indeterminada “y” onde D=K[x] é o domínio dos polinômios em uma indeterminada “x” com coeficientes em K[4].

De modo análogo podemos estender nossa construção para os domínios $k[x_1, \ldots, x_n]$ dos polinômios em n indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$, com coeficientes em um corpo K.

Os respectivos corpos de frações desses domínios serão indicados com parênteses em lugar de colchetes. Assim,

$$k(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : \begin{matrix} f(x), g(x) \in K[x] \\ g(x) \neq 0 \end{matrix} \right.$$

$$D(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : \begin{matrix} f(x), g(x) \in D[x] \\ g(x) \neq 0 \end{matrix} \right.$$

[4] Observe que pelas nossas considerações anteriores teremos que x.y=y.x em D[y] = K[x,y].

$$k(x_1,\dots,x_n)=\left\{\frac{f(x_1,\dots,x_n)}{g(x_1,\dots,x_n)}: \begin{array}{c} f(x_1,\dots,x_n), g(x_1,\dots,x_n)\in K[x_1,\dots,x_n] \\ g(x_1,\dots x_n)\neq 0\end{array}\right.$$

Note que alguns teoremas que são válidos para K[x], K corpo, como o algoritmo da divisão de Euclides, não são válidos em geral para os domínios D[x] onde D é um domínio de integridade. Os domínios K[x,y] e $\mathbb{Z}$[x] não são domínios de ideias principais[5]. O ideal gerado por "x" e "y" não é principal em K[x,y] e o ideal gerado por "2" e "x" não é principal em $\mathbb{Z}[x]$. $\mathbb{Z}[x]$ admite fatorização única como produto de certos polinômios que são os análogos dos números primos em $\mathbb{Z}$. Exemplo: $p(x)=(x+3)^2.(x^2-1)^3.(2-3x)^5$.

2.3. O Algoritmo da divisão

Seja K um corpo e K[x] o domínio dos polinômios sobre K na indeterminada x. Vamos agora provar um teorema que diz ser K[x] um domínio Euclidiano.

TEOREMA 1 (Algoritmo da divisão). Sejam $f(x), g(x)\in K[x]\ e\ g(x)\neq 0$. Então existem únicos $q(x), r(x)\ \in K[x]$ tais que:

$f(x)=q(x).g(x)+r(x)\ onde\ ou\ r(x)=0,\ \partial r(x)<\partial g(x)$.

Demonstração.

Seja $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_xx^n\ e\ g(x)=b_0+b_1x+\dots+b_mx^m\ (\partial g(x)=m)$

Existência:

Se $f(x)=0$ basta tomar $q(x)=r(x)=0$. Suponhamos $f(x)\neq 0$, assim o grau de $f=n$. Se $n<m$ basta tomar $q(x)=0\ e\ r(x)=f(x)$. Podemos assumir $n\geq m$.

Agora seja $f_1(x)$ o polinômio definido por: $f(x)=a_n{b_m}^{-1}x^{n-m}\cdot g(x)+f_1(x)$.

É fácil observarmos que $\partial f_1<\partial f$. Vamos demonstrar o teorema por indução sobre $\partial f=n$.

Se $n=0, n\geq m\ \Rightarrow m=0$ e, portanto, $f(x)=a_0\neq 0, g(x)=b_0\neq 0$ e teremos, $f(x)=a_0{b_0}^{-1}g(x)$ e basta tomar $q(x)=a_0{b_0}^{-1}\ e\ r(x)=0$.

Pela desigualdade $f_1(x)=f(x)-a_n{b_m}^{-1}x^{n-m}g(x)\ e\ \partial f_1(x)<\partial f(x)=n$ temos pela hipótese de indução que: $\exists\ q_1(x), r_1(x)$ tais que:

$$f_1(x)=q_1(x)\cdot g(x)+r_1(x)$$

[5] Ideal refere-se ao um subconjunto especifico de um anel comutativo que tem a propriedade do fechamento em relação a adição e a multiplicação. É uma generalização do conceito de múltiplos e números inteiros. Em outras palavras um subconjunto I de um anel A é um ideal quando para quaisquer elementos x e y de I a diferença ou produto pertence a I. O conjunto de todos os polinômios $p(x)$ com coeficientes reais cujo termo constante é 0 é um ideal. Um ideal principal é aquele que todos os seus elementos são múltiplos desse único número.

onde $r_1(x) = 0$ ou $\partial r_1(x) < \partial g(x)$. Daí segue a imediatamente que: $f(x) = \left(q_1(x) + a_n {b_m}^{-1} x^{n-m}\right) g(x) + r_1(x)$, e portanto tomando $q(x) = q_1(x) + a_n {b_m}^{-1} x^{n-m}\ e\ r_1(x) = r(x)$ provamos a existência dos polinômios $q(x)\ e\ r(x)$ tais que $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x), e\ r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < \partial g(x)$.

Agora vamos provar a unidade. Sejam $q_1(x), q_2(x), r_1(x)\ e\ r_2(x)$ tais que:

$f(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x) = q_2(x) \cdot g(x) + r_2(x)$ onde $r_i(x) = 0\ ou\ \partial r_i(x) < \partial g(x), i = 1{,}2$.

Daí segue: $\left(q_1(x) - q_2(x)\right) \cdot g(x) = r_2(x) - r_1(x)$.

Mas se $q_1(x) \neq q_2(x)$ o grau do polinômio do lado esquerdo da igualdade acima é maior ou igual $\partial g(x)$ enquanto que o grau $\partial(r_2(x) - r_1(x)) < \partial g(x)$ o que é uma contradição. Logo $q_1(x) = q_2(x)$ e daí segue $r_1(x) = f(x) - q_1(x) g(x) = f(x) - q_2(x) \cdot g(x) = r_2(x)$ como queríamos demonstrar. ■

2.4. Raízes de polinômios

Se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ é um polinômio não nulo em K[x] e $\alpha\ \in K$ é tal que $p(a) = a_0 + a_1 \alpha + \cdots + a_n \alpha^n = 0\ \in K$ dizemos que α é uma raiz de $p(x) em\ K$. A quantidade raízes em um corpo é limitada. Este limitante é o grau do polinômio sobre k[x].

a) o polinômio $x^2 + 1$ é um polinômio de grau 2 e não possui raízes em $\mathbb{R}$.

b) o polinômio $x^2 - 5x + 6$ possui duas raízes em $\mathbb{R}$ já que $p(2) = p(3) = 0$

PROPOSIÇÃO 1. Seja K um corpo e seja $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ um polinômio não nulo em K[x] de grau n.

Então, o número de raízes de $f(x) em\ K$ é no máximo igual a $\partial f(x) = n$.

Demonstração. Se $f(x)$ não possui raízes em K a proposição está provada.

Suponhamos que $\alpha \in K$ seja uma raiz de $f(x)$.

Como $g(x) = x - \alpha \in K[x]$ podemos usar o algoritmo da divisão. Assim $\exists\ q(x), r(x)\ \in K[x]$ tais que: $f(x) = q(x) \cdot (x - \alpha) + r(x)$ onde $r(x) = 0\ ou\ \partial r(x) < \partial g(x) = 1.$ Assim, $r(x) = b_0$ é um polinômio constante, e temos $f(x) = q(x)(x - \alpha) + b_0$ e como $f(\alpha) = 0$ segue que $0 = 0 + b_0$ ou seja $r(x) = 0\ e\ f(x) = q(x) \cdot (x - \alpha)$ onde $\partial q(x) = n - 1$.

Agora usar a indução sobre $\partial f = n$.

Se $n = 0,\ f$ não possui raízes em K[x]. Neste caso nada há a demonstrar.

Agora por indução, $\partial q(x) < \partial f(x) = n, q(x)$ possui no máximo $\partial q(x) = n - 1$ raízes em K e, portanto, $f(x)$ possui no máximo n raízes em K, como queríamos demonstrar.■

Esta proposição nos dá alguns corolários interessantes.

Seja K um corpo. Se $L \supset K$ é um corpo dizemos que L é uma extensão de K. Observe que o polinômio $x^2 + 1$ possui duas raízes em $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.

COROLÁRIO 1. Seja $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ um polinômio não nulo de grau n em K[x]. Então, $f(x)$ possui no máximo n raízes em qualquer extensão L de K.

Demonstração. Basta observar que se $f(x) \in K[x]$ e $K \subset L$ então $f(x) \in L[x]$ e agora é só usarmos a proposição anterior para o corpo L.■

Observe que o polinômio $x^3 - 2$ não possui raízes em $\mathbb{Q}$, possui apenas uma raiz em $\mathbb{R}$ e possui 3 raízes em $\mathbb{C}$. Assim, ao estendermos o corpo podemos conseguir mais raízes de um dado polinômio, porém esse número de raízes será sempre limitado pelo grau desse mesmo polinômio. Observe também que o fato de estarmos trabalhando com corpos é fundamental em relação ao resultado do corolário 1, para isso recorde que o polinômio $x^2 + 1$ possui infinitas raízes no anel de divisão dos Quatérnios enquanto o polinômio $x^2 + x$ possui 4 raízes no anel $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$.

Seja K um corpo e $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ um polinômio em K[x]. Se $u \in K$ denotamos por $f(u)$ a expressão $f(u) = a_0 + a_1u + \cdots + a_nu^n \in K$.

Sobre $\mathbb{Z}_p = K$ existem diferentes polinômios $f(x) = x^p - x\ e\ g(x) = 0$ tais que $f(b) = g(b) = 0\ \forall\ b\ \in K = \mathbb{Z}_p$. Isto não ocorre em corpos infinitos.

COROLÁRIO 2. Sejam $f(x)\ e\ g(x)\ \in K[x]$ onde K é um corpo com um número infinito de elementos.

Então, $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(b) = g(b)\ \forall\ b\ \in K$.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) trivial pela definição de igualdade de polinômios.

($\Leftarrow$) seja $h(x) = f(x) - g(x)\ \in K[x]$. Assim, por hipótese, temos, $h(b) = 0\ \forall\ b\ \in K,$ e como K é infinito segue imediatamente de Proposição 1 que $h(x) = 0$ ou seja $f(x) = g(x)$ como queríamos demonstrar.■

Em outras palavras o Corolário 2 acima nos diz que para corpos infinitos é válido o “princípio de identidade” para polinômios.

3 COMO OS POLINÔMIOS SÃO APRESENTADOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Este capítulo fará uma breve analise de como os polinômios são trabalhados com alunos do 8º ano do ensino fundamental. Para esta analise separamos três obras aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) muito conhecidas pelos professores da educação básica. As obras têm como código: 27408COL02, 0029P17022 e 0044P24010002020.

O conteúdo analisado na primeira obra está no capítulo 3, que possui 27 páginas e é intitulado por “Monômios e Polinômios”. Na segunda obra os polinômios também estão no capítulo 3, intitulado por “Cálculo Algébrico” e possui 31 páginas. Já na terceira obra o conteúdo se desenvolve ao longo dos capítulos 7 e 8, a saber, “Expressões Algébricas” e “Operações com Polinômios”, ambos com dez páginas cada.

Nos três livros o estudo da álgebra dos polinômios vem logo após os estudos dos números reais, com ênfase nos cálculos com números racionais e uma breve apresentação dos números irracionais. Estes capítulos precedem os estudos dos produtos notáveis.

É obvio que por serem obras aprovadas pelo PNLD, as três atendem às competências e habilidades que relacionam a introdução ao pensamento algébrico e o estudo dos polinômios, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[6].

> “A base estabelece conhecimentos, competências habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica. Orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas diretrizes curriculares nacionais da educação básica (...).” (Brasil, 2024, capa)

[6] A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essências que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da educação básica. Este documento deve nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino dos estados brasileiros assim como as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas da educação infantil ao ensino médio.

Procuraremos identificar nos três exemplares como os autores dinamizam as competências especificas de matemática para o ensino fundamental no recorte dos polinômios. Estas competências especificas podem ser resumidas em oito pontos básicos:

(1) Reconhecer a matemática como ciência humana, resultantes das dinâmicas das diferentes culturas ao longo do tempo e que procura resolver problemas cientificas e tecnológicos com impactos no mundo do trabalho.

(2) Desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de argumentar matematicamente a fim de compreender e atuar no mundo.

(3) Compreender as relações entre aritmética, álgebra, geometria, estatística, probabilidade e suas relações com outros áreas do conhecimento.

(4) Fazer observações e interpretar sistemáticas de aspectos qualitativos e quantitativos presentes nas práticas sociais e culturais.

(5) Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

(6) Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

(7) Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

(8) Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar.

3.1. 3.1. A álgebra como unidade temática na BNCC

A BNCC conta com cinco unidade temáticas que se relacionam entre si e orientam o conjunto de habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos durante os anos de escolaridade da educação básica. Estas unidades podem ser desenvolvidas de maneiras diferentes ao longo do tempo, respeitando os aspectos cognitivos das crianças e dos adolescentes.

A unidade que envolve a álgebra tem como finalidade desenvolver o pensamento algébrico. Compreender, dominar e utilizar corretamente o pensamento algébrico é essencial para dialogar com modelos matemáticos, representar e analisar relações quantitativas de grandezas e saber como lidar logicamente como aspectos do estruturalismo da matemática.

Para atingir um grau de abstração esperado para o 8º ano do ensino fundamental é importante que os alunos consigam identificar regularidades de padrões e sequencias numéricas e não numéricas, escrever suas leis de formação, compreender as relações entre as grandezas presentes, assim como criar e interpretar gráficos e representações simbólicas. Espera-se que o aluno do ensino fundamental ao entrar em contatos com a álgebra resolva problemas por meio de equações, inequações e sistemas de equações compreendendo os seus algoritmos de resoluções.

> “As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalências, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações.” (Brasil, 2024, p. 270)

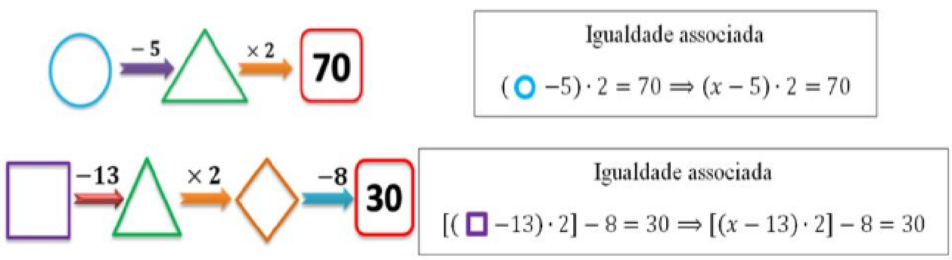
Relacionar o estudo da álgebra com o estudo de números é o primeiro passo para o estudo das funções no ensino médio. Compreender que o sinal de igual não é apenas a indicação que antecede o resultado de números operados, mas que também representa equivalência é um dos objetivos a serem alcançados pelos alunos, mas desafiador para o professor. Por exemplo, em $f: R \rightarrow R\ tal\ que\ f(x) = x^2$ o sinal de igual estabelece que o número real x foi transformado no número real x^2, pelo operador $f(x)$, isto é o sinal de igual é interpretado como identidade.

A compreensão dos diferentes significados das variáveis em uma expressão algébrica a fim de estabelecer conexão entre variável e função, assim como incógnita e equação, também é um desafio para o aluno e também para o professor.

Exemplo 1: Na imagem a seguir, retirada do artigo “Introdução a Resolução de equações do 1º grau: atividades a partir de circuitos aritméticos e das propriedades operatórias em $\mathbb{Q}$”, o sinal de igual indica que as expressões em ambos os membros da equação têm o mesmo valor. Ele funciona como um eixo de simetria que procura manter o equilíbrio entre os membros da equação.

Figura1: O sinal de igual como equivalência.

Figura 6 – Equações associadas aos circuitos.



Fonte: Os autores (2020).

Fonte: (Martins, D. e Gomes, R. 2020)

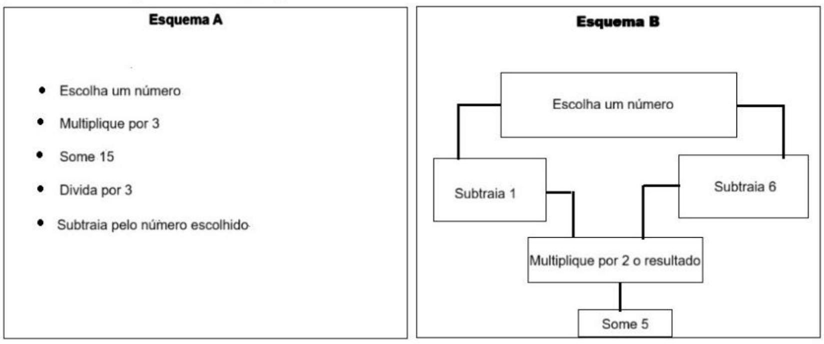
A álgebra combinada com outras áreas do conhecimento matemático contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos. O pensamento computacional é uma habilidade de resolução de problemas que usa conceitos da ciência da computação de forma sistemática para formular e resolver desafios de maneira eficiente. Ele não se limita ao uso de computadores e se baseia em quatro pilares principais: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e criação de algoritmos.

