

**COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA,
EXTENSÃO E CULTURA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA**

DANIELLE DAIANE PEREIRA FROZI BRISOLA

CIRCUNFERÊNCIA, MEDIATRIZ E BISSETRIZ: uma
proposta de trabalho com lugares geométricos no ensino
fundamental

Rio de Janeiro

2022

DANIELLE DAIANE PEREIRA FROZI BRISOLA

CIRCUNFERÊNCIA, MEDIATRIZ E BISSETRIZ: uma proposta de trabalho com
lugares geométricos no ensino fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, ofertado pela Pró-Reitoria de PósGraduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de **Especialista em Educação Matemática.**

Orientador: Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins.

Rio de Janeiro

2022

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

B859 Brisola, Danielle Daiane Pereira Frozi

Circunferência, mediatriz e bissetriz: uma proposta de trabalho com lugares geométricos no ensino fundamental/ Danielle Daiane Pereira Frozi
Brisola – Rio de Janeiro, 2022.

74f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Circunferência. 3. Geogebra I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Colégio Pedro II. III. Título.

CDD 510

Todos os direitos de publicação reservados. Os textos assinados, tanto no que diz respeito à linguagem como ao conteúdo e à normalização, são de inteira responsabilidade do autor, do orientador e da banca examinadora e não expressam, necessariamente, a opinião do Colégio Pedro II. É permitido citar parte dos textos sem autorização prévia, desde que seja identificada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei n.º 9.610/1998) é crime estabelecido pelo Código Penal.

DANIELLE DAIANE PEREIRA FROZI BRISOLA

CIRCUNFERÊNCIA, MEDIATRIZ E BISSETRIZ: uma proposta de trabalho com lugares geométricos no ensino fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, ofertado pela Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Aprovado em _____ de _____ de _____.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins
Colégio Pedro II
Orientador

Prof. Dr. Anderson Fernandes Novanta.
DEMAT CP II – Membro externo

Prof. M. Rony Henrique Barros
DEMAT CP II - Membro Interno

Dedico esse trabalho a minha família que me deu todo o suporte para que eu concluísse. Em especial ao meu pai, que não pôde estar presente nas minhas conquistas acadêmicas, mas sempre foi um grande incentivador em vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família, que sempre deu toda a ajuda necessária para que eu participasse das aulas e concluísse o curso.

Agradeço ao meu orientador, que me deu toda a ajuda e apoio na execução desse trabalho e que foi fundamental para a minha conclusão.

Agradeço aos meus professores que contribuíram para a minha formação acadêmica.

Agradeço aos meus colegas de turma, que em meio as dificuldades, sempre tiveram palavras de apoio para continuar.

RESUMO

BRISOLA, Danielle Daiane Pereira Frozi. **Circunferência, mediatriz e bissetriz: uma proposta de trabalho com lugares geométricos no ensino fundamental**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2022.

Esse trabalho irá trazer informações sobre o uso de tecnologias em sala, como foi a sua trajetória e o quanto falta para que o objetivo de uma educação tecnológica seja alcançado. Também trará definições de lugares geométricos, em específico circunferência, mediatriz e bissetriz. O trabalho mostrará formas de como utilizar essas tecnologias dentro de sala de aula nos assuntos abordados, que foram escolhidos de acordo com as orientações da Base Nacional Comum Curricular com o software GeoGebra, porém o objetivo desse trabalho é mostrar que os assuntos, mesmo que de uma forma menos formal, podem ser trabalhados em séries anteriores ao que é recomendando, dando aos alunos uma visão prévia de elementos e características importantes para o ensino de geometria. As atividades propostas e suas respectivas soluções são apenas sugestões que podem ser adaptadas de acordo com a realidade de cada escola e de cada aluno. Ao final, o leitor poderá definir qual a melhor metodologia de ensino e melhor abordagem para cada assunto.

Palavras-chave: GeoGebra. Lugares geométricos. Circunferência. Mediatriz. Bissetriz.

ABSTRACT

BRISOLA, Danielle Daiane Pereira Frozi. **Circunferência, mediatriz e bissetriz: uma proposta de trabalho com lugares geométricos no ensino fundamental**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2022.

This paper will bring information about the use of technologies in classroom, how was its trajectory and how much missing for the objective of a technological education to be reached. It will also bring definitions of geometric places, in specific circumference, mediatrix and bisector. The work will show ways of using these technologies inside classroom with subjects covered, which were chosen according to the guidelines of the National Common Curricular Base with the GeoGebra software, but the objective of this work is show the subjects, even if in a less formal way, they can be worked in grades earlier than what is recommended, giving students a preview of elements and important particulars for the teaching of geometry. The proposed activities and their respective solutions are just suggestions that can be adapted according to the reality of each school and each student. In the end, the reader will be able to define the best teaching methodology and best approach to each subject.

Keywords: GeoGebra. Geometric places. Circumference. Mediatrix. Bisector.

LISTA DE FIGURAS (ILUSTRAÇÕES)

Figura 1 - Tela inicial do Geogebra.....	23
Figura 2 - Tela da ferramenta Ponto.....	24
Figura 3 - Tela com a marcação de três pontos.....	24
Figura 4 - Tela da ferramenta Ponto Médio.....	25
Figura 5 - Tela dos pontos médios entre dois pontos ou de um segmento.....	25
Figura 6 - Tela da ferramenta Reta.....	26
Figura 7 - Tela com duas retas construídas.....	26
Figura 8 - Tela da ferramenta Segmento de Reta.....	27
Figura 9 - Tela com segmentos de reta.....	27
Figura 10 - Tela da ferramenta Reta Perpendicular.....	28
Figura 11 - Tela com uma reta e um ponto dado.....	28
Figura 12 - Tela da reta perpendicular construída.....	29
Figura 13 - Tela da ferramenta Círculo: centro e raio.....	29
Figura 14 - Tela com o centro e determinação da medida do raio.....	30
Figura 15 - Tela com o círculo construído.....	30
Figura 16 - Tela da ferramenta Círculo dados centro e um de seus pontos.....	31
Figura 17 - Tela do círculo de centro A e B pertencente.....	31
Figura 18 - Tela da ferramenta Bissetriz.....	32
Figura 19 - Tela da bissetriz dado três pontos.....	32
Figura 20 - Tela da bissetriz dadas duas retas.....	33
Figura 21 - Tela da ferramenta Ângulo.....	33
Figura 22 - Tela do ângulo dado três pontos.....	34
Figura 23 - Tela dos ângulos dadas duas retas.....	34
Figura 24 – Distância de reta e ponto.....	35
Figura 25 – Distância de retas paralelas.....	36
Figura 26 – Distância de retas concorrentes.....	36
Figura 27 – Distância de retas concorrentes.....	37
Figura 28 – Distância de retas concorrentes.....	37
Figura 29 - Construção da circunferência.....	38
Figura 30 - Construção da bissetriz de um ângulo agudo.....	39
Figura 31 - Construção da bissetriz de um ângulo reto.....	39
Figura 32 - Construção da mediatriz.....	40

Figura 33 - Análise da propriedade de mediatriz.....	41
Figura 34 – Origem da palavra circunferência.....	43
Figura 35 – Origem da palavra bissetriz.....	44
Figura 36 – Origem da palavra mediatriz.....	44
Figura 37 – Exemplos dos lugares geométricos aplicados no cotidiano.....	45
Figura 38 – Exemplos dos lugares geométricos aplicados no cotidiano.....	45
Figura 39 – Exemplos dos lugares geométricos aplicados no cotidiano.....	46
Figura 40 – Desenho das casas.....	47
Figura 41 - Atividade 1.....	48
Figura 42 - Atividade 2.....	49
Figura 43 - Atividade 3.....	50
Figura 44 - Atividade 4.....	50
Figura 45 - Atividade 4.....	51
Figura 46 - Atividade 5.....	52
Figura 47 - Solução atividade 1.....	53
Figura 48 - Solução atividade 1.....	53
Figura 49 - Solução atividade 1.....	54
Figura 50 - Solução atividade 1.....	55
Figura 51 - Solução atividade 1.....	55
Figura 52 - Solução atividade 2.....	56
Figura 53 - Solução atividade 2.....	56
Figura 54 - Solução atividade 2.....	57
Figura 55 - Solução atividade 2.....	58
Figura 56 - Solução atividade 2.....	58
Figura 57 - Solução atividade 2.....	59
Figura 58 - Solução atividade 3.....	60
Figura 59 - Solução atividade 3.....	60
Figura 60 - Solução atividade 3.....	61
Figura 61 - Solução atividade 3: variando apenas a casa da Marcela.....	61
Figura 62 - Solução atividade 3: variando apenas a casa da Michele.....	62
Figura 63 - Solução atividade 3: variando as duas casas.....	62
Figura 64 - Solução atividade 4.....	63
Figura 65 - Solução atividade 4.....	63
Figura 66 - Solução atividade 4.....	64

