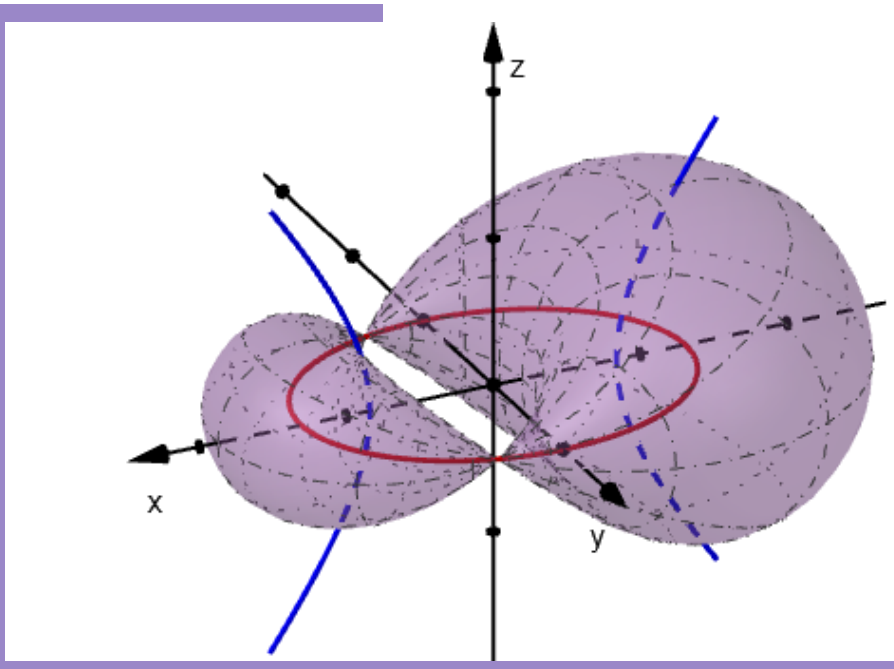
Edição 2 - 2026

TRAJETÓRIAS

História da Matemática e Divulgação Científica

AS CICLIDES DE DUPIN

História, geometria e visualização dinâmica no GeoGebra.



TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO: Entrevistas com matemáticos brasileiros: história, tecnologia e ensino.

CHARLES DUPIN: Um geômetra do século XIX e a introdução das ciclides.

FORMAS DAS CICLIDES: Toro, fuso, chifre e outras configurações.

LINHA DO TEMPO: Do século XIX à retomada computacional.

PRÁTICA EM SALA DE AULA: GeoGebra, modelos digitais e impressão 3D como recursos didáticos.

VICTÓRIA GENTIL ANDRADE • DANIEL FELIPE N. MARTINS

IMPERIAI editora

TRAJETÓRIAS - HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA

AS CICLIDES DE DUPIN:

HISTÓRIA, GEOMETRIA E VISUALIZAÇÃO DINÂMICA NO GEOGEBRA.

VICTÓRIA GENTIL ANDRADE

DANIEL FELIPE N. MARTINS

TRAJETÓRIAS - HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA

AS CICLIDES DE DUPIN:

HISTÓRIA, GEOMETRIA E VISUALIZAÇÃO DINÂMICA NO GEOGEBRA.

2ª Edição

IMPERIAI editora

Rio de Janeiro, 2026

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

An553 Andrade, Victória Gentil

As ciclides de dupin : história, geometria e visualização dinâmica no geogebra / Victória Gentil Andrade ; Daniel Felipe n. Martins. – 2. ed. – Rio de Janeiro : Imperial Editora, 2026.

56p.

Bibliografia: p. 54 - 55.

ISBN: 978-65-5930-393-9

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ciclides de Dupin. 3. Matemática - História. 4. Geometria diferencial. 5. Formação de professores. I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

RESUMO

ANDRADE, Victória Gentil; MARTINS, Daniel Felipe Neves. Trajetórias – História da Matemática e Divulgação Científica. As ciclides de Dupin: história, geometria e visualização dinâmica no GeoGebra. 2. ed. Rio de Janeiro: Colégio Pedro II, 2026.

Este produto educacional consiste na segunda edição da revista digital de divulgação científica **Trajetórias – História da Matemática e Divulgação Científica,** intitulada **As Ciclides de Dupin: História, Geometria e Visualização Dinâmica no GeoGebra.** Desenvolvido no âmbito do PROFMAT, o material busca aproximar professores de Matemática, licenciandos, estudantes e leitores interessados de um objeto geométrico pouco presente na formação inicial, articulando História da Matemática, Geometria Diferencial, visualização e tecnologias digitais. A edição apresenta o desenvolvimento histórico das ciclides a partir dos trabalhos de Charles Dupin e de contribuições posteriores de matemáticos como James Clerk Maxwell, Arthur Cayley e Gaston Darboux, além de explorar propriedades geométricas dessas superfícies, suas diferentes configurações, curvas focais e famílias de esferas. O material reúne textos históricos e matemáticos, imagens, atividades orientadas, construções dinâmicas no GeoGebra 3D, entrevistas com pesquisadores e propostas envolvendo modelos e impressão 3D. A revista foi elaborada como recurso de formação e divulgação científica, buscando ampliar a cultura geométrica do professor e favorecer diferentes formas de aproximação com a Geometria Diferencial por meio da articulação entre história, linguagem visual, investigação matemática e tecnologia.

Palavras-chave: ciclides de Dupin; história da matemática; geometria diferencial; divulgação científica; formação de professores; visualização geométrica; GeoGebra 3D.

SUMÁRIO

Editorial — p. 07

1. Seção Histórica

Charles Dupin (1784–1873) — p. 08
A obra de 1822 — p. 09
As ciclides na obra de Dupin — p. 10
Evolução das ciclides — p. 11

2. Seção Matemática

Ciclides de Dupin como objeto matemático — p. 12
Superfície algébrica de grau quatro e inversão esférica — p. 13
Inversão esférica — p. 14
Ciclide como envoltória de esferas — p. 15
A ciclide de Dupin por meio das curvas focais — p. 16
Elipse focal e hipérbole focal — p. 17
Parâmetros e equação da ciclide — p. 18
Parametrização e construção dinâmica no GeoGebra 3D — p. 19
Formas da ciclide de Dupin — p. 20
Ciclide em anel — p. 21
Ciclide em chifre — p. 22
Ciclide em fuso — p. 23
Ciclide em fuso simétrico — p. 24
Toro — p. 25
Ciclide em anel crítico — p. 26
Ciclide em fuso interno — p. 27
Síntese das configurações das ciclides — p. 28
E as ciclides parabólicas? — p. 29

3. Trajetórias em Diálogo — p. 30

Entrevista com Celso Costa — p. 31
Entrevista com Humberto Bortolossi — p. 39
Entrevista com Felipe Aizic — p. 42
Conversa com Eduardo Madeiro — p. 47

4. Seção Didática

Da equação ao objeto — p. 51
Do modelo 3D ao GeoGebra — p. 52

Conclusão — p. 53

Referências — p. 54

Ficha Técnica — p. 56

EDITORIAL

É com grande alegria que apresento a segunda edição da revista Trajetórias – História da Matemática e Divulgação Científica.

Esta edição nasce a partir de minha pesquisa de mestrado e do desejo de aproximar professores, estudantes e leitores curiosos de um objeto geométrico tão belo quanto desafiador: as ciclides de Dupin. Ao longo deste material, buscamos mostrar que a Matemática não é apenas um conjunto de fórmulas e definições, mas também uma produção histórica, visual e criativa, construída por diferentes sujeitos ao longo do tempo.

O tema desta edição são as ciclides de Dupin, superfícies estudadas no século XIX e relacionadas a linhas de curvatura, famílias de esferas, curvas focais e transformações geométricas. A partir dos trabalhos de Charles Dupin e de outros matemáticos que ampliaram esse campo de estudo, como Maxwell, Cayley e Darboux, essas superfícies revelam uma rica articulação entre Geometria Diferencial, visualização matemática e tecnologia.

Nesta revista, o leitor encontrará uma breve trajetória histórica das ciclides, uma apresentação visual de suas principais formas, discussões sobre suas propriedades geométricas e propostas de exploração com o GeoGebra. Além disso, a edição também apresenta possibilidades de uso didático, incluindo modelos digitais e impressões 3D como recursos para tornar a geometria das superfícies mais acessível, manipulável e significativa.

Nosso propósito é simples e profundo: mostrar que objetos matemáticos aparentemente abstratos podem se tornar mais compreensíveis quando articulamos história, imagem, tecnologia e ensino. Que cada página seja um convite à descoberta, à curiosidade e ao encantamento diante das formas que a Matemática é capaz de produzir.

Boa leitura!



Victória Gentil
Editora

+55 21 99605-8507

prof.victoriagentil@gmail.com

SEÇÃO HISTÓRICA:

CHARLES DUPIN (1784–1873)

O geômetra por trás das ciclides

Charles Dupin foi um matemático, engenheiro, professor e político francês nascido em Varzy, em 1784. Sua formação científica esteve ligada à **École Polytechnique**, onde ingressou em 1801, e ao ambiente intelectual marcado pela influência de Gaspard Monge, um dos nomes centrais da geometria francesa no início do século XIX.

Seus primeiros trabalhos seguiram a tradição da geometria diferencial e da geometria aplicada. Em ***Développements de géométrie,*** publicado em 1813, Dupin apresentou ideias importantes sobre superfícies, tangentes conjugadas e a **indicatriz** que hoje leva seu nome. Já em ***Applications de géométrie et de méchanique***, de 1822, reuniu estudos voltados a problemas de aplicação, como estabilidade de corpos flutuantes, obras de engenharia, óptica, reflexão e refração da luz.



Figura 1 - Charles Dupin

Linha do Tempo de Dupin

- **1784** — Nasce em Varzy, França.
- **1801** — Ingressa na École Polytechnique.
- **1813** — Publica *Développements de géométrie*
- **1818** — Torna-se professor no Conservatoire National des Arts et Métiers, onde atuaria até 1854.
- **1822** — Publica *Applications de géométrie et de méchanique.*
- **1873** — Falece na França.

É nessa obra de 1822 que Dupin introduz a noção de **ciclide**, superfície que também passaria a carregar seu nome. As ciclides de Dupin surgem, portanto, em um contexto no qual a geometria era pensada não apenas como teoria abstrata, mas como ferramenta para compreender formas, movimentos, fenômenos físicos e problemas ligados à engenharia e à mecânica.

Dupin não estudou apenas figuras isoladas. Seu trabalho ajudou a desenvolver uma forma de pensar as superfícies por meio de suas curvaturas, linhas especiais e relações geométricas.

Por isso, seu nome permanece associado à **indicatriz de Dupin,** ao **teorema de Dupin** e às **ciclides de Dupin.**

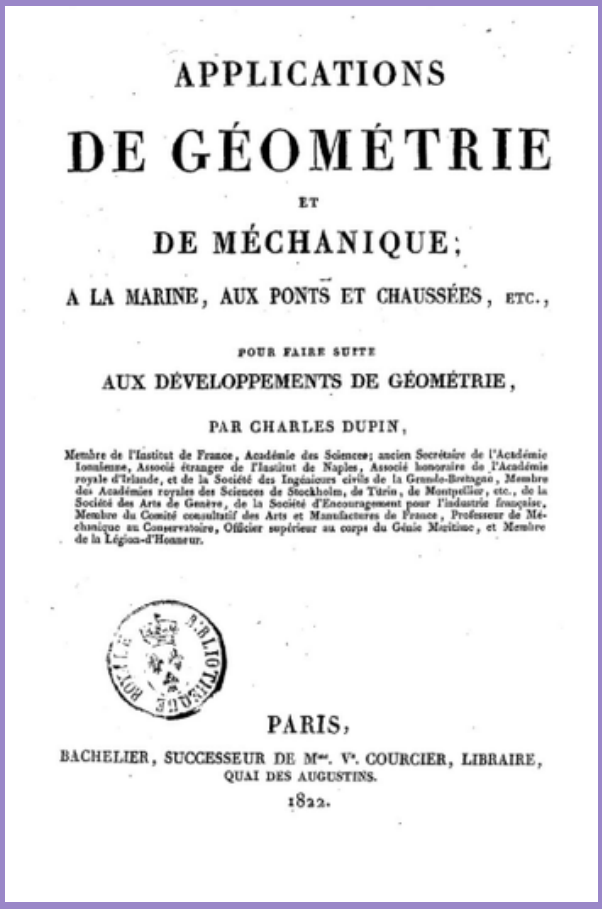
Para além das ciclides

Charles Dupin não se destacou apenas na geometria. Também atuou na vida política francesa, ocupando cargos públicos e defendendo temas ligados à educação, à indústria e ao progresso técnico. Sua trajetória revela um intelectual que circulava entre a pesquisa matemática e os debates sobre o futuro da sociedade francesa.

SEÇÃO HISTÓRICA:

A OBRA DE 1822

Geometria, mecânica e o surgimento das ciclides



APPLICATIONS

DE GÉOMÉTRIE

ET

DE MÉCHANIQUE;

A LA MARINE, AUX PONTS ET CHAUSSÉES, ETC.,

POUR FAIRE SUITE

AUX DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE,

PAR CHARLES DUPIN,

Membre de l'Institut de France, Académie des Sciences; ancien Secrétaire de l'Académie Ionienne, Associé étranger de l'Institut de Naples, Associé honoraire de l'Académie royale d'Irlande, et de la Société des Ingénieurs civils de la Grande-Bretagne, Membre des Académies royales des Sciences de Stockholm, de Turin, de Montpellier, etc., de la Société des Arts de Genève, de la Société d'Encouragement pour l'industrie française, Membre du Comité consultatif des Arts et Manufactures de France, Professeur de Mécanique au Conservatoire, Officier supérieur au corps du Génie Maritime, et Membre de la Légion-d'Honneur.

PARIS,

BACHELIER, SUCCESSEUR DE Mme. Ve. COURCIER, LIBRAIRE, QUAI DES AUGUSTINS.

1822.

Figura 2 - Folha de rosto da obra Applications de géométrie et de mécanique, publicada por Charles Dupin em 1822.

Fonte: Dupin (1822).

Publicada em 1822, ***Applications de géométrie et de méchanique*** reúne estudos em que Charles Dupin procura aplicar a geometria a problemas científicos e técnicos. A obra aborda temas ligados à marinha, à estabilidade dos corpos flutuantes, à estrutura dos navios, ao traçado de estradas, aos cortes e aterros e aos caminhos seguidos pela luz e pelo som nos fenômenos de reflexão e refração.

Nesse contexto, a geometria aparece como uma ferramenta para compreender formas, movimentos e fenômenos físicos. É também nessa obra que Dupin emprega o termo **"cyclide"**, ao estudar superfícies associadas a famílias de esferas e a linhas de curvatura circulares.

Assim, as **ciclides** não surgem como figuras isoladas, mas como parte de uma investigação mais ampla sobre superfícies, curvaturas, tangências e aplicações geométricas. A obra revela a preocupação de Dupin em aproximar a teoria geométrica de problemas concretos da mecânica, da óptica e da engenharia.

FICHA DA OBRA

Título: *Applications de géométrie et de méchanique*
Autor: Charles Dupin
Publicação: Paris, Bachelier, 1822
Área: Geometria aplicada e mecânica
Temas abordados: marinha, pontes e estradas, óptica e estudo das superfícies

SEÇÃO HISTÓRICA:

AS CICLIDES NA OBRA DE DUPIN

O § III da IVª Memória e a geração por esferas

§ III. Propriétés des surfaces cyclides, ainsi que des courbes et des surfaces du second degré.

Exposition préliminaire de quelques propriétés des surfaces *cyclides*, c'est-à-dire, des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont des cercles. p. 200
Exemples particuliers de quelques surfaces comprises dans cette famille : la sphère. p. 201
Le cône et le cylindre de révolution. p. 201
Génération complète des surfaces cyclides. p. 201
Conditions définitives de la génération des surfaces cyclides. p. 206
Propriétés des lignes, lieux des centres de courbure des surfaces cyclides. p. 206
Elles sont respectivement sur deux plans qui se coupent à angle droit. p. 206
Chacune d'elles est le sommet d'un cône de révolution ayant l'autre pour base. p. 207
Équidifférence des arêtes de ces cônes, ainsi terminées entre cette base et ce sommet. p. 207
Théorème. *Dans tous les cônes dont les sommets sont placés sur la première courbe des centres, et dont la base commune est la seconde courbe des centres, la différence des deux drêtes qui aboutissent respectivement à deux points donnés de la base, cette différence, dis-je, est la même pour tous les cônes.* p. 208
Génération réciproque des deux lignes servant de base à ces cônes, par des rayons vecteurs à différences constantes. p. 208
Nouvelles propriétés des courbes du second degré. p. 209
Système général des foyers de ces courbes. p. 209
Génération de l'hyperbole par une infinité de foyers et de rayons vecteurs. p. 209
Génération de l'ellipse par des rayons vecteurs à *somme constante*, et par d'autres rayons vecteurs à *différence constante*. p. 210
Génération de la parabole par une infinité de foyers. p. 210

Figura 3 – Sumário do § III da IVª Memória de *Applications de géométrie et de méchanique*, dedicado às propriedades das superfícies cíclidas.

Fonte: Dupin (1822).

Nas páginas 200 a 210 da IVª Memória, Dupin define as superfícies cíclidas como aquelas cujas linhas de curvatura são círculos. Ele também descreve sua geração por famílias de esferas, especialmente pela condição de uma esfera de raio variável tangenciar três esferas fixas.

A partir dessa construção, Dupin relaciona os centros de curvatura das ciclides a curvas do segundo grau. Mais tarde, Maxwell e Cayley aprofundariam essa leitura por meio das curvas focais, contribuindo para novas interpretações geométricas e computacionais dessas superfícies.

O que aparece nas p. 200-210?

- Definição das superfícies cíclidas
- Linhas de curvatura circulares
- Esfera, cone e cilindro como casos particulares
- Geração por famílias de esferas
- Esfera de raio variável tangente a três esferas fixas
- Centros de curvatura organizados em cônicas
- Curvas do segundo grau em planos perpendiculares
- Ponte para as curvas focais

SEÇÃO HISTÓRICA:

EVOLUÇÃO DAS CICLIDES

Da Geometria Diferencial do século XIX à retomada computacional



Gaspard Monge

1795

Publica ***Application de l'analyse à la géométrie***, obra importante para a consolidação do estudo geométrico das superfícies.



Carl Frederich Gauss

1827

Com a obra ***Disquisitiones generales circa superficies curvas***, Gauss estabelece bases importantes para compreender as superfícies a partir de suas próprias propriedades intrínsecas.



Arthur Cayley

1873

Também publica ***On the Cyclide*,** aprofundando a interpretação das ciclides por curvas focais e formulações algébricas.

1822

Publica ***Applications de géométrie et de mécanique*,** obra em que aparecem ideias ligadas às linhas de curvatura, às superfícies de canal e às ciclides.



Charles Dupin

1868

Publica ***On the Cyclide*** e retoma o estudo das ciclides por meio da inversão geométrica e de famílias de esferas.



James Clerk Maxwell

1873

Publica ***Sur une classe remarquable*** de courbes et de surfaces algébriques, ampliando e generalizando o estudo das ciclides.



Jean-Gaston Darboux



Retomada Computacional

1990

Na década de 1990, as ciclides passaram a ser retomadas em contextos de modelagem geométrica computacional e desenho assistido por computador, como exemplifica o artigo de M. J. Pratt sobre ciclides em ***Computer Aided Geometric Design*.**

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

As ciclides podem ser descritas de quatro formas principais:

A ciclide de Dupin é uma superfície estudada por Charles Dupin no século XIX. Sua forma pode lembrar um toro deformado, mas sua estrutura matemática envolve curvas focais, famílias de esferas tangentes e linhas de curvatura circulares.

As ciclides de Dupin aparecem na Geometria Diferencial como superfícies cujas linhas de curvatura são circunferências ou retas. Essa propriedade permite relacionar a superfície a construções geométricas clássicas e a modelos dinâmicos em ambientes como o GeoGebra 3D.