A linguagem algorítmica presente no pensamento computacional se relaciona intimamente com a linguagem algébrica, principalmente em relação ao conceito de variável e a identificação de padrões com o objetivo de estabelecer generalizações e descrever propriedades.

Exemplo 2:

Figura 2: Questão adaptada do Exame Nacional Francês, Brévet 2025.

Considere os dois esquemas de cálculo a seguir:



1) Note que, quando o valor escolhido é 4, o resultado obtido com o Programa A é 5.

$4 \cdot 3 = 12 \rightarrow 12 + 15 = 27 \rightarrow 27 \div 3 = 9 \rightarrow 9 - 4 = 5$

2) Note que, quando o valor escolhido é -2, o resultado obtido com o Programa A é 5.

$(-2) \cdot 3 = -6 \rightarrow -6 + 15 = 9 \rightarrow 9 \div 3 = 3 \rightarrow 3 - (-2) = 5$

3) Justifique que a seguinte afirmação é verdadeira: "O Programa A sempre produz o mesmo resultado".

$(x) \cdot 3 = 3x \rightarrow 3x + 15 = (3x + 15) \rightarrow (3x + 15) \div 3 = x + 5 \rightarrow x + 5 - x = 5$

4) Quando o número escolhido é 10, qual resultado obtemos com o Programa B?

$1^{a}\ opção: 10 - 1 = 9 \rightarrow 9 \cdot 2 = 18 \rightarrow 18 + 5 = 23$

$2^{a}\ opção: 10 - 6 = 4 \rightarrow 4 \cdot 2 = 8 \rightarrow 8 + 5 = 13$

5) Existem exatamente dois números para os quais os programas A e B sempre fornecem resultados idênticos. Quais são esses dois números?

1ª opção: $x - 1 = x - 1 \rightarrow (x - 1) \cdot 2 = 2x - 2 \rightarrow 2x - 2 + 5 = 2x + 3 \rightarrow 2x + 3 = 5 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

2ª opção: $x - 6 = x - 6 \rightarrow (x - 6) \cdot 2 = 2x - 12 \rightarrow 2x - 12 + 5 = 2x - 7 \rightarrow 2x - 7 = 5 \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$

$x_i = 1\ e\ x_{ii} = 6$

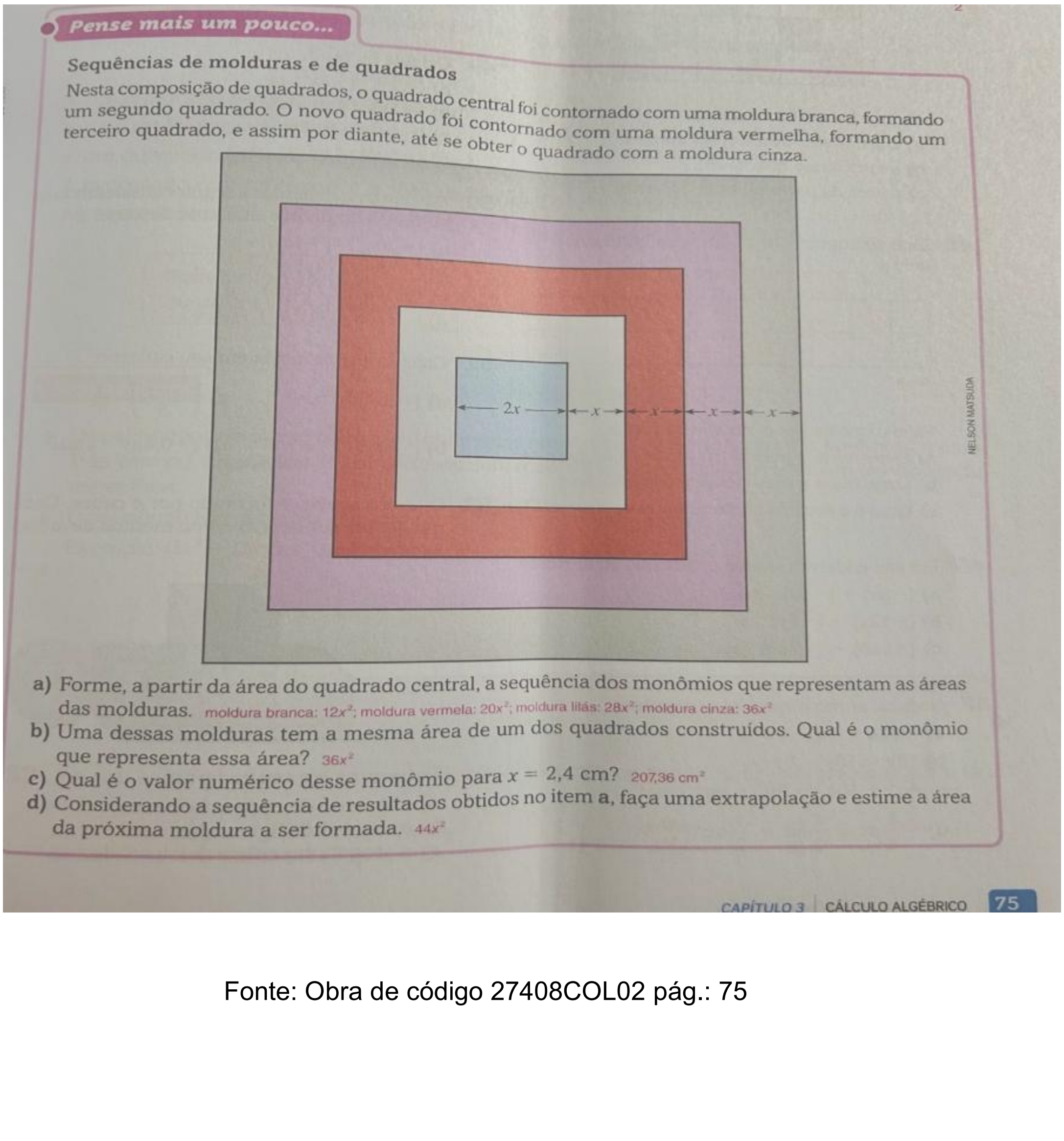
Autor: Adaptada pelo autor.

3.2. Comentários sobre os livros didáticos

3.2.1. O livro 27408CLO02.

O capítulo de polinômios no livro cujo código é 27408CLO02 está desenvolvido no capítulo três com o nome de cálculo algébrico. O primeiro item se preocupa em distinguir incógnita de variável apresentando dois problemas da vida diária. O item dois apresenta as expressões algébricas onde informa que uma expressão é aquela que tem apenas letras ou números e letras e a seguir os exemplos ligados a geometria e a língua materna.

Figura 3: Representação no campo geométrico



Pense mais um pouco...

Sequências de molduras e de quadrados

Nesta composição de quadrados, o quadrado central foi contornado com uma moldura branca, formando um segundo quadrado. O novo quadrado foi contornado com uma moldura vermelha, formando um terceiro quadrado, e assim por diante, até se obter o quadrado com a moldura cinza.

a) Forme, a partir da área do quadrado central, a sequência dos monômios que representam as áreas das molduras. moldura branca: $12x^2$; moldura vermela: $20x^2$; moldura lilás: $28x^2$; moldura cinza: $36x^2$

b) Uma dessas molduras tem a mesma área de um dos quadrados construídos. Qual é o monômio que representa essa área? $36x^2$

c) Qual é o valor numérico desse monômio para $x = 2{,}4$ cm? 207,36 cm^2

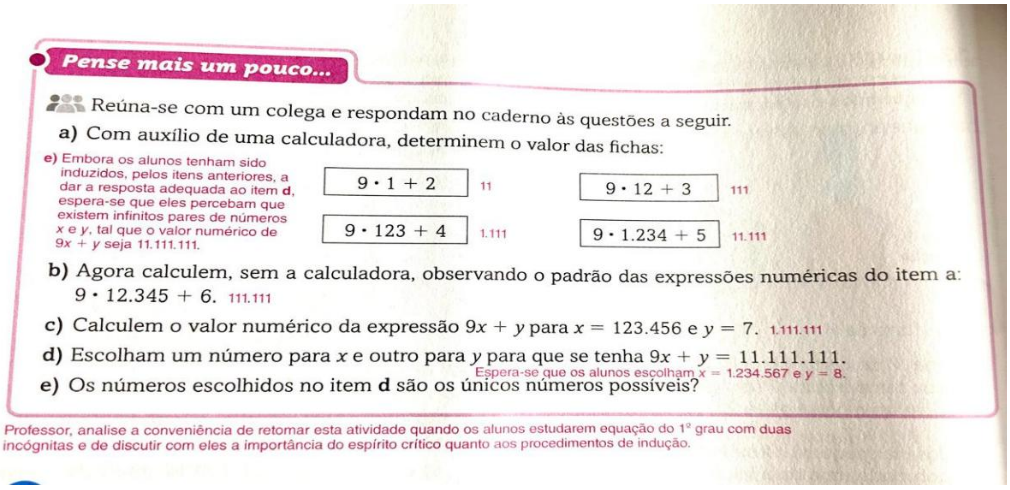
d) Considerando a sequência de resultados obtidos no item **a**, faça uma extrapolação e estime a área da próxima moldura a ser formada. $44x^2$

CAPÍTULO 3 | CÁLCULO ALGÉBRICO 75

Fonte: Obra de código 27408COL02 pág.: 75

O próximo tópico aborda valor numérico de uma expressão algébrica e alguns cálculos envolvendo os números racionais e inteiros são exemplificados. Uma sequência de exercícios envolvendo os dois conteúdos apresentados seguem nas três páginas seguintes, como destaque para a sessão “Pense mais um pouco”.

Figura 4: O cálculo numérico



Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega e respondam no caderno às questões a seguir.

a) Com auxílio de uma calculadora, determinem o valor das fichas:

e) Embora os alunos tenham sido induzidos, pelos itens anteriores, a dar a resposta adequada ao item **d**, espera-se que eles percebam que existem infinitos pares de números x e y, tal que o valor numérico de $9x + y$ seja 11.111.111.

$\boxed{9 \cdot 1 + 2}$ 11 $\boxed{9 \cdot 12 + 3}$ 111

$\boxed{9 \cdot 123 + 4}$ 1.111 $\boxed{9 \cdot 1.234 + 5}$ 11.111

b) Agora calculem, sem a calculadora, observando o padrão das expressões numéricas do item a: $9 \cdot 12.345 + 6$. 111.111

c) Calculem o valor numérico da expressão $9x + y$ para $x = 123.456$ e $y = 7$. 1.111.111

d) Escolham um número para x e outro para y para que se tenha $9x + y = 11.111.111$.
Espera-se que os alunos escolham $x = 1.234.567$ e $y = 8$.

e) Os números escolhidos no item **d** são os únicos números possíveis?

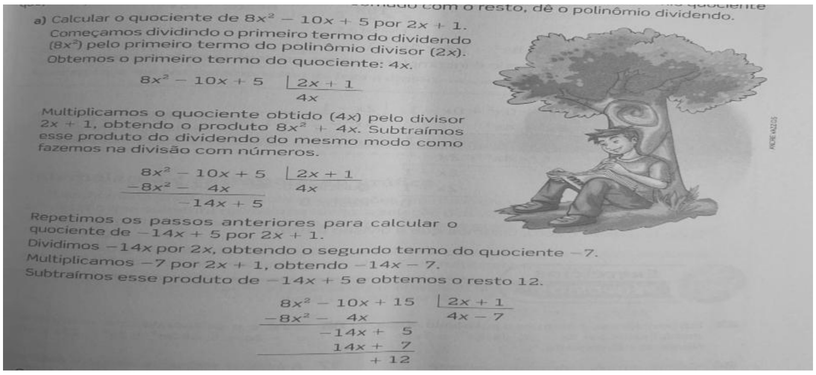
Professor, analise a conveniência de retomar esta atividade quando os alunos estudarem equação do 1º grau com duas incógnitas e de discutir com eles a importância do espírito crítico quanto aos procedimentos de indução.

Fonte: Obra de código 27408COL02 pág.: 68

Em seguida o autor se preocupando em definir monômios com muitos exemplos, exemplos ligados a geometria e opera como monômios de maneira abstrata e também lançando mão de figuras geométricas. Lança mão das definições de operações com monômios. Os exercícios são relativamente simples, não há dificuldades em operar com termos com a parte numérica e mais um destaque para a sessão pense um pouco mais, onde o aluno pode resolver problemas parecidos com aqueles apresentados pela as Olimpíadas Brasileiras de Matemática.

Os polinômios são apresentados de maneira tradicional. É seguido de exemplos e operações com ênfase na adição e na subtração. A multiplicação de polinômios é feita com base na propriedade distributiva, sem muita justificativas e a divisão é feita também de maneira tradicional e clássica, terminando o capítulo com o método da chave para a divisão de polinômios.

Figura 5: Divisão de polinômios



com o resto, dê o polinômio dividendo.

a) Calcular o quociente de $8x^2 - 10x + 5$ por $2x + 1$.
Começamos dividindo o primeiro termo do dividendo ($8x^2$) pelo primeiro termo do polinômio divisor ($2x$).
Obtemos o primeiro termo do quociente: $4x$.

$$\begin{array}{l|l} 8x^2 - 10x + 5 & 2x + 1 \\ \hline & 4x \end{array}$$

Multiplicamos o quociente obtido ($4x$) pelo divisor $2x + 1$, obtendo o produto $8x^2 + 4x$. Subtraímos esse produto do dividendo do mesmo modo como fazemos na divisão com números.

$$\begin{array}{l|l} 8x^2 - 10x + 5 & 2x + 1 \\ \underline{-8x^2 - 4x} & 4x \\ \quad -14x + 5 & \end{array}$$

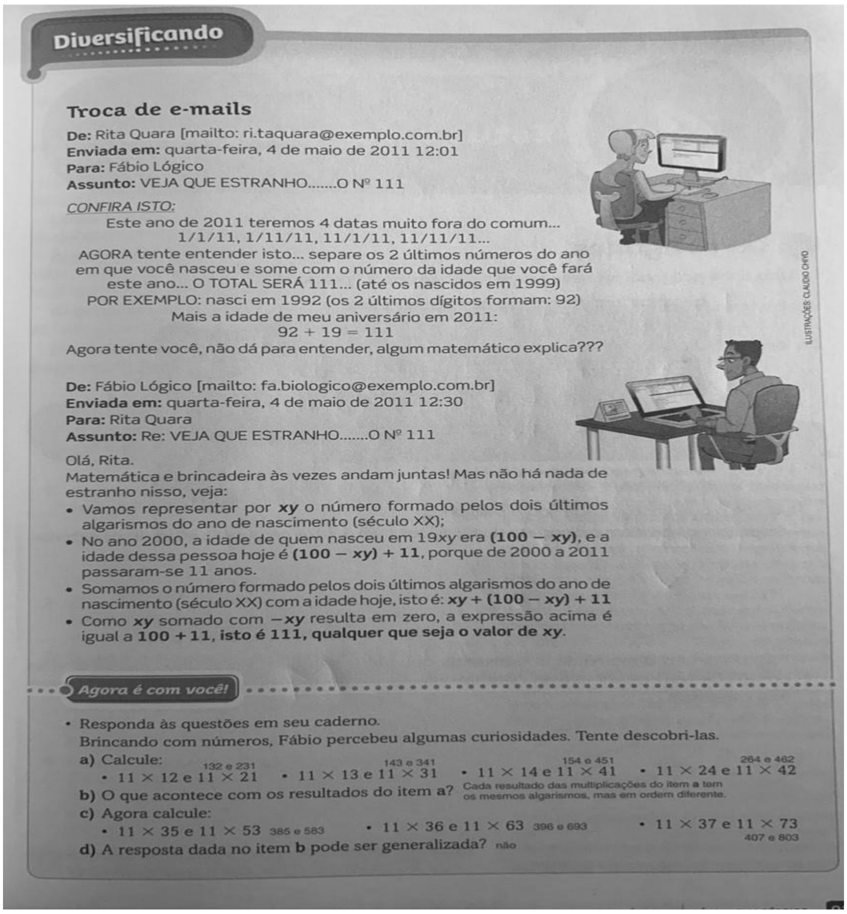
Repetimos os passos anteriores para calcular o quociente de $-14x + 5$ por $2x + 1$.
Dividimos $-14x$ por $2x$, obtendo o segundo termo do quociente -7.
Multiplicamos -7 por $2x + 1$, obtendo $-14x - 7$.
Subtraímos esse produto de $-14x + 5$ e obtemos o resto 12.

$$\begin{array}{l|l} 8x^2 - 10x + 15 & 2x + 1 \\ \underline{-8x^2 - 4x} & 4x - 7 \\ \quad -14x + 5 & \\ \quad \underline{\;\;14x + 7} & \\ \qquad\quad +12 & \end{array}$$

Fonte: Obra de código 27408COL02 pág.: 86

A novidade desta coleção é a Sessão “Diversificando” onde a temática é abordada de maneira não tradicional, semelhante a questões contidas em desafios e Olimpíadas de Matemática.