Figura 67 - Solução atividade 4.....	64
Figura 68 - Solução atividade 4.....	65
Figura 69 - Solução atividade 4.....	65
Figura 70 - Solução atividade 4.....	66
Figura 71 - Solução atividade 5.....	66
Figura 72 - Solução atividade 5.....	67
Figura 73 - Solução atividade 5.....	67
Figura 74 - Solução atividade 5.....	68
Figura 75 - Solução atividade 5.....	68
Figura 76 - Solução atividade 5.....	69
Figura 77 - Versão utilizada do GeoGebra.....	69
Figura 78 - Ferramentas disponíveis da versão celular.....	70

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Objetos e habilidades da BNCC 7° e 8° anos.....	41
Tabela 2 – Objetos e habilidades da BNCC 6° ano	42

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

UNESCO - Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
1.1 Justificativa	15
2 OBJETIVOS	17
2.1 Objetivo Geral	17
2.2 Objetivos Específicos	17
3 METODOLOGIA	18
4 O USO DE TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA	20
4.1 Software GeoGebra.....	23
5 LUGARES GEOMÉTRICOS E SUAS DEFINIÇÕES	35
5.1 Circunferência.....	38
5.2 Bissetriz.....	39
5.3 Mediatriz.....	40
6 ATIVIDADES	47
6.0.1 Atividade Circunferência.....	47
6.0.2 Atividade Mediatriz.....	49
6.0.3 Atividade Ponto Médio.....	49
6.0.4 Atividade Bissetriz.....	50
6.0.5 Atividade Bissetriz.....	51
6.1 PROPOSTAS DE SOLUÇÕES.....	52
6.1.1 Atividade Circunferência.....	52
6.1.2 Atividade Mediatriz.....	56
6.1.3 Atividade Ponto Médio.....	59
6.1.4 Atividade Bissetriz.....	62
6.1.5 Atividade Bissetriz.....	66
7 CONCLUSÕES FINAIS	72
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73

1 INTRODUÇÃO

O objeto do conhecimento *lugares geométricos* é um dos assuntos de interesse de estudiosos na área de ensino e aprendizagem de geometria por promover naturalmente, dificuldades nos alunos, mesmo sendo tal assunto trabalhado desde as séries finais do ensino fundamental II e no ensino médio. gera muita dificuldade nos alunos, mesmo sendo trabalhado nas séries finais do ensino fundamental II e no ensino médio.

Acreditamos que tais dificuldades se baseiam no fato desse conteúdo não ser como tantos aqueles que possuem definições mais simples ou mais perceptíveis no dia a dia, seguido também da imaturidade matemática de inúmeros alunos ao tentar visualizar figuras geométricas e compreender suas propriedades a partir de uma propriedade que gozam todos os seus pontos.

A proposta desse trabalho é apresentar atividades que possam ser aplicadas no final do Ensino Fundamental I e nos anos iniciais do Ensino Fundamental II a fim de que, gradualmente, respeitando os aspectos cognitivos da infância, problemas cujas soluções emergem da definição de uma figura através do conceito de lugar geométrico possam ser resolvidos. Lançando mão de tecnologia digital como ferramenta, o software GeoGebra foi escolhido como artefato digital de auxílio na construção de três lugares geométricos contidos no plano e na possibilidade de descoberta ou reconhecimento da propriedade que cada figura geométrica carrega intrinsecamente.

Com a elaboração da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os conteúdos abordados nesse trabalho devem ser ensinados nos 7º, 8º e 9º anos do ensino fundamental II, mas toda a base traz o assunto de geometria desde o começo do ensino fundamental I, ou seja, podemos trabalhar esses assuntos de uma forma menos formal, mais lúdica, tecnológica e possivelmente mais compreensível para alunos mais novos.

Pela BNCC, temos que o objeto de conhecimento circunferência como lugar geométrico deve ser trabalhada no 7º ano do ensino fundamental II através da habilidade EF07MA22. Já o objeto de conhecimento mediatriz e a bissetriz como lugares geométricos contendo suas construções e resolução de problemas são trabalhados no 8º ano do ensino fundamental II através da habilidade EF08MA17. E o assunto de ponto médio é trabalhado no 9º ano pela habilidade EF09MA16.

Mas... usando uma metodologia adequada, os alunos não podem reconhecer figuras dadas propriedades que a caracterizam no final do Ensino Fundamental I? Não estariam mais receptivos e propensos ao lúdico? Assim, deixaremos nessas linhas a seguir, uma contribuição/sugestão aos colegas professores.

1.1 Justificativa

O ensino e a aprendizagem da Matemática sempre foram alvos de questionamentos e sugestões deixadas por estudiosos da área, pais de alunos, atuais alunos e ex-alunos. A explicação para esta afirmativa pode ser encontrada nos estudos de Psicologia da Educação Matemática que se dedicam a desvendar as relações entre alunos expostos à Matemática de maneira não muito adequada, obviamente constatado de maneira profissional, a existência de traumas promovidos pela disciplina. Assim, tentar desenvolver uma melhor comunicação matemática entre alunos e professores e entre alunos e a Matemática, acaba sendo uma das características das atividades propostas.

O tema desse trabalho foi escolhido por reconhecermos o seu potencial apesar de sabermos que é árido e intenso, além de gerar desconforto na maioria dos professores quando buscam contextualizações. É um conteúdo tradicionalmente apresentado de forma rápida pelos professores e cujos exercícios são resolvidos sem o uso de materiais de construção em boas condições por parte dos alunos, pelo fato das resoluções de exercícios simples e tradicionais serem resultados de inúmeras tentativas infrutíferas, por questionar a formação inicial de inúmeros professores e por acreditarmos que a inserção da tecnologia contribui para a expansão das formas da utilização de recursos habituais de utilização de recursos materiais (...) em sala de aula', como afirma (ALVES & SOARES, 2007).

A geometria tem ganhado mais espaço nas salas de aula, nos materiais didáticos da educação básica e na produção de atividades com softwares livres. Porém, ainda sentimos a necessidade de uma mudança na formação do professor, para que ele possa entender que a tecnologia faz parte da vida dessa geração de alunos e que ela pode e deve ser usada ao favor da transformação e do desenvolvimento do ensino, da aprendizagem e da multiplicação do conhecimento. Por isso quanto mais informações testadas e compartilhadas, melhor, afinal a tecnologia avançou bastante ao longo da segunda metade do século XX até os dias

atuais e se tornou acessível a um grande grupo da sociedade, mas será que a visão sobre educação e aprendizagem acompanhou este avanço? Será que abordagens de alguns temas como as construções geométricas se mantiveram antiquadas em alguns casos, por exemplo, só se ensina geometria com régua não graduada e compasso? A refletir.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

O trabalho a seguir tem como objetivo principal mostrar que podemos trabalhar os conteúdos matemáticos com alto grau de abstração, de uma forma mais informal, isto é, a partir da resolução de problemas em pares e com auxílio tecnológico digital. Propõe-se que ao longo de mais anos/séries do Ensino Fundamental que o tema em destaque esteja presente em mais séries, sem a necessidade de concentrá-los em determinadas séries.

2.2 Objetivos Específicos

Um dos objetivos desse trabalho é demonstrar que o ensino da matemática pode ser algo dinâmico e atualizado, fazendo com que os alunos se interessem e adquiram autonomia. Lugares geométricos é apenas um incentivo.

Essa pesquisa também tem por objetivo promover discussões entre os leitores desse trabalho, como a tecnologia foi introduzida no contexto escolar, seus avanços e o que falta para ser plenamente satisfatório. E por fim, sugerir atividades para trabalhar lugares geométricos e oferecer soluções, permitindo adequações quando necessárias.

3 METODOLOGIA

Esta pesquisa é de cunho bibliográfico. Apesar de apresentarmos sugestões de desenvolvimento de atividades no final, não carregam a ideia de um produto educacional. Por conta da pandemia de COVID-19 tais atividades propostas não puderam ser aplicadas em salas de aula, ficando assim, como sugestões a serem desenvolvidas junto aos alunos futuramente.

O estudo acerca dos fundamentos da tecnologia na educação básica tecnológica foi amplamente discutido para compor as atividades, e a compreensão de como foi seu desenvolvimento e quais as ferramentas possíveis de serem aplicadas dentro da escola, nos encorajou a construir atividades que pudessem ser resolvidas em duplas, por valorizarmos as discussões entre os estudantes e incentivar produções escritas nas aulas de Matemática, fato pouco usual. Optamos assim, por sugerir ao professor leitor desse trabalho, que desenvolva as atividades propostas através de uma metodologia ativa, conhecida por peer instruction.