Uma ciclide pode ser observada de diferentes maneiras:

- como uma superfície algébrica de grau quatro;
- como imagem de superfícies mais simples por inversão esférica;
- como envoltória de uma família de esferas.
- como superfície associada a curvas focais;

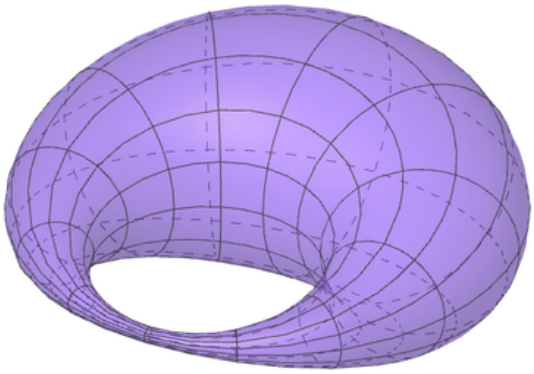


Figura 3 - Ciclide do tipo anel

UM OBJETO, VÁRIAS REPRESENTAÇÕES

A ciclide de Dupin pode ser estudada por diferentes caminhos. Cada representação destaca um aspecto da superfície:

a equação mostra sua natureza algébrica;
a inversão esférica relaciona a ciclide do toro;
as esferas geradoras mostram sua construção por tangência.
as curvas focais revelam sua organização interna;

Ao longo da seção, essas ideias serão retomadas com imagens e construções no GeoGebra 3D.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

1. Superfície algébrica de grau quatro

A ciclide como uma superfície quártica

Do ponto de vista algébrico, uma ciclide de Dupin pode ser descrita por uma equação cartesiana implícita de grau quatro. Superfícies desse tipo são chamadas de quárticas.

Uma forma geral de representar essa família é:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D\right)^2 = R^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

O QUE ESSA EQUAÇÃO MOSTRA?

A equação reúne as coordenadas **x**, **y** e **z** em uma expressão de grau quatro. Os parâmetros A, B, C, D e R controlam aspectos da superfície, como posição, escala e configuração no espaço.

2. Imagem por inversão esférica

Outra forma de compreender as ciclides de Dupin é por meio da inversão esférica. Em 1868, Maxwell dedicou uma seção de seu artigo On the Cyclide à inversão da ciclide e observou que, ao aplicar esse tipo de transformação, a imagem obtida continua pertencendo à mesma família de superfícies.

De modo geral, a inversão esférica transforma pontos do espaço a partir de uma esfera fixa escolhida como referência. No caso das ciclides, Maxwell destaca que essa transformação preserva a família das ciclides: uma ciclide invertida torna-se novamente uma ciclide.

Como o toro pode ser compreendido como um caso particular de ciclide de Dupin, essa propriedade ajuda a relacionar o toro, as superfícies de revolução e outras configurações da mesma família. Assim, a inversão esférica oferece uma maneira de visualizar como formas aparentemente diferentes podem estar conectadas por uma transformação geométrica.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

2. Imagem por inversão esférica

A inversão esférica não deve ser entendida apenas como uma mudança visual da superfície. Trata-se de uma transformação geométrica que altera a posição dos pontos no espaço, podendo modificar fortemente a aparência da superfície obtida.

No caso das ciclides de Dupin, Maxwell observa que a inversão de uma ciclide produz novamente uma ciclide. Isso significa que a transformação pode alterar sua forma, mas mantém a superfície dentro da mesma família geométrica.

NA FONTE ORIGINAL:

"every cyclide similarly inverted becomes another cyclide."

Tradução livre:

"toda ciclide, invertida de modo semelhante, torna-se outra ciclide."

Fonte: Maxwell (1868 p. 119).

Em alguns casos particulares, Maxwell também relaciona a ciclide invertida a superfícies de revolução. Essa observação é importante porque permite compreender o toro como uma forma especial dentro da família das ciclides de Dupin.

As imagens à direita apresentam uma construção dinâmica no GeoGebra 3D com caráter exploratório.

A esfera azul representa a esfera utilizada como referência para a inversão, enquanto a superfície inicial e sua imagem ajudam a visualizar como uma transformação geométrica pode modificar a aparência da superfície.

A construção tem função ilustrativa e não substitui a formulação algébrica apresentada por Maxwell.

$O = (d, 0, 0)$: centro da esfera de inversão

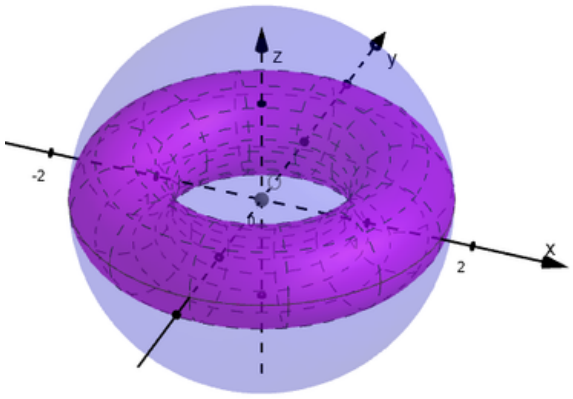


Figura 4.1 - $d = 0$

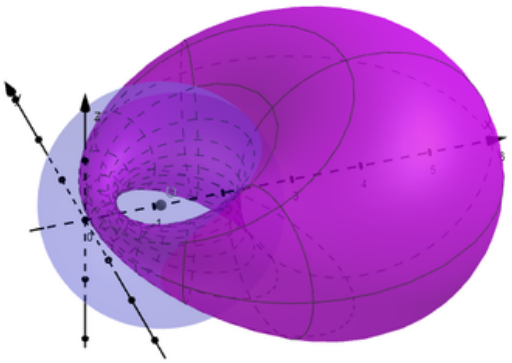


Figura 4.2- $d = 1$

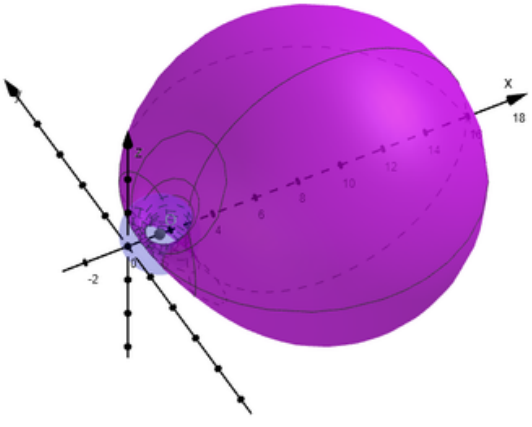


Figura 4.3- $d = 1{,}5$

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

2. Ciclide como envoltória de esferas

Uma maneira geométrica de compreender a ciclide de Dupin é vê-la como uma superfície de canal, isto é, como a envoltória associada a uma família de esferas. Nessa construção, as esferas variam de tamanho ao longo de uma curva focal, e a superfície surge como o envelope dessa família.

Na configuração apresentada, utilizamos uma ciclide do tipo anel para fins didáticos. As imagens mostram a superfície sendo formada em torno da família de esferas, permitindo observar a relação entre a elipse focal, os raios das esferas e a forma final da ciclide.

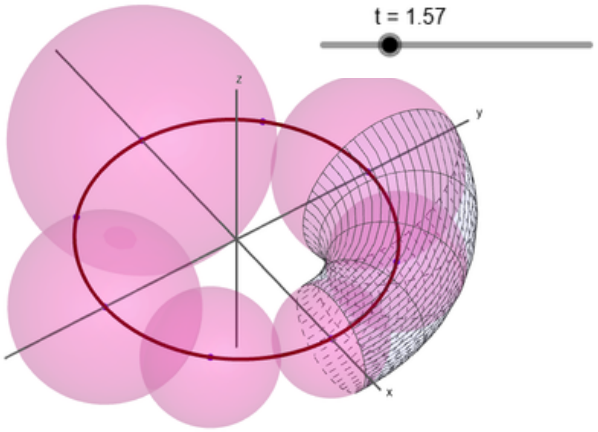


Figura 5.1 – Formação da ciclide até $t = \frac{\pi}{2}$.

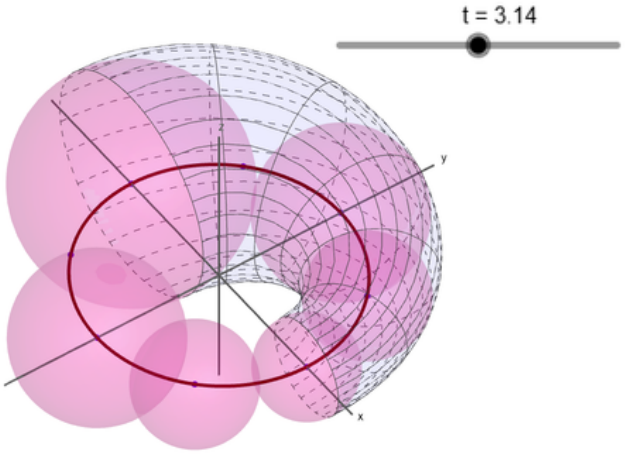


Figura 5.2 – Formação da ciclide até $t = \pi$.

OBSERVAÇÃO SOBRE A FIGURA

As esferas destacadas são uma amostra da família associada à construção da ciclide.

Elas podem se intersectar entre si; o objetivo da imagem é mostrar a ciclide como superfície envoltória relacionada a essa família de esferas.

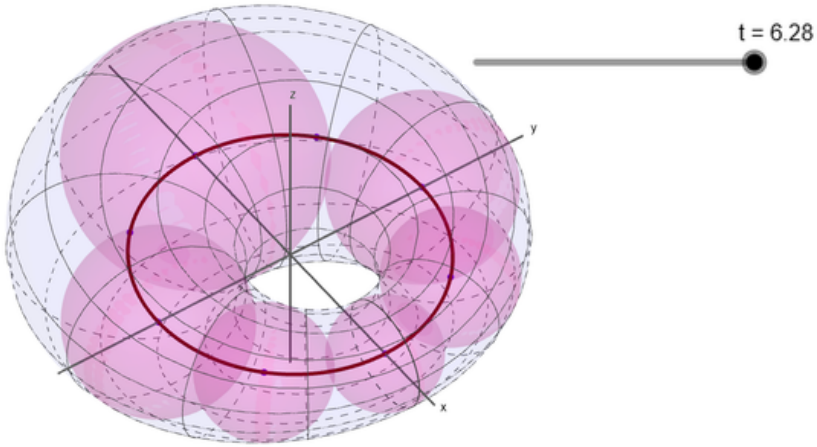


Figura 5.4 – Formação completa da ciclide para $t = 2\pi$.

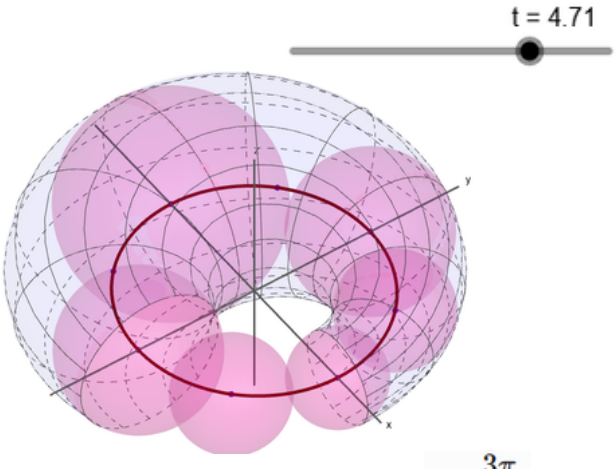


Figura 5.3 – Formação da ciclide até $t = \frac{3\pi}{2}$.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

4. A ciclide de Dupin por meio das curvas focais

Na construção elíptico-hiperbólica da ciclide de Dupin, aparecem duas curvas focais principais: uma elipse e uma hipérbole.

Essas curvas estão situadas em planos ortogonais e ajudam a organizar a superfície no espaço. A elipse focal aparece no plano horizontal, enquanto a hipérbole focal aparece em um plano vertical.

Elipse focal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hipérbole focal

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

RELAÇÃO ENTRE OS PARÂMETROS

Na construção utilizada nesta revista, os parâmetros satisfazem:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Assim, os valores de b e c determinam o valor de a e influenciam a forma da elipse, da hipérbole e da própria ciclide.

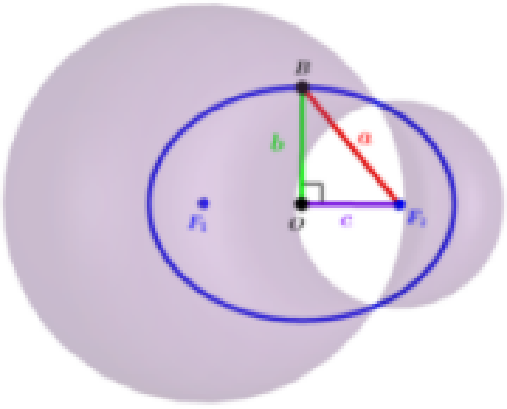


Figura 6.1 - Elipse focal associada à ciclide de Dupin, com destaque para os parâmetros a, b e c.

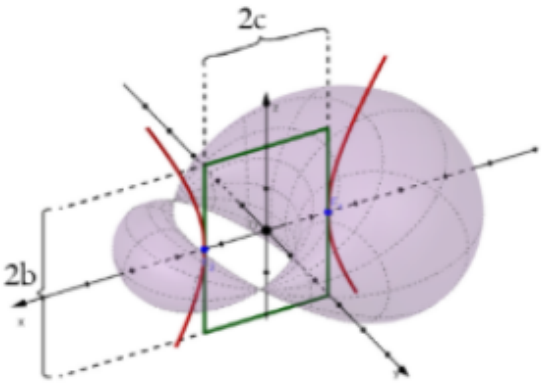


Figura 6.2 - Hipérbole focal associada à ciclide de Dupin, com retângulo auxiliar de dimensões 2c e 2b.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

4. A ciclide de Dupin por meio das curvas focais

Quando observamos a elipse focal e a hipérbole focal juntas, percebemos que elas ajudam a organizar a estrutura da ciclide de Dupin no espaço.

Na construção utilizada nesta revista, a elipse focal aparece destacada em vermelho, no plano horizontal. A hipérbole focal aparece em azul, em um plano vertical.

Essas curvas estão situadas em planos ortogonais e se relacionam por meio dos parâmetros a, b e c.

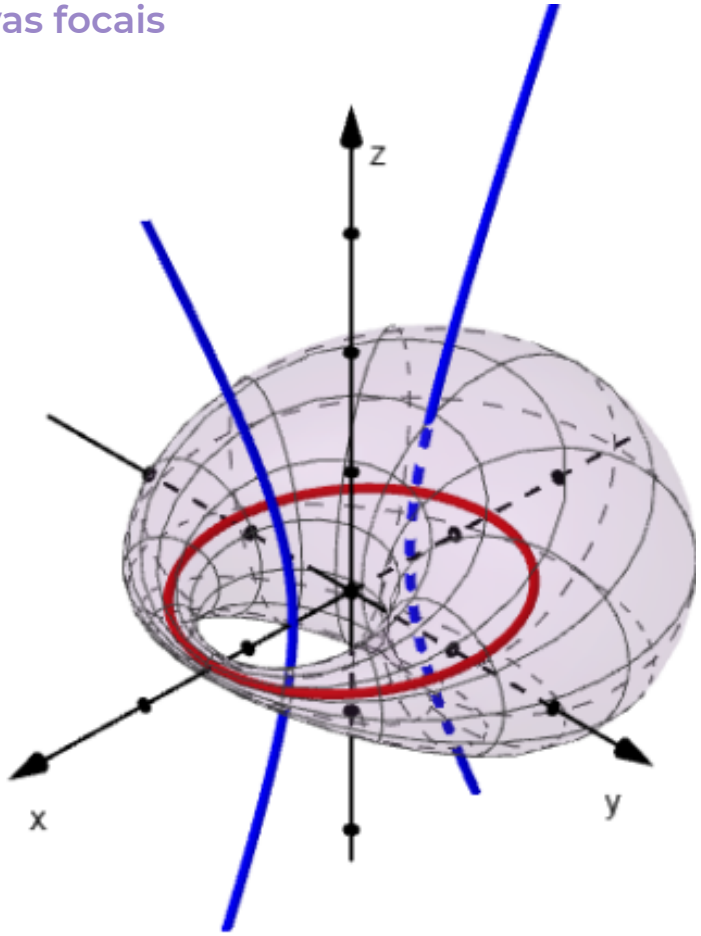


Figura 7 - Elipse focal e hipérbole focal associadas à ciclide de Dupin do tipo anel.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Em 1822, Charles Dupin já indicava elementos associados às curvas focais ao descrever geometricamente as ciclides por meio de famílias de esferas e propriedades de curvatura. No entanto, seu tratamento permaneceu principalmente geométrico.

Décadas depois, Maxwell retomou essas superfícies em 1868, aprofundando a relação entre ciclides, esferas geradoras e curvas focais.

Em 1873, Cayley avançou na formalização algébrica do tema, apresentando equações e formulações que ajudaram a consolidar o estudo das ciclides no século XIX.

O QUE OBSERVAR NA IMAGEM?

- a elipse focal em vermelho;
- a hipérbole focal em azul;
- os planos ortogonais em que as curvas aparecem;
- a ciclide organizada em torno dessas curvas.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

4. A ciclide de Dupin por meio das curvas focais

A partir dos parâmetros associados às curvas focais, podemos escrever uma equação implícita para a ciclide de Dupin.

$$\left(x^2+y^2+z^2+b^2-d^2\right)^2 = 4\left((ax-cd)^2+b^2y^2\right)$$

Essa equação descreve a ciclide de Dupin em função dos mesmos parâmetros que aparecem na construção focal.

Assim, a superfície não é apresentada separadamente das curvas focais: sua forma é organizada pelos parâmetros que controlam a elipse, a hipérbole e a disposição geométrica associada à ciclide.

O papel do parâmetro d

O parâmetro ***d*** atua na construção das esferas associadas à ciclide.

Na imagem, aparecem os comprimentos d, d+c e | d−c | , que ajudam a visualizar como esse parâmetro interfere na geometria da superfície.

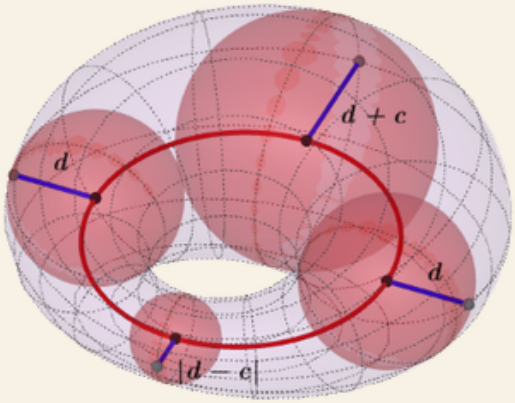


Figura 8.1 — Esferas associadas à construção da ciclide de Dupin.