Figura 6: Situação problema com polinômios



Diversificando

Troca de e-mails

De: Rita Quara [mailto: ri.taquara@exemplo.com.br]
Enviada em: quarta-feira, 4 de maio de 2011 12:01
Para: Fábio Lógico
Assunto: VEJA QUE ESTRANHO.......O Nº 111

CONFIRA ISTO:
Este ano de 2011 teremos 4 datas muito fora do comum...
1/1/11, 1/11/11, 11/1/11, 11/11/11...
AGORA tente entender isto... separe os 2 últimos números do ano em que você nasceu e some com o número da idade que você fará este ano... O TOTAL SERÁ 111... (até os nascidos em 1999)
POR EXEMPLO: nasci em 1992 (os 2 últimos dígitos formam: 92)
Mais a idade de meu aniversário em 2011:
92 + 19 = 111
Agora tente você, não dá para entender, algum matemático explica???

De: Fábio Lógico [mailto: fa.biologico@exemplo.com.br]
Enviada em: quarta-feira, 4 de maio de 2011 12:30
Para: Rita Quara
Assunto: Re: VEJA QUE ESTRANHO.......O Nº 111

Olá, Rita.
Matemática e brincadeira às vezes andam juntas! Mas não há nada de estranho nisso, veja:
- Vamos representar por ***xy*** o número formado pelos dois últimos algarismos do ano de nascimento (século XX);
- No ano 2000, a idade de quem nasceu em 19*xy* era **(100 − *xy*)**, e a idade dessa pessoa hoje é **(100 − *xy*) + 11**, porque de 2000 a 2011 passaram-se 11 anos.
- Somamos o número formado pelos dois últimos algarismos do ano de nascimento (século XX) com a idade hoje, isto é: ***xy* + (100 − *xy*) + 11**
- Como ***xy*** somado com **−*xy*** resulta em zero, a expressão acima é igual a **100 + 11, isto é 111, qualquer que seja o valor de *xy***.

Agora é com você!

- Responda às questões em seu caderno.
Brincando com números, Fábio percebeu algumas curiosidades. Tente descobri-las.

a) Calcule:
- 11 × 12 e 11 × 21 (132 e 231)
- 11 × 13 e 11 × 31 (143 e 341)
- 11 × 14 e 11 × 41 (154 e 451)
- 11 × 24 e 11 × 42 (264 e 462)

b) O que acontece com os resultados do item a? Cada resultado das multiplicações do item a tem os mesmos algarismos, mas em ordem diferente.

c) Agora calcule:
- 11 × 35 e 11 × 53 385 e 583
- 11 × 36 e 11 × 63 396 e 693
- 11 × 37 e 11 × 73 407 e 803

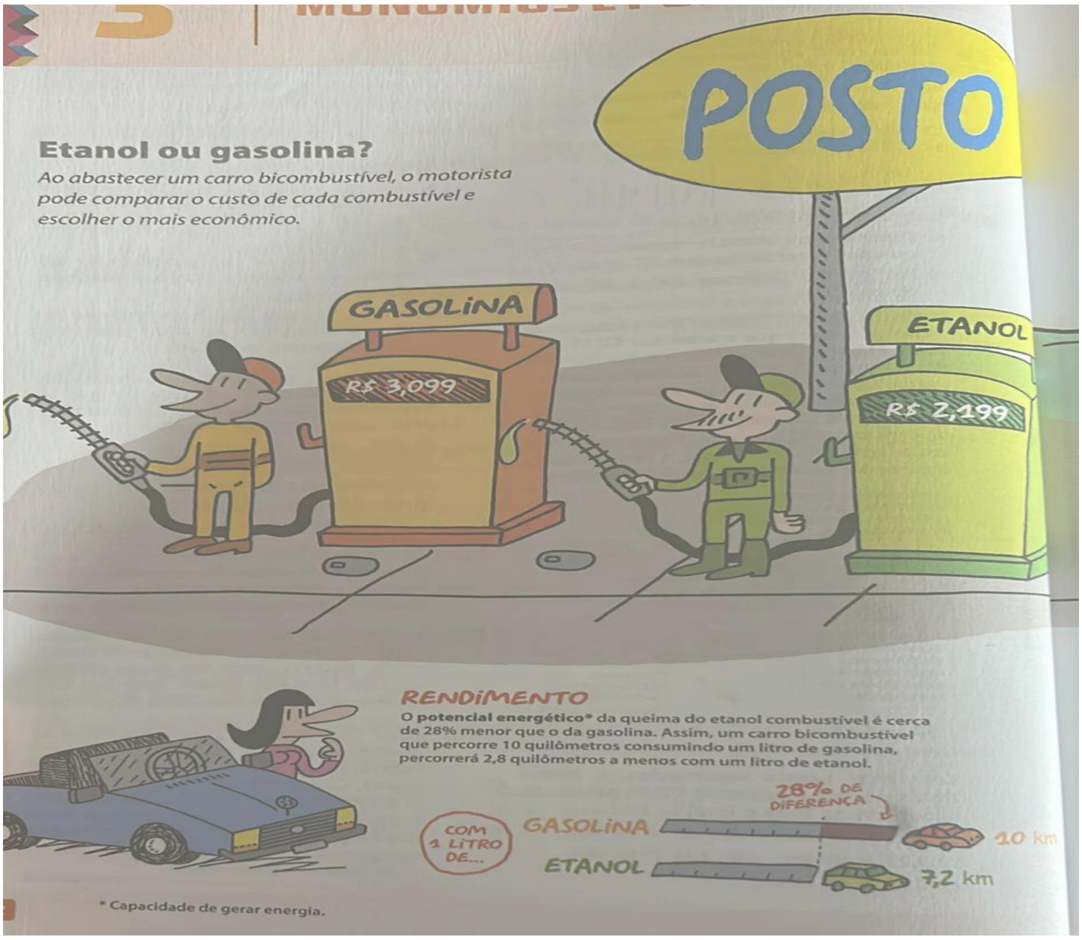
d) A resposta dada no item **b** pode ser generalizada? não

Fonte: Obra de código 27408COL02 pág.: 92

3.2.2. O Livro 0029P17022.

Os monômios e os polinômios são apresentados no capítulo três do livro, a partir de problemas do dia-a-dia onde termos desconhecidos estão presentes em diversas situações. O uso de letras na resolução de diversos problemas de matemática, inaugura um novo segmento conhecido por álgebra que é apresentado pelo autor, em seguida apresenta expressões algébricas que traduzem outros problemas do cotidiano dos alunos e problemas de geometria, partindo então para o cálculo do valor numérico.

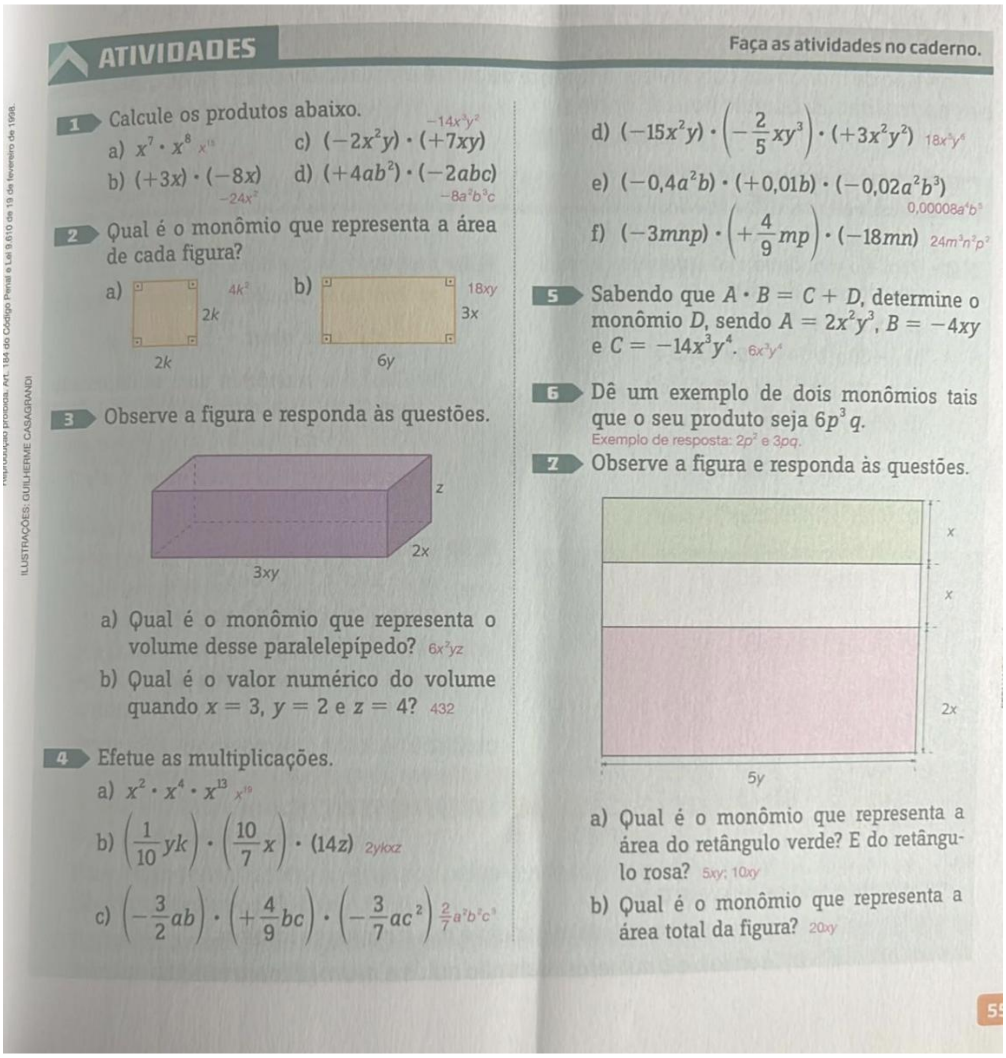
Figura 7: Situação problema envolvendo polinômios



Fonte: Obra de código 0029P17022 pág.: 54

No cálculo do valor numérico o autor explora cálculos numéricos com números inteiros e fracionários simples, sem abordagem de cálculos com números decimais. Destaca coeficiente e a parte literal, o grau do monômio, define monômios semelhantes e parte para as operações de adição e subtração com monômios. Nestas sessões há diversos exemplos, inúmeros exercícios e uma proposta interessante, associando o Tangram a monômios. Esta proposta reforça as operações de adição e subtração.

Figura 8: Exercícios envolvendo as operações com polinômios



ATIVIDADES Faça as atividades no caderno.

1 Calcule os produtos abaixo.

a) $x^7 \cdot x^8$ x^{15}

b) $(+3x) \cdot (-8x)$ $-24x^2$

c) $(-2x^2y) \cdot (+7xy)$ $-14x^3y^2$

d) $(+4ab^2) \cdot (-2abc)$ $-8a^2b^3c$

d) $(-15x^2y) \cdot \left(-\frac{2}{5}xy^3\right) \cdot (+3x^2y^2)$ $18x^5y^6$

e) $(-0{,}4a^2b) \cdot (+0{,}01b) \cdot (-0{,}02a^2b^3)$ $0{,}00008a^4b^5$

f) $(-3mnp) \cdot \left(+\frac{4}{9}mp\right) \cdot (-18mn)$ $24m^3n^2p^2$

2 Qual é o monômio que representa a área de cada figura?

a) $2k$, $2k$ $4k^2$

b) $3x$, $6y$ $18xy$

3 Observe a figura e responda às questões.

z, $2x$, $3xy$

a) Qual é o monômio que representa o volume desse paralelepípedo? $6x^2yz$

b) Qual é o valor numérico do volume quando $x = 3$, $y = 2$ e $z = 4$? 432

4 Efetue as multiplicações.

a) $x^2 \cdot x^4 \cdot x^{13}$ x^{19}

b) $\left(\frac{1}{10}yk\right) \cdot \left(\frac{10}{7}x\right) \cdot (14z)$ $2ykxz$

c) $\left(-\frac{3}{2}ab\right) \cdot \left(+\frac{4}{9}bc\right) \cdot \left(-\frac{3}{7}ac^2\right)$ $\frac{2}{7}a^2b^2c^3$

5 Sabendo que $A \cdot B = C + D$, determine o monômio D, sendo $A = 2x^2y^3$, $B = -4xy$ e $C = -14x^3y^4$. $6x^3y^4$

6 Dê um exemplo de dois monômios tais que o seu produto seja $6p^3q$.
Exemplo de resposta: $2p^2$ e $3pq$.

7 Observe a figura e responda às questões.

x, x, $2x$, $5y$

a) Qual é o monômio que representa a área do retângulo verde? E do retângulo rosa? $5xy$; $10xy$

b) Qual é o monômio que representa a área total da figura? $20xy$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI

Fonte: Obra de código 0029P17022 pág. 59

A multiplicação dos monômios é feita com base nas propriedades da potenciação destacando a necessidade de multiplicar os coeficientes e depois multiplicar a parte literal. Alguns exemplos e exercícios estão associados ao cálculo de áreas de retângulos e volumes de paralelepípedos retos retângulos.

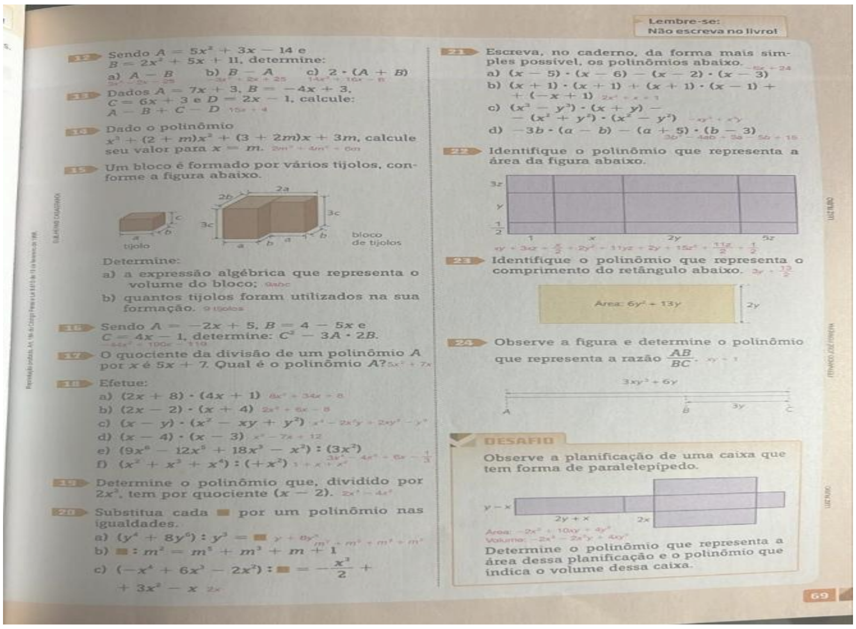
A potenciação e a divisão de monômios vêm como aplicações das regras da potenciação, são exercícios repetitivos e de memorização, e de exploração do algoritmo.

A definição de polinômios aparece como a adição de monômios definindo também o polinômio nulo e em seguida o grau de um polinômio. Os exercícios são tradicionais para determinação de grau do polinômio, identificação das variáveis, redução de termos semelhantes e pequenas aplicações a perímetros e áreas de figuras planas.

A adição de polinômios é feita adicionando termo a termo semelhante, monômio a monômio semelhante, assim como a subtração. Não é falado sobre polinômio simétrico, o resultado da operação A menos B, onde A e B são polinômios na variável x não é visto como o polinômio A acrescido do polinômio simétrico ao polinômio B.

A multiplicação entre polinômios é explorada a partir da propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição e os exercícios são tradicionais, onde há valorização do cálculo algébrico.

Figura 9: Multiplicação de polinômios explorando outros campos



Lembre-se:
Não escreva no livro!

12 Sendo $A = 5x^2 + 3x - 14$ e $B = 2x^2 + 5x + 11$, determine:
a) $A - B$ b) $B - A$ c) $2 \cdot (A + B)$

13 Dados $A = 7x + 3$, $B = -4x + 3$, $C = 6x + 3$ e $D = 2x - 1$, calcule: $A - B + C - D$

14 Dado o polinômio $x^3 + (2 + m)x^2 + (3 + 2m)x + 3m$, calcule seu valor para $x = m$.

15 Um bloco é formado por vários tijolos, conforme a figura abaixo.

Determine:
a) a expressão algébrica que representa o volume do bloco;
b) quantos tijolos foram utilizados na sua formação.

16 Sendo $A = -2x + 5$, $B = 4 - 5x$ e $C = 4x - 1$, determine: $C^2 - 3A \cdot 2B$.

17 O quociente da divisão de um polinômio A por x é $5x + 7$. Qual é o polinômio A?

18 Efetue:
a) $(2x + 8) \cdot (4x + 1)$
b) $(2x - 2) \cdot (x + 4)$
c) $(x - y) \cdot (x^2 - xy + y^2)$
d) $(x - 4) \cdot (x - 3)$
e) $(9x^6 - 12x^5 + 18x^3 - x^2) : (3x^2)$
f) $(x^2 + x^3 + x^4) : (+x^2)$

19 Determine o polinômio que, dividido por $2x^3$, tem por quociente $(x - 2)$.

20 Substitua cada ■ por um polinômio nas igualdades.
a) $(y^4 + 8y^6) : y^3 = ■$
b) $■ : m^2 = m^5 + m^3 + m + 1$
c) $(-x^4 + 6x^3 - 2x^2) : ■ = -\frac{x^3}{2} + 3x^2 - x$

21 Escreva, no caderno, da forma mais simples possível, os polinômios abaixo.
a) $(x - 5) \cdot (x - 6) - (x - 2) \cdot (x - 3)$
b) $(x + 1) \cdot (x + 1) + (x + 1) \cdot (x - 1) + (-x + 1)$
c) $(x^3 - y^3) \cdot (x + y) - (x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2)$
d) $-3b \cdot (a - b) - (a + 5) \cdot (b - 3)$

22 Identifique o polinômio que representa a área da figura abaixo.

23 Identifique o polinômio que representa o comprimento do retângulo abaixo.

24 Observe a figura e determine o polinômio que representa a razão $\frac{AB}{BC}$.

DESAFIO

Observe a planificação de uma caixa que tem forma de paralelepípedo.