O peer instruction é uma metodologia ativa de caráter interativo centrada no estudante que passa organizar e desenvolver o conteúdo estudado de maneira tradicional para uma forma que promova a transferência de informações e mudança de assimilação. A metodologia é formada por nove passos básicos.

- (1) Uma apresentação oral de no máximo 20 minutos pelo professor.
- (2) Uma pergunta conceitual é lançada ao grupo. Esta pergunta é oriunda da apresentação oral feita pelo professor
- (3) Momento da reflexão dos alunos em duplas: dura cerca de 2min. Este momento é importante por permitir que o aluno reflita sobre a questão proposta e construa uma argumentação sólida ao resolver o problema
- (4) O registro das respostas dos alunos é construído pela dupla.
- (5) O professor analisa as respostas. Se a frequência de acertos varia entre 35% e 70% o professor vai para a etapa 6 ou para a etapa 9 quando a frequência for superior a 70%.
- (6) Os alunos discutem a questão e suas resoluções já corrigidas, em dupla, em 2 minutos.
- (7) Os alunos registram suas novas respostas
- (8) O professor lê as soluções das duplas para todos os alunos da classe
- (9) O professor explica a resposta da questão e pode fazer uma nova questão

sobre o mesmo assunto.

Para essa pesquisa, sugerimos que os passos sejam cuidadosamente apresentados para cada um dos três lugares geométricos.

O passo (1) consiste em apresentar as definições de Circunferência, Bissetriz, Mediatriz e suas construções dentro do software escolhido, confrontando a definição com a os passos da construção geométrica. A fim de que os outros passos fossem seguidos, ao final foram elaboradas quatro atividades, cada uma envolvendo um lugar geométrico e apresentadas soluções detalhadas de cada uma delas.

Essas soluções foram realizadas com auxílio do software GeoGebra, de forma que o aluno construa e verifique as propriedades referentes a esses lugares geométricos aos pares, e assim obter ganhos de aprendizagem efetivos ao participarem dos itens (2) a (4) e (5) a (8) descritos acima. O professor deve ser muito encorajado a publicar os resultados obtidos nesta experiência mostrando o processor de crescimento de seus alunos.

4 O USO DE TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

O uso da tecnologia na educação brasileira não é recente, visto que desde a década de 70 quando a tecnologia começou a ser usada, o campo da educação sempre foi um alvo para o seu uso. Segundo Lévy, existem três marcos da evolução humana. São eles: oralidade, escrita e informática. Vamos dar o foco na informática, que é o objeto de estudo desse trabalho. A informática é a codificação das informações de suporte digital. Trouxe profundas mudanças nas formas de comunicação (SILVA, 2006).

A informática também mudou a forma de enxergar o processo de ensino-aprendizagem. Embora de forma lenta, a informática educativa no Brasil vem avançando e conforme novas tecnologias surgem, a forma de implementar essa prática educacional também muda. A princípio as escolas, na maioria privadas, associavam informática educativa com um laboratório de informática, mas esse não é o objetivo. Com isso, surgiu a Secretaria Especial de Informática (SEI) para que pudesse direcionar as práticas educativas.

Em 2013 a UNESCO criou um documento com diretrizes e vantagens da aprendizagem móvel, embora as escolas proibissem o uso de celulares em sala, esse documento ressaltou a importância do uso desses aparelhos de forma que a educação pudesse chegar a todos e a qualquer momento. Mas no Brasil, o caminho a ser percorrido ainda é longo desde o aperfeiçoamento dos professores até a adequação das escolas ao uso dessas tecnologias. São as diretrizes apresentadas pela UNESCO:

- (1) Expandir o alicerce e a equidade da educação
- (2) Facilitar a aprendizagem individualizada
- (3) Fornecer retorno e avaliação imediatos
- (4) Permitir a aprendizagem a qualquer hora e em qualquer lugar

As tecnologias não irão substituir o professor, mas sim agregar conhecimento e promover autonomia em sala, estimulando os alunos a analisar, compreender conteúdos e resolver problemas cotidianos a partir de diferentes ópticas e ferramentas.

O uso de tecnologia em sala de aula possui duas abordagens: instrucionista e interacionista. A abordagem instrucionista usa a tecnologia escolhida como uma máquina de ensinar, onde o aluno é um receptor passivo, ou seja, apenas recebe

instruções e conceitos sem debater. Nada mais é do que a educação tradicional de forma informatizada. Já a abordagem interacionista todos tem voz, o uso da tecnologia funciona como uma ferramenta auxiliadora no processo ensino-aprendizagem e o professor utiliza a tecnologia mais adequada de acordo com a realidade que está inserido. Aqui o aluno usa a ferramenta para analisar e questionar resultados, compreender processos e enxergar mais de uma possibilidade para determinadas soluções.

Com o avanço da tecnologia e a mudança comportamental da sociedade, o campo do desenvolvimento de softwares cresceu abundantemente. O professor deve se integrar nesse meio e analisar qual a melhor opção para seus alunos, afinal são diversos modelos e cada professor vive uma realidade diferente. Hoje existem softwares com visão behaviorista, aquela que possui uma resposta certa e o aluno apenas responde o que é perguntado, como por exemplo programas que o professor cria um quiz. Também temos os de visão construtivista onde o aluno participa de todo o processo desde a construção até a execução e o professor é um auxiliador nesse processo. Um exemplo são os softwares de programação como *Scratch*, que o próprio aluno pode criar sem ser exigido um grande conhecimento. Ou um software como o *GeoGebra*, que os alunos fazem as construções geométricas e conseguem analisar propriedades.

É importante ressaltar que essa mudança não ocorre rapidamente. Quando um professor insere uma tecnologia em suas aulas, ele precisa analisar qual software funciona melhor em determinado assunto. Há diversas possibilidades de softwares livres, onde o acesso a informação e a colaboração são abertas a todos, ou seja, todos podem contribuir de forma a melhorar o acesso as informações dos softwares. Também há muitos ambientes virtuais disponíveis, desde as plataformas que exigem todos conectados no mesmo momento até as que não precisam todos estarem juntos ao mesmo tempo, mas ainda assim a interação existe.

Com a pandemia e o fechamento das escolas, todos tiveram que se adequar à melhor plataforma disponível. Na verdade, a pandemia antecipou etapas e a educação foi obrigada a se adaptar com algum modelo tecnológico e remoto. Com isso, houve um avanço na informática educativa, mas foi possível ver que ainda falta melhorar alguns quesitos em alguns lugares, por exemplo a Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro usou a plataforma *Classroom* onde era possível criar reuniões síncronas, postar material e atividades e conversar por fórum, porém foram relatados

diversos problemas como conexão e caso o aluno trocasse o aparelho, perdia a conta.

Cada software educacional deve ser avaliado. Precisamos analisar alguns critérios que podem determinar se determinado programa é bom ou não, mas de uma forma mais prática temos que analisar os objetivos do programa, se ele é de fácil navegação, se possui tutorial e como ele é, com a fundamentação pedagógica e se ela vai de encontro com a sua metodologia de ensino. Na verdade, o professor deve avaliar os benefícios de utilizar determinada tecnologia, até que ponto ela realmente ajuda e adequá-la se necessário a sua realidade.

Toda forma de ensino é válida, mas como as gerações atuais e futuras estão inseridas nessa realidade e no avanço dela, o professor também precisa se inserir e utilizar toda essa evolução a seu favor para que o seu objetivo principal que é compartilhar seu conhecimento seja concluído com sucesso.

Agora analisando em particular o ensino de matemática, ele sempre foi algo mecânico e repetitivo, tornando a disciplina pouco atraente para os alunos o que sempre ocasionou resultados não satisfatórios nas avaliações. Com o avanço tecnológico, pode-se aliá-lo ao ensino, tornando a aprendizagem matemática mais interessante aos alunos. Em especial no campo de geometria, onde muitos alunos não conseguem visualizar as figuras ou propriedades correspondentes, utilizar um programa que faz as construções para ele apenas observar e conseguir chegar nas conclusões é um grande aliado.

De acordo com a BNCC, umas das competências específicas em matemática para o ensino fundamental:

“Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.”