Como cada parâmetro atua

a **: é o semieixo maior da elipse focal. Na construção, ele não é livre, pois depende de b e c pela relação.**

$$a^2 = b^2 + c^2$$

b **: atua como semieixo menor da elipse focal e também aparece na hipérbole focal. Sua variação interfere na abertura das curvas e na forma geral da ciclide.**

c **: representa a distância focal da elipse e aparece como parâmetro da hipérbole focal. Junto com b, determina o valor de a.**

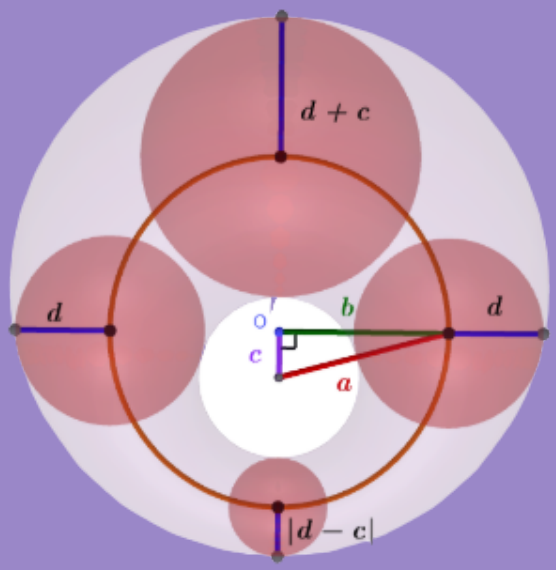


Figura 8.2 — Elipse focal associada à ciclide de Dupin, destacando a relação entre os parâmetros a, b e c que determinam parte da estrutura da superfície.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

CICLIDES DE DUPIN COMO OBJETO MATEMÁTICO

4. A ciclide de Dupin por meio das curvas focais

Para construir a ciclide no GeoGebra 3D, foi utilizada uma parametrização disponível no MathCurve, adaptada para a construção dinâmica da superfície.
Nessa representação, a ciclide é descrita pelas coordenadas x(u,v), y(u,v) e z(u,v), em função dos parâmetros a, b, c e d.

$$x(u,v) = \frac{d(c - a\cos u\cos v) + b^2\cos u}{a - c\cos u\cos v}$$

$$y(u,v) = \frac{b\sin u(a - d\cos v)}{a - c\cos u\cos v}$$

$$z(u,v) = \frac{b\sin v(c\cos u - d)}{a - c\cos u\cos v}$$

A **parametrização** permite que a superfície seja gerada ponto a ponto no espaço tridimensional. Ao variar os parâmetros no **GeoGebra**, a forma da ciclide se modifica dinamicamente.

Parâmetros	Curvas focais	
b = 5.5 c = 5.8 d = 2.9 $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 7.99$	Hipérbole	Elipse
	$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	$\frac{x^2}{5.8^2} - \frac{z^2}{5.5^2} = 1$	$\frac{x^2}{7.99^2} + \frac{y^2}{5.5^2} = 1$
Equação implícita da superfície		
$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - d^2)^2 = 4(a\cdot x - c\cdot d)^2 + 4\cdot b^2\cdot y^2$		
$(x^2 + y^2 + z^2 + 5.5^2 - 2.9^2)^2 = 4(7.99\cdot x - 5.8\cdot 2.9)^2 + 4\cdot 5.5^2\cdot y^2$		
Equação paramétrica da superfície		
$x(u,v) = \frac{d(c - a\cos u\cos v) + b^2\cos u}{a - c\cos u\cos v}$ $y(u,v) = \frac{b\sin u(a - d\cos v)}{a - c\cos u\cos v}$ $z(u,v) = \frac{b\sin v(c\cos u - d)}{a - c\cos u\cos v}$	$x(u,v) = \frac{2.9(5.8 - 7.99\cos u\cos v) + 5.5^2\cos u}{7.99 - 5.8\cos u\cos v}$ $y(u,v) = \frac{5.5\sin u(7.99 - 2.9\cos v)}{7.99 - 5.8\cos u\cos v}$ $z(u,v) = \frac{5.5\sin v(5.8\cos u - 2.9)}{7.99 - 5.8\cos u\cos v}$	

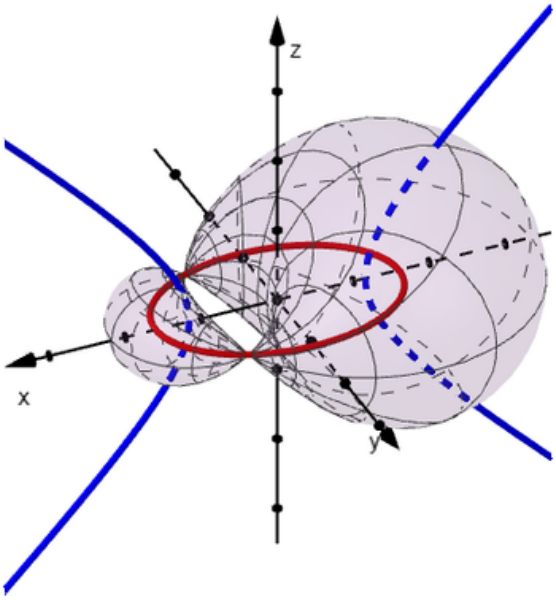


Figura 9 — Parametrização da ciclide de Dupin e construção dinâmica no GeoGebra 3D.

ACESSE E MANIPULE

clique aqui

A construção dinâmica permite alterar os parâmetros da ciclide e observar, em tempo real, as mudanças na superfície.

Escaneie o QR Code ou acesse o link para explorar a construção no GeoGebra 3D.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

Ao variar os parâmetros da construção, a ciclide de Dupin pode assumir diferentes configurações geométricas. Essas formas ajudam a visualizar como pequenas mudanças nos valores de ***b***, ***c*** e ***d*** alteram a aparência da superfície no espaço.

Nesta revista, utilizamos uma **nomenclatura descritiva** e **didática** para organizar as principais configurações observadas nas construções dinâmicas no **GeoGebra 3D.**

Antes de apresentar as diferentes **formas da ciclide de Dupin,** vamos observar como os raios das esferas associadas à construção variam de acordo com os parâmetros ***c*** e ***d.***

Para facilitar a visualização, utilizamos inicialmente uma **ciclide do tipo anel.** Nessa configuração, a superfície apresenta abertura central e a família de esferas pode ser observada com mais clareza, sem que a imagem fique excessivamente sobreposta.

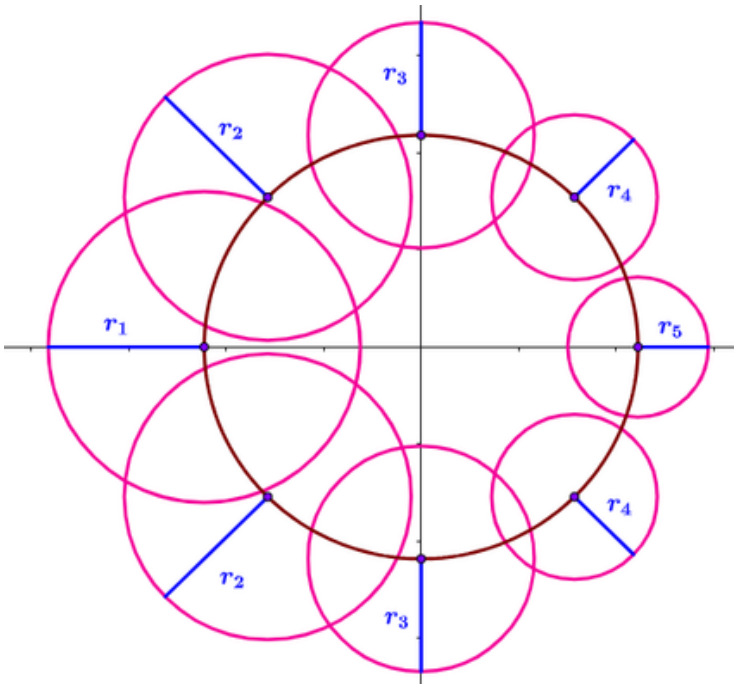


Figura 10 — Raios das esferas associadas à ciclide do tipo anel, destacados em uma visualização plana da elipse focal.

Na visualização plana, os centros das esferas aparecem distribuídos ao longo da elipse focal

$$r_1 = d + c$$

$$r_2 = d + c \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$r_3 = d$$

$$r_4 = \left| d + c \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right|$$

$$r_5 = |d - c|$$

Alguns raios destacados são representados por r_1, r_2, r_3, r_4 e r_5, permitindo observar como os valores de ***c*** e ***d*** modificam o raio das esferas e, consequentemente, a aparência da ciclide.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

1. Ciclide do tipo anel

A ciclide do tipo anel ocorre quando c < d < a. Nessa configuração, a superfície preserva uma abertura central e não apresenta autointerseção.

Sua forma lembra um toro deformado, mas os raios das esferas associadas à construção variam de acordo com os parâmetros c e d.

Por isso, essa configuração é usada como ponto de partida para observar a relação entre parâmetros, raios das esferas e forma da superfície.

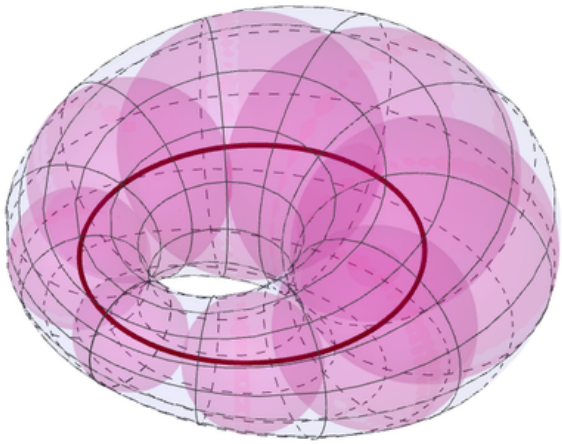
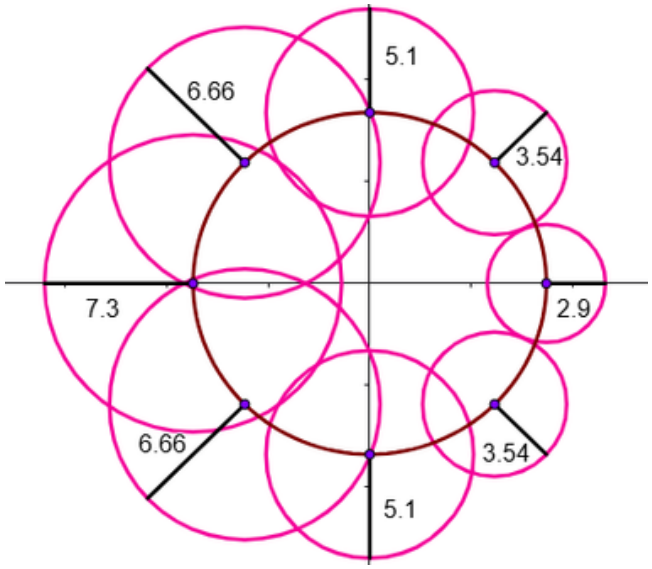


Figura 11 — Ciclide em anel



b = 8.4

c = 2.2

d = 5.1

$a = \sqrt{b^2 + c^2} = 8.68$

$d + c = 7.3$
$\lvert d - c \rvert = 2.9$
$\left\lvert d + c \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right\rvert = 3.54$
$d + c \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6.66$

Condição do exemplo

$c = 2{,}2$ $d = 5{,}1$ $a = 8{,}68$

Logo,

$$c < d < a.$$

Essa relação caracteriza a ciclide do tipo anel. Nesse caso, a superfície mantém uma abertura central e não apresenta autointerseção, enquanto os raios das esferas variam ao longo da construção.

O que observar?

- a abertura central da superfície;
- a ausência de autointerseção;
- a variação dos raios das esferas;
- a semelhança visual com um toro deformado.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

2. Ciclide em chifre

A ciclide em chifre ocorre quando ***d = c***. Nessa configuração, a superfície atinge um caso limite entre a ciclide em anel e a ciclide em fuso.

Geometricamente, a abertura característica do anel se reduz a um ponto de tangência, produzindo a singularidade que dá origem à forma em chifre.

Por isso, essa configuração ajuda a observar a transição entre uma superfície sem autointerseção e uma superfície com autointerseção.

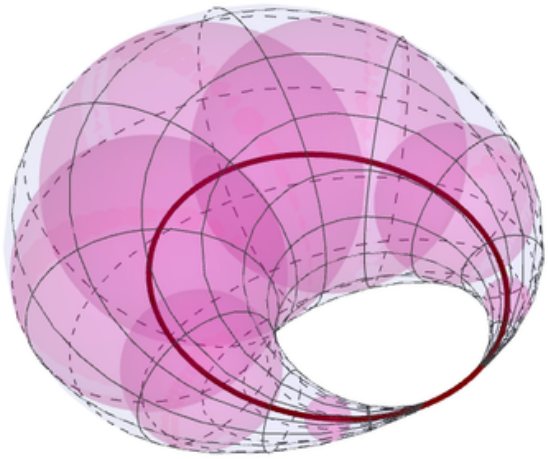
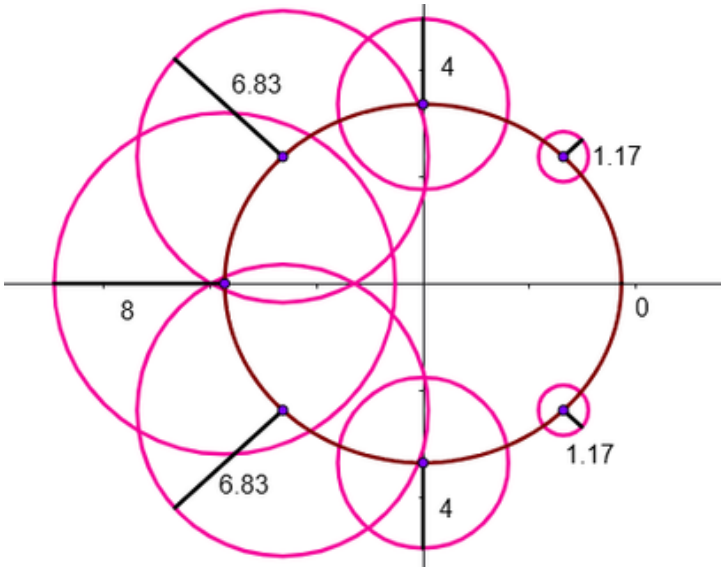


Figura 12 — Ciclide em chifre



b = 8.4

c = 4

d = 4

$a = \sqrt{b^2 + c^2} = 9.3$

$d + c = 8$
$\lvert d - c \rvert = 0$
$\left\lvert d + c \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right\rvert = 1.17$
$d + c \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6.83$

Condição do exemplo

$c = 4$ $d = 4$ $a = 9{,}3$

Logo,

$c = d$

Essa relação caracteriza a ciclide em chifre. Nesse caso, a superfície atinge uma situação limite: a abertura do anel se reduz a um ponto de tangência, indicando a transição para configurações com autointerseção.

O que observar?

- o caso limite d = c;
- o ponto de tangência da superfície;
- a transição entre anel e fuso;
- a redução da abertura central.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

3. Ciclide em fuso

A ciclide em fuso ocorre quando ***d*** **<** ***c***. Nessa configuração, a superfície passa a apresentar autointerseção, formando uma região de cruzamento característica dessa forma.

Diferentemente da ciclide em anel, a abertura central não se preserva como uma região vazada regular. A variação dos raios das esferas torna-se mais acentuada, e a superfície passa a atravessar a si mesma.

Por isso, essa configuração ajuda a observar como a mudança na relação entre c e d altera a geometria da ciclide.

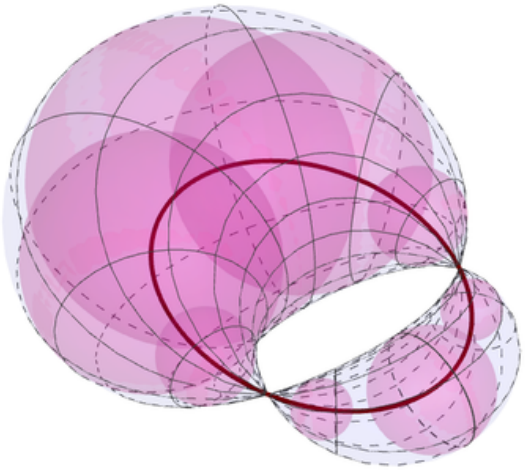
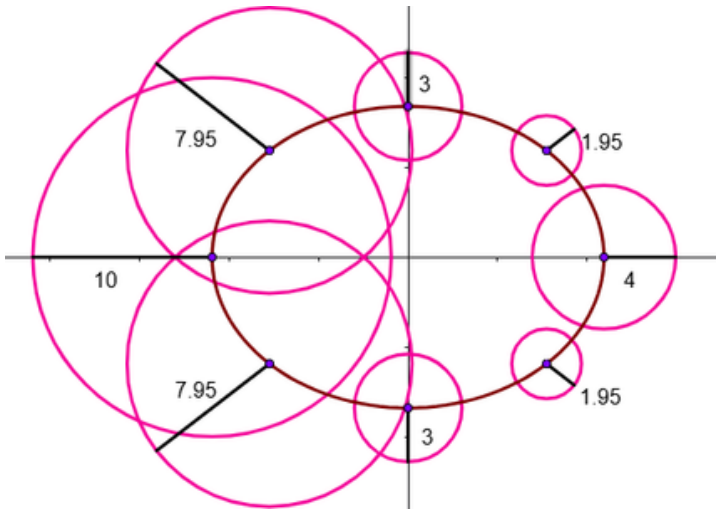


Figura 12— Ciclide em fuso



b = 8.4

c = 7

d = 3

$a = \sqrt{b^2 + c^2} = 10.93$

$d + c = 10$
$\lvert d - c \rvert = 4$
$\left\lvert d + c \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right\rvert = 1.95$
$d + c \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 7.95$

Condição do exemplo

$c = 7 \quad d = 3 \quad a = 10{,}93$

Logo,

$$d < c < a.$$

Essa relação caracteriza a ciclide em fuso. Nesse caso, o parâmetro d é menor que c, fazendo com que a superfície apresente autointerseção e deixe de preservar a abertura central regular observada na ciclide em anel.

O que observar?

- a condição d < c;
- a presença de autointerseção;
- a perda da abertura central regular;
- a variação mais acentuada dos raios das esferas.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

4. Ciclide em fuso simétrico

A ciclide em fuso simétrico ocorre quando *d = 0*. Nessa configuração, o parâmetro d deixa de deslocar a construção, produzindo uma forma mais equilibrada em relação à elipse focal.

A superfície apresenta uma configuração do tipo fuso, com simetria mais evidente. Os raios das esferas associadas à construção ficam organizados de maneira espelhada, como pode ser observado na visualização plana.

Por isso, esse caso ajuda a perceber como a ausência do parâmetro d modifica a distribuição dos raios e a forma final da ciclide.

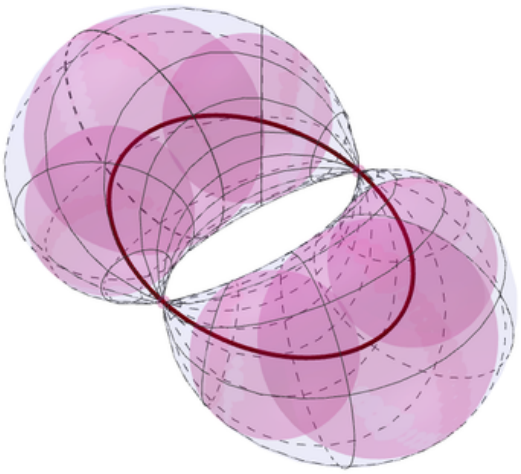
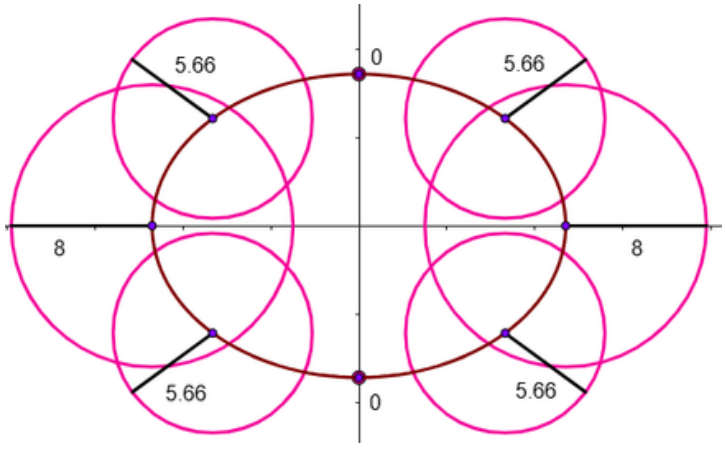
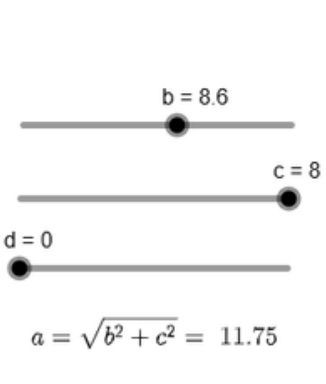


Figura 14 — Ciclide em fuso simétrico.