Determine o polinômio que representa a área dessa planificação e o polinômio que indica o volume dessa caixa.

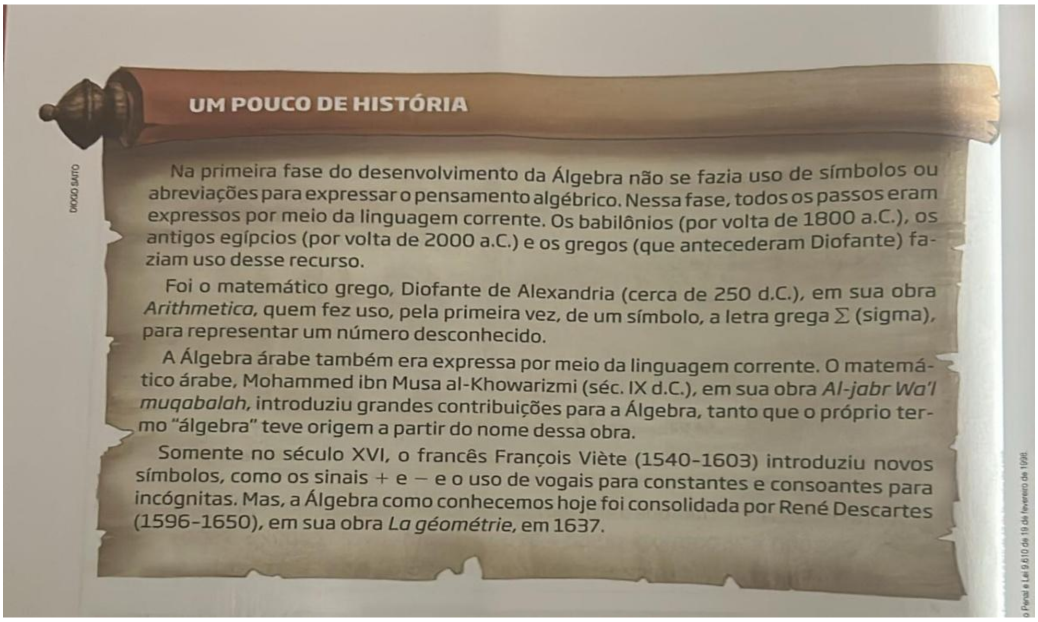
69

Fonte: Obra de código 0029P17022 pág.: 69

No item de divisão de polinômios só é evidenciado divisão de polinômio por monômio e mais uma vez há uma valorização das propriedades das potencias de mesma base. O capítulo se encerra com uma bateria de exercícios onde a memorização e a prática do algebrismo, em forma de algoritmo, é explorada sem muita criatividade.

A novidade deste material, percebida ao fazer esta breve análise qualitativa, é que ela traz uma sessão contendo um pouco de História da Matemática, porém não faz nenhuma atividade a partir do texto apresentado. Não há indicações para um trabalho complementar com base em metodologias ativas e nem mesmo explora o que o recorte do texto trazido tem de interessante para a sala de aula.

Figura 10: Abordagem da História da Matemática



UM POUCO DE HISTÓRIA

Na primeira fase do desenvolvimento da Álgebra não se fazia uso de símbolos ou abreviações para expressar o pensamento algébrico. Nessa fase, todos os passos eram expressos por meio da linguagem corrente. Os babilônios (por volta de 1800 a.C.), os antigos egípcios (por volta de 2000 a.C.) e os gregos (que antecederam Diofante) faziam uso desse recurso.

Foi o matemático grego, Diofante de Alexandria (cerca de 250 d.C.), em sua obra *Arithmetica*, quem fez uso, pela primeira vez, de um símbolo, a letra grega Σ (sigma), para representar um número desconhecido.

A Álgebra árabe também era expressa por meio da linguagem corrente. O matemático árabe, Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi (séc. IX d.C.), em sua obra *Al-jabr Wa'l muqabalah*, introduziu grandes contribuições para a Álgebra, tanto que o próprio termo "álgebra" teve origem a partir do nome dessa obra.

Somente no século XVI, o francês François Viète (1540-1603) introduziu novos símbolos, como os sinais + e − e o uso de vogais para constantes e consoantes para incógnitas. Mas, a Álgebra como conhecemos hoje foi consolidada por René Descartes (1596-1650), em sua obra *La géométrie*, em 1637.

Fonte: Obra de código 0029P17022 pág.: 96

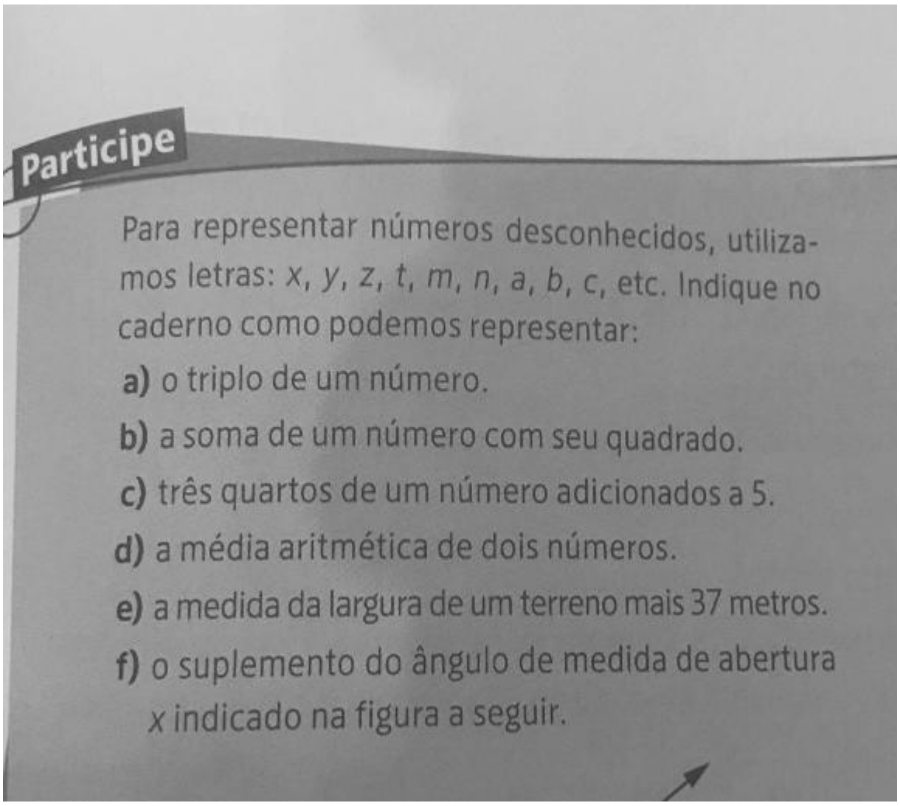
Observemos que as principais críticas à abordagem da História da Matemática dos livros didáticos da educação básica, como apresentação de um conjunto de fatos isolados e descontextualizados, com pouca ou nenhuma relação com o conteúdo matemático ensinado, aparecem neste pequeno recorte. A ausência da perspectiva crítica sobre o desenvolvimento da álgebra contribui para mostrar uma matemática como pronta e estática, em vez de um campo de conhecimento que está em constante transformação.

3.2.3. O livro 0044P24010002020

Os capítulos que abordam o conteúdo de polinômios do referido livro no subtítulo são o 7 e o 8 denominado como expressões algébricas e operações com polinômios.

O capítulo 7 começa com a definição de expressões algébricas e explica que uma expressão algébrica é composta por números e letras ou letras e se preocupa em identificar o que é coeficiente e o que é variável, após essa apresentação ele classifica cada expressão de acordo com a quantidade de termos em monômios, binômios, trinômios e polinômios. O livro define termos semelhantes e termos independentes, enfatizando que os semelhantes possuem a mesma parte literal. Esta definição é acompanhada de exemplos variados em dois campos distintos: o algébrico e o geométrico. Após essa apresentação é listada na página seguinte exercícios correspondentes à definição.

Figura 11: Modelo de expressões algébricas em forma de exercícios


Participe

Para representar números desconhecidos, utilizamos letras: x, y, z, t, m, n, a, b, c, etc. Indique no caderno como podemos representar:

a) o triplo de um número.

b) a soma de um número com seu quadrado.

c) três quartos de um número adicionados a 5.

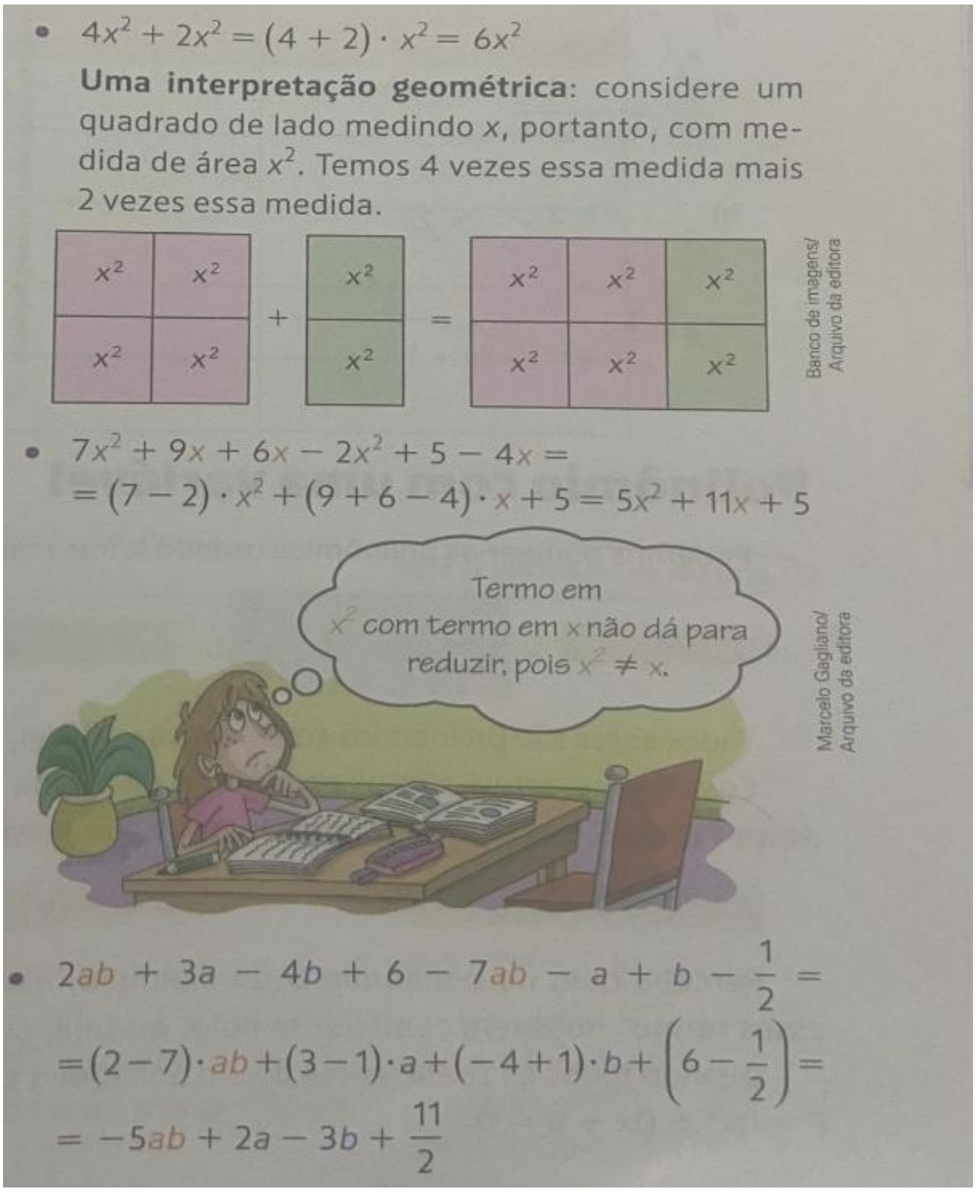
d) a média aritmética de dois números.

e) a medida da largura de um terreno mais 37 metros.

f) o suplemento do ângulo de medida de abertura x indicado na figura a seguir.

Fonte: Obra de código 0044P24010002020 pág.: 89

Figura 12: Apresentação dos termos



- $4x^2 + 2x^2 = (4 + 2) \cdot x^2 = 6x^2$

Uma interpretação geométrica: considere um quadrado de lado medindo x, portanto, com medida de área x^2. Temos 4 vezes essa medida mais 2 vezes essa medida.

- $7x^2 + 9x + 6x - 2x^2 + 5 - 4x =$

$= (7 - 2) \cdot x^2 + (9 + 6 - 4) \cdot x + 5 = 5x^2 + 11x + 5$

- $2ab + 3a - 4b + 6 - 7ab - a + b - \frac{1}{2} =$

$= (2-7) \cdot ab + (3-1) \cdot a + (-4+1) \cdot b + \left(6 - \frac{1}{2}\right) =$

$= -5ab + 2a - 3b + \frac{11}{2}$

Fonte: Obra de código 0044P24010002020 pág.: 97

No próximo tópico ele representa o polinômio “expressões algébricas” por uma letra maiúscula, onde é igualada a expressão. Apresenta o polinômio nulo e do grau de cada polinômio. Exemplos com a representação algébrica e por meio de tabela.

Figura 13: Apresentação do grau do monômio e polinômio.

Polinômio	Termo com maior expoente de x	Grau
$A = -53x^0$	$-53x^0$	0
$B = 4x + 3$	$4x$	1
$C = 6x^2 - x + \frac{1}{2}$	$6x^2$	2
$D = x^3 + 2x^2 + 3x - 4$	x^3	3
$E = -3x^4 + 4x + 1$	$-3x^4$	4

Fonte: Obra de código 0044P24010002020 pág.: 99

Já no capítulo 8 conforme o título, trata-se das operações realizadas com os polinômios. No primeiro tópico ele apresenta a adição de polinômio na forma algébrica comum e também traz na forma de conta convencional, onde tem a 1º parcela, 2º parcela e a soma ou total. Próximo item é a subtração de polinômios que o livro trata do mesmo jeito, com a representação algébrica e com a conta convencional e seus algoritmo minuendo, subtraendo e diferença.

Figura 14: Apresentação da adição de polinômios

Se o Edifício C tiver n apartamentos por andar, quantos apartamentos serão construídos nos dois prédios?

No Edifício C serão $(9 \cdot n)$ apartamentos nos andares, mais o do piso térreo; portanto, $(9n + 1)$ apartamentos. O Edifício D terá 4 apartamentos a mais por andar, ou seja, serão $(n + 4)$ apartamentos por andar; portanto, $6(n + 4)$ apartamentos. Com o do piso térreo serão $6(n + 4) + 1$, que equivalem a $6n + 24 + 1$, ou seja, $(6n + 25)$ apartamentos.

Para determinar o número total de apartamentos que a empresa planeja construir nesses dois edifícios, precisamos adicionar $9n + 1$ a $6n + 25$.

Dados os polinômios $A = 9n + 1$ e $B = 6n + 25$, indicamos a soma $A + B$ como segue:

$$A + B = (9n + 1) + (6n + 25)$$

Para calcular essa soma:

- eliminamos os parênteses, indicando a soma de todos os termos de A com todos os termos de B:
  $A + B = 9n + 1 + 6n + 25$
- reduzimos os termos semelhantes:
  $A + B = (9 + 6) \cdot n + 1 + 25$ $A + B = 15n + 26$

Assim, considerando os dois edifícios, serão construídos $(15n + 26)$ apartamentos.

Caso seja decidido que o Edifício C tenha 2 apartamentos por andar, temos $n = 2$ e o total de apartamentos nos dois prédios será $15 \times 2 + 26$, logo 56 apartamentos. Caso se opte por $n = 4$, os apartamentos serão menores, mas totalizarão $15 \times 4 + 26$, logo 86 apartamentos.