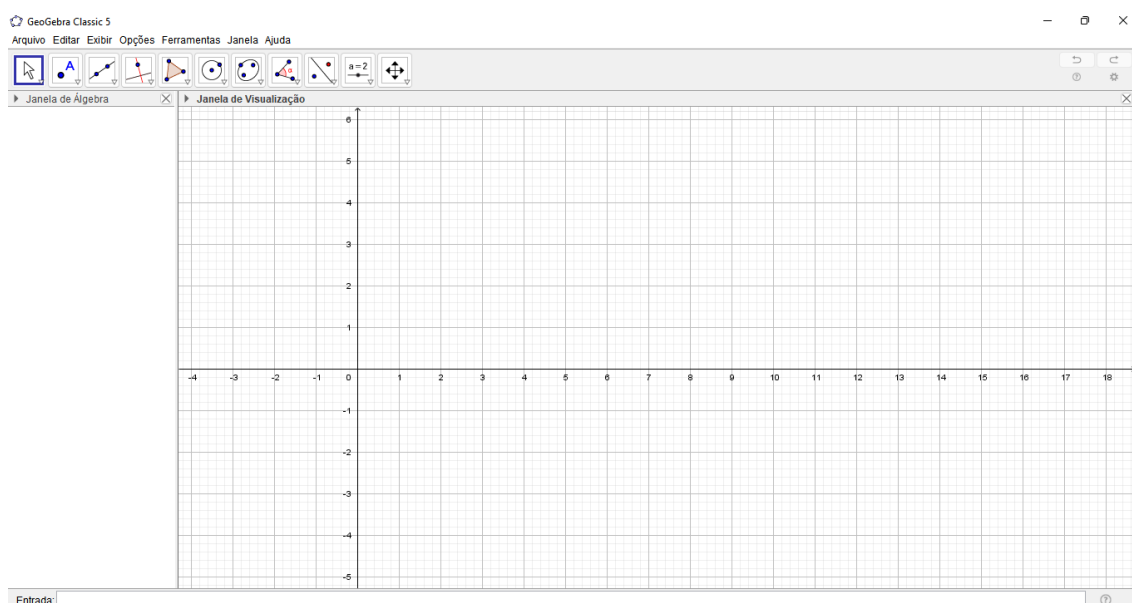
(BRASIL, 2018, p. 267)

Sendo assim, qualquer tecnologia que possa auxiliar na aprendizagem deve ser explorada com os alunos para que eles se interessem e entendam o objeto de conhecimento. Existem muitos softwares matemáticos, alguns livres e outros privados, que podem ser usados dentro das aulas e nos mais variados conteúdos. Nesse trabalho iremos utilizar o *GeoGebra* e algumas de suas ferramentas.

4.1 SOFTWARE GEOGEBRA

O *GeoGebra* é um software matemático gratuito com diversas aplicações como medir segmentos, ângulos, áreas e até construir gráficos. De fácil manuseio e diversas ferramentas, é um dos melhores programas para trabalhar conteúdos matemáticos com o primeiro segmento. Iremos mostrar algumas ferramentas úteis para o desenvolvimento desse trabalho.

Figura 1 – Tela inicial do Geogebra



Fonte: Autoria própria

Agora veremos algumas ferramentas básicas e importantes para a execução desse trabalho.

➤ Ferramenta Ponto


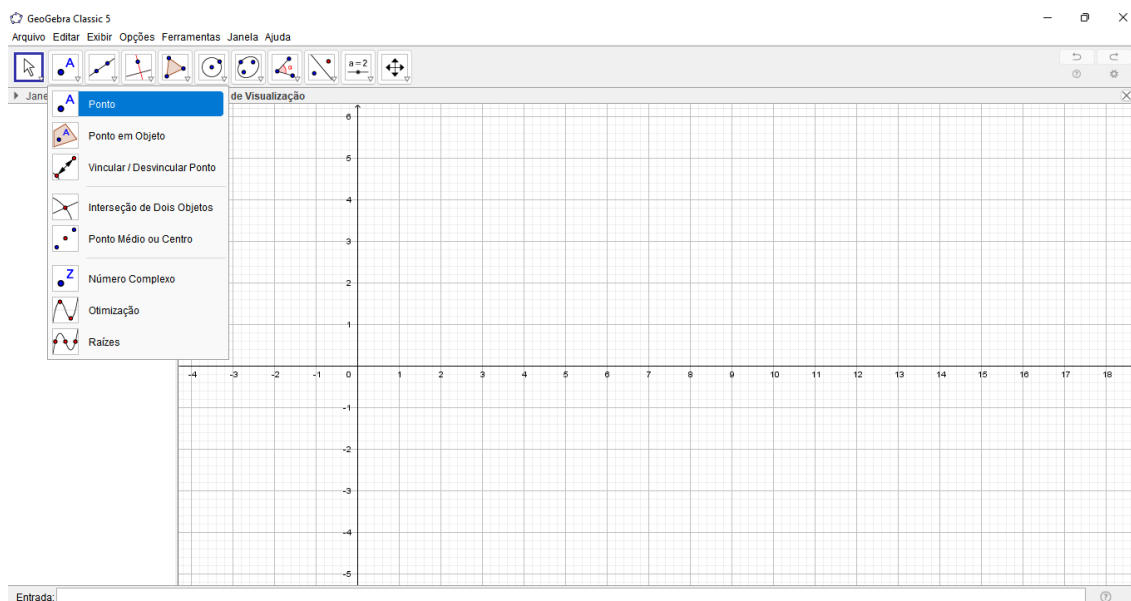
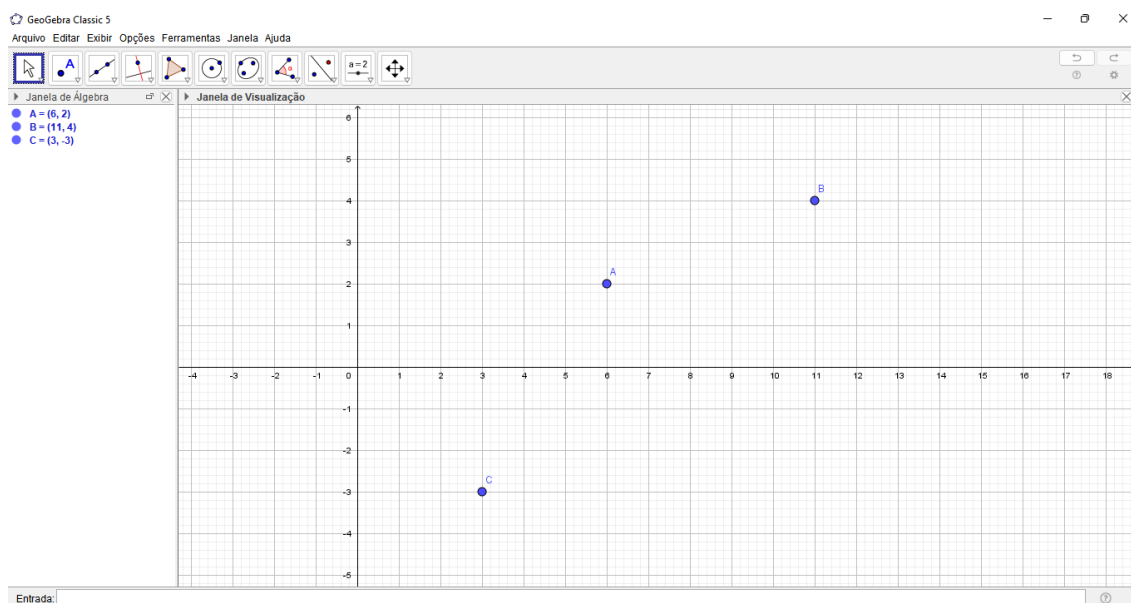
Ferramenta cujo ícone é . Basta clicar nele, selecionar a ferramenta ponto e marcar na malha quadriculada o ponto onde quiser ou precisar.

Figura 2 – Tela da ferramenta Ponto



Fonte: Autoria própria

Figura 3 – Tela com a marcação de três pontos



Fonte: Autoria própria

Na janela de Álgebra temos as coordenadas dos pontos marcados, onde também podemos modificar os valores ou simplesmente arrastar os pontos para outra coordenada.

➤ Ferramenta Ponto Médio


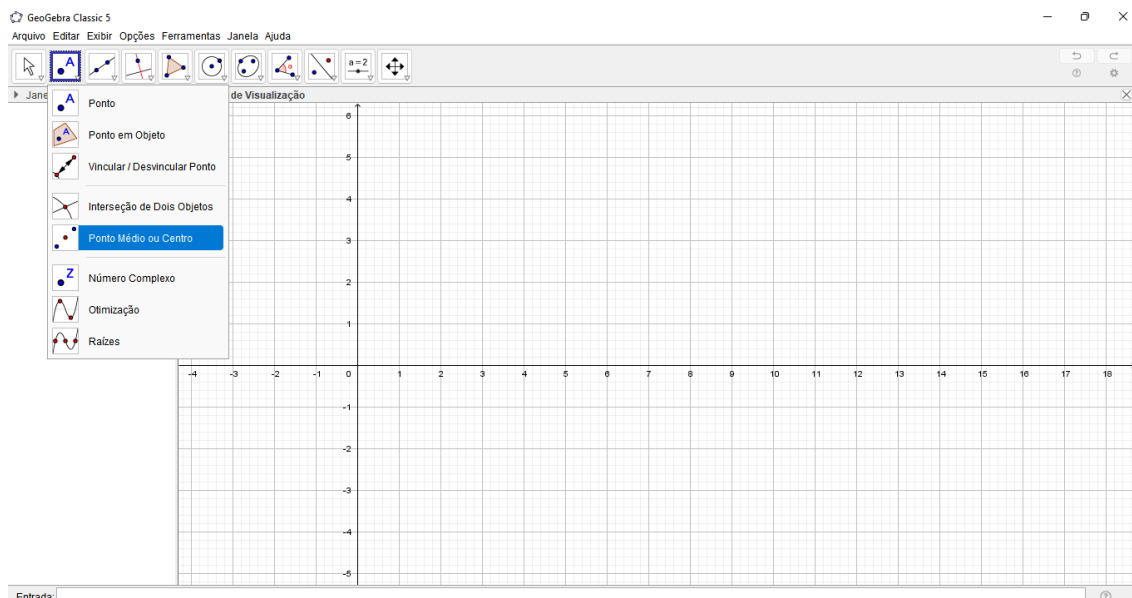
Ícone . Nessa ferramenta encontramos o ponto médio entre dois pontos ou de um segmento. Basta seleccionar os pontos ou o segmento.