$d + c = 8$
$\lvert d - c \rvert = 8$
$\left\lvert d + c \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right\rvert = 5.66$
$d + c \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 5.66$

Condição do exemplo

$c = 8$ $d = 0$ $a = 11.75$

Logo,

$d = 0 < c < a$

Essa relação caracteriza a ciclide em fuso simétrico. Nesse caso, o parâmetro d é nulo, e a construção passa a apresentar uma distribuição mais simétrica dos raios das esferas em torno da elipse focal.

O que observar?

- a condição d = 0;
- a simetria da construção;
- a distribuição espelhada dos raios;
- a formação de uma configuração do tipo fuso.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

5. Toro

O toro aparece como um caso particular da ciclide de Dupin quando ***c = 0*** e ***d < a*** .
Nessa configuração, a relação ***a² = b² + c²*** se reduz a ***a = b.***
Com isso, a elipse focal perde sua excentricidade e passa a ser uma circunferência. A construção fica mais simétrica, e os raios das esferas associadas permanecem iguais.

Por isso, o toro pode ser entendido como uma forma especial dentro da família das ciclides de Dupin.

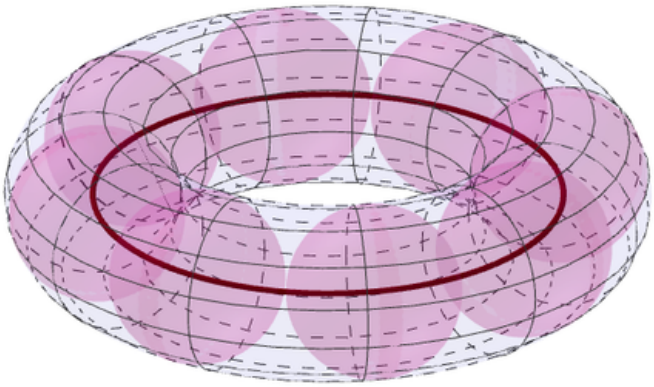
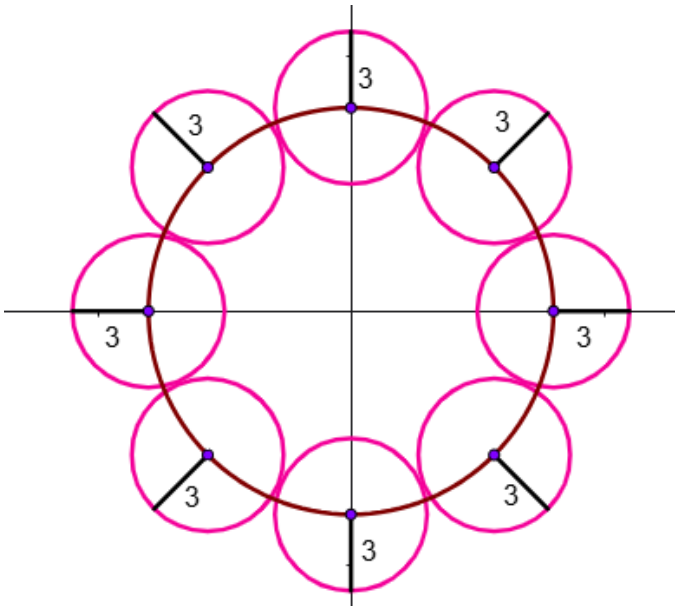
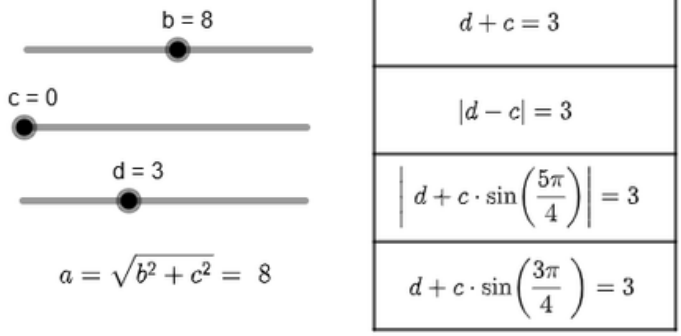


Figura 15 — Toro





Condição do exemplo

$c = 0$ $d = 3$ $a = 8$ $b = 8$

Logo,

$$b = a > d$$

Essa relação caracteriza o toro como caso particular da ciclide de Dupin. Nesse caso, a construção torna-se simétrica, a elipse focal se transforma em circunferência e os raios das esferas permanecem constantes.

O que observar?

- a condição c = 0;
- a igualdade a = b;
- a elipse focal transformada em circunferência;
- os raios das esferas com o mesmo valor;
- a simetria característica do toro.

SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

6. Ciclide em anel crítico

A ciclide em anel crítico ocorre quando ***d = a***. Nesse caso, o parâmetro ***d*** atinge o valor do semieixo maior da elipse focal.

Essa configuração representa um caso limite após a ciclide em anel, caracterizada por ***c < d < a***.

Quando ***d*** chega a ***a***, a superfície passa para uma forma crítica, na qual a abertura central deixa de se comportar como no anel regular.

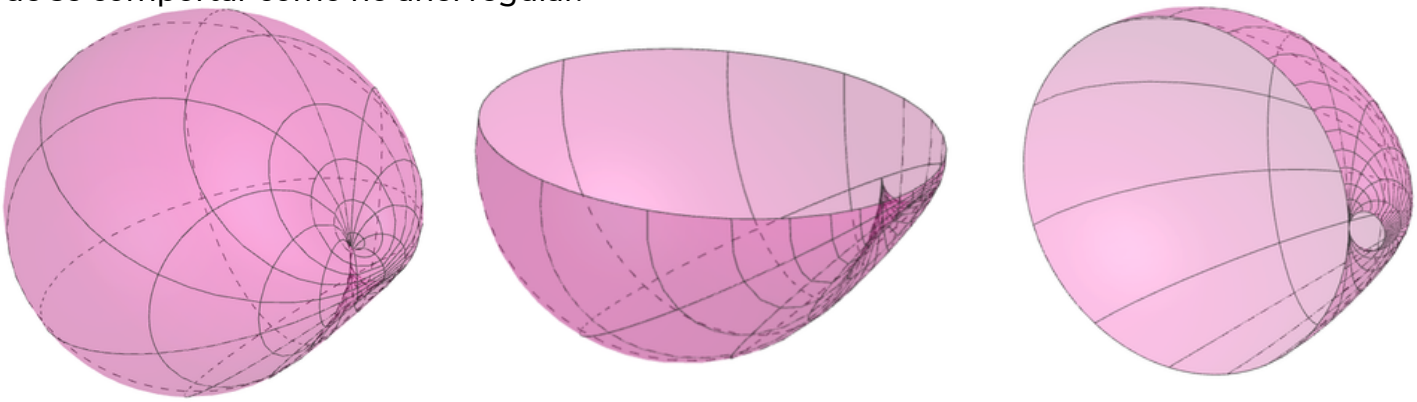


Figura 16 — Ciclide em anel crítico, apresentada em vista externa e em cortes para facilitar a visualização da região interna.

Condição do exemplo

$c = 4 \qquad d = 5 \qquad a = 5$

Logo,

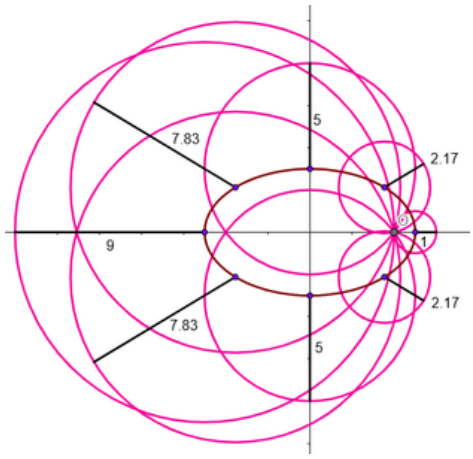
$$c < d = a.$$

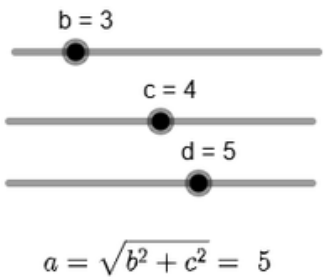
Essa relação caracteriza a ciclide em anel crítico. Nesse caso, o parâmetro ***d*** atinge exatamente o valor de ***a***, marcando a transição entre o regime regular da ciclide em anel e as configurações seguintes.

Observação sobre as imagens

Nesta configuração, a família de esferas apresenta grande sobreposição, dificultando a visualização da superfície.

Por esse motivo, optamos por apresentar a ciclide em vistas mais limpas e também em corte, permitindo observar com maior clareza a região interna e a forma crítica da superfície.





$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = 5$$

$d + c = 9$
$\lvert d - c \rvert = 1$
$\left\lvert d + c \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right\rvert = 2.17$
$d + c \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 7.83$

SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

7. Ciclide em fuso interno

A ciclide em fuso interno ocorre quando ***d > a***. Nessa configuração, o parâmetro ***d*** ultrapassa o valor do semieixo maior da elipse focal.

Esse caso sucede a ciclide em anel crítico e produz uma auto-interseção interna mais evidente. A abertura central deixa de apresentar o comportamento do anel regular, e a superfície passa a exibir uma região interna característica da forma em fuso.

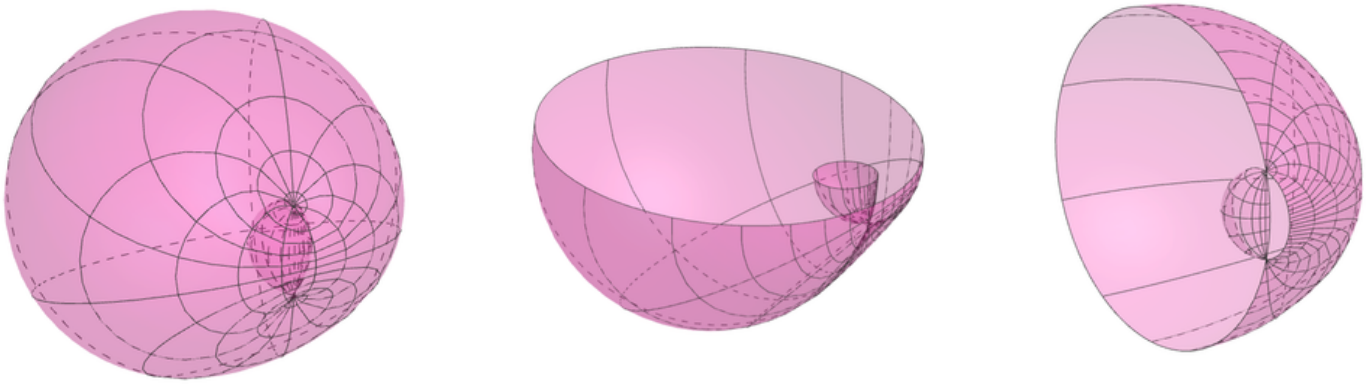


Figura 17— Ciclide em fuso interno, apresentada em vista externa e em cortes para facilitar a visualização da região interna.

Condição do exemplo

$$c = 4 \qquad d = 7 \qquad a = 5$$

Logo,

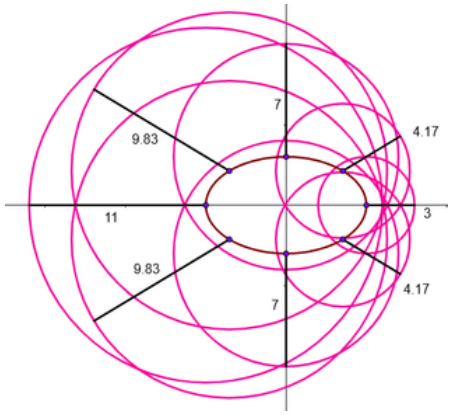
$$c < a < d\,.$$

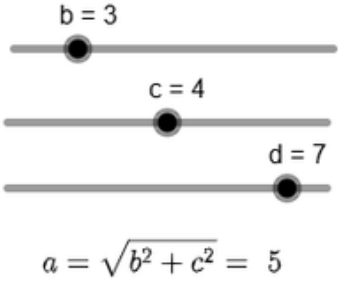
Essa relação caracteriza a ciclide em fuso interno. Nesse caso, o parâmetro ***d*** ultrapassa o valor de ***a***, fazendo com que a superfície deixe o regime crítico e passe a apresentar uma auto-interseção interna mais acentuada.

Observação sobre as imagens

Assim como na ciclide em anel crítico, a sobreposição das esferas dificulta a leitura visual da superfície.

Por isso, a ciclide em fuso interno é apresentada em vistas mais limpas e em corte, destacando a região interna e a autointerseção característica dessa configuração.





$d + c = 11$
$\lvert d - c \rvert = 3$
$\left\lvert d + c \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right\rvert = 4.17$
$d + c \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 9.83$

SEÇÃO MATEMÁTICA:

FORMAS DA CICLIDE DE DUPIN

Como os parâmetros modificam a aparência da superfície

A tabela a seguir reúne, de forma sintética, as principais configurações das ciclides de Dupin consideradas nesta revista.
A nomenclatura utilizada possui caráter descritivo e didático, e foi adotada neste material para facilitar a identificação visual das formas, das condições sobre os parâmetros e dos aspectos geométricos mais relevantes.

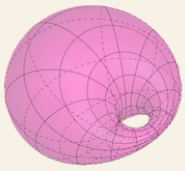
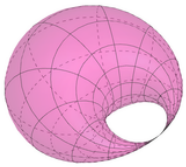
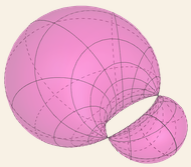
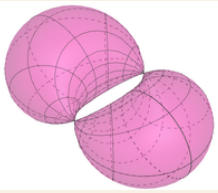
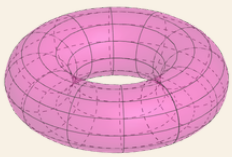
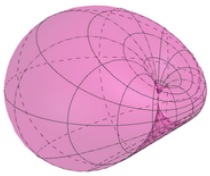
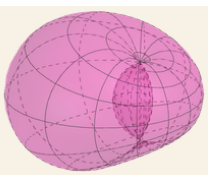
Forma	Nomenclatura	Condição	O que observar
	Ciclide em anel	$c < d < a$	abertura central sem autointerseção
	Ciclide em chifre	$d = c$	caso limite entre anel e fuso
	Ciclide em fuso	$d < c < a$	presença de autointerseção
	Ciclide em fuso simétrico	$0 = d < c < a$	distribuição simétrica dos raios
	Toro	$c = 0$ e $d < a = b$	caso particular com raios constantes
	Ciclide em anel crítico	$c < d = a.$	caso limite após a ciclide em anel
	Ciclide em fuso interno	$c < a < d$	autointerseção interna mais acentuada

Tabela 1 — Síntese das configurações das ciclides de Dupin consideradas nesta revista.

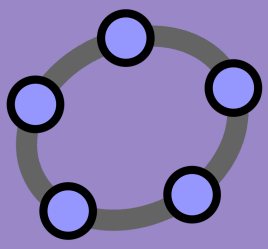
ACESSE E MANIPULE

Explore a construção dinâmica no **GeoGebra 3D.**

Use o **QR Code** para variar os parâmetros e observar, em tempo real, as mudanças na forma da ciclide.

Ou, acesse pelo link:

Clique aqui



SEÇÃO MATEMÁTICA:

E AS CICLIDES PARABÓLICAS?

Um caso complementar da família das ciclides de Dupin

Além das formas exploradas nas páginas anteriores, a teoria das ciclides de Dupin também contempla outros casos. Um deles é a ciclide parabólica, associada a uma configuração em que as curvas focais são duas parábolas situadas em planos ortogonais.

Uma ciclide parabólica pode ser descrita por uma equação cúbica da forma:

$$z(z-\beta)(z-\gamma)+(z-\gamma)y^2+(z-\beta)x^2=0,$$

em que β e γ são constantes associadas à configuração focal considerada.

Nesta revista, a ciclide parabólica é apresentada apenas como um caso complementar. Sua presença ajuda a mostrar que a família das ciclides de Dupin é mais ampla do que as configurações exploradas nas páginas anteriores.

O percurso desenvolvido neste material concentrou-se na ciclide elíptico-hiperbólica, pois essa foi a configuração escolhida para as construções, atividades e explorações dinâmicas realizadas no GeoGebra 3D. Assim, a ciclide parabólica é mencionada como possibilidade de continuidade e de novas investigações.

VISUALIZAÇÕES DA CICLIDE PARABÓLICA

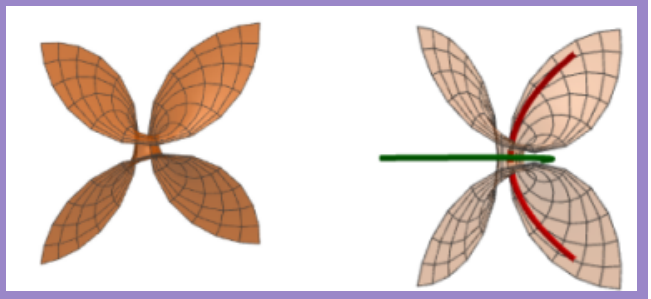


Figura 18.1 — Configuração com lóbulos secantes, evidenciando a estrutura aberta da superfície.

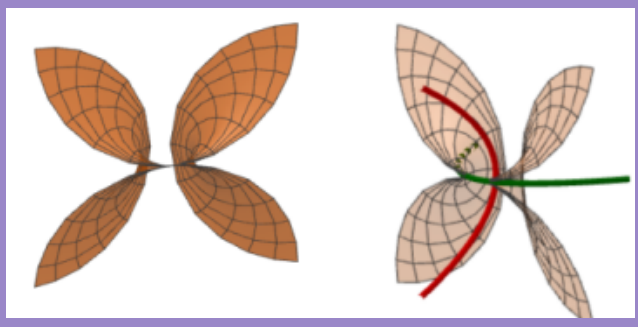


Figura 18.2 — Configuração de transição, com destaque para as curvas focais parabólicas.

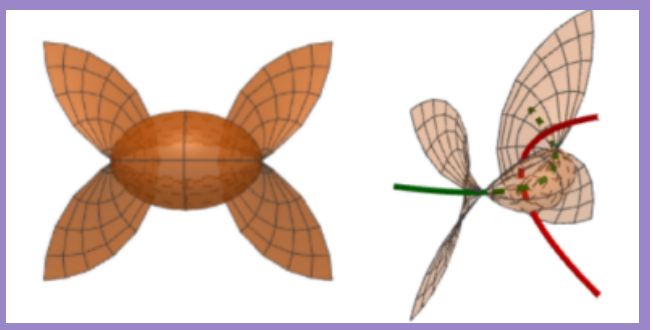


Figura 18.3 — Configuração com lóbulo interno ovalado, obtida pela variação dos parâmetros da construção.

Curiosidade para investigar

No caso parabólico, algumas configurações apresentam simetrias interessantes. O **MathCurve** destaca uma ciclide parabólica em anel que permanece invariante por uma meia-volta, isto é, por uma rotação de 180◦.

A página também sugere uma comparação com a superfície de Costa e a superfície de Enneper, que apresentam uma propriedade de simetria semelhante. Essa observação não será aprofundada nesta revista, mas pode servir como ponto de partida para novas explorações geométricas.