Um dispositivo prático para efetuar a adição dos polinômios é o seguinte:

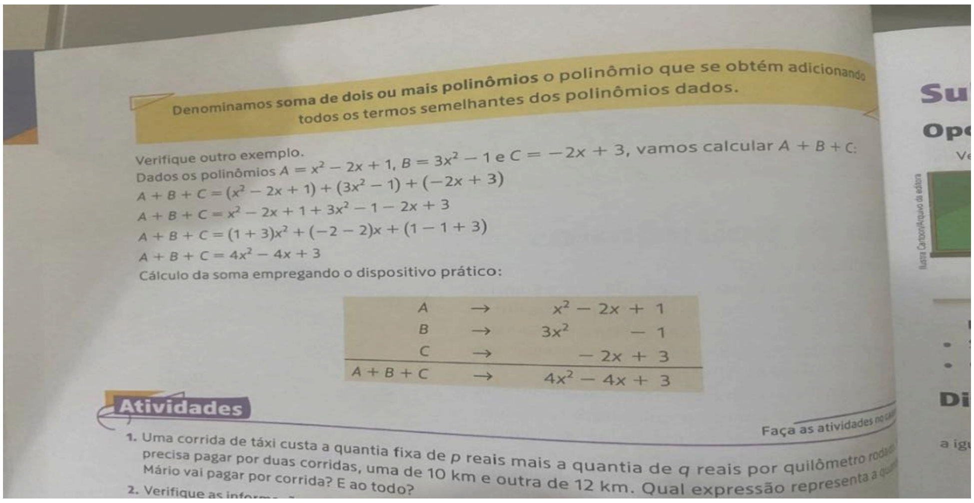
$$\begin{array}{rcr} A & \rightarrow & 9n + 1 \\ B & \rightarrow & 6n + 25 \\ \hline A + B & \rightarrow & 15n + 26 \end{array}$$

Os termos semelhantes devem ser dispostos um embaixo do outro.

Capítulo 8 | Operações com polinômios 101

Fonte: Obra de código 0044P24010002020 pág.: 101

Figura 15: Soma com mais de dois polinômios



Denominamos **soma de dois ou mais polinômios** o polinômio que se obtém adicionando todos os termos semelhantes dos polinômios dados.

Verifique outro exemplo.
Dados os polinômios $A = x^2 - 2x + 1$, $B = 3x^2 - 1$ e $C = -2x + 3$, vamos calcular $A + B + C$:
$A + B + C = (x^2 - 2x + 1) + (3x^2 - 1) + (-2x + 3)$
$A + B + C = x^2 - 2x + 1 + 3x^2 - 1 - 2x + 3$
$A + B + C = (1 + 3)x^2 + (-2 - 2)x + (1 - 1 + 3)$
$A + B + C = 4x^2 - 4x + 3$
Cálculo da soma empregando o dispositivo prático:

A	$\rightarrow$	$x^2 - 2x + 1$
B	$\rightarrow$	$3x^2 \quad - 1$
C	$\rightarrow$	$- 2x + 3$
$A + B + C$	$\rightarrow$	$4x^2 - 4x + 3$

Atividades

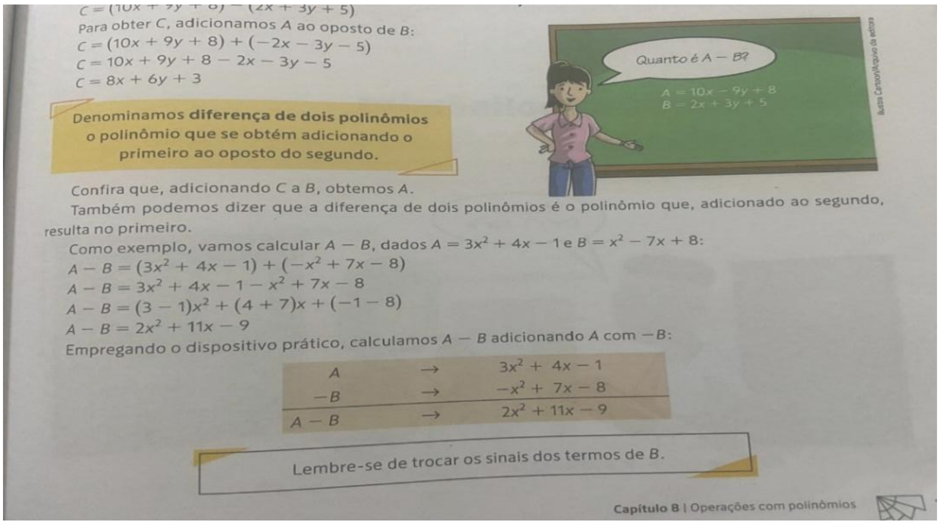
Faça as atividades no ca

1. Uma corrida de táxi custa a quantia fixa de p reais mais a quantia de q reais por quilômetro roda precisa pagar por duas corridas, uma de 10 km e outra de 12 km. Qual expressão representa a q Mário vai pagar por corrida? E ao todo?

2. Verifique as inform

Fonte: Obra de código 0044P24010002020 pág.: 102

Figura 16: Subtração de polinômios



$C = (10x + 9y + 8) - (2x + 3y + 5)$
Para obter C, adicionamos A ao oposto de B:
$C = (10x + 9y + 8) + (-2x - 3y - 5)$
$C = 10x + 9y + 8 - 2x - 3y - 5$
$C = 8x + 6y + 3$

Denominamos **diferença de dois polinômios** o polinômio que se obtém adicionando o primeiro ao oposto do segundo.

Confira que, adicionando C a B, obtemos A.
Também podemos dizer que a diferença de dois polinômios é o polinômio que, adicionado ao segundo, resulta no primeiro.
Como exemplo, vamos calcular $A - B$, dados $A = 3x^2 + 4x - 1$ e $B = x^2 - 7x + 8$:
$A - B = (3x^2 + 4x - 1) + (-x^2 + 7x - 8)$
$A - B = 3x^2 + 4x - 1 - x^2 + 7x - 8$
$A - B = (3 - 1)x^2 + (4 + 7)x + (-1 - 8)$
$A - B = 2x^2 + 11x - 9$
Empregando o dispositivo prático, calculamos $A - B$ adicionando A com $-B$:

A	$\rightarrow$	$3x^2 + 4x - 1$
$-B$	$\rightarrow$	$-x^2 + 7x - 8$
$A - B$	$\rightarrow$	$2x^2 + 11x - 9$

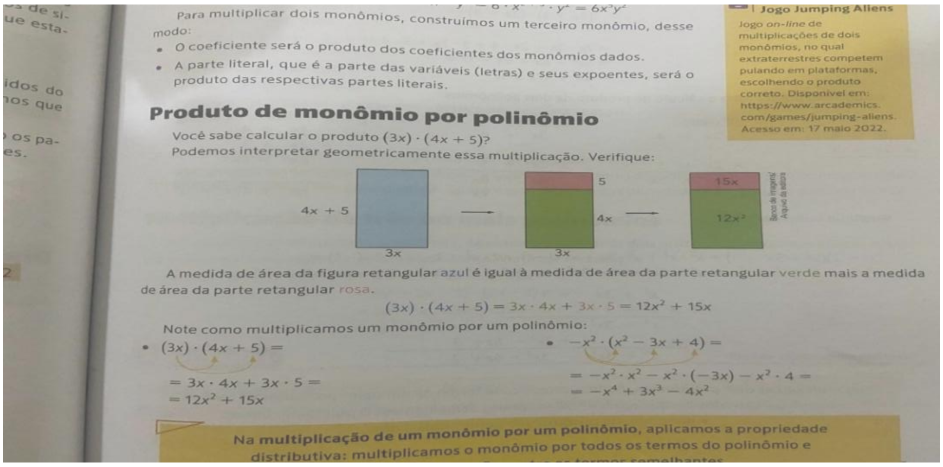
Lembre-se de trocar os sinais dos termos de B.

Capítulo 8 | Operações com polinômios

Fonte: Obra de código 0044P24010002020 pág.: 103

No item três trata da multiplicação o tópico tem todo um cuidado apresentando o produto de monômio por monômio primeiro com exemplo utilizando somente o campo geométrico, em seguida apresenta o produto de monômio por polinômio utilizando somente o campo algébrico com o uso da propriedade distributiva e por último mostra o produto de polinômio por polinômio que na verdade é o produto de dois binômios, utiliza o campo geométrico e o campo algébrico pela propriedade distributiva.

Figura 17: Multiplicação de monômio por polinômios


Para multiplicar dois monômios, construímos um terceiro monômio, desse modo:

- O coeficiente será o produto dos coeficientes dos monômios dados.
- A parte literal, que é a parte das variáveis (letras) e seus expoentes, será o produto das respectivas partes literais.

Jogo Jumping Aliens

Jogo *on-line* de multiplicações de dois monômios, no qual extraterrestres competem pulando em plataformas, escolhendo o produto correto. Disponível em: https://www.arcademics.com/games/jumping-aliens. Acesso em: 17 maio 2022.

Produto de monômio por polinômio

Você sabe calcular o produto $(3x) \cdot (4x + 5)$?

Podemos interpretar geometricamente essa multiplicação. Verifique:

A medida de área da figura retangular azul é igual à medida de área da parte retangular verde mais a medida de área da parte retangular rosa.

$$(3x) \cdot (4x + 5) = 3x \cdot 4x + 3x \cdot 5 = 12x^2 + 15x$$

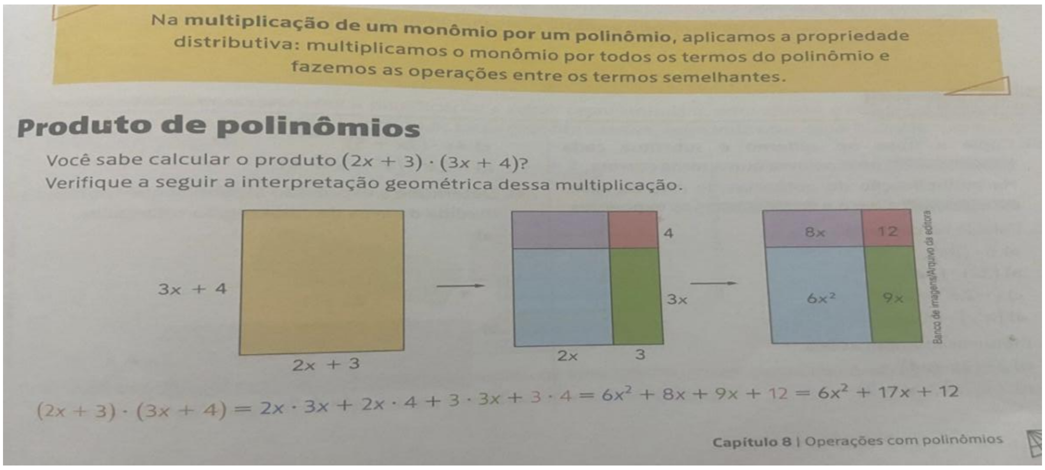
Note como multiplicamos um monômio por um polinômio:

- $(3x) \cdot (4x + 5) =$
  $= 3x \cdot 4x + 3x \cdot 5 =$
  $= 12x^2 + 15x$
- $-x^2 \cdot (x^2 - 3x + 4) =$
  $= -x^2 \cdot x^2 - x^2 \cdot (-3x) - x^2 \cdot 4 =$
  $= -x^4 + 3x^3 - 4x^2$

Na multiplicação de um monômio por um polinômio, aplicamos a propriedade distributiva: multiplicamos o monômio por todos os termos do polinômio e

Fonte: Obra de código 0044P24010002020 pág.: 105

Figura 18: Multiplicação de polinômios


Na multiplicação de um monômio por um polinômio, aplicamos a propriedade distributiva: multiplicamos o monômio por todos os termos do polinômio e fazemos as operações entre os termos semelhantes.

Produto de polinômios

Você sabe calcular o produto $(2x + 3) \cdot (3x + 4)$?

Verifique a seguir a interpretação geométrica dessa multiplicação.

$$(2x + 3) \cdot (3x + 4) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 4 + 3 \cdot 3x + 3 \cdot 4 = 6x^2 + 8x + 9x + 12 = 6x^2 + 17x + 12$$

Capítulo 8 | Operações com polinômios

Fonte: Obra de código 0044P24010002020 pág.: 105

O último tópico o da divisão de polinômios o livro traz a divisão de monômio por monômio e a divisão de polinômio por monômio, todos os exemplos deste tópico é na representação algébrica em forma de fração e sempre fazendo a utilização de propriedade de potência de mesma base.

Figura 19: Divisão de monômio

Monômio dividido por monômio

Anteriormente, a figura quadrada de medida de área $16x^2$ está dividida em 4 partes iguais. A medida de área de cada parte também pode ser assim calculada:

$$(16x^2) : 4 = \frac{16x^2}{4} = \frac{16}{4}x^2 = 4x^2$$

Verifique outras divisões de monômios:

- $9x^3 : 3x = \frac{9x^3}{3x} = \frac{9}{3} \cdot \frac{x^3}{x} = 3x^{3-1} = 3x^2$
- $12ab : 3a = \frac{12ab}{3a} = \frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}} = 4b$

Para **dividir dois monômios**, dividimos os respectivos coeficientes e partes literais.

Nem sempre a divisão de um monômio por outro resulta em um novo monômio.
Por exemplo, note os resultados destas divisões:

- $5x^2 : 3y = \frac{5x^2}{3y}$
- $2ab : c = \frac{2ab}{c}$
- $1 : x = \frac{1}{x}$
- $x^4 : y^2 = \frac{x^4}{y^2}$

Esses resultados não são monômios nem polinômios. São expressões que recebem o nome de **frações algébricas**.

Unidade 4 | Cálculo algébrico

Fonte: Obra de código 0044P24010002020 pág.: 108

Figura 20: Divisão de polinômio por monômio

Divisão de polinômio por monômio

Verifique como dividimos polinômio por monômio:

- $(3x^4 + 2x^3) : x = \frac{3x^4 + 2x^3}{x} = \frac{3x^4}{x} + \frac{2x^3}{x} = 3x^3 + 2x^2$
- $(x^5 - x^4 + 2x^3) : (2x^2) = \frac{x^5 - x^4 + 2x^3}{2x^2} = \frac{x^5}{2x^2} - \frac{x^4}{2x^2} + \frac{2x^3}{2x^2} = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$
- $(4a^2b^2 + ab) : (2ab) = \frac{4a^2b^2 + ab}{2ab} = \frac{4a^2b^2}{2ab} + \frac{ab}{2ab} = 2ab + \frac{1}{2}$

Para **dividir um polinômio por um monômio**, dividimos cada termo do polinômio pelo monômio e fazemos as operações entre os resultados.

Fonte: Obra de código 0044P24010002020 pág.: 109

No final de cada tópico referente a cada operação, o livro traz pelo menos dez exercícios no formato algébrico e alguns misturado com geometria utilizando perímetro e cálculo de área.

Observe que a divisão entre polinômios não é apresentada aos alunos. O tradicional método da chave, em que o algoritmo da divisão aplicados aos inteiros é desenvolvido entre polinômios, não é mais citado no livro do PNLD. A ausência do tópico “frações algébricas” impossibilita o aluno identificar através das fatorações de polinômios, a divisão entre eles. Teoricamente o assunto deveria ser abordado na terceira série do ensino médio, o que não tem ocorrido em função do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Muitas instituições privadas abordam o estudo dos polinômios no ensino médio sem a preocupação de enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra[7] uma vez que o estudo dos Números Complexos não consta como assunto regular do ensino médio.

[7] O Teorema Fundamental da Álgebra afirma que todo polinômio não constante com coeficientes complexos tem pelo menos uma raiz complexa. Uma consequência direta é que um polinômio de grau (n) tem exatamente (n) raízes complexas, contando as raízes repetidas. Isso significa que equações com raízes que não são números reais, como as do segundo grau com discriminante negativo, sempre terão raízes complexas (que vêm em pares).

4 COMO DINAMIZAR O CONTEÚDO DE POLINÔMIOS DE UMA MANEIRA NÃO TRADICIONAL.

4.1 Vozes interiores de um professor inquieto: Sobre as dificuldades dos alunos e o universo dos polinômios.

Como professor de Matemática do oitavo ano, percebo o quanto os alunos têm dificuldades ao trabalhar com polinômios. A transição[8] do mundo numérico para o universo das letras representando números desconhecidos, o uso das operações e a manipulação das propriedades envolvendo estas operações são tradicionais entraves ao analisarmos a passagem do pensamento aritmético para o pensamento algébricos em crianças.

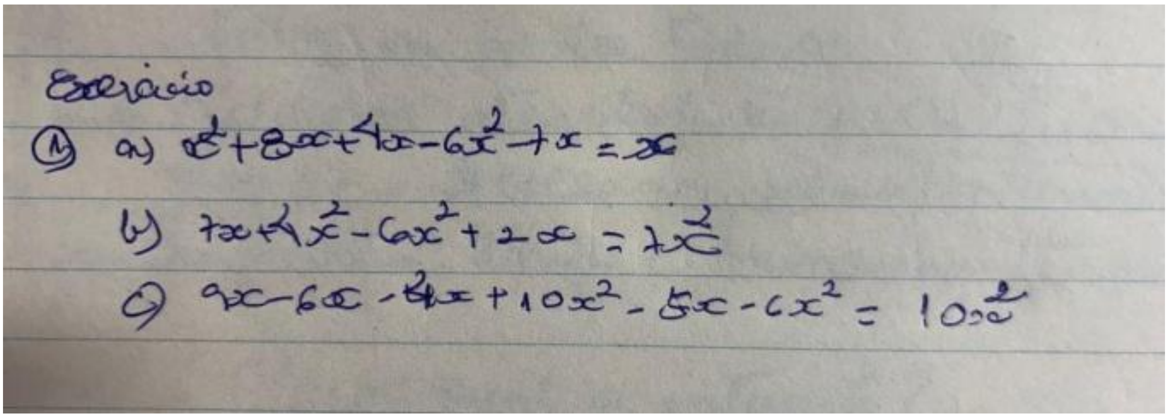
Ao abordar as definições de monômio e polinômio, grande parte dos alunos não entende que a parte literal não é um valor fixo, que ela pode assumir qualquer valor dentro de um determinado universo. A simples expressão $x + y$ pode representar qualquer enunciado que traduza a junção de "coisas" diferentes. A experiencia mostra que após longo tempo resolvendo equações polinomiais no 1º grau, se deparar com uma expressão algébrica, remete o aluno a resolver uma equação, mesmo que ela não esteja presente. O aluno insiste em determinar "o valor de x", o que dificulta diferenciar uma incógnita de uma variável, tratando tudo como se fosse uma equação.