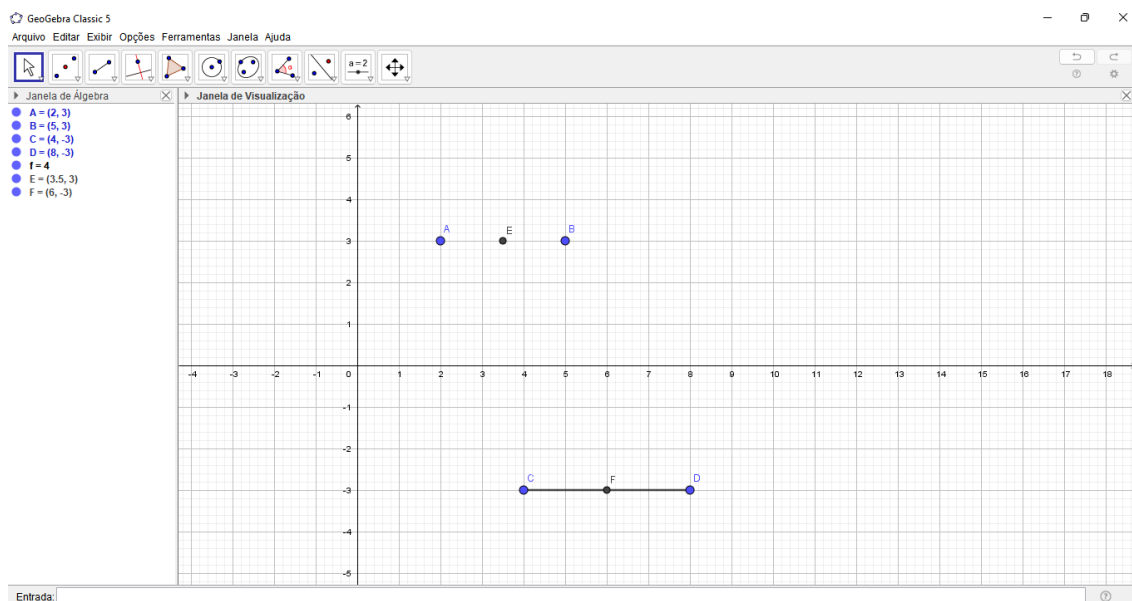
Figura 4 – Tela da ferramenta Ponto Médio



Fonte: Autoria própria

Podemos notar que o ponto marcado tem uma interface diferente, pois ele deve preservar a propriedade do ponto médio, ou seja, ser marcado exatamente no meio. Esse ponto não conseguimos mover, mas as extremidades do segmento ou os pontos soltos são móveis.

Figura 5 – Tela dos pontos médios entre dois pontos ou de um segmento.



Fonte: Autoria própria

➤ Ferramenta Reta


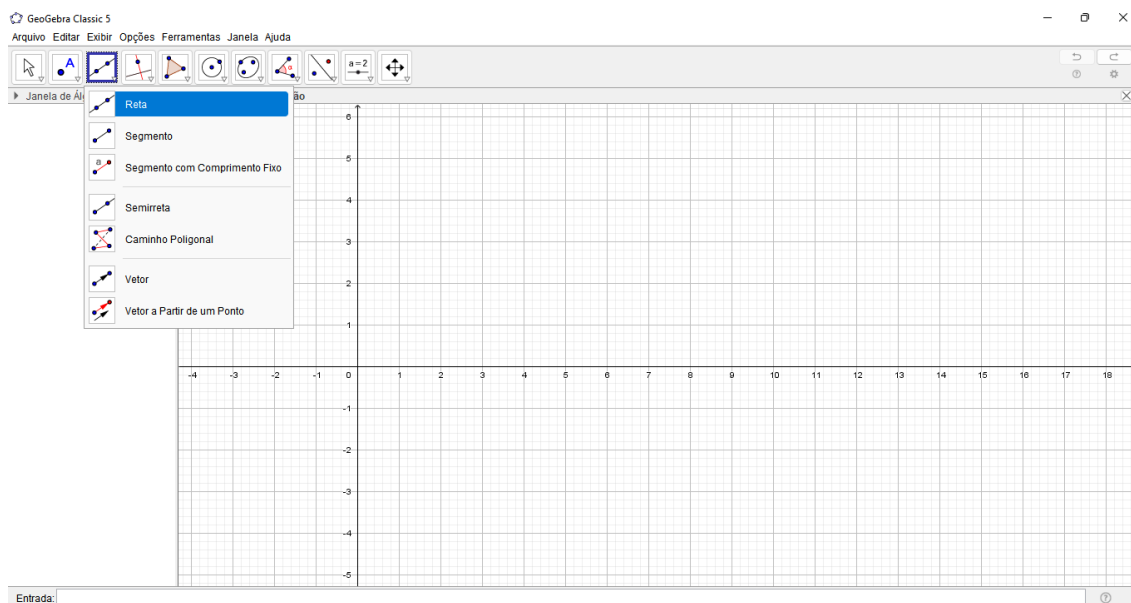
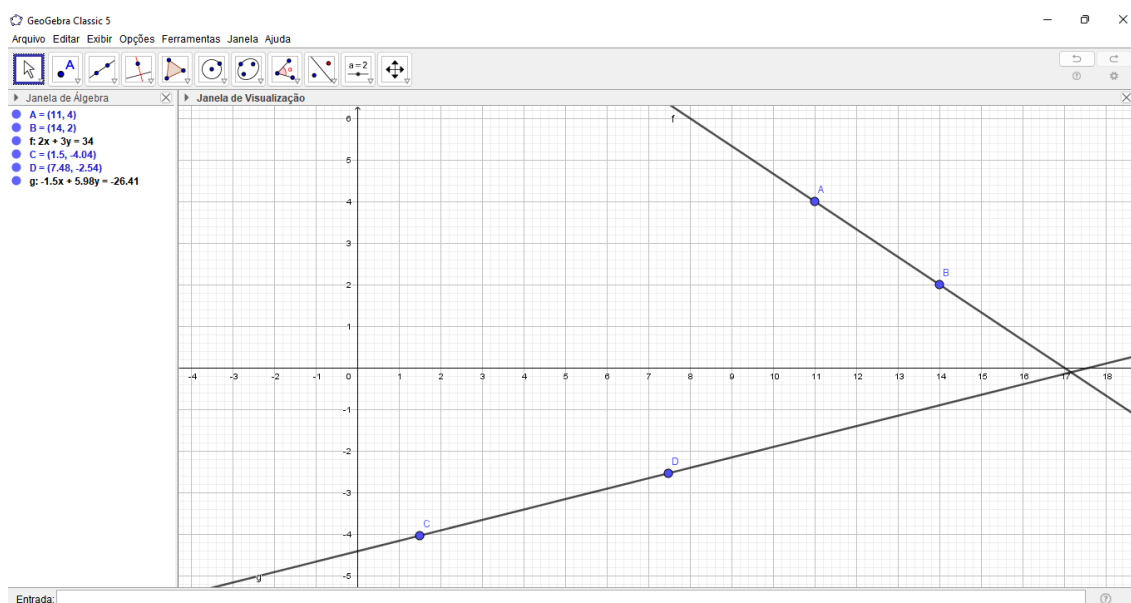
Ícone . Aqui podemos traçar uma reta passando por dois pontos ou marcar onde queremos a reta e ele mesmo determina esses pontos.