Para investigar: MathCurve, página Dupin Cyclide. Disponível em: **clique aqui**

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

Ciclides, visualização e cultura geométrica:

A presente seção reúne quatro olhares complementares sobre as ciclides de Dupin, a visualização matemática e a cultura geométrica. As entrevistas aproximam pesquisa em Geometria Diferencial, História da Matemática, formação de professores, tecnologias digitais e Arte, revelando diferentes maneiras de compreender, representar e comunicar objetos geométricos.



Celso Costa

Matemático brasileiro, doutor pelo **IMPA** e professor da **UFF**, conhecido pela descoberta da **Superfície Costa**. Sua trajetória aproxima esta revista da Geometria Diferencial, das superfícies mínimas e da pesquisa matemática brasileira.

Felipe Aizic

Mestre em Matemática Pura pela **UFRJ** e doutorando em **História da Matemática e da Física** pelo **PEMAT/UFRJ**. Sua trajetória articula Geometria Diferencial, ensino, história, filosofia e física.





Humberto Bortolossi

Professor da **UFF** e pesquisador em visualização matemática, tecnologias digitais e ensino. Coordena ações ligadas ao **GeoGebra**, à produção de materiais interativos e à formação de professores de Matemática.

Eduardo Madeiro

Doutorando em **Memória Social** pela **UNIRIO** e mestre pela **UFRRJ**. Pesquisa memória, patrimônio cultural, identidade, cultura popular, educação antirracista e quadrilhas juninas da Baixada Fluminense.



POR QUE CONVIDAMOS ESSES PESQUISADORES?

A escolha dos entrevistados reúne quatro perspectivas complementares sobre as ciclides, a visualização e a cultura geométrica:

- **Celso Costa**, pela experiência na Geometria Diferencial, na pesquisa matemática e na divulgação científica;
- **Felipe Aizic**, pelas relações que estabelece entre Geometria Diferencial, História da Matemática, Filosofia e Física;
- **Humberto Bortolossi**, pelo trabalho com visualização matemática, GeoGebra, tecnologias digitais e formação de professores;
- **Eduardo Madeiro**, pelo olhar da Arte e pelas possibilidades de diálogo entre formas geométricas, imagem, volume e criação artística.

Juntos, os entrevistados apresentam diferentes maneiras de observar, compreender e comunicar a geometria, aproximando pesquisa, ensino, tecnologia, história e arte.

COMO CHEGAMOS ÀS PERGUNTAS?

As perguntas foram elaboradas a partir da trajetória de cada entrevistado e dos principais eixos desta edição. Os diálogos percorrem a formação em Geometria Diferencial, a permanência das ciclides na pesquisa, as relações com a História da Matemática, o papel da visualização e das tecnologias digitais e as aproximações entre geometria e Arte.

- Como ocorre hoje a formação em Geometria Diferencial?
- Curvas, superfícies e ciclides ainda encontram espaço na formação e na pesquisa?
- Como a História da Matemática pode ampliar a compreensão da geometria?
- O que a visualização e as tecnologias digitais transformam na pesquisa e no ensino?
- Como o GeoGebra, os modelos 3D e a Arte podem criar outras formas de perceber e comunicar objetos geométricos?

A seguir, você encontrará o diálogo completo com Celso Costa, Felipe Aizic, Humberto Bortolossi e Eduardo Madeiro, revelando como as ciclides de Dupin podem ser compreendidas e comunicadas entre pesquisa, ensino, tecnologia e arte.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **CELSO COSTA**

Nesta entrevista, Celso Costa é convidado a revisitar a trajetória que o levou à descoberta da superfície que leva seu nome e a refletir sobre a permanência do estudo das superfícies na Geometria Diferencial. O diálogo também percorre as formas de visualização anteriores aos recursos computacionais, as relações entre História da Matemática e tecnologias digitais e os caminhos da divulgação científica.



Celso Costa

Celso Costa é matemático, escritor e educador, mestre e doutor pelo **IMPA** e professor titular do Instituto de Matemática e Estatística da **UFF**. Em 1982, encontrou as equações de uma nova superfície mínima completa, hoje conhecida internacionalmente como **Superfície Costa**, solucionando um problema que permanecia aberto havia **206 anos**. É membro titular da **Academia Brasileira de Ciências** e possui uma reconhecida atuação na educação e na divulgação científica. Também publicou os livros *A vida misteriosa dos matemáticos*, *A arte de driblar destinos* — vencedor do **Prêmio LeYa 2022** — e *A geometria do chapéu do sambista*, lançado em 2026.

Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/7439097890470621

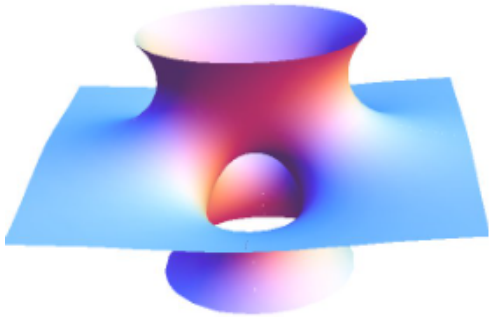
1. Quais caminhos de pesquisa levaram o senhor à concepção da superfície de Costa? Quais são as principais características dessa superfície?

CC: A Superfície Costa se enquadra num estudo geral de superfícies no espaço euclidiano tridimensional, denominadas de **superfícies mínimas.** Tais tipos de superfícies podem ser realizadas (pelo menos em regiões limitadas) por películas de sabão, e esse lado mágico lembra as brincadeiras da infância.

No mundo imenso das superfícies mínimas imersas no espaço euclidiano tridimensional se destaca um mundo exclusivo e desafiador de formas singulares da geometria. Em linguagem técnica, esse mundo específico diz respeito às **superfícies mínimas completas, propriamente mergulhadas e com topologia finita.** Nesse mundo aconteceu meu ponto de partida para a busca de responder uma pergunta que pairava há mais de duzentos anos.

Mas é necessário, para melhor entendimento, que eu possa especificar as propriedades fundamentais das superfícies desse mundo restrito.

Superfície Costa



Fonte: acervo de Celso Costa.

Explore no GeoGebra:

Acesse um modelo simplificado da Superfície de Costa, desenvolvido por **Humberto José Bortolossi**, e explore sua visualização em ambiente dinâmico.

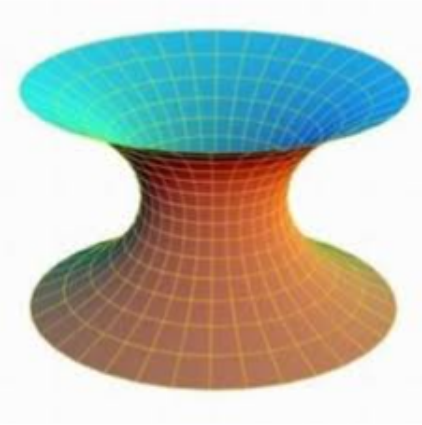
Clique aqui

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **CELSO COSTA**

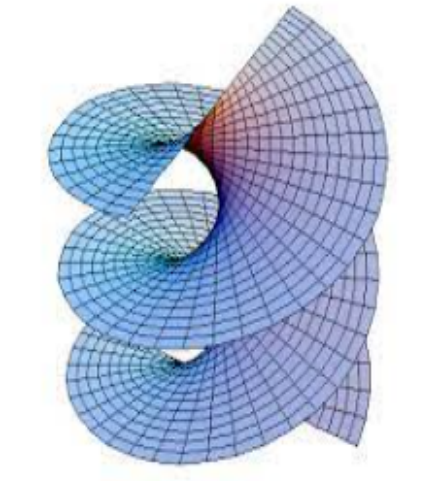
Na segunda metade do século XVIII apenas três superfícies integravam esse mundo particular de formas singulares da geometria: o **Plano de Euclides, o Catenoide de Leonhard Euler e o Helicoide de Jean-Baptiste Meusnier**. Ao longo dos dois séculos seguintes, alguns matemáticos tentaram provar a impossibilidade de existência de uma nova superfície nesse universo, outros tentaram encontrar suas equações. **Esse se tornou o meu problema de tese no ano de 1980, quando estudante de doutorado do Impa: encontrar no espaço tridimensional uma quarta forma nesse reduzidíssimo universo.**

Catenoide



Fonte: material encaminhado por Celso Costa.

Helicoide



Fonte: material encaminhado por Celso Costa.

A procurada superfície precisava verificar três requisitos essenciais.

Primeiro: a forma espacial precisava ser mínima, isto é, qualquer pequena porção dela poderia ser reproduzida como uma película de sabão.

Segundo: a superfície precisava ser completa e propriamente mergulhada; ou dito de outro modo, precisava dividir o espaço euclidiano tridimensional em duas regiões conexas e disjuntas, se estabelecendo como a fronteira comum dessas duas regiões.

Terceiro: tal quarta superfície deveria ter uma topologia finita. Essa última propriedade exigia que fosse uma superfície compacta com um número finito de buracos. Topologia faz referência à forma plástica do objeto. Do ponto de vista geral, as superfícies compactas de topologia finita podem ser descritas sem esforço, uma vez que existe um teorema que as classifica em **esfera, toro, bitoro... n-toro..., etc.**

Que o Plano é uma dessas formas singulares da geometria decorre da equação a derivadas parciais

$$(1+f_y^2)\,f_{xx} - 2f_x f_y\,f_{xy} + (1+f_x^2)\,f_{yy} = 0$$

introduzida, em 1760, pelo eminente matemático Joseph-Louis Lagrange, dando nascimento a um ramo da matemática denominado **Cálculo das Variações.** Nessa equação ***f(x,y)*** é uma função a duas variáveis num domínio conexo e

$$f_x,\ f_y,\ f_{xx},\ f_{xy} \text{ e } f_{yy}$$

são derivadas parciais. Lagrange apontou as soluções triviais da equação, descrevendo família de planos euclidianos, através de funções ***f(x,y) = ax + by + c***, onde ***a***, ***b***, ***c*** são números reais onde ***a*** ou ***b*** são não nulos.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **CELSO COSTA**

No mesmo ano, **Euler**, utilizando o método de separação das variáveis, encontrou a primeira solução não trivial da equação de Lagrange, revelando a existência do **Catenoide**. Em seguida, em 1776, impondo novas restrições à referida equação, **Meusnier descobriu o Helicoide**. Essas três superfícies permaneceram como os únicos exemplos de tais formas singulares da geometria nos duzentos anos seguintes.

Leonhard Euler foi um dos maiores matemáticos de todas as épocas. Viveu setenta e seis anos e provou mais de mil teoremas. O **Catenoide de Euler** tem a forma plástica de um cilindro, com uma região central de cintura fina, onde, à medida que o círculo gerador se afasta indefinidamente, tanto em uma direção quanto na outra, os comprimentos dos raios dos respectivos círculos convergem para o infinito.

Jean Baptiste Meusnier, matemático, químico e engenheiro, participou na revolução francesa com a patente de general. Atingido em combate, morreria em decorrência dos ferimentos, seis dias antes de completar trinta e nove anos. **O Helicoide descoberto em 1776** pelo ilustre matemático francês, em sua forma torcida lembra essas rampas de estacionamento nos edifícios-garagem. Tal forma espacial, 177 anos após sua descoberta, forneceria luz aos cientistas James Watson, Francis Crick e Maurice Wilkins na definição da estrutura geométrica capaz de modelar a molécula do DNA, na forma de uma **dupla hélice.**

Desde logo, um aspecto importante reúne o Plano e essas duas superfícies: **todas têm a esfera como a topologia de base**. O Plano e o Helicoide se conformam a **uma esfera menos um ponto**, enquanto o Catenoide, em termos topológicos, é **uma esfera menos dois pontos.**

Na solução de minha tese de doutorado, de partida, busquei a quarta superfície vislumbrando uma topologia mais complexa. Vasculhando a biblioteca, encontrei uma pré-publicação de **F. Gackstatter,** um matemático alemão contemporâneo na qual era construída uma superfície mínima com a **topologia do Toro menos um ponto.** O método ali usado se reportava às **funções elípticas,** uma antiga técnica matemática fundada por Karl Weierstrass no final do século XIX.

Passei a estudar em profundidade tais funções e logo topei com uma verdadeira bíblia sobre o assunto: a obra escrita pela dupla de franceses, **J. Tannery e J. Molk,** apresentada em dois extensos volumes, Elements de la Theorie des Functions Elliptiques, vindo à luz entre os anos 1893-1902. Nessa bíblia imperava a **função *P(z)* de Weierstrass,** a função que junto com sua derivada é capaz de expressar qualquer outra função elíptica genérica. Em outras palavras, a função P(z) desempenha, na geometria complexa do toro, papel equivalente à função z no plano complexo.

Esse era o estado da arte dos meus estudos no primeiro semestre de 1980. Em síntese, eu precisava encontrar funções capazes de **mergulhar um toro menos três pontos no espaço euclidiano tridimensional**, de modo a produzir uma quarta superfície nesse mundo particular de formas singulares da geometria.

Foi, portanto, **no contexto de minha tese de doutorado que se deu a descoberta da Superfície, depois nomeada Superfície Costa ou Costa's surface pela comunidade internacional,** tese de doutorado defendida em dezembro de 1982.

O caminho de chegada aconteceu após **sete anos de estudos no IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada).** Durante todo esse tempo fui orientado pelo **prof. Manfredo Perdigão do Carmo**, matemático considerado o pai da geometria diferencial em nosso país.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **CELSO COSTA**

Durante esses sete anos aconteceu uma fase de mestrado (dois anos e meio), mais uma fase inicial do doutorado (outros dois anos), onde me dediquei a avançar nos estudos de matemática abrangendo um leque de possibilidades, dentre as quais cito, **Análise, Geometria, Topologia Algébrica, Equações Diferenciais, Variáveis Complexas,** entre tantas outras disciplinas, com o objetivo de alcançar uma fronteira do conhecimento matemático da época.

Portanto foi necessário todo esse empenho na aquisição de conhecimentos técnicos em matemática, até me deparar com **problemas não resolvidos e enfrentar um deles como assunto de tese**

Foi, portanto, **no rastro do Plano, do Catenoide e do Helicoide,** que escolhi encontrar uma quarta superfície mergulhada no espaço euclidiano tridimensional, que fosse completa e de curvatura total finita. Além disso como o catenoide tem a topologia da esfera menos dois pontos e o helicoide tem a topologia da esfera menos um ponto, fui atrás de **um exemplo com uma topologia mais complexa**.

Nesse caminho **escolhi o toro menos três pontos como candidato a suportar a nova superfície. Foram quase dois anos de busca,** até apresentarmos à comunidade matemática as equações de uma tal superfície:

$$g = \frac{K}{P'(z)} \quad ; \quad w = P(z)\,dz$$

São equações que apresentam uma **disfarçada simplicidade:** a inversa da derivada da função ***P(z) de Weierstrass*** representando o campo de vetores normais sobre a superfície e a mesma função, como coadjuvante, comparece na representação da diferencial ***w.***

Toda a complexidade da representação reside na **função *P(z)* de Weierstrass**, uma função descoberta pelo matemático alemão Karl Weierstrass na década de 1860 e como dito anteriormente, junto com suas derivadas gera toda a geometria complexa de um toro, ou seja a função ***P(z)* de Weierstrass gera todas as funções elípticas de um toro.**

DA BUSCA À SUPERFÍCIE COSTA

1980 — O problema de tese

Encontrar uma quarta superfície nesse universo restrito de superfícies mínimas completas.

Uma topologia mais complexa

Celso Costa escolheu o toro menos três pontos como candidato a suportar a nova superfície.

Quase dois anos de busca

O percurso envolveu o estudo de funções elípticas e da função P(z) de Weierstrass.

Formação no IMPA

O caminho até a descoberta foi construído ao longo de sete anos de estudos no IMPA, envolvendo áreas como Análise, Geometria, Topologia Algébrica, Equações Diferenciais e Variáveis Complexas, sob orientação de Manfredo Perdigão do Carmo.

1982 — A descoberta

A tese foi defendida em dezembro de 1982, e a superfície encontrada passou a ser conhecida internacionalmente como Superfície Costa.

POR QUE ESSA DESCOBERTA FOI IMPORTANTE?

Até o início da década de 1980, o conjunto das superfícies mínimas completas no espaço euclidiano tridimensional parecia extremamente restrito.

A descoberta da Superfície Costa ampliou esse horizonte ao apresentar um novo exemplo com topologia mais complexa, abrindo novas possibilidades de investigação em Geometria Diferencial.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **CELSO COSTA**

2. O estudo das superfícies ainda constitui um forte objeto de pesquisa em Geometria Diferencial?

CC: Certamente, **o estudo das superfícies no contexto da Geometria Diferencial é um assunto dinâmico,** com problemas que resistem ao tempo e muito deles, ao serem resolvidos, **abrem novas linhas de investigação.**

É também mister ressaltar que **os espaços onde se inserem tais superfícies é rico em complexidade,** pois podem ser **o espaço euclidiano de curvatura gaussiana nula,** ou um **espaço não euclidiano de curvatura gaussiana 1** (as esferas tridimensionais), ou ainda um **espaço não euclidiano de curvatura gaussiana -1** (os espaços de Lobachevsky). Cada um desses espaços, onde as superfícies estão inseridas, requerem **ferramentas matemáticas próprias na tentativa de resolver conjecturas,** os tais problemas em aberto.

3. Sabemos que a tecnologia está muito presente na formação da minha geração. Estudar um texto clássico tendo em mãos um software de geometria dinâmica facilita bastante a compreensão de termos difíceis, sobretudo quando o argumento de visualização geométrica se torna mais complexo. Como era fazer Geometria nos tempos anteriores à computação e aos recursos digitais de visualização?

CC: É fato notório que **a visualização dos objetos em geometria é muito importante no auxílio da resolução de problemas.** Na minha época de doutorado já tínhamos acesso às visualizações de superfícies, especialmente no espaço euclidiano tridimensional.

Lembro por exemplo que o software **MATLAB** já tinha suas primeiras versões para uso da academia no final da década de 1970, embora seu lançamento comercial tenha se dado na década de 80. Também logo após a descoberta da superfície Costa foi a vez do surgimento do **Mathematica**, outro software poderoso na construção de superfícies a partir das coordenadas uma vez conhecidas.

Mas devo ressaltar que a **Superfície Costa, tendo como modelo topológico um toro menos três pontos, representou um desafio sem precedentes quando da plotagem de suas equações no espaço euclidiano tridimensional.**

Esse grande desafio, o qual de certa forma **inaugurou um caminho para a computação gráfica que hoje conhecemos,** foi enfrentado com especial originalidade por matemáticos americanos.



TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **CELSO COSTA**

4. Quais são, em sua visão, algumas das principais áreas de pesquisa ligadas à Geometria Diferencial? O senhor acredita que seja possível articular História da Matemática e tecnologias digitais como uma metodologia de ensino capaz de ampliar a formação matemática e cultural do professor, sem a pretensão de torná-lo um geômetra profissional?

CC: São inúmeras as áreas de pesquisa em **Geometria Diferencial,** especialmente quando se considera os espaços euclidianos e não euclidianos de dimensão maior ou igual a três. Portanto, para ficar num universo mais restrito, colocaria foco nas **superfícies inseridas no espaço euclidiano tridimensional** e também nos **espaços não euclidianos tridimensionais.**

No caso euclidiano são as superfícies ordinárias de nossa visualização. No caso não euclidiano a visualização se torna um objeto bem mais complexo.

Ficando apenas nessas restrições, existem uma gama imensa de **problemas não resolvidos ligados às superfícies de curvatura média constante**, em particular quando essa curvatura média se anula, o que é justamente o caso das superfícies mínimas.

O relevante aqui é que **as superfícies mínimas podem ser representadas localmente por uma película de sabão.** O físico belga **Ferdinand Plateau** foi quem originalmente tipificou as superfícies mínimas no espaço euclidiano tridimensional como películas de sabão. Plateau realizou suas famosas experiências no período entre **1842** e **1868**.