Antes de somar ou subtrair monômios e polinômios, falamos primeiramente em termos semelhantes. Regras envolvendo os números reais e suas operações básicas estão presentes em inúmeros exercícios, sobretudo aqueles que calculam o valor numérico de expressões algébricas. É comum escutar dos professores que *só é possível somar ou subtrair monômios semelhantes* e que esta afirmativa se estende aos polinômios, uma vez que um polinômio poder ser entendido como uma soma de monômios.

---

[8] A transição do pensamento aritmético para o algébrico ocorre quando se generalizam padrões e se passa da manipulação de números para o uso de variáveis e símbolos para representar quantidades abstratas e relações. Isso acontece ao transformar uma operação específica (como 6+9=15) em uma regra geral como (a+b=c) e ao compreender que os símbolos algébricos têm um significado mais amplo do que apenas um valor numérico particular. O processo envolve o desenvolvimento da capacidade de ver padrões, generalizar ideias matemáticas e expressá-las de forma mais formal.

Figura 21: Erros cometidos por alunos

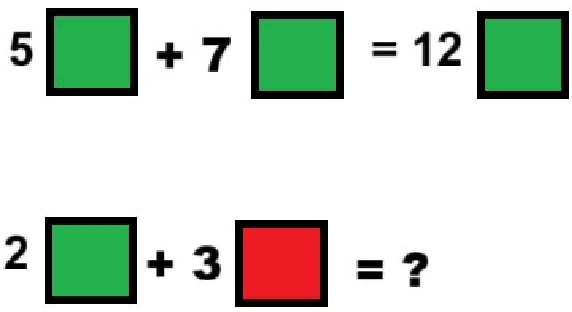


Fonte: Autor

Na imagem acima a aluna claramente não compreendeu a definição de monômios semelhantes e como somar e subtrai-los operando com os coeficientes e com os expoentes. No item (a) a soma dos coeficientes é $1+8+4-6-7=1$ e a soma dos expoentes é $2+1+1-2-1=1$, o que levou a conclusão de que a soma algébrica resultaria no monômio $x=1x^1$. O mesmo ocorre no item (b), a soma dos coeficientes é $7+4-6+2=7$ e a soma dos expoentes é $1+2-2+1=2$ que levou ao resultado $7x^2$. No item (c) a soma dos coeficientes é igual a zero e a soma dos expoentes é -2, o que mostra que dentro da lógica equivocada utilizada pela aluna, ela se perdeu na sequência de adições de números inteiros, pois deveria encontrar como resposta $0x^{-2}$.

Monômios do tipo $2x$ e $3x^2$ muitas vezes são tidos como semelhantes pelo fato do termo desconhecido ser representado pela letra "x" . A dificuldade por parte dos alunos em entender o que é um termo semelhante é tão grande que muitas vezes precisamos fazer associações a objetos para que possamos prosseguir com o assunto. Por exemplo: a todos os monômios do tipo n_1x associaremos quadrados verdes e monômios do tipo n_2x^2 quadrados vermelhos. Assim $5x+7x$ pode ser entendido como a soma entre 5 quadrados verdes e 7 quadrados verdes, resultando em 12 quadrados verdes. Isto é, $12x$. Note que é impossível escrever o resultado da soma de 2 quadrados verdes com 3 quadrados vermelhos em função de uma única cor dos quadrados apresentados. Isto é, $2x+3x^2$ é e sempre será $2x+3x^2$.

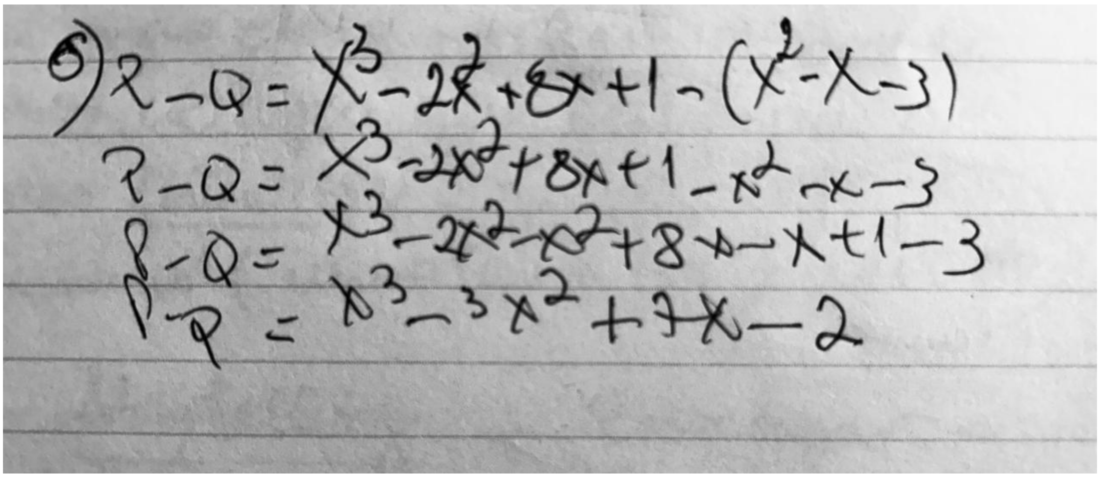
Figura 22: Representação figurada



Fonte: Autor

Um outro obstáculo a ser superado pelos alunos é enxergar a diferença entre polinômios $A - B$ como sendo a soma do polinômio A com o simétrico do polinômio B, isto é, $A - B = A + (-B)$. O erro mais comum é não escrever o simétrico do polinômio B como um polinômio cujos coeficientes de $-B$ são simétricos termo a termo aos coeficientes do polinômio B.

Figura 23: Erros comum cometidos pelos alunos



Fonte: Autor

Ao serem apresentados às operações de multiplicação e divisão entre monômios e polinômios, as dificuldades aumentam em função da potenciação. Muitos alunos não percebem que $2x = 2 \cdot x$, $3xy = 3 \cdot x \cdot y$, $-5x^2y^3 = -5 \cdot x^2 \cdot y^3 = -5 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$ e a aplicação das propriedades da potenciação em relação a multiplicação e a divisão de potências de mesma base, muitas vezes são ignoradas pelos alunos. Muitos acabam aplicando tais propriedades ao somar e subtrair monômios e polinômios.

4.2 Vozes interiores de um professor inquieto 2: Sobre o uso dos livros didáticos aprovados pelo PNLD.

Frente aos obstáculos descritos no item anterior, se o professor não procurar um referencial teórico lúdico e criativo com abordagem mais clara e objetiva, os alunos tendem a não compreenderem a temática e muitos daqueles que qualitativamente são interpretados como bons alunos, na maioria das vezes tendem a reproduzir mecanicamente uma sequência de algoritmos, sem que a aprendizagem aconteça de maneira efetiva.

O material aprovado pelo PNLD, muitas vezes não atende as necessidades dos alunos, sobretudo em relação a linguagem e diferentes representações de abstrações matemáticas. Na realidade do autor dessa pesquisa, que trabalha com alunos da faixa etária entre 13 e 14 anos, de classe média baixa os textos oficiais carecem de mais exemplos, exercícios resolvidos e diversas contextualizações afim de que a passagem do pensamento aritmético que permeia o 6º e o 7º anos, dê lugar de maneira gradativa ao abstracionismo do pensamento algébrico. Com uma abordagem desinteressante e com uma linguagem difícil de entendimento pelos alunos, um grande número de atividades proposta pelos autores acabam não sendo realizadas em sala de aula. Exercícios repetidos e enfadonhos estão presentes na maioria dos textos aumentando o desinteresse do aluno pela matemática. Muitos professores também alegam a falta de tempo para realizar atividades como jogos ou a aplicação de metodologias ativas[9].

---

[9] As metodologias ativas no ensino da matemática se concentram em colocar o aluno como protagonista do aprendizado, utilizando abordagens como a sala de aula invertida, aprendizagem baseada em problemas, rotação por estações e jogos para tornar a matéria mais significativa, engajadora e autônoma. Elas buscam superar dificuldades de aprendizado, conectar a matemática ao cotidiano e desenvolver habilidades críticas, embora enfrentem desafios como a necessidade de formação continuada de professores e recursos tecnológicos.

Portanto, esse processo fica difícil tanto para quem ensina e quanto para quem aprende, por isso a necessidade real de buscar outros recursos que representem ganhos no processo de construção do conhecimento do aluno. **Qual será um caminho possível?**

4.3 Vozes interiores de um professor inquieto 3: Sobre a construção de aulas mais atrativas e que garantam a aprendizagem.

Na tentativa de responder a pergunta que encerra o item 4.2 encontramos a Teoria dos Registros das Representações Semióticas (TRRS) de Raymond Duval. Esta teoria além de servir como referencial teórico desse trabalho tornou-se fonte inspiradora para a apresentação das tarefas que sugerimos para a sala de aula.

Num primeiro momento pensamos introduzir os polinômios através de atividades que articulem diferentes registros, como o verbal, o algébrico (escrita da expressão) e o numérico (cálculo de valores). Acreditamos que o professor deva atuar como mediador do processo de ensinar e aprender, guiando o aluno na conversão e tratamento de informações entre esses sistemas de signos, para que ele construa uma compreensão conceitual da ideia de polinômio e suas aplicações.

4.3.1 O que diz a Teoria dos Registros das Representações Semióticas sobre o ensino de polinômios

A TRS proposta por Duval, defende que para ter uma aprendizagem dos objetos matemáticos o aluno precisa compreender em diferentes registros e só é consolidada quando acontece a realização de conversões entre registros semióticos diferentes, devendo ser, portanto, uma das prioridades do ensino de matemática, ou seja, o aluno de fato só aprende quando ele passa de um para um outro diferente sem alterar o significado como por exemplo 2x +2y, pode ser representado como 2 canetas e 2 lápis. Pensando nos polinômios que é o tema deste trabalho, os polinômios e monômios podem ser expressos em vários registros diferentes, logo podemos aplicar a TRS, pois podemos representa-los de várias formas.

Os registros podem ser divididos das seguintes maneiras: Algébrico (expressões, letras, coeficientes), numérico (valores concretos), geométrico (representações gráficas, áreas e figuras geométricas) e linguagem natural (explicações verbais ou escritas). Quando acontece uma modificação no registro sem altera-lo, acontece um tratamento, quando ocorre a mudança do registro acontece a conversão que é o ponto principal da teoria abordada.

Essa abordagem em polinômio acontece quando um registro algébrico apresentado como $p(x) = 2x + 2y$ como mencionado acima, fazendo uma transformação o registro ficaria 2(x+y) continuaria com a representação algébrica, fazendo a conversão para o registro de linguagem natural poderia ser representado como o dobro de um número somado com o dobro de outro, ou ele poderia desenhar um retângulo de lado x e y e pedir para calcular o perímetro.

Portanto, quando essa conversão ocorre para Duval de fato esse aluno aprendeu tal assunto. A aprendizagem fica significativa o aluno passa a entender a diferença entre incógnita e variável, compreende o significado dos coeficientes e dos termos semelhantes, além de não manipular somente os registros sem entender de fato do que se trata.

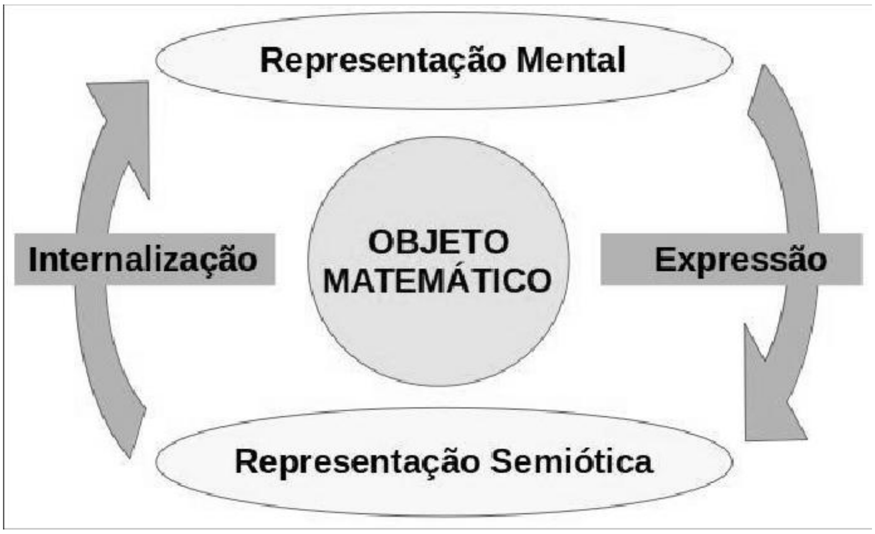
O ensino de álgebra no ensino fundamental, especialmente no 8º ano, apresenta desafios recorrentes relacionados à compreensão dos objetos matemáticos presentes neste ano de escolaridade, que marca a passagem de uma pratica matemática centrada exclusivamente no campo numérico e passa incorporar representações simbólicas, como letras, expressões algébricas e polinômios. De acordo com Duval (2003), o principal embargo epistemológico (restrição ou bloqueio no desenvolvimento ou acesso ao conhecimento) reside na dificuldade que os estudantes encontram em transitar bem entre a complexidade dos conceitos e as dificuldades de coordenar diferentes registros.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), proposta por Raymond Duval[10], defende que o aprendizado matemático só é efetivamente consolidado quando o aluno consegue converter uma ideia matemática de um registro para outro, preservando o significado. Assim, estudar polinômios por meio da TRRS permite não apenas manipular expressões, mas atribuir sentido às operações e reconhecer o objeto matemático em representações diferentes.

---

[10] Raymond Francis Duval (França, 1937) é filósofo, psicólogo de formação e professor emérito da Université du Littoral Côte d'Opale em Dunquerque, França. Duval investiga a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático.
É responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos registros de representação semiótica e importantes estudos em psicologia cognitiva desenvolvidos no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, França entre os anos de 1970 a 1995. A primeira apresentação sistematizada de sua teoria aconteceu em sua obra Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.

Figura 24: ilustração da relação entre as representações mental e semiótica



Fonte: Available Via License: Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International

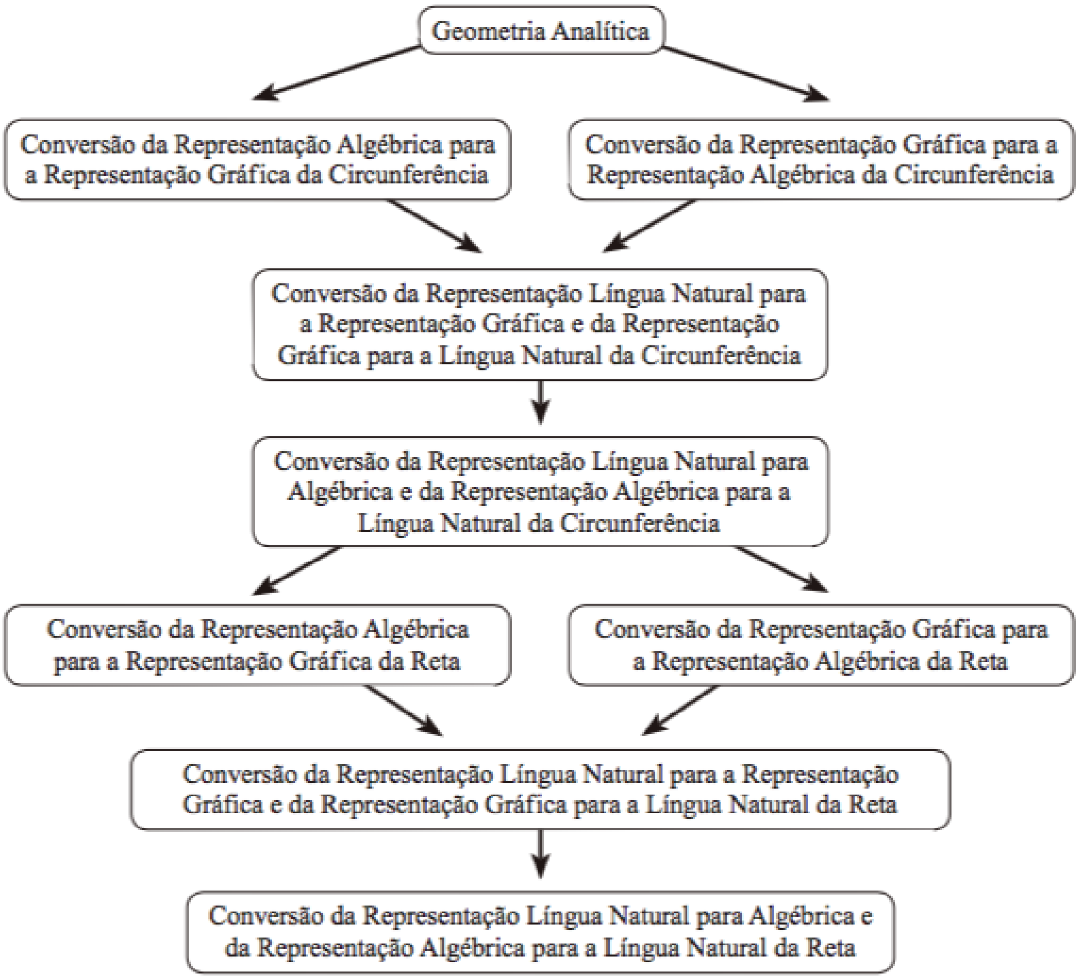
Este trabalho tem como referencial teórico a aplicação da TRRS ao estudo dos monômios e polinômios no 8º ano, apresentando a teoria, exemplos didáticos, diagramas e implicações pedagógicas mostrando como a TRRS se destaca de outras sendo ela de muita relevância para as questões relativas ao ensino e a aprendizagem da matemática, particularmente da álgebra.