Figura 6 – Tela da ferramenta Reta



Fonte: Autoria própria

Figura 7 – Tela com duas retas construídas



Fonte: Autoria própria

➤ Ferramenta Segmento de Reta


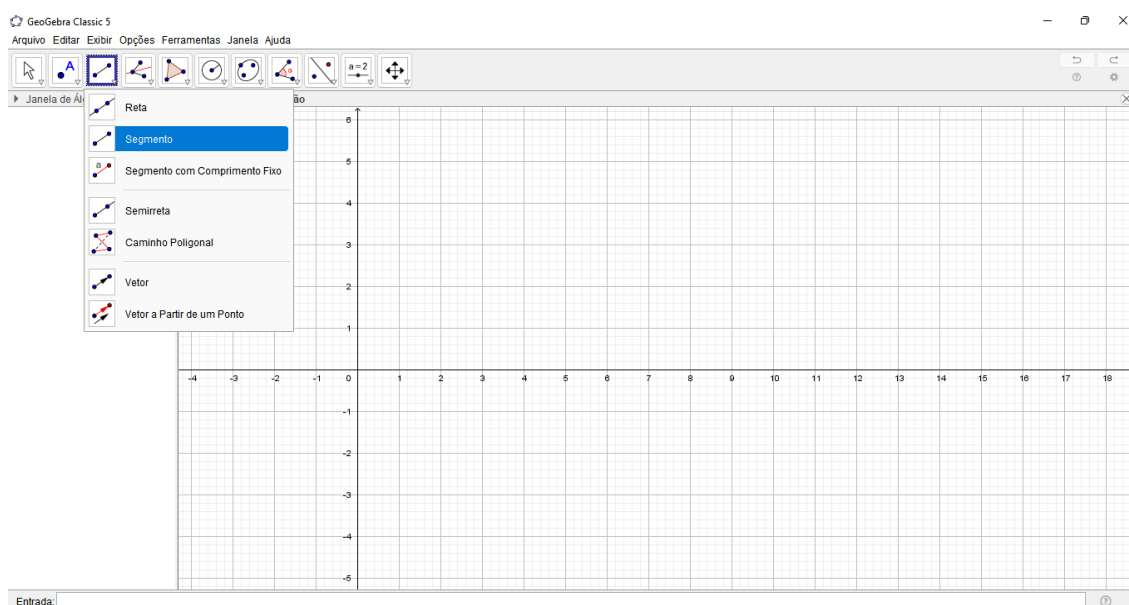
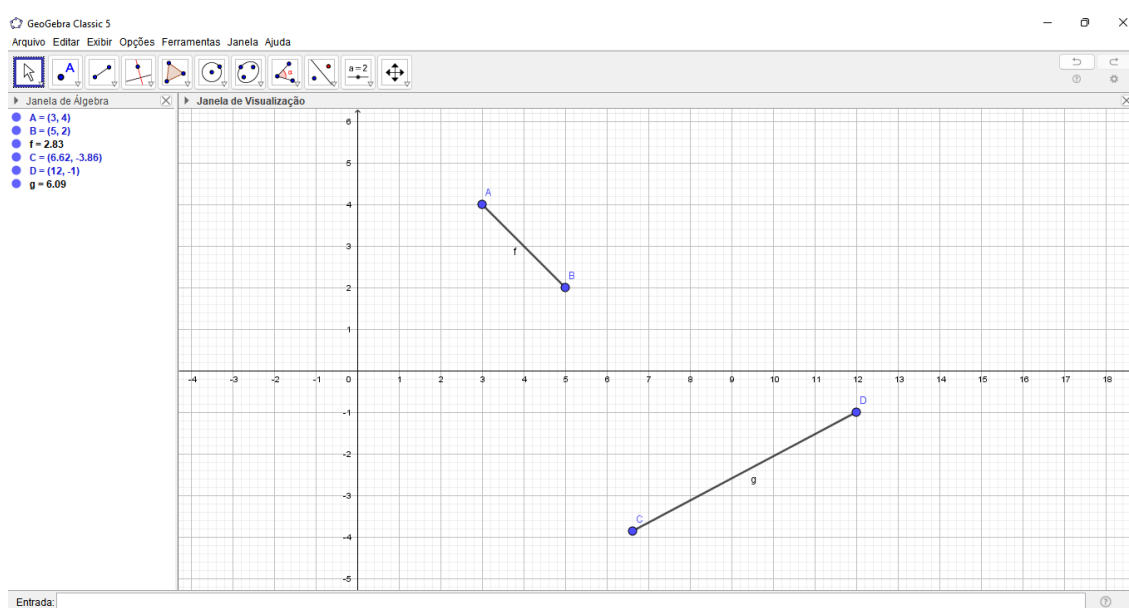
Ferramenta de ícone . Aqui clicamos nos pontos que serão as extremidades do segmento u simplesmente marcamos onde queremos o segmento e o proprio aplicativo determina as extremidades.

Figura 8 – Tela da ferramenta Segmento de Reta



Fonte: Autoria própria

Figura 9 – Tela com segmentos de reta



➤ Fonte: Autoria própria

➤ Ferramenta Reta Perpendicular


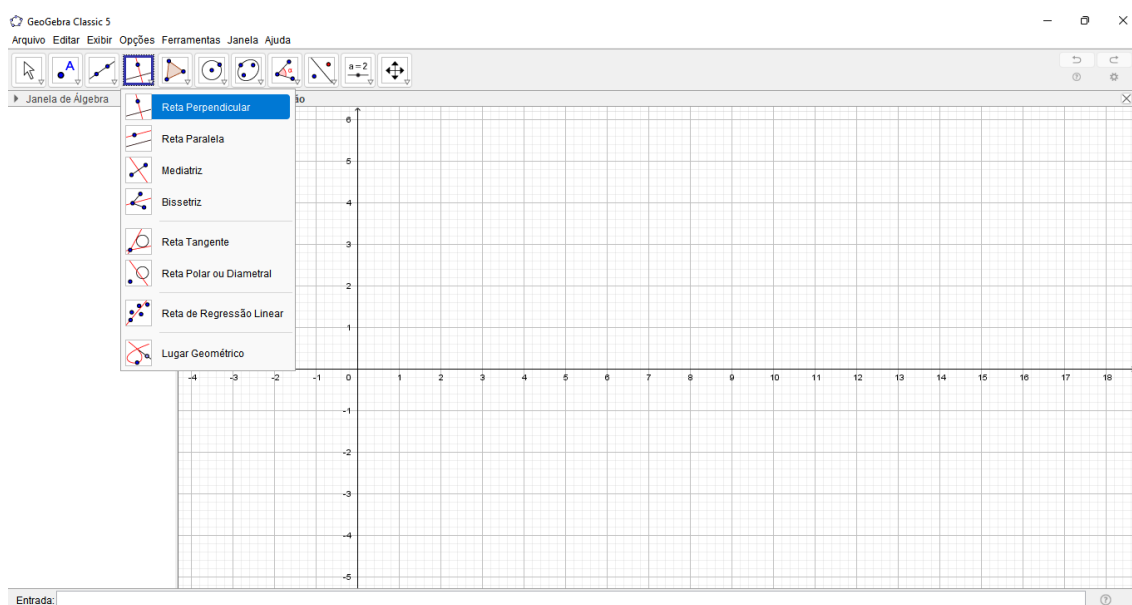
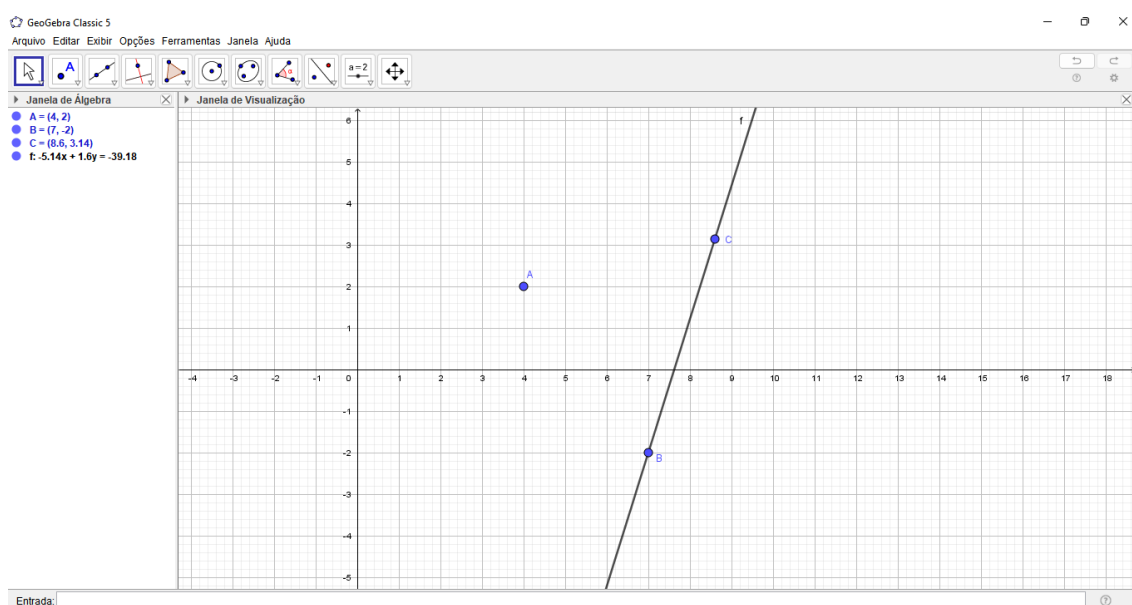
O ícone da reta perpendicular é . Para traçar essa reta, precisamos de uma reta ou segmento e um ponto. A perpendicular passará por esse ponto e fará 90° com o segmento ou reta.