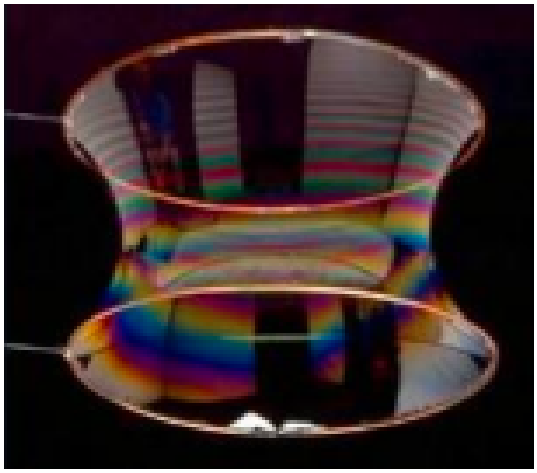
Ele tomava aros metálicos na forma de círculos deformados e mergulhava em uma solução de água e sabão, a fim de obter uma película, a qual era suportada nos bordos pela estrutura de fios de arame. **Tal película é uma superfície mínima.**

Tais experiências com películas de sabão são **exemplos lúdicos que podem ser apresentados a estudantes de todos os níveis.**

Evidentemente, devido à importância e circunstâncias em que tais experimentos foram realizados pelo físico belga — auxiliado por seus estudantes, pois ficou cego após observar um eclipse do sol sem proteção nos olhos —, tal prática fornece material para **um ponto de vista histórico sobre o nascimento e desenvolvimento da teoria das superfícies mínimas.**

Insumo que pode oferecer ao professor **material pedagógico importante para estimular vocações em matemática**

Catenoide formado por uma película de sabão entre duas circunferências de mesmo diâmetro, coaxiais e paralelas.



Fonte: Sá (2020, p. 96), a partir de Matthen.

Saiba mais: Das Películas de Sabão às Superfícies Mínimas, de Vivilene de Souza Sá.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

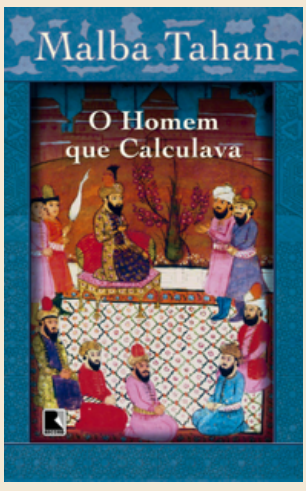
ENTREVISTA COM **CELSO COSTA**

5. Gostaria de destacar que A vida misteriosa dos matemáticos é um dos meus livros favoritos. A leitura me marcou muito pela maneira como o senhor constrói uma narrativa ficcional capaz de aproximar o leitor da vida e das ideias de diferentes matemáticos, sem perder o vínculo com a História da Matemática. Na sua opinião, como obras desse tipo podem contribuir para a divulgação da Matemática e para despertar, em professores, licenciandos e estudantes, o interesse pela História da Matemática?

CC: Quando escrevi **"A vida misteriosa dos matemáticos"** tive por objetivo traçar um panorama limitado, mas o mais abrangente possível da história da matemática, desde o primeiro homem de ciência, **Tales de Mileto no século V a.C**. — cuja lenda nos chega até os dias de hoje com a medida de pirâmides através de triângulos semelhantes e sombras —, alcançando os dias atuais com a resolução por **Grigori Perelman da conjectura de Poincaré**, um dos sete problemas do milênio.

É um livro que, tendo como mote **a narrativa das lendas que permeiam as descobertas em matemática**, traça uma espinha dorsal do conhecimento da disciplina desde os primórdios com os desenhos na areia, até a era moderna com o advento do computador e os cálculos na linguagem binária.

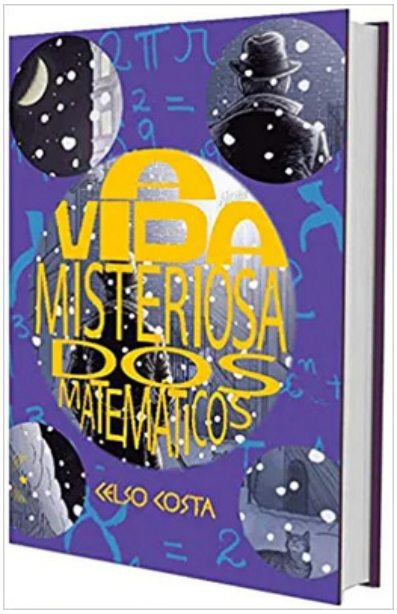
Creio que tais tipos de obra que segue uma tradição inaugurada com **"O homem que calculava" de Malba Tahan** oferecem alternativas lúdicas para a prática docente, bem como suas leituras podem estimular em jovens estudantes o interesse pela matemática.



O HOMEM QUE CALCULAVA

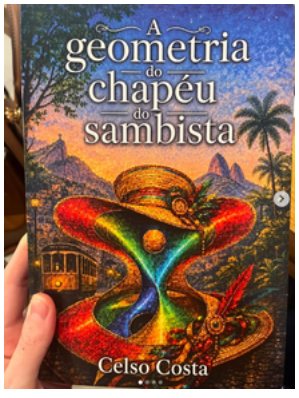
Clássico de Malba Tahan, o livro une narrativa e problemas matemáticos de forma lúdica. A obra se tornou uma referência importante para a divulgação da Matemática e para a aproximação entre literatura, ensino e imaginação.

OBRAS DE CELSO COSTA



Em destaque,
A vida misteriosa dos matemáticos,
obra mencionada na entrevista.
Abaixo, aparecem também
A arte de driblar destinos,
vencedor do Prêmio LeYa 2022,
e ***A geometria do chapéu do sambista***,
lançado em 2026.





TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **CELSO COSTA**

6. Que sugestões o senhor daria para professores, licenciandos e estudantes interessados em ter um primeiro contato com o estudo das superfícies e com a Geometria Diferencial, especialmente em propostas que valorizem História da Matemática, visualização geométrica, tecnologias digitais e divulgação científica?

CC: Creio que o estudo das **superfícies no espaço euclidiano tridimensional** é um assunto bem concreto com vasta referencias bibliográfica, cujos exemplares se prestam a uma **perfeita visualização geométrica.**

Inclusive em dias atuais, com o **auxílio da impressão 3D,** podemos construir as superfícies no formato de **objetos tridimensionais,** e assim apreciá-los em nossas mãos.

Esse avanço na visualização, bem como uma contextualização dos assuntos em vista da perspectiva histórica da evolução dos conceitos em matemática, pode ser um instrumento pedagógico relevante para tornar as aulas lúdicas e despertar nos alunos um interesse real pelo aprendizado.

ECOS DA CONVERSA

DA PESQUISA À SALA DE AULA



PESQUISA
Uma pergunta em aberto, anos de formação e a busca por uma nova superfície levaram à descoberta da Superfície Costa.



VISUALIZAÇÃO
Das películas de sabão aos recursos computacionais, visualizar tornou-se parte fundamental da maneira de investigar e compreender superfícies.



ENSINO
História da Matemática, tecnologias digitais e modelos tridimensionais podem aproximar conceitos avançados da formação de professores e estudantes.

HISTÓRIA · GEOMETRIA · VISUALIZAÇÃO · TECNOLOGIA · DIVULGAÇÃO

A entrevista com Celso Costa percorre justamente o caminho que esta edição de Trajetórias procura explorar: compreender a Matemática como uma construção histórica, visual, investigativa e também compartilhável.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **HUMBERTO BORTOLOSSI**

Nesta entrevista concedida por escrito, Humberto Bortolossi discute possibilidades de articulação entre Geometria Diferencial, História da Matemática, tecnologias digitais e formação de professores. Suas respostas destacam caminhos para aproximar conceitos e textos clássicos da experiência do futuro professor, valorizando a visualização, a compreensão conceitual e as conexões com a Educação Básica.



Humberto Bortolossi

Humberto José Bortolossi é licenciado em Matemática pela **UEM**, mestre em Matemática pelo **IMPA** e doutor em Matemática pela **PUC-Rio**. É professor associado da **UFF**, onde atua na graduação, na educação a distância, em cursos de especialização e no mestrado profissional. Como coordenador do **Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro**, desenvolve trabalhos que integram tecnologia e Educação Matemática. Também se destaca na divulgação científica e na produção de projetos e materiais interativos voltados à formação de professores e à democratização do conhecimento matemático.

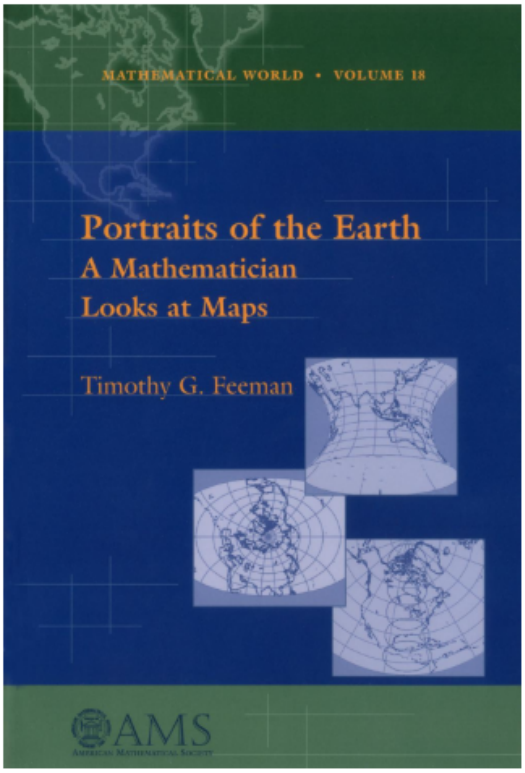
Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/1032454150925984

1. O senhor acredita que essa união seja possível de ser feita em cursos de formação de professores? Ou seja, seria possível criar um curso de Geometria Diferencial na licenciatura que tenha um diálogo direto entre Matemática e História da Matemática, e que não seja tão focado nos cálculos, a fim de compreender melhor os conceitos?

HB: Para a formação de professores, essa união **não é só possível, como desejável** — especialmente se o foco recair sobre temas que encontram eco na escola básica: projeções cartográficas e o papel do Teorema Egrégio de Gauss (o livro cuja capa coloco a seguir, "Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps" de Timothy G. Feeman pode ser útil), curvatura, comprimento de arco, cálculo de áreas e a visualização de superfícies parametrizadas (como, por exemplo, cunhas esféricas, cones de bases não circulares etc.).

Um curso com esse desenho **desloca o centro de gravidade dos cálculos para os conceitos:** os resultados clássicos deixam de ser um fim em si e passam a iluminar conteúdos que o futuro professor efetivamente ensinará.

A História da Matemática, nesse contexto, não entra como ornamento, mas como fio condutor que revela por que esses conceitos foram criados e quais problemas eles resolvem.



Capa de Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps, de Timothy G. Feeman. Fonte: American Mathematical Society (AMS).

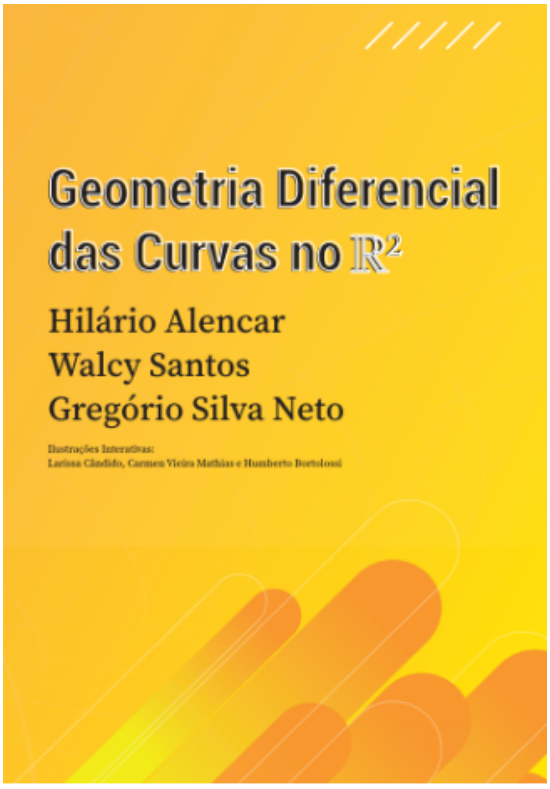
TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **HUMBERTO BORTOLOSSI**

2. O senhor acredita que as tecnologias digitais, como o software GeoGebra, possam ser facilitadoras da compreensão de textos clássicos de Geometria Diferencial para estudantes em formação que se interessam por História da Matemática?

HB: Certamente — tanto é assim que **geômetras de referência já estão produzindo material bibliográfico com o uso desses recursos**. Para citar um exemplo, entre vários: "Geometria Diferencial das Curvas no Plano", de Hilário Alencar, Walcy Santos e Gregório Silva Neto, disponível gratuitamente em:

Geometria Diferencial das Curvas no $\mathbb{R}^2$



Capa de Geometria Diferencial das Curvas no $\mathbb{R}^2$, de Hilário Alencar, Walcy Santos e Gregório Silva Neto. Fonte: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

Vale registrar que, além do GeoGebra, sistemas como **Mathematica, Maple, Maxima, SageMath e Desmos** têm sido amplamente usados pela comunidade de professores e matemáticos. Esses recursos permitem **materializar dinamicamente o que os textos clássicos descrevem apenas analiticamente — variar parâmetros, animar construções, explorar casos — encurtando a distância entre a linguagem do século XIX e a intuição geométrica do leitor de hoje.**

ALÉM DO GEOGEBRA: OUTROS RECURSOS DIGITAIS

MATHEMATICA

Ambiente de computação técnica e simbólica da Wolfram, com recursos para cálculos, gráficos e visualizações.

Acesse: https://www.wolfram.com/mathematica/

MAPLE

Software matemático voltado à resolução, análise e visualização de problemas matemáticos

Acesse: https://www.maplesoft.com/products/Maple/

MAXIMA

Sistema livre de álgebra computacional para cálculos simbólicos e numéricos, incluindo derivação, integração, equações diferenciais e gráficos 2D e 3D.

Acesse: https://maxima.sourceforge.io/pt/

SAGEMATH

Sistema matemático livre e de código aberto que reúne diferentes ferramentas computacionais em uma interface baseada em Python.

Acesse: https://www.sagemath.org/

DESMOS

Ambiente on-line para exploração gráfica e visual de funções, curvas, equações e outros objetos matemáticos.

Acesse: https://www.desmos.com/?lang=pt-BR

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **HUMBERTO BORTOLOSSI**

3. Que sugestões o senhor daria para levar o estudo das superfícies e o interesse pela Geometria Diferencial para professores, licenciandos e estudantes do Ensino Médio? Em especial, como esse primeiro contato poderia ser construído na formação inicial de professores, articulando História da Matemática, tecnologias digitais, visualização geométrica e divulgação científica?

HB: Acredito que **há muito a se explorar nessas conexões.** Para ilustrar, indico duas produções minhas que são exemplos dessa articulação entre História da Matemática, tecnologias digitais, visualização geométrica e divulgação científica:

"O que é simetria? Diferentes usos da palavra ao longo da História da Matemática."

Regina Célia Guapo Pasquini e Humberto José Bortolossi

Acesse aqui

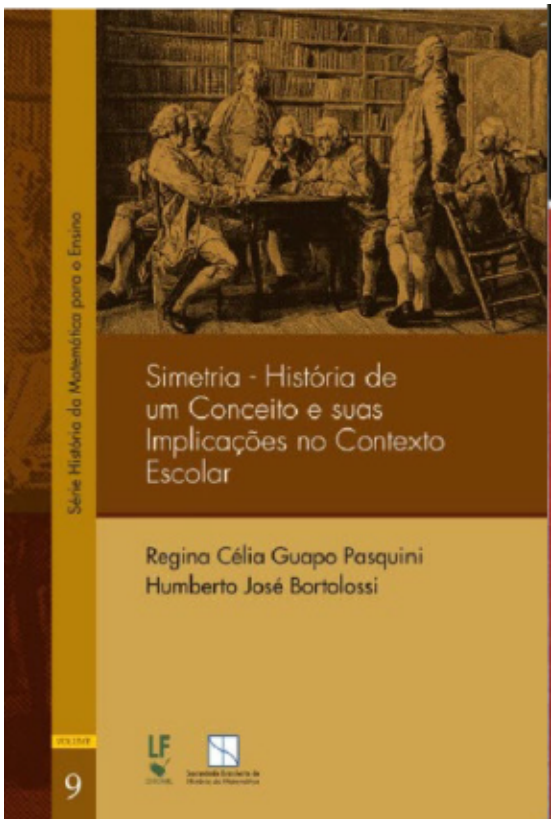
"Modelos Cosmológicos: Três Episódios na História da Matemática para a Sala de Aula"

Regina Célia Guapo Pasquini e Humberto José Bortolossi



Acesse aqui

Nessa mesma linha, menciono também o livro ***"Simetria – História de um Conceito e suas Implicações no Contexto Escolar"***, que escrevi em coautoria com Regina Célia Guapo Pasquini, publicado na Série História da Matemática para o Ensino (SBHMat/Editora Livraria da Física), que mostra como **um conceito historicamente rico pode ser levado à sala de aula da escola básica.**



Disponível em:

https://www.crephimat.com.br/visor_mnc.php?id_t=30

Como projetos futuros, estou considerando tratar da **história da reta numérica** — mais um tema em que **história, visualização e ensino se encontram de maneira natural.**

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **FELIPE AIZIC**

Nesta entrevista, Felipe Aizic revisita sua formação em Matemática e o percurso que o aproximou da Geometria Diferencial. A conversa aborda a presença de curvas e superfícies na graduação e na pós-graduação, os desafios da formação matemática e as relações entre geometria, História da Matemática, Filosofia, ensino e Física.



Felipe Aizic

Felipe Colar Aizic é licenciado em Matemática e mestre em Matemática Pura pela UFRJ, com pesquisa na área de **Geometria e Topologia**. Atualmente, é doutorando em **Ensino e História da Matemática e da Física pelo PEMAT/UFRJ**, na área de História e Fundamentos da Física Matemática. Participa do Grupo de Teoria e História dos Conhecimentos, da USP, e já atuou como professor substituto na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Sua trajetória articula Geometria Diferencial, História da Matemática, Filosofia, Física e ensino. É também medalhista internacional em Olimpíadas de Matemática.

Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/1010095289875870

1. Fale-nos um pouco de sua formação em matemática e como foi o seu encontro/encantamento pela geometria. Como se deu?

FA: Minha trajetória foi, de fato, bastante não-linear. Fiz Licenciatura em Matemática na UFRJ (2020–2023), seguida pelo Mestrado em Matemática Pura (PgMAT/UFRJ, 2024–2026) e, atualmente, curso o Doutorado em História da Matemática e da Física (PEMAT/UFRJ). Como a grande maioria dos estudantes, sofri um "choque" inicial com a matemática do primeiro período, mas logo **me encantei por ser provocado a questionar tudo e pelas novas formas de argumentar, especialmente em Álgebra e Geometria.** Logo no 2° período fiz Análise I e, no 3°, Análise II, ambas com o professor Victor Giraldo. Essas experiências me trouxeram um amadurecimento precoce e **um olhar diferente para os saberes matemáticos**, motivando-me a aprofundar na matemática sempre guiado por questões de ensino, filosofia e história.

O encanto definitivo pela geometria, no entanto, não veio de uma disciplina formal completa, mas de um fascínio genuíno pelo **Paradoxo de Banach-Tarski,** que conheci ainda em 2021, na disciplina de Análise II. Fiquei fascinado, fui pesquisar sobre o assunto e descobri diversas relações belíssimas de geometria que foram me aproximando do tema. Nessa mesma época, o encanto pela pesquisa já ganhava forma: além de participar de competições (onde fui medalhista internacional em olimpíadas de matemática), fiz duas Iniciações Científicas. Na segunda delas (2022–2023), sobre Perspectivas Decoloniais em Educação Matemática, pesquisei sobre a concepção de tempo não hegemônica e o ensino de cálculo. Parte da pesquisa envolvia relacionar o Teorema Fundamental do Cálculo com os teoremas do cálculo vetorial (Green, Stokes e Gauss), o que naturalmente me levou ao **Teorema de Stokes em variedades,** o que colocou **meu primeiro pé na Geometria Diferencial.**

TERMOS - CHAVE

(1) Paradoxo de Banach–Tarski

Resultado matemático segundo o qual uma bola pode ser dividida em um número finito de conjuntos e reorganizada, por rotações e translações, para formar duas bolas do mesmo tamanho da original. Está relacionado à teoria dos conjuntos, à teoria da medida e às simetrias.