Segundo Duval (2003), compreender matemática implica em operar com representações, pois os objetos matemáticos não são acessíveis diretamente — eles só se manifestam por meio de sistemas de signos. Assim, para aprender, é importante que o aluno:

1. **Identifique** o registro utilizado;
2. **Realize tratamentos** (transformações internas ao mesmo registro);
3. **Realize conversões** (passagem de um registro para outro mantendo o significado).

De acordo com os estudos de Duval (2003, p. 14), a compreensão acontece não no interior de um registro, mas na coordenação de registros diferentes. Veja a seguir um exemplo de como se relacionam registros de representação semiótica em geometria analítica através de professores em formação.

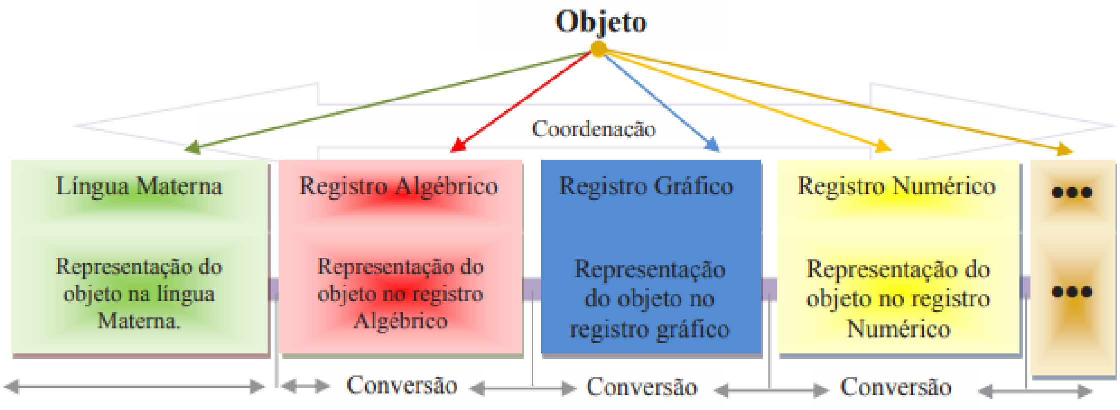
Figura 25: TRRS em Geometria Analítica



Fonte:
https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fwww.redalyc.org%2Fjournal%2F335%2F33531649002%2Fhtml%2F&psig=AOvVaw3udYCcIJZ0C702u0yCU-BM&ust=1764722557004000&source=images&cd=vfe&opi=89978449&ved=0CBIQjRxqFwoTCNjkp_3VnZEDFQAAAAAdAAAAABAi
acessado em 01/12/2025

Voltando ao mundo da álgebra, objeto de estudo dessa pesquisa, os principais registros semióticos no contexto dos polinômios são:

Figura 26: Tipos de Representações



Fonte: https://www.scielo.br/j/ciedu/a/QVbBDvRRtjvVXD6HXFYXcxx/?format=pdf&lang=pt&utm_source=chatgpt.com acessado em: 01/12/2025

Os principais registros no contexto dos polinômios conforme exposto a cima mostra um como cada um deles contribui para a construção do conceito, mas somente a articulação entre eles permite uma compreensão plena do próprio conceito. Vejamos alguns exemplos:

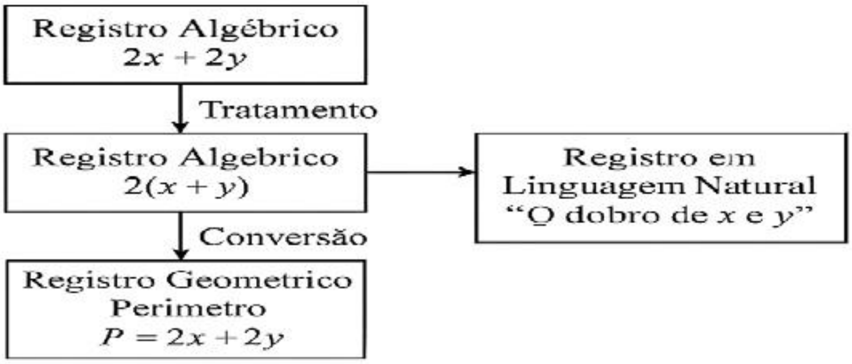
O registro algébrico utiliza símbolos, letras e operações para representar relações. Um polinômio como $p(x, y) = 2x + 2y$, pode representar a adição entre o dobro de duas quantidades diferentes. Segundo Duval (2003, p. 29), esse é o registro mais complexo, pois exige do aluno "um tipo de atividade cognitiva que não corresponde à percepção imediata, mas ao tratamento simbólico abstrato."

Por isso, muitos estudantes têm dificuldade inicial em lidar com expressões polinomiais, enxergando somente um emaranhado de letras e números e números combinados, mas não compreendem seu significado enquanto objeto matemático.

Já no registro numérico é mais concreto para o estudante, pois envolve substituição de valores fixos para cada variável, no qual o aluno já tem uma certa familiaridade. Assim, para $x = 3$ e $y = 1$, temos $p(3,1) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 8$. Essa conversão do registro algébrico para o numérico é uma das primeiras que os alunos conseguem realizar, embora muitas vezes façam isso de forma mecânica, sem compreender a relação estrutural entre termos, coeficientes e variáveis.

Chegando ao registro verbal (linguagem materna), o polinômio pode ser compreendido através da seguinte verbalização: *"o dobro de um número somado ao* *dobro de outro número"*. A interpretação surge da seguinte forma: existem dois números desconhecidos diferentes, o "x" e o "y", de modo que seus dobros podem ser expressos por $2x$ e $2y$ e a adição dessas quantidades por $2x + 2y$. Após um **tratamento**[11], obtemos a expressão algébrica $2(x + y)$, onde pode ser representado no registro de linguem como *"o dobro da soma entre dois números"* — ao converter[12] a forma.

Figura 27: Diagrama com os Tratamentos e Conversões



Fonte: Autor

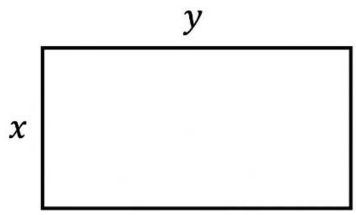
A **conversão** é o núcleo do aprendizado, porque exige do aluno uma reinterpretação do objeto matemático. Duval (2003, p. 17) sintetiza: dizendo que sem a conversão, não há compreensão, apenas execução mecânica.

Esse registro é essencial para a transposição didática, pois estabelece ponte entre a matemática formal e a linguagem cotidiana. Duval (2011, p. 65) ressalta que "a linguagem natural não é apenas instrumento de comunicação, mas também de construção conceitual quando articulada com outros registros."

Como mostrado no diagrama de relações entre elementos da geometria analítica, podemos inferir que o registro geométrico permite visualizar relações, com um retângulo de comprimento y e altura x, conforme figura:

Figura 28: Representação Geométrica

[11] O tratamento é a transformação feita dentro do mesmo registro.
[12] A conversão, por sua vez, altera o registro. Exemplo: Algébrico → Linguagem natural: "o dobro da soma entre x e y". Algébrico → Geométrico: representar o retângulo e calcular seu perímetro. Algébrico → Numérico: substituir valores específicos.



Fonte: Autor

O polinômio $2x + 2y$ pode representar o perímetro do retângulo, ou pode representar a área pelo monômio $xy = x \cdot y$. Nesta conversão, ocorre o que Duval (2003, p. 52) chama de "mudança de domínio representacional", na qual a expressão algébrica passa a significar uma propriedade geométrica. O registro gráfico é aquele que possibilita ao aluno perceber a estrutura global da situação representada.

Figura 29: Exemplos de cada registro

Fonte: Autor

A articulação de múltiplos registros como o verbal, o algébrico, o geométrico e o numérico, favorece a construção de significados mais sólidos. Por meio dessa integração, o estudante passa compreender com maior clareza o papel das variáveis, a distinguir adequadamente entre incógnita, variável e coeficiente, deixando de tratar como equação qualquer operação que é composta por números e letras, reconhece termos semelhantes e passa a identificar a estrutura interna dos polinômios, desenvolvendo, assim, maior autonomia.

Além disso, o uso sistemático dos registros semióticos evita que o aluno manipule expressões algébricas apenas de forma mecânica, sem compreensão conceitual. Esse problema é frequentemente observado no ensino tradicional e é destacado por Duval ao afirmar que "muitos erros dos alunos não são erros matemáticos, mas erros de conversão" (Duval, 2003, p. 33), o que reforça a importância de promover atividades que exijam conversões entre registros e não apenas tratamentos dentro de um único formato de representação.

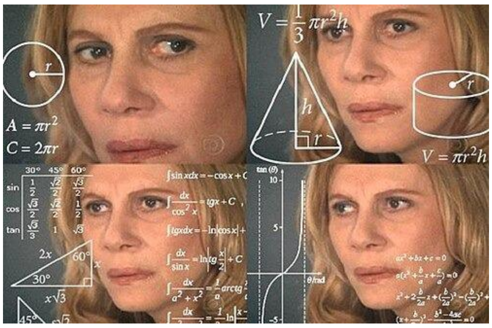
Diante do exposto, a integração dos registros semióticos no ensino de álgebra contribui para uma aprendizagem com mais significados, favorece a formação de estruturas cognitivas abstratas e aproxima o estudante da verdadeira natureza da atividade matemática, entendida como um processo de interpretação e coordenação de representações. Assim, a TRRS se revela não apenas uma ferramenta teórica, mas um caminho didático eficaz para o desenvolvimento de competências essenciais no estudo dos polinômios e da álgebra como um todo.

4.4 Dinamizando a sala de aula

Ao analisar o desenvolvimento dos polinômios nos livros didáticos percebemos que poucos autores levaram em consideração o estudo mais aprofundado deste conteúdo. As atividades propostas não foram construídas de maneira gradual, dialogando e respeitando os aspectos cognitivos que envolvem a aprendizagem, muitas vezes afastando o estudante da matemática.

Os tradicionais memes trocados entre os jovens como a famosa figura de Nazaré Tedesco Confusa perdida no meio de expressões algébricas e fórmulas de diferentes campos da matemática traduzem bem a relação que os alunos estabelecem com a disciplina quando o desenvolvimento de um conteúdo não tem a preocupação com a formação e consolidação de estruturas cognitivas abstratas.

Figura 30: Meme Nazaré Tedesco Confusa



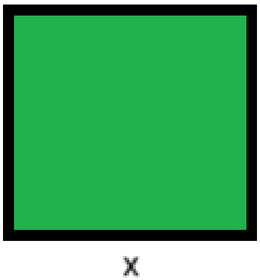
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Nazar%C3%A9_Confusa
Acessado em 1/12/2025

Acreditamos que os primeiros passos para se atingir a abstração matemática comecem pelos estudos dos polinômios no ensino fundamental e que estes, associados ao uso adequado das palavras, imagens, gestos, sons e objetos manipulativos auxiliam na construção e na transmissão do conhecimento em diversas linguagens. As linguagens (verbais, visuais ou sonoras) estão inseridas em sistemas socioculturais dos alunos e desvendar este mundo significa dar a interpretação correta, buscar a melhor representação e selecionar da melhor maneira possível os códigos que organizam esses significados.

Façamos uma breve reflexão sobre o problema a seguir: “Determine o lado de um quadrado, sabendo que, se aumentarmos seu lado em $2\ cm$, sua área aumenta em $36\ cm^2$.” O que torna o problema difícil segundo o olhar do aluno é a forma que ele é apresentado em língua portuguesa. Na maioria das vezes o aluno não percebe que o quadrado inicial cujos os lados tem medidas desconhecidas tem área menor que a área do novo quadrado, isto é, que o quadrado menor ‘cabe’ no quadrado maior. Caberá ao professor discutir com os alunos a compreensão do enunciado e propor uma reescritura coletiva, apresentando o mesmo problema de outra forma, que pode ser: “Determine a medida do lado de um quadrado de modo que acrescentando 2 unidades a cada lado a nova área é igual a área anterior acrescida de 36 unidades.”

Na maioria das vezes a resolução do problema vem acompanhada de uma representação geométrica e uma equação associado a ela. A resolução contém uma multiplicação de binômios, a necessidade de agrupamento e operações de adição e subtração entre termos semelhantes e manipulações algébricas que levem à raiz da equação. Esta solução traz consigo os conceitos de incógnitas (medida do lado a ser descoberto), variável (o quadrado de medida desconhecida sem estar associado ao problema) e de equivalência (quando o quadrado de medida desconhecida passa estar associado ao problema de modo que um único valor satisfaz a condição dada)

Figura 31: Situação problema conforme o livro

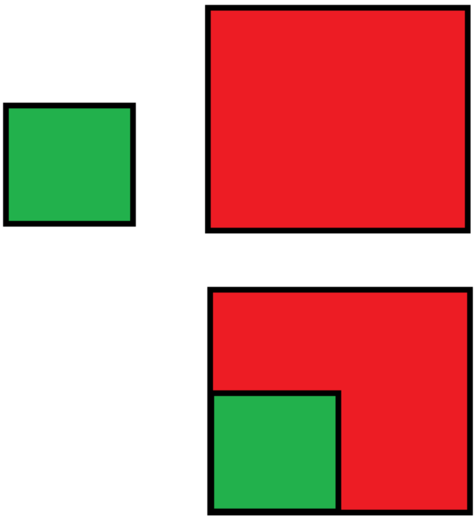


Fonte: Autor

$$(x+2)^2 = x^2 + 36 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 36 \rightarrow x^2 - x^2 + 4x = 36 - 4 \rightarrow$$
$$4x = 32 \rightarrow x = \frac{32}{4} \rightarrow x = 8$$

A mesma resolução baseada na TRRS pode ser dinamizada da seguinte forma: Quadrados de medidas de lados diferentes são distribuídos para os alunos que estão organizados em trio. É importante que os grupos percebam, por comparação, que as medidas dos lados dos quadrados são diferentes, implicando em áreas diferentes. O que queremos determinar é a medida de um novo quadrado cuja nova área é igual a anterior mais 36. Mas, como o novo quadrado foi obtido? A partir do quadrado desconhecido original. Assim é interessante questionar aos grupos qual a melhor representação geométrica que traduz o problema. O aluno pode comparar “o quadrado inserido no retângulo”, “o retângulo inserido no quadrado” ou “um quadrado inserido em outro” até que o signo possa ser identificado pela abstração em forma de equação.

Figura 32: Situação Problema



Fonte: Autor

$$(x+2)^2 - x^2 = 36$$

Na tentativa de facilitar a aprendizagem que envolve as operações com polinômios apresentaremos atividades diferentes daquelas propostas pelos autores dos livros didáticos analisados. Não são atividades autorais, no entanto vão ao encontro da TRRS.

4.4.1 Jogos

Dominó dos polinômios

OBJETIVO: Resolver as operações com polinômios corretamente e eliminar todas as cartas que possui.