Figura 10 – Tela da ferramenta Reta Perpendicular



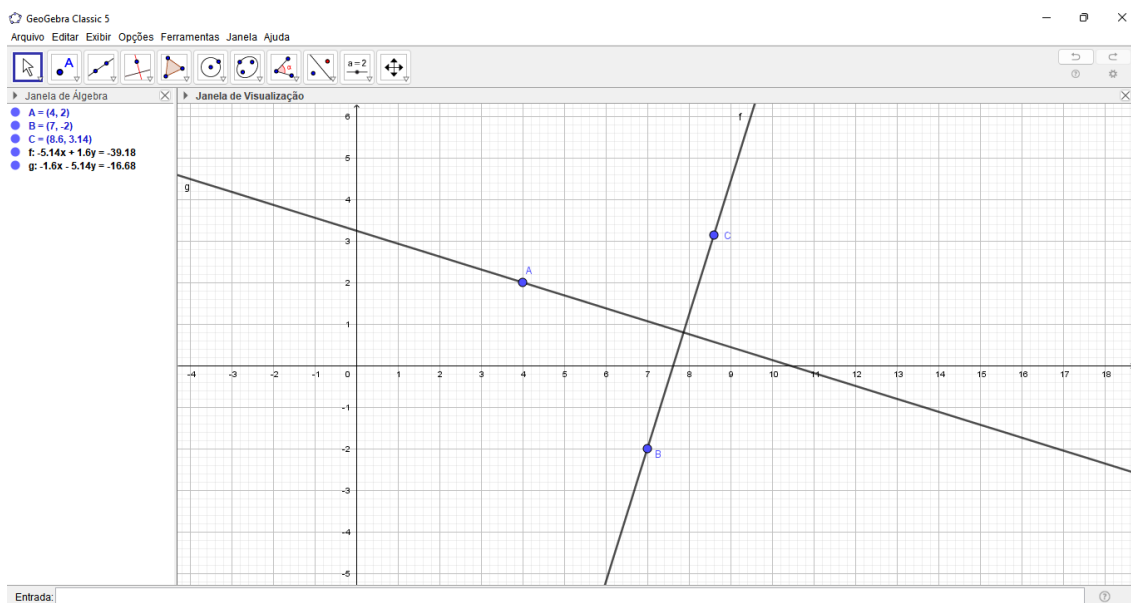
Fonte: Autoria própria

Figura 11 – Tela com uma reta e um ponto dado



Fonte: Autoria própria

Figura 12 – Tela da reta perpendicular construída



Fonte: Autoria própria

➤ Ferramenta Círculo: centro e raio


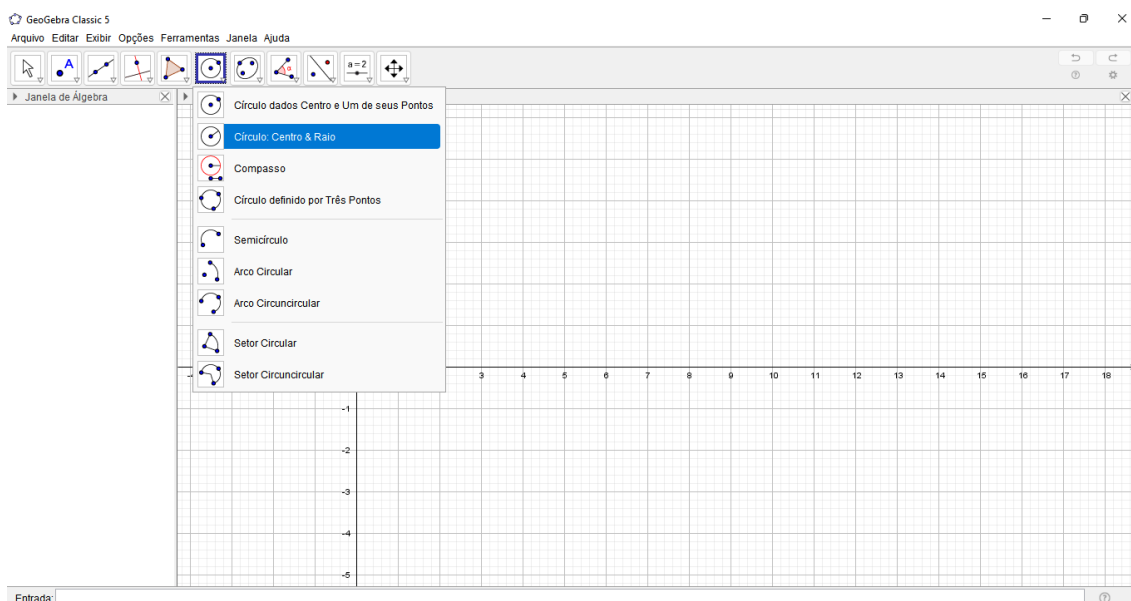
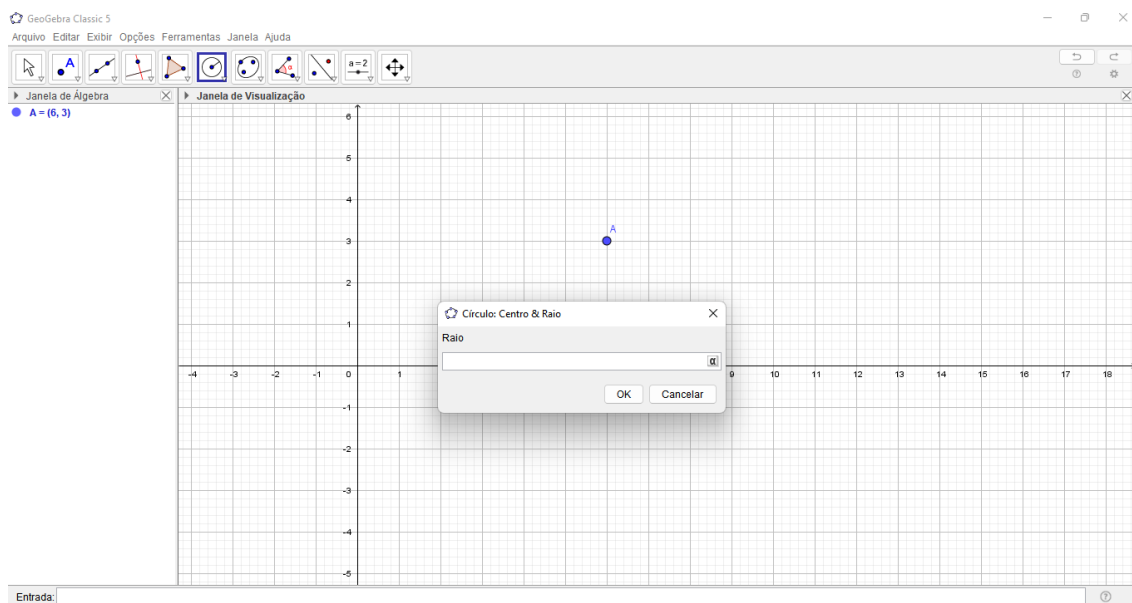
Ícone . Para fazer essa construção apenas selecionamos o ponto que será o centro e determinamos o comprimento do raio.