(2) Perspectivas decoloniais em Educação Matemática

Abordagens que questionam a ideia de uma única tradição matemática universal e valorizam diferentes saberes, práticas, culturas e formas de produzir e compreender conhecimentos matemáticos.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **FELIPE AIZIC**

A semente de Banach-Tarski, plantada em 2021, amadureceu em 2022 numa eletiva de "Filosofia e Lógica em Matemática" com Michael Deustch. No final de 2023, descobri **uma relação intrínseca entre o paradoxo e a possibilidade de definir uma medida universal invariante** — o que motivou que fosse meu objeto de estudo no mestrado em 2024. Inicialmente, **eu estudaria o paradoxo em Flag Manifolds, o que me empurrou de vez para a Geometria Diferencial enquanto campo.** Acabei redirecionando a pesquisa, junto ao meu orientador, Thiago Drummond, para espaços métricos e variedades completas (conectadas pelo **Teorema de Hopf-Rinow**), o que me levou a cursar **Geometria Riemanniana** além da obrigatória Geometria Diferencial. Minha dissertação, *"Aspectos Geométricos das Decomposições Paradoxais em Espaços Métricos"*, uniu geometria, topologia, ações de Grupos de Lie, teoria da medida e também bastante álgebra. Foi ali que comecei a **construir uma formação sólida na área.**

Hoje, no Doutorado, percebo que encontrei o meu **"baricentro": a intersecção exata entre matemática, física, ensino, história e filosofia**. Durante uma eletiva de "Simetrias e Integrabilidade em Física" com o professor **Alejandro Cabrera**, que fiz durante o mestrado, a mecânica quântica capturou meu interesse por sua imensa riqueza matemática e filosófica. Assim, vou buscar na minha pesquisa de doutorado, sob orientação do Thiago Hartz, primeiro, compreender como físicos e matemáticos chegaram à estrutura do momento angular na mecânica quântica, em particular o papel dos **invariantes da teoria**, como o de Casimir; segundo, compreender como o teorema da impossibilidade de Groenewold se insere nos debates acerca da quantização de sistemas clássicos; e, por fim, compreender o surgimento da mecânica quântica no espaço de fase, desde os trabalhos de Weyl, passando pel**a tese de Groenewold**, até o **teorema de Lichnerowicz** et al. de 1978. Em suma, meu encontro com a geometria foi construído por comentários, conexões e tópicos soltos que se uniram de forma orgânica, e meu objetivo agora é consolidar essa formação **conectando história, geometria e física.**

TERMOS - CHAVE

(1) Flag Manifolds

Variedades associadas a sequências encadeadas de subespaços vetoriais. Aparecem em diferentes áreas da geometria, da álgebra e da teoria de grupos, sendo exemplos importantes de espaços com estrutura geométrica rica.

(2) Teorema de Hopf-Rinow

Resultado central da Geometria Riemanniana que relaciona completude, geodésicas e propriedades globais das variedades. Em linhas gerais, mostra quando a estrutura do espaço garante bons comportamentos de caminhos minimizantes.

(3) Geometria Riemanniana

Ramo da Geometria Diferencial que estuda variedades dotadas de uma métrica, permitindo medir comprimentos, ângulos, distâncias e curvaturas. É fundamental no estudo de geodésicas e da forma dos espaços.

(4) Invariante de Casimir

Objeto importante na teoria de Lie e na Física Matemática. Surge no estudo de simetrias e ajuda a compreender estruturas ligadas, por exemplo, ao momento angular na Mecânica Quântica.

DIÁLOGO ENTRE EDIÇÕES

O professor Alejandro Cabrera, citado por Felipe Aizic nesta entrevista, participou da primeira edição da revista Trajetórias, organizada por Wallace da Silva.

Na ocasião, Cabrera discutiu temas ligados à Geometria Diferencial, à Física e à permanência do toro como objeto de investigação matemática.

Para saber mais:

veja a entrevista com Alejandro Cabrera na Edição 1 (2025) da revista Trajetórias em Diálogo.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **FELIPE AIZIC**

2. Sabemos que a disciplina de Geometria Diferencial não consta nas grades da Licenciatura em Matemática. Você cursou geometria como eletiva? Cursar geometria na graduação é pré-requisito para fazer um bom curso de geometria no mestrado? O que você aconselha a um aluno em formação inicial?

FA: Não cursei Geometria Diferencial durante a graduação. Na verdade, eu só cursei Álgebra III e Filosofia e Lógica em Matemática de disciplinas do Bacharelado. No mestrado, logo no primeiro semestre (2024.1), eu cursei a disciplina de Geometria Diferencial que, por sua vez, é **um curso de Análise em Variedades**, e não um curso clássico de curvas e superfícies. No entanto, no semestre seguinte (2024.2), eu cursei Geometria Riemanniana, que trata sobre diversos tópicos da Geometria Diferencial que se conectam mais diretamente com um curso de curvas e superfícies da graduação, como, por exemplo, curvaturas e geodésicas.

Sobre um curso de Variedades, eu acho que tem vários requisitos, mas, de certa maneira, eles são parte constitutiva da formação intelectual de um matemático — ou seja, **fazem parte do seu capital cultural.** Por exemplo, para entender as primeiras noções de uma variedade (definição, exemplos e proposições), é importante ter alguns conceitos de topologia geral e análise no $\mathbb{R}^n$. No meu caso particular, os cursos de Análise que fiz foram suficientemente bons para que eu tivesse os requisitos necessários para consolidar essas ideias, tendo em vista que boa parte do curso foi feita em um Espaço Métrico e alguns exercícios já brincavam com a ideia de construir as noções de topologia sem ter uma noção de distância.

Confesso que, no curso de variedades, eu tive algumas dificuldades iniciais pela falta de familiaridade com algumas coisas, mas nada que me impedisse de compreender os conceitos. Afinal, **conceitos sutis, profundos e bonitos demoram para "cair a ficha",** e entender isso enquanto processo também é parte de se entender enquanto matemático. Desta forma, eu **não acho que um curso de Geometria Diferencial seja requisito necessário e suficiente para entender um curso de variedades,** mas certamente um curso de Análise no $\mathbb{R}^n$ e algo como Introdução à Topologia Geral podem ajudar bastante, pois há uma certa passagem de abstração cuja maturidade se faz necessária.

Já para um curso como Geometria Riemanniana, o próprio curso de Variedades é um pré-requisito, pois trabalhamos em variedades, métricas e, portanto, a noção de Tensor, além de trabalharmos com fibrados, formas diferenciais, dentre outras coisas. É claro que, aqui, um curso de Geometria Diferencial da graduação, sobre curvas e superfícies, **pode ajudar muito quanto aos exemplos e à familiaridade.** De certo modo, a Geometria Riemanniana é um curso que vai muito além, mas os exemplos "elementares" resgatam o que fora visto na graduação. No entanto, eu também não diria ser um pré-requisito necessário e suficiente; é bem plausível ser feito sem ter tido contato direto com esses tópicos na graduação (em particular, geodésicas e curvaturas).

Porém, apesar de tudo isso, eu aconselho fortemente cursar a Geometria Diferencial na graduação, por diversas razões:

- proporciona o contato com um ramo belíssimo da matemática exigindo poucos requisitos (eventualmente Cálculo 3 e Álgebra Linear);
- permite desbravar um mundo particularmente novo, tendo em vista que as únicas geometrias das quais se tem conhecimento prévio em meados da graduação são a sintética e a analítica;
- facilita o contato com o campo de pesquisa da Geometria na pós-graduação; e, por fim,
- insere o aluno desde cedo nas diversas vertentes de pesquisa da área, além de ajudá-lo a compreender grande parte do desenvolvimento da matemática contemporânea.

Desta forma, reitero que aconselho fortemente a disciplina a um aluno em formação inicial; tenho certeza de que valerá muito a pena, apesar de não achar estritamente que seja um pré-requisito

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **FELIPE AIZIC**

3. Ainda se estudam curvas e superfícies em nível de pós-graduação stricto sensu? Você já ouviu falar ou conhece o conceito de ciclides?

FA: É claro que essa pergunta é um pouco subjetiva, pois depende de instituição para instituição. Mas, em geral, eu acho que se estuda, mas não é uma obrigatoriedade vigente nos currículos. A maioria das instituições de pós-graduação *stricto sensu* possui um formato de ***n*** disciplinas obrigatórias e ***m*** eletivas. Eu diria que, em geral, **curvas e superfícies estão presentes no bloco das disciplinas eletivas.**

No meu caso particular, que foi na UFRJ, em Matemática Pura, há 4 disciplinas obrigatórias e 3 eletivas. As 4 obrigatórias são: Estruturas Algébricas (Teoria de Galois), Geometria Diferencial (Variedades Diferenciais), Integração (Teoria da Medida) e Análise Complexa. Ou seja, curvas e superfícies não estão contidas nesse bloco, apesar de o curso de Geometria Diferencial fornecer naturalmente alguns exemplos de curvas e superfícies, mas não eram exemplos imprescindíveis à teoria. Quero dizer com isso que **os exemplos enriqueciam a teoria** para quem conhecia ou tinha certa familiaridade ou algum tipo de encantamento com esse mundo, mas, caso tais exemplos não aparecessem, a teoria permanecia sustentada para os alunos em geral com sua abstração ou com outros exemplos que não fossem necessariamente curvas e superfícies.

No bloco de disciplinas eletivas, existem algumas disciplinas que tratam de curvas e superfícies, mas, de maneira mais introdutória, eu destaco duas: **Geometria Riemanniana** (que é, formalmente, disciplina de Doutorado) e **Cálculo Avançado II** (eletiva para a matemática pura e obrigatória para a matemática aplicada), disciplina essa que eu cursei durante o meu primeiro período, concomitantemente à Geometria Diferencial (e Estruturas Algébricas).

Eu diria que essa concomitância foi muito importante para eu compreender os conceitos, pois, enquanto Geometria Diferencial ia para o mundo das Variedades, Cálculo Avançado II pegava, às vezes, os mesmos conceitos e trabalhava em Superfícies; tinha uma certa particularidade — e também uma beleza por si só. Esse curso trabalhou, em geral, com Integração Múltipla, Aplicações Diferenciáveis e Integrais de Superfície, ou seja, conceitos como superfície regular, imersão, submersão, mergulho, orientação, superfícies com bordo, recobrimento, teorema de Stokes etc.

Apesar de eu ter visto e estudado algumas superfícies particularmente interessantes nesses cursos, **eu nunca ouvi falar em ciclides.**

4. Como você compreende o diálogo entre Geometria e História da Matemática nos cursos de Geometria Diferencial? Acha que esta combinação pode trazer ganhos para o licenciando e para o bacharelando em Matemática?

FA: Compreendo esse diálogo como u**m exercício de análise epistemológica sobre a produção do pensamento geométrico. A história não se resume a biografias ou curiosidades cronológicas;** ela é o registro das crises conceituais, das tensões entre diferentes práticas matemáticas e das mudanças profundas nos critérios de rigor ao longo dos séculos. Compreender isso é entender que **as ideias não nascem prontas,** elas são fruto de "práticas matemáticas" de sua época, e isso é fundamental para desafiar o utilitarismo que, muitas vezes, esvazia a disciplina de sua própria vitalidade. Esse utilitarismo oculta debates que fundam os próprios conceitos e que, quando resgatados, nos ajudam profundamente a compreendê-los.

Para o bacharelando, a **inserção da História da Matemática** constrói um **capital cultural indispensável,** além de atuar como uma **ferramenta de resistência contra o formalismo vazio.** A **Geometria Diferencial ganha vida e motivação quando compreendemos as necessidades que a forjaram.** É muito diferente, por exemplo, aprender sobre curvaturas apenas enquanto fórmulas e compreendê-las entendendo que nasceram da impossibilidade geométrica de representar a superfície terrestre em um plano sem distorções. A história ajuda o pesquisador a desenvolver maturidade intelectual, revelando o estatuto epistemológico e político por trás do formalismo contemporâneo. A maneira "isolada" como a matemática frequentemente é concebida representa somente uma das competências que um pesquisador deve desenvolver, e não a sua totalidade. Torna-se crucial entender que a sua pesquisa se insere como uma etapa provisória de uma longa construção humana.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

ENTREVISTA COM **FELIPE AIZIC**

Já para o licenciando, os ganhos são ainda mais urgentes. A geometria escolar, quase exclusivamente euclidiana, é frequentemente reduzida a algoritmos e propriedades, reforçando a imagem da matemática enquanto estática, finalizada e inquestionável. Ao ter contato com a história da Geometria Diferencial e com o surgimento das geometrias não euclidianas no século XIX, **o futuro professor ganha ferramentas para subverter essa visão dogmática.** Conceitos naturalizados, como o de "reta", podem ser ressignificados e ampliados (como na forma de geodésicas), dependendo do espaço geométrico em que operamos. Além disso, a história eleva o estatuto do pensamento no ensino ao nos mostrar, por exemplo, que os erros não precisam ser vistos como "pecados" — como frequentemente o são nas aulas de matemática. **O erro deve ser encarado como uma força criativa que abre um horizonte de sentidos produzidos pelos alunos,** por nós e pela sociedade, não apenas por uma postura política nossa, mas, sobretudo, porque o próprio desenvolvimento histórico da matemática legitima essa posição.

Em suma, essa combinação traz ganhos imensos. Ela forma bacharéis mais reflexivos sobre os alicerces de suas pesquisas e forma licenciandos capazes de levar para a **sala de aula uma matemática viva e em constante construção,** afastando-se do ensino como um mero treinamento de métodos repetitivos. No entanto, vale ressaltar que a inserção da história vai além dessa tentativa de apenas "humanizar" a disciplina. Ao mostrar que a matemática não é um bloco de verdades prontas e inquestionáveis, a história expõe as escolhas e as disputas por trás do conhecimento. No fim das contas, isso nos devolve a responsabilidade crítica sobre qual visão de ciência estamos ajudando a construir na pesquisa e na sala de aula.

IDEIAS-CHAVE DA ENTREVISTA

(1) Geometria Diferencial na graduação

A disciplina pode ser cursada ainda na formação inicial e, mesmo não sendo um pré-requisito obrigatório para a pós-graduação, amplia o repertório matemático e aproxima o estudante de um campo importante de pesquisa.

(2) Curvas e superfícies na pós-graduação

Embora nem sempre estejam entre as disciplinas obrigatórias, curvas e superfícies seguem presentes na pós-graduação, sobretudo em disciplinas eletivas, contribuindo para enriquecer exemplos, intuições e conexões geométricas.

(3) História da Matemática como formação crítica

Para Felipe Aizic, a História da Matemática não se reduz a curiosidades ou biografias: ela ajuda a compreender crises conceituais, mudanças de rigor e práticas matemáticas, favorecendo uma formação mais reflexiva.

(4) Geometria, história e ensino

O diálogo entre Geometria Diferencial e História da Matemática fortalece tanto a formação do bacharelando quanto a do licenciando, ao apresentar a matemática como construção humana, viva e em constante transformação.

"A história não se resume a biografias ou curiosidades cronológicas; ela é o registro das crises conceituais, das tensões entre diferentes práticas matemáticas e das mudanças profundas nos critérios de rigor ao longo dos séculos."

— Felipe Aizic

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

CONVERSA COM **EDUARDO MADEIRO**

Nesta conversa, Eduardo Madeiro observa as ciclides de Dupin a partir da Arte, da cultura visual e de sua experiência como professor da Educação Básica. A conversa explora relações entre forma, volume, vazio e movimento, além das possibilidades de diálogo entre Matemática, Arte, modelos tridimensionais e práticas escolares.



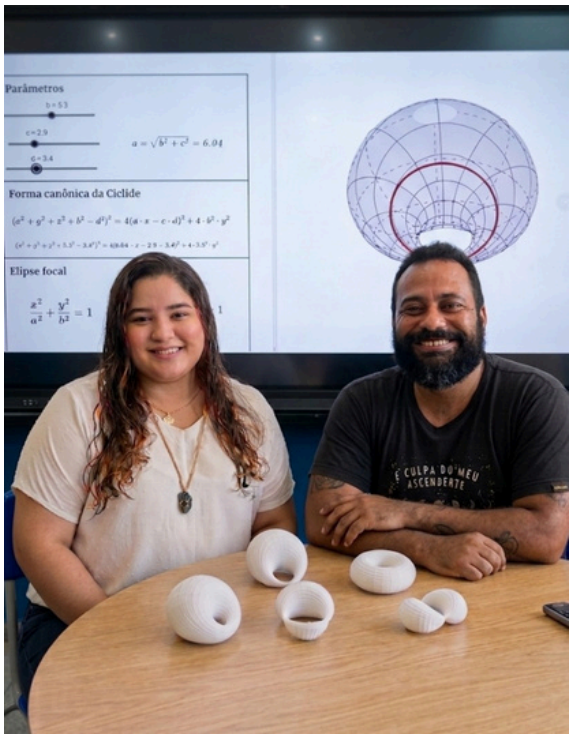
Eduardo Madeiro

Eduardo Madeiro de Santana é professor de **Arte na Educação Básica**, pesquisador e agente cultural. É licenciado em Artes Visuais e graduado em Moda e Figurino, Sociologia e História, além de possuir formação em Pedagogia. Atualmente, é doutorando em Memória Social pela **UNIRIO** e mestre em Patrimônio, Cultura e Sociedade pela **UFRRJ**. Suas pesquisas envolvem memória, patrimônio cultural, identidade, cultura popular e educação antirracista, com destaque para as festas juninas e outras manifestações culturais da Baixada Fluminense. Sua trajetória também reúne experiências em figurino, moda, Carnaval, teatro e produção audiovisual.

Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/9551400673148962

QUANDO A GEOMETRIA ENCONTRA A ARTE

Esta conversa foi realizada presencialmente e teve como ponto de partida a observação e a manipulação de diferentes modelos impressos em 3D de ciclides de Dupin. As superfícies também foram exploradas dinamicamente no GeoGebra 3D, em um quadro interativo, permitindo acompanhar as transformações produzidas pela variação dos parâmetros.



A partir desse contato visual e material, Victória Gentil e Eduardo Madeiro constroem um diálogo sobre círculo, simetria, volume, vazio, movimento e percepção espacial. Ao longo da conversa, surgem aproximações com a arquitetura, o design, o cubismo, o concretismo e a arte contemporânea, além de reflexões sobre as possibilidades de integração entre Matemática e Arte na Educação Básica.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

CONVERSA COM **EDUARDO MADEIRO**

VG: Olhando para essas formas, qual é a sua primeira impressão, do ponto de vista visual e artístico, ao manipulá-las?

EM: A primeira coisa que me chama atenção é **a presença do círculo,** que me remete imediatamente ao **equilíbrio entre o volume e o vazio,** como nessa peça que lembra uma bolsa nessa peça que lembra uma bolsa. Também pensei, pela organização das formas, no **Homem Vitruviano,** de Leonardo da Vinci.

Essas superfícies também me recordam o **movimento concretista nas artes.** Ao mesmo tempo, a ideia do círculo traz algo muito orgânico, que foge daquela concepção mais engessada que encontramos em muitas construções arquitetônicas atuais.

VG: O fato de serem objetos matemáticos muda a forma como você olha para eles?