REGRAS:

1. Número de participantes: 2 ou 4;
2. As cartas são distribuídas igualmente entre os jogadores;
3. Na parte superior da carta está uma operação com um polinômio, que representa uma pergunta e na parte inferior está um polinômio ou um monômio que representa a solução de outra carta;
4. Sorteia-se o jogador que irá começar sendo que esse deve escolher

qualquer uma de suas cartas e colocá-la sobre a mesa;

5. O jogador da direita verificará se possui uma carta com a resposta referente a pergunta da carta que fora jogada anteriormente;

6. Caso tenha a resposta certa, joga a carta sobre a mesa e o próximo jogador deverá verificar se possui a resposta para essa nova carta;

7. Os jogadores que não possuem a carta resposta vão passando a vez;

8. Ganha o jogo quem se livrar primeiro de todas as cartas.

Habilidades BNCC:

No 8º ano, as habilidades da BNCC que abordam a base para o estudo de polinômios se concentram em expressões algébricas:

Habilidades (Códigos BNCC)

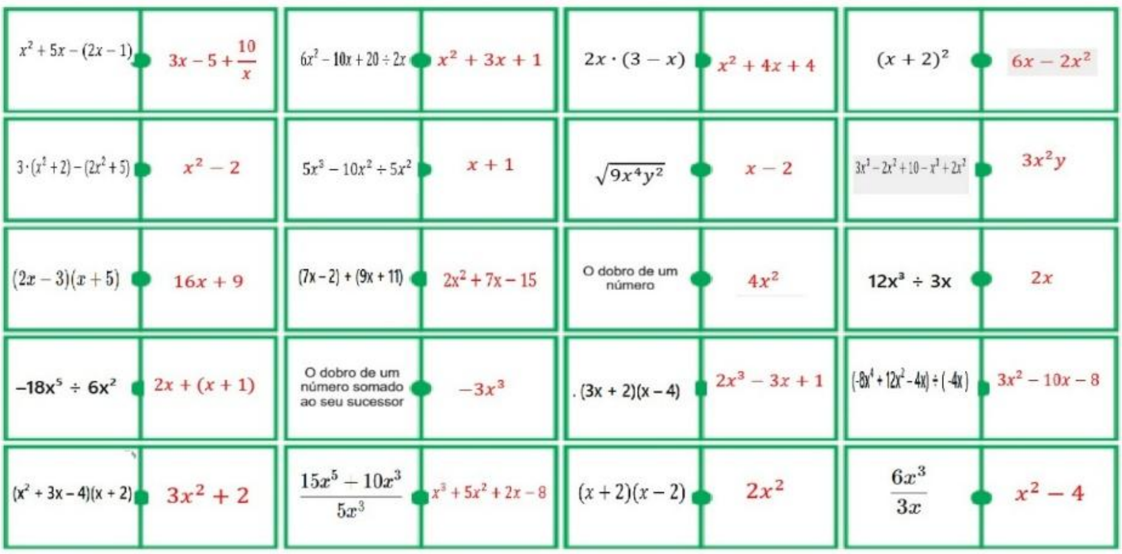
EF08MA06: Foca na resolução e elaboração de problemas que envolvam o cálculo do valor numérico de expressões algébricas.

EF08MA08: Aborda a aplicação de expressões algébricas na resolução de problemas representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas.

Competências Gerais da BNCC

O desenvolvimento destas habilidades contribui para competências matemáticas mais amplas, como a utilização de estratégias e conceitos matemáticos para resolver problemas e a compreensão de diferentes registros de representação matemática.

Figura 33: Jogo de dominó



Fonte: Autor

DARA: Jogo de origem Africana

REGRAS DO JOGO DARA

1. Material

Tabuleiro: grade 5 × 6 (5 linhas e 6 colunas).

Cada jogador tem 12 peças de cores diferentes.

2. Objetivo do jogo

Formar linhas de três peças consecutivas (horizontais ou verticais) para capturar peças do adversário.

Ganha quem reduzir o oponente a menos de 3 peças, impossibilitando formações.

3. Fases do jogo

Fase 1 — Colocação das peças

Os jogadores se alternam colocando uma peça por vez em qualquer casa vazia.

Não é permitido formar uma linha de três peças durante a fase de colocação.

Após todas as 24 peças serem colocadas, inicia-se a fase de movimentação.

Fase 2 — Movimentação das peças

O jogador da vez move uma de suas peças para uma casa adjacente vazia, apenas na horizontal ou vertical (nunca na diagonal).

Agora é permitido formar linhas de três peças consecutivas.

4. Capturas

Quando um jogador forma uma linha de três peças:

Ele pode capturar uma peça do adversário retirando-a do tabuleiro.

Não pode capturar uma peça que esteja no trio formado pelo adversário.

Não pode usar sempre a mesma jogada repetida para formar e quebrar trincas infinitamente — isso é considerado ilegal (regra tradicional antibloqueio).

5. Jogadas proibidas

Formar três peças na fase de colocação.

Formar e desfazer a mesma trinca repetidamente (repetição infinita).

Mover diagonalmente.

6. Fim do jogo

O jogo termina quando:

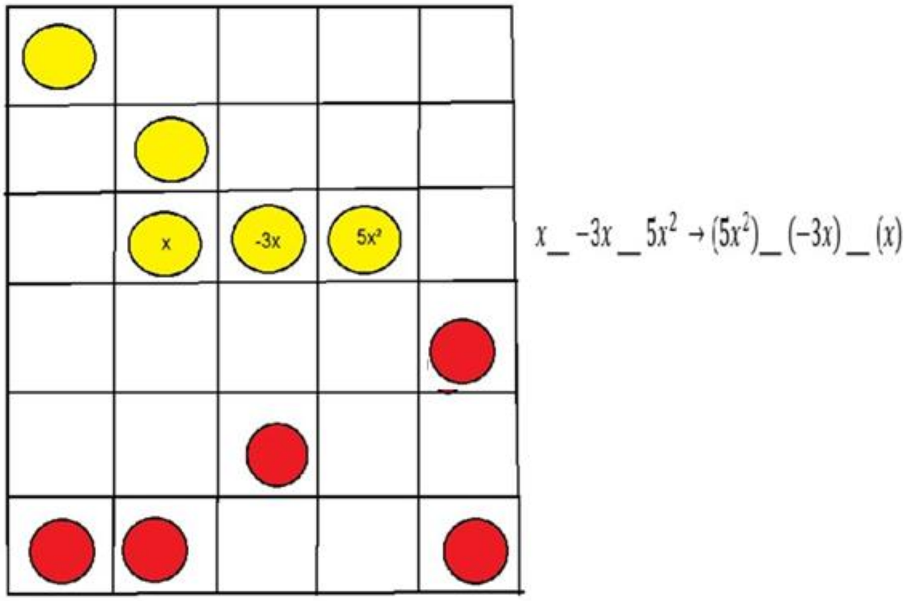
Um jogador fica com menos de 3 peças, ou um jogador não consegue mais se mover.

O outro jogador é declarado vencedor.

Algumas modificações foram feitas para adaptar o jogo ao ensino de polinômios sem alterar as regas oficiais do jogo. Para isso, as peças do jogo foram feitas com monômios escritos nelas.

Como o objetivo do jogo é alinhar três peças, o jogador, ao formar esse alinhamento, deve organizar os monômios de acordo com seus graus, colocá-los entre parênteses e seguir o próximo passo, que é escolher as operações que serão usadas na expressão.

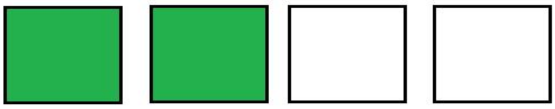
Figura 34: Tabuleiro com monômios escritos nas peças



Fonte: Autor

As operações entre os monômios são definidas por meio de dados especiais. Esses dados têm duas faces: uma colorida e outra branca. O jogador lança os dados e, dependendo de como eles caem, forma-se uma combinação. Cada combinação corresponde a uma operação diferente, mostrada no quadro da Figura abaixo. Assim, o resultado do lançamento determina qual operação o jogador deverá usar ao montar a expressão algébrica.

Figura 35: Dados e Tabelas de operações



VERSÃO ALGÉBRICA		
1 lado colorido	−	+
2 lados coloridos	+	−
3 lados coloridos	+	+
4 lados brancos/ coloridos	−	−

Fonte: Autor

Todas as combinações possíveis do lançamento dos dados estão organizadas no quadro. Ele mostra quais operações o jogador deve realizar com os monômios que foram alinhados no tabuleiro.

Por exemplo: depois de formar o alinhamento, se o jogador lançasse os dados e obtivesse duas faces coloridas e duas faces brancas, isso indicaria a operação que deve ser usada, conforme o quadro disponibilizado.

O próximo passo é resolver a expressão formada. Isso inclui retirar os parênteses e juntar os termos semelhantes, deixando a expressão na forma mais simples possível. Caso o jogador não consiga fazer o cálculo, ele perde uma de suas peças. Se acertar, retira uma peça do adversário.

Habilidades BNCC

EF08MA06: Foca na resolução e elaboração de problemas que envolvam o cálculo do valor numérico de expressões algébricas.

EF08MA07: Esta habilidade, embora não detalhada nos snippets, está relacionada à associação entre expressões algébricas e padrões, e à generalização de propriedades, incluindo o trabalho com monômios.

EF08MA08: Aborda a aplicação de expressões algébricas na resolução de problemas representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas.

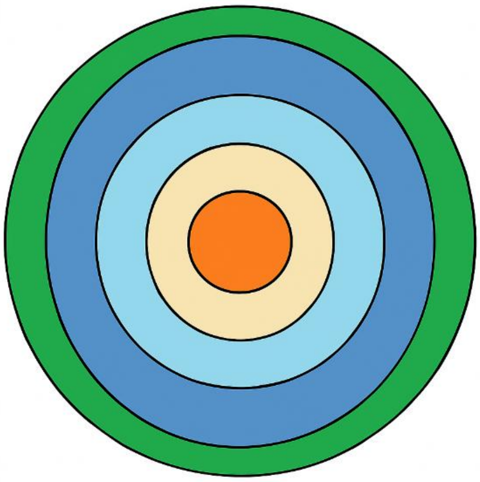
Competências Gerais da BNCC

O desenvolvimento destas habilidades contribui para competências matemáticas mais amplas, como a utilização de estratégias e conceitos matemáticos para resolver problemas e a compreensão de diferentes registros de representação matemática.

Jogo das Cores

No jogo das cores, até três participantes usam uma folha A4 com um alvo (como na figura) e jogam 10 grãos de feijão sobre ele. Cada cor do alvo corresponde a uma variável.

Figura 35: Alvo



Fonte: Autor

Um estudante deve ser responsável pelos apontamentos, e os outros dois participantes receberão um sinal cada. Um será positivo e o outro negativo. Cada um dos dois terá direito a 05 jogadas, com seu respectivo sinal, que será anotado pelo terceiro colega.

Após as jogadas os alunos irão fazer o cálculo do polinômio resultante, somando e subtraindo conforme a operação.

Habilidades BNCC:

EF08MA06: Foca na resolução e elaboração de problemas que envolvam o cálculo do valor numérico de expressões algébricas.

EF08MA07: (...) associação entre expressões algébricas e padrões, e à generalização de propriedades, incluindo o trabalho com monômios.

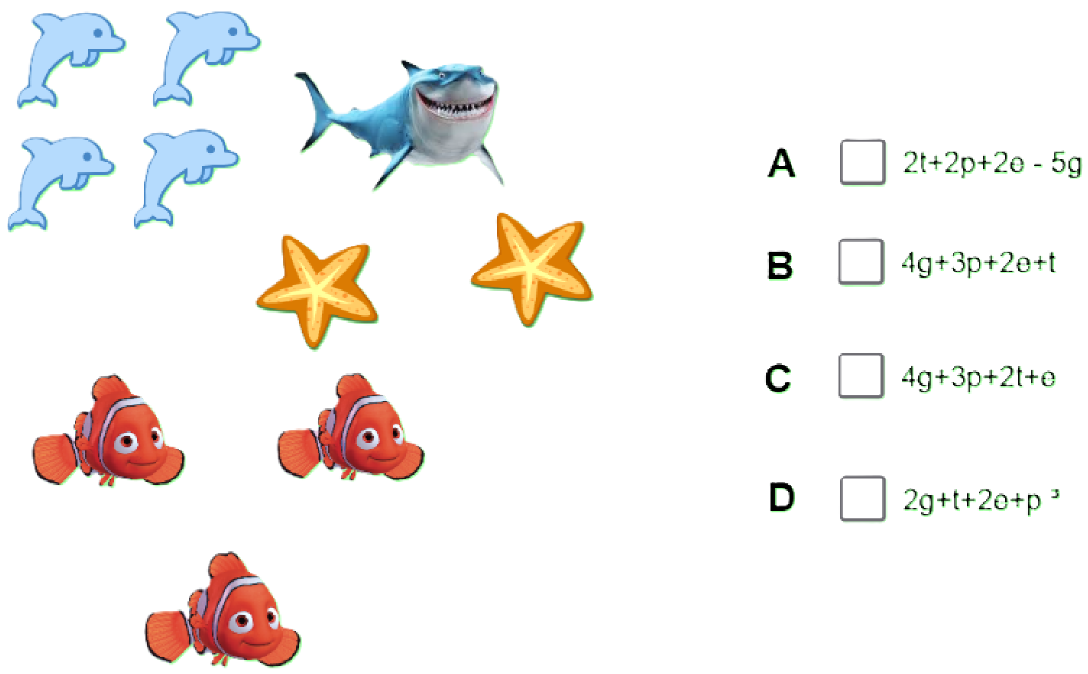
EF08MA08: Aborda a aplicação de expressões algébricas na resolução de problemas representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas.

Competências Gerais da BNCC

O desenvolvimento destas habilidades contribui para competências matemáticas mais amplas, como a utilização de estratégias e conceitos matemáticos para resolver problemas e a compreensão de diferentes registros de representação matemática.

Atividade lúdica de Polinômios – 8º ano: Vida no mar

Figura 37: Layout do jogo



Fonte: Autor

A atividade busca familiarizar os alunos com a escrita algébrica, transformando figuras conhecidas em expressões matemáticas. Para realizá-la, a turma deve conhecer números quadrados, monômios, polinômios e operações básicas.

Cada figura é representada por um monômio: o coeficiente indica quantas vezes a figura aparece e a letra corresponde à inicial do seu nome. Exemplo: três peixes → 3p. Somando os monômios, o aluno forma o polinômio que representa toda a cena.

Nas fases finais, os alunos devem somar perímetros de polígonos e, por fim, áreas de dois retângulos, sendo um deles um quadrado com um furo interno.

Os cálculos devem ser feitos no caderno e a resposta escolhida no aparelho eletrônico acessado pelo aluno. Caso a escola não tenha sala de informática, o professor pode projetar o jogo pelo seu dispositivo e interagir com a turma, escolhendo coletivamente a resposta correta.

Habilidades BNCC

EF08MA06: Foca na resolução e elaboração de problemas que envolvam o cálculo do valor numérico de expressões algébricas.

Competências Gerais da BNCC

O desenvolvimento destas habilidades contribui para competências matemáticas mais amplas, como a utilização de estratégias e conceitos matemáticos para resolver problemas e a compreensão de diferentes registros de representação matemática.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho nasceu do incomodo como professor do Ensino Fundamental ao perceber que a introdução à álgebra no 8º ano é um grande obstáculo a ser vencido pelos alunos. Os polinômios passam ser o grande vilão e piadas envolvendo matemática, a não aprendizagem e estas estruturas passam ser constantes, como “quando matemática era somente as quatro operações tudo ia bem, a partir do momento que se envolveu com português, complicou”, fazendo alusão ao uso de letras.

A aridez do tema unida a abstração e a ausência de uma possível materialização das atividades para os alunos tornam o estudo dos polinômios menos atrativo e complicado.

A fim de compreender a temática de maneira mais profunda foi necessário recorrer aos manuais de álgebra de níveis universitários e revisar conteúdos, como por exemplo, relembrar que os polinômios, munidos de duais operações, a adição e a multiplicação, formam uma estrutura algébrica chamado corpo.

Estes estudos deram origem a um questionamento que tentamos responder no segundo capitulo: “o que foi aprendido na formação dos professores dialoga com os polinômios que ensinamos no 8º ano?”. Percebemos que a linguagem muda, mas que conhecer de maneira formal a teoria ajuda muito o professor na confecção de materiais sem erros de conteúdo, assim como permite transitar com mais segurança pelo mundo da álgebra dos polinômios.

Estes jogos sugerem o aluno como protagonista do conhecimento e permitem também, pela natureza da própria tarefa, a necessidade de se trabalhar de maneira colaborativa, apresentando os resultados obtidos a fim da participação critica de todos.

Na intenção de contribuir para a formação continuada dos professores é que apresentamos neste trabalho estas reflexões em forma de considerações finais a fim de que professores em formação completem tais ideias e as adaptem para seus espaços escolares e seus personagens.

Futuramente pretendemos estender esta pesquisa para o campo mais abstrato da álgebra e chegar à praticas argumentativas que caracterizam uma possível demonstração do teorema fundamental da álgebra para professores.

6 REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

ALMEIDA, F. J. **Escola, currículo, tecnologia e desenvolvimento sustentável.** e-Curriculum, v. 7, n. 1, 2011.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba, Ed. UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. d. Q. e. S. **Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos**. Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT), UFSC, v. 3, n. 6, 2008.

BIANCHINI, Edwaldo Roque. **Matemática**. 7ª Ed, São Paulo: Moderna, 2011.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma.** São Paulo, PROEM, 2011.

DUVAL, R. **Semioses e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais.** São Paulo, Editora Livraria da Física, 2009.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra.** Rio de Janeiro, 2ª Ed, Editora SBM, 1990.

HEFEZ, A. e VILELA, M.L. **Polinômios e Equações Algébricas.** Rio de Janeiro, 1ª Ed, editora SBM, 2015.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade: 8º ano.** 10ª Ed. São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2022.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. **Matemática Compreensão e Prática**. 3ª Ed, São Paulo: Moderna, 2015.