EM: Não necessariamente. Eu não tenho uma base matemática aprofundada, mas consigo compreender esses objetos por meio de noções de **simetria e assimetria, volume, espaço vazado, vazio, presença da linha e peso visual.**

Consigo observar como o objeto se posiciona no espaço, se há mais peso visual de um lado do que do outro e como a forma se organiza visualmente. Então, mesmo sem partir do cálculo matemático, consigo perceber essas superfícies como **objetos espaciais.**

VG: Como você percebe a relação entre forma, volume, vazio e movimento nessas peças?

EM: Para mim, o mais interessante é justamente a possibilidade de **brincar com esses conceitos**. Como gosto muito de arquitetura, vejo muitas possibilidades de trabalho a partir dessas formas.

Elas me remetem à **arquitetura modernista**, especialmente pela relação com o aproveitamento da luz e do espaço. Penso em construções que trabalham com **mezaninos, vazios, circulação e integração com a natureza.**

O uso das curvas também me lembra o trabalho de **Oscar Niemeyer.** Há essa ideia de **dar forma ao concreto,** criar silhuetas, trabalhar a leveza e a mobilidade visual. Ter essas peças em mãos torna mais fácil visualizar essas relações.

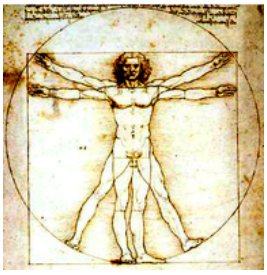
CHAVES DE LEITURA VISUAL

(1) Círculo, volume e vazio

As formas destacam o equilíbrio entre cheio e vazio.

(2) Homem Vitruviano

Referência à organização visual e à proporção.



Leonardo da Vinci, Homem Vitruviano, c. 1490. Reprodução em domínio público. Fonte: Wikiversidade

(3) Concretismo

Aproximação com a geometria e a estrutura formal na arte.

(4) Simetria e peso visual

O olhar artístico percebe linha, equilíbrio, assimetria e organização espacial.

(5) Arquitetura modernista

Luz, circulação, vazios e integração com a natureza.

(6) Oscar Niemeyer

Curvas, leveza, silhueta e mobilidade visual.



Catedral Metropolitana de Brasília, obra de Oscar Niemeyer. Fonte: Tissiana de A. de Souza/Wikimedia Commons.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

CONVERSA COM **EDUARDO MADEIRO**

VG: Na escola, a geometria costuma ser apresentada por meio de figuras e sólidos mais regulares e familiares, como a esfera, o cilindro, o cone e o cubo. No entanto, existe uma enorme diversidade de curvas e superfícies, muitas delas pouco conhecidas e raramente exploradas no ambiente escolar. Você acha que o contato com formas menos convencionais, como as ciclides de Dupin, pode ajudar a ampliar a visão dos estudantes sobre a geometria?

EM: Sim. Isso se relaciona ao que mencionei sobre o **modernismo** e sobre pensar a **utilidade** da forma para as pessoas. Hoje também vemos um movimento de retorno à **integração entre arquitetura e natureza.**

A matemática pode ajudar muito nessa unificação entre o **espaço natural e a forma geométrica**. Quando percebemos essas estruturas em objetos, construções e espaços, a **matemática deixa de parecer algo restrito ao ambiente escolar.**

VG: A impressão 3D ajuda a transformar uma ideia abstrata em um objeto mais próximo do corpo, do olhar e do tato?

EM: Sim. Usando a arte como referência, isso me aproxima da ideia do **cubismo**, especialmente em Picasso, no sentido de tentar enxergar um objeto a partir de **vários ângulos e perspectivas.**

A impressão 3D proporciona essa possibilidade de **visualização multifacetada**. O objeto pode ser girado, observado de diferentes lados, tocado e percebido em sua totalidade. **Isso amplia muito a experiência de compreensão da forma.**



Modelos tridimensionais de ciclides de Dupin utilizados durante a entrevista.
Fonte: acervo da autora.

VG: Você acha que objetos como esses podem gerar diálogos entre Matemática e Arte na escola?

EM: Totalmente. A **arquitetura**, por exemplo, é uma forma de arte presente no cotidiano e está ligada ao **design**, que pensa diretamente no usuário e na função dos objetos.

Se antes do século XIX tínhamos uma arte muito voltada à decoração e ao belo, a partir do século XX, com o modernismo, passamos a pensar também na **utilidade do objeto para a sociedade.**

Pensar a funcionalidade da matemática junto à natureza e ao mundo contemporâneo é fundamental. Esses objetos podem abrir um diálogo muito rico entre **Matemática, Arte, design, arquitetura e tecnologia.**

VG: Pensando nos alunos, que tipo de reação ou curiosidade essas formas podem provocar?

EM: A primeira reação é tentar perceber **onde essas formas aparecem no mundo real**. Alguns alunos podem estabelecer conexões com o mundo da moda, por exemplo, no design de bolsas, ou com a arquitetura de lugares como Dubai.



The Orb Bag, criação do Nik Bentel Studio inspirada nas ciclides de Dupin.
Fotografia: Mia Teresa; modelo: Maya Man.
Fonte: Nik Bentel Studio.

Museu do Futuro, em Dubai.
Fotografia: Dubai Future Foundation/via Reuters.
Fonte: UOL.



Isso desperta a curiosidade de entender que **a matemática não existe apenas dentro da escola**. Ela aparece fora dela, nos objetos, nas construções, nas imagens e nas formas que circulam no cotidiano.

TRAJETÓRIAS EM DIÁLOGO

CONVERSA COM **EDUARDO MADEIRO**

VG: Se você apresentasse essas peças em uma aula, oficina ou exposição, qual aspecto delas destacaria?

EM: Eu destacaria primeiro o **volume marcante das peças**, a **simetria de algumas formas** e a **presença do círculo**. Também seria possível trabalhar a repetição para gerar grafismos.

A partir dessas formas, podemos abordar desde **representações artísticas de povos originários**, por meio de padrões repetidos, até propostas contemporâneas, explorando os vazios, os volumes e as estruturas das peças.

VG: Você vê alguma potência didática ou artística em trabalhar superfícies matemáticas como objetos visuais e tridimensionais?

EM: Vejo muita potência. Eu mesmo utilizo esse tipo de recurso. Para mim, a matemática está muito ligada à **leitura visual, à perspectiva e à percepção espacial**, mais do que ao cálculo em si.

Quando o aluno tem a oportunidade de identificar essas relações no cotidiano ou na escola e consegue transformar esse conceito em **desenho ou escultura**, estamos unindo **Matemática e Arte.**

VG: Que referências da Arte, da escultura, do design ou da percepção visual poderiam conversar com esse tipo de forma?

EM: Uma referência que eu trago é a artista contemporânea **Beatriz Milhazes,** que trabalha intensamente com **círculos, repetição e elementos do barroco**. Ela faz um trabalho muito orgânico e explora também a ideia do erro.

A obra dela não busca uma perfeição exata. Pelo contrário, ela expõe a **falha humana como contraponto à perfeição tecnológica,** o que considero muito interessante.

BEATRIZ MILHAZES

Beatriz Milhazes é uma artista visual brasileira, nascida em 1960, no Rio de Janeiro, onde vive e trabalha. Sua produção reúne pintura, gravura, colagem e escultura, com composições marcadas pela sobreposição de formas geométricas e ornamentais, especialmente círculos, flores, arabescos e padrões repetidos.





Obra de Beatriz Milhazes. As sobreposições de círculos, formas orgânicas e padrões decorativos dialogam com as referências mencionadas por Eduardo durante a conversa.

Jardim Botânico, de Beatriz Milhazes. Estampa em seda baseada em detalhe de Belezinha (2011).
Fonte: Galeria Alphaville.

VG: Quando comecei a estudar essas superfícies, parti da leitura dos documentos históricos e, diante da necessidade de compreender melhor suas formas e propriedades, recorri à modelagem geométrica e à visualização dinâmica.

A partir da repetição de círculos e esferas, fui testando possibilidades, observando, errando, refazendo e reconstruindo. Esse percurso, guiado pela percepção visual e geométrica e marcado por erros e acertos, foi fundamental para que eu chegasse às construções.

Por isso, achei especialmente interessante você mencionar o erro como parte do processo criativo, porque ele também ocupou um lugar importante na minha própria investigação.

Agradeço por este diálogo e por compartilhar seu olhar sobre o projeto.

EM: Eu que agradeço. O projeto é muito interessante.

SEÇÃO DIDÁTICA

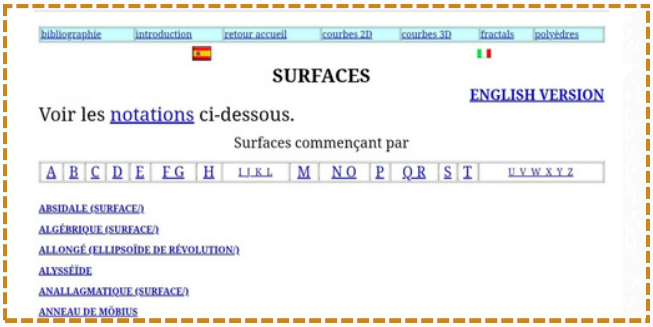
DA EQUAÇÃO AO OBJETO

Como ter sua superfície em 3D

Nem toda superfície matemática precisa permanecer apenas na tela. A partir de uma parametrização, é possível construir a superfície no GeoGebra 3D, exportar o modelo em formato STL e transformá-lo em um objeto físico por meio da impressão 3D.

1 Escolha uma superfície

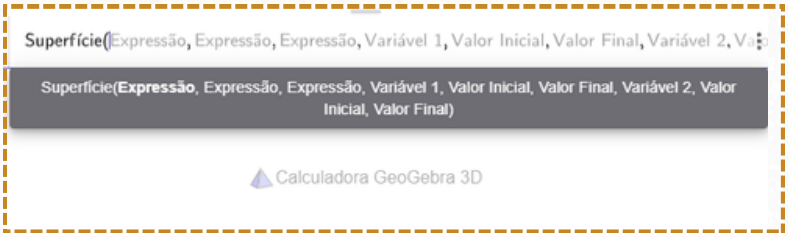
Acesse o MathCurve e explore o catálogo de superfícies. Escolha uma superfície parametrizada e identifique as expressões x(u,v), y(u,v), z(u,v) e os intervalos dos parâmetros.



2 Construa no GeoGebra 3D

Insira a parametrização no comando de superfície do GeoGebra 3D, definindo também os intervalos de u e v.

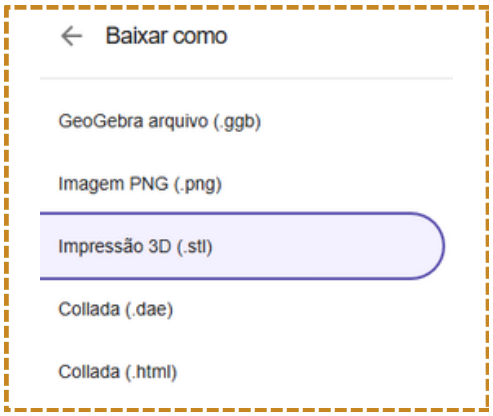
```
Superfície(x(u,v), y(u,v), z(u,v),
u, início, fim, v, início, fim)
```



3 Exporte o arquivo

Depois de visualizar a superfície, use o menu do GeoGebra para baixar o modelo em formato STL.

```
Menu → Baixar como → STL
```



Explore o MathCurve:
clique aqui

4 Imprima seu modelo

Se você tiver acesso a uma impressora 3D, abra o arquivo STL em um programa de fatiamento e prepare a impressão. Se não tiver, envie o arquivo a um laboratório, espaço maker, gráfica ou profissional que realize impressão 3D.



Exemplo de modelos impressos em 3D prontos para uso.

Dica importante

- verifique os intervalos dos parâmetros
- observe a orientação da superfície
- salve o arquivo em STL

Depois de imprimir o modelo, compare a superfície física com a construção no GeoGebra 3D e utilize o material na atividade investigativa.

SEÇÃO DIDÁTICA

DO MODELO 3D AO GEOGEBRA

Esta atividade parte da observação de modelos impressos em 3D de ciclides de Dupin e segue para a exploração de uma construção dinâmica no GeoGebra 3D. O objetivo é relacionar forma, visualização espacial e variação de parâmetros, aproximando o leitor de diferentes configurações da superfície.



Modelos impressos em 3D de diferentes configurações da ciclide de Dupin.

1 Materiais

- modelos impressos em 3D
- construção dinâmica no GeoGebra 3D
- celular, tablet ou computador

2 Proposta da atividade

Escolha um dos modelos, observe sua forma e tente reproduzi-lo no GeoGebra 3D. Para isso, manipule os parâmetros da construção e compare, continuamente, o modelo físico com a superfície digital.

3 O que observar

- abertura central da superfície
- presença ou ausência de autointerseção
- simetria e geometria global
- semelhanças e diferenças entre as configurações

Desafio investigativo

Que alterações nos parâmetros fazem a superfície mudar de configuração?

Explore no GeoGebra

BNCC em foco

Matemática

- EF09MA17 — Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicá-las na representação de objetos.
- EM13MAT512 — Investigar propriedades geométricas, formular conjecturas e testar relações com apoio de tecnologias digitais.

Computação

- Pensamento computacional — reconhecer padrões, comparar configurações e explorar parâmetros.
- Cultura digital — utilizar o GeoGebra de forma crítica, criativa e investigativa.

CONCLUSÃO

Ao longo desta edição, as ciclides de Dupin foram revisitadas por diferentes caminhos. Partimos de seu desenvolvimento histórico no século XIX, acompanhando contribuições de matemáticos como Charles Dupin, James Clerk Maxwell, Arthur Cayley e Gaston Darboux, e seguimos em direção às possibilidades contemporâneas de visualização, investigação e construção dessas superfícies.

As diferentes representações apresentadas mostram que um mesmo objeto matemático pode ser observado sob múltiplas perspectivas. Equações, curvas focais, famílias de esferas, construções dinâmicas no GeoGebra 3D e modelos impressos permitem estabelecer conexões entre o pensamento algébrico, a visualização espacial e a geometria das superfícies. Esse diálogo entre representações também esteve presente na própria pesquisa, na qual o GeoGebra foi utilizado não apenas como recurso de ilustração, mas como parte do processo de investigação e compreensão geométrica.

As entrevistas reunidas em Trajetórias em Diálogo ampliaram ainda mais esse percurso. Diferentes vozes aproximaram a Geometria Diferencial da formação matemática, da História da Matemática, da Educação Básica, da Arte, da cultura e de outras formas de compreender e comunicar o conhecimento. Assim, as ciclides deixaram de aparecer apenas como superfícies definidas por propriedades matemáticas e passaram também a funcionar como ponto de encontro entre diferentes experiências e campos de saber.

Na Seção Didática, a passagem entre o digital e o material abriu outras possibilidades de exploração. Manipular parâmetros, comparar configurações, construir superfícies no GeoGebra e transformá-las em modelos impressos em 3D permite que a geometria seja observada, experimentada e investigada de diferentes maneiras.

Esta edição não pretende esgotar o estudo das ciclides de Dupin. Ao contrário, pretende deixar caminhos abertos. As superfícies apresentadas aqui podem servir como ponto de partida para novas leituras históricas, novas construções digitais, outras experiências didáticas e diferentes diálogos entre Matemática, tecnologia, cultura e educação.

Que esta revista seja, portanto, menos um ponto de chegada e mais um convite para continuar olhando, manipulando, perguntando e descobrindo geometria.

REFERÊNCIAS

AIZIC, Felipe Colar. Entrevista concedida a Victória Gentil Andrade. Rio de Janeiro, 2026.

ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy; SILVA NETO, Gregório. Geometria Diferencial das Curvas no R^2. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.21711/SBM/000001 . Acesso em: 10 ago. 2026.

BORTOLOSSI, Humberto José. Entrevista concedida a Victória Gentil Andrade. Rio de Janeiro, 2026.

BORTOLOSSI, Humberto José; PASQUINI, Regina Célia Guapo. Modelos cosmológicos: três episódios na História da Matemática para a sala de aula. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Computação na Educação Básica: complemento à Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF: MEC/CNE, 2022. A Computação foi estabelecida oficialmente como complemento à BNCC em 2022.

CAYLEY, Arthur. On the cyclide. The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, v. 12, p. 148–165, 1873.

COSTA, Celso. Entrevista concedida a Victória Gentil Andrade. Rio de Janeiro, 2026.

DARBOUX, Gaston. Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques. Paris: Gauthier-Villars, 1873. Disponível em: Gallica – Bibliothèque nationale de France. Acesso em: 4 jul. 2026.

DEGEN, Werner. Cyclides. In: FARIN, Gerald; HOSCHEK, Josef; KIM, Myung-Soo (ed.). Handbook of Computer Aided Geometric Design. Amsterdam: North-Holland, 2002. p. 575–601.

DUPIN, Charles. Applications de géométrie et de méchanique. Paris: Bachelier, 1822. Disponível em: Gallica – Bibliothèque nationale de France. Acesso em: 4 jul. 2026.

FEEMAN, Timothy G. Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps. Providence: American Mathematical Society, 2002. (Mathematical World, v. 18).

GAUSS, Carl Friedrich. Disquisitiones generales circa superficies curvas. Göttingen: Dieterich, 1827.

GEOGEBRA. GeoGebra 3D Calculator. Disponível em: https://www.geogebra.org/3d. Acesso em: 10 ago. 2026.

REFERÊNCIAS

HILBERT, David; COHN-VOSSEN, Stephan. Geometry and the Imagination. New York: Chelsea Publishing Company, 1944.

KLEIN, Felix. Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Berlin: Springer, 1928. v. 1

MADEIRO, Eduardo de Santana. Entrevista concedida a Victória Gentil Andrade. Rio de Janeiro, 2026.

MATHCURVE. Dupin Cyclide. [s.d.]. Disponível em: https://mathcurve.com/surfaces.gb/cyclididedupin/cyclidededupin.shtml. Acesso em: 12 jul. 2026.

MAXWELL, James Clerk. On the cyclide. The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, v. 9, p. 111–126, 1868.

NIK BENTEL STUDIO. The Orb Bag in Black and White. 2024. Disponível em: https://www.nikolasbentelstudio.com/projects/a0022l4f. Acesso em: 4 jul. 2026.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Pierre Charles François Dupin. MacTutor History of Mathematics Archive. University of St Andrews, 2000. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dupin/. Acesso em: 4 jul. 2026.

PASQUINI, Regina Célia Guapo; BORTOLOSSI, Humberto José. O que é simetria? Diferentes usos da palavra ao longo da História da Matemática. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, v. 3, n. 9, p. 6–17, 2018. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/50. Acesso em: 10 ago. 2026.

PASQUINI, Regina Célia Guapo; BORTOLOSSI, Humberto José. Simetria: história de um conceito e suas implicações no contexto escolar. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. (Série História da Matemática para o Ensino, v. 9).

PRATT, Michael J. Cyclides in computer aided geometric design. Computer Aided Geometric Design, v. 7, n. 1–4, p. 221–242, 1990.

SILVA, Wallace da. Trajetórias: História da Matemática e Divulgação Científica. Edição 1: As seções do toro. 2025. Disponível em: https://petrus.cp2.g12.br/items/67498796-ac98-4adb-aa98-9ee35c579810 . Acesso em: 4 jul. 2026.

STRUIK, Dirk J. Lectures on Classical Differential Geometry. New York: Dover Publications, 1988.

FICHA TÉCNICA

Título da revista:

Trajetórias – História da Matemática e Divulgação Científica

Título da edição:

As Ciclides de Dupin: História, Geometria e Visualização Dinâmica no GeoGebra

Edição:

2ª edição – 2026

Produção, texto, pesquisa e diagramação:

Victória Gentil Andrade

Orientação acadêmica:

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins

Entrevistas:

Prof. Dr. Celso Costa
Prof. Dr. Humberto José Bortolossi
Felipe Colar Aizic
Eduardo Madeiro de Santana

Imagens, diagramas e GeoGebra:

Victória Gentil Andrade

Apoio:

PROFMAT – Colégio Pedro II

© Victória Gentil Andrade. Uso educacional permitido com citação da fonte.