Figura 13 – Tela da ferramenta Círculo: centro e raio



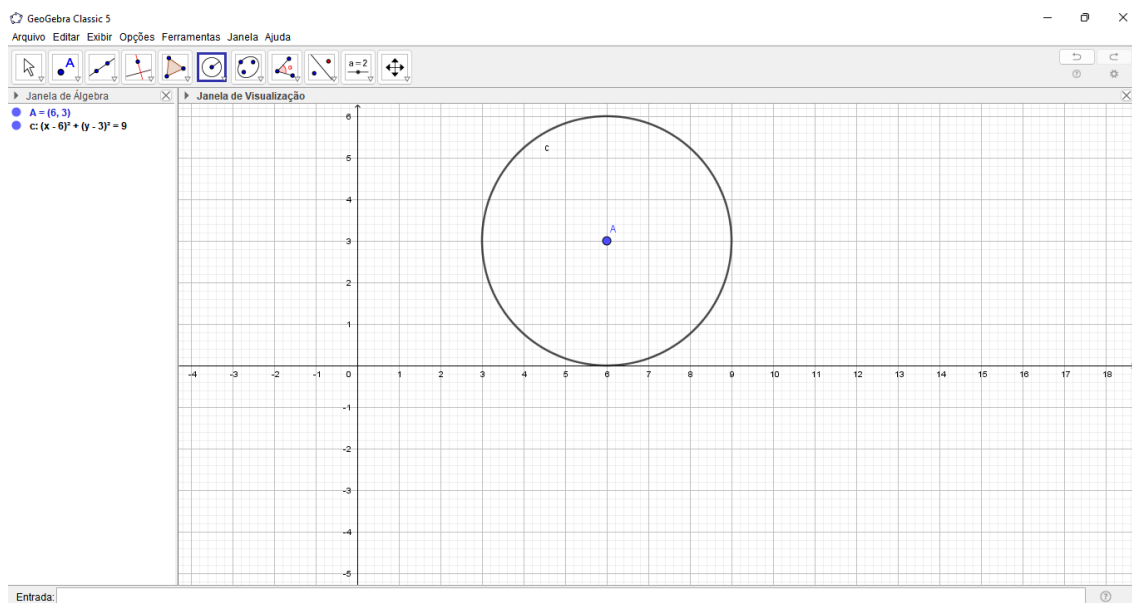
Fonte: Autoria própria

Figura 14 – Tela com o centro e determinação da medida do raio



Fonte: Autoria própria

Figura 15 – Tela com o círculo construído



Fonte: Autoria própria

- Ferramenta Círculo dados centro e um de seus pontos


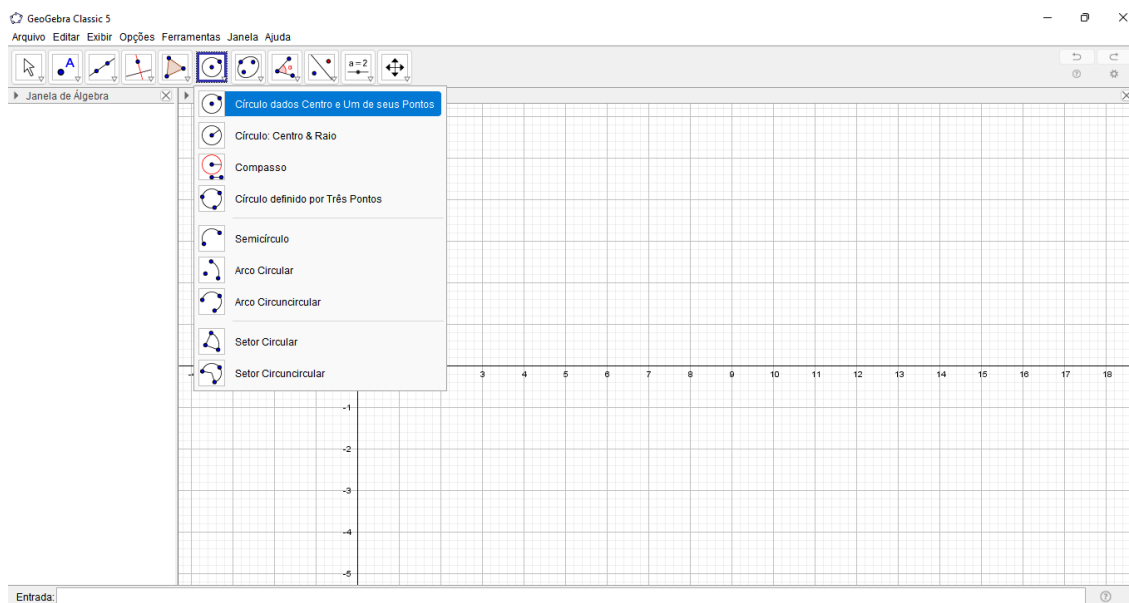
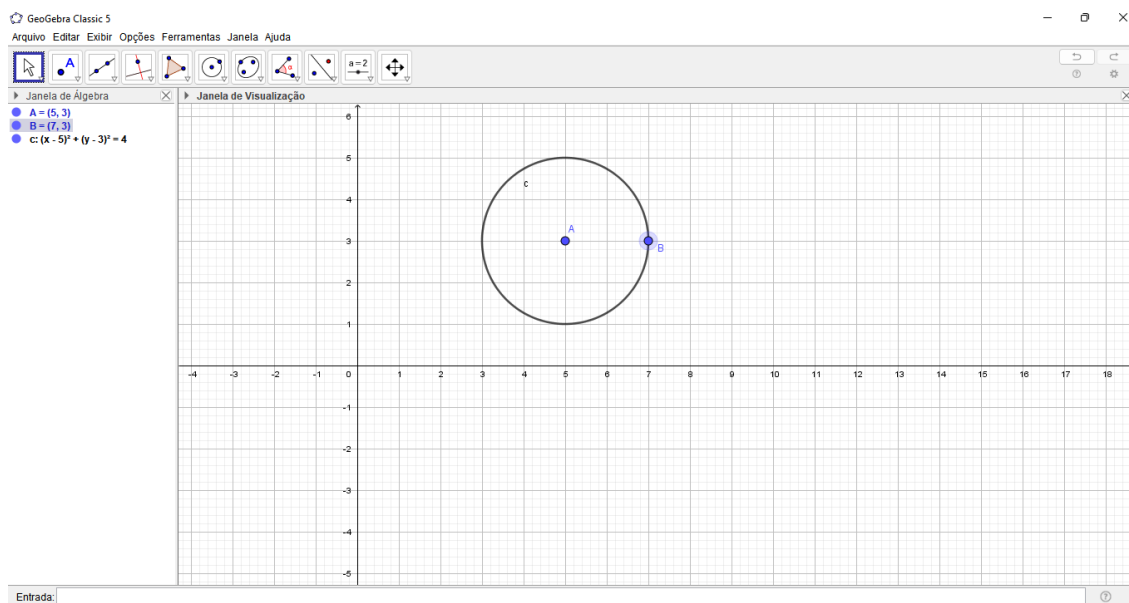
Ícone . Para traçar essa figura precisamos de dois pontos: um será o centro e o outro será um ponto pertencente a ela, exatamente nessa ordem.

Figura 16 – Tela da ferramenta Círculo dados centro e um de seus pontos




Fonte: Autoria própria

Figura 17 – Tela do círculo de centro A e B pertencente



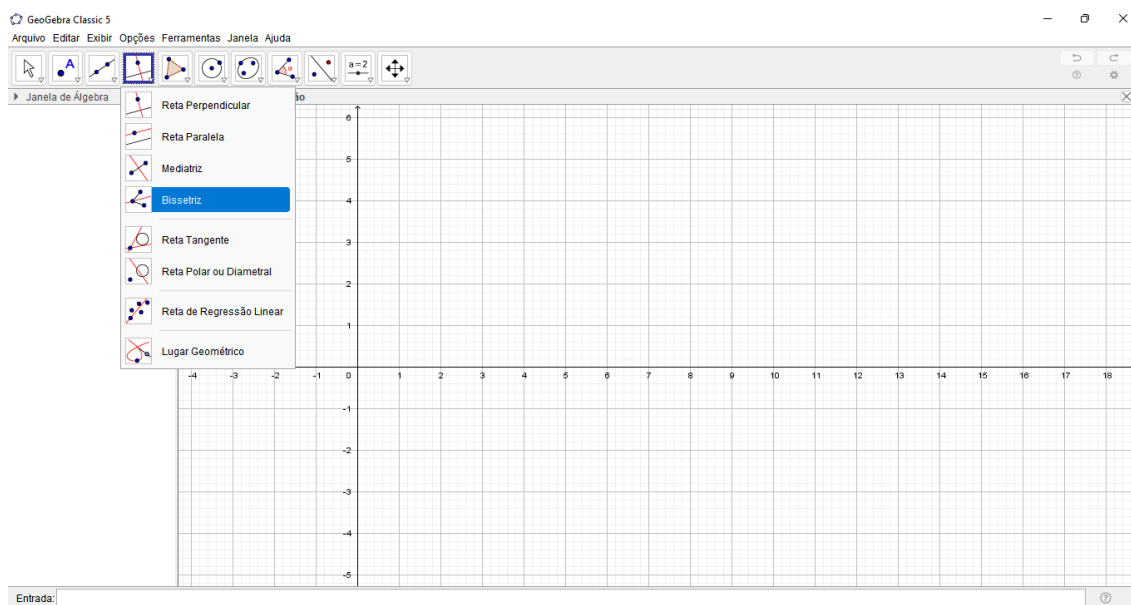
Fonte: Autoria própria

➤ Ferramenta Bissetriz

Ferramenta de ícone . Para que o programa trace as bissetrizes, precisamos de três pontos ou duas retas. Vale ressaltar que em algumas situações o programa traça as duas bissetrizes (ângulo interno e externo). Podemos “apagar” a que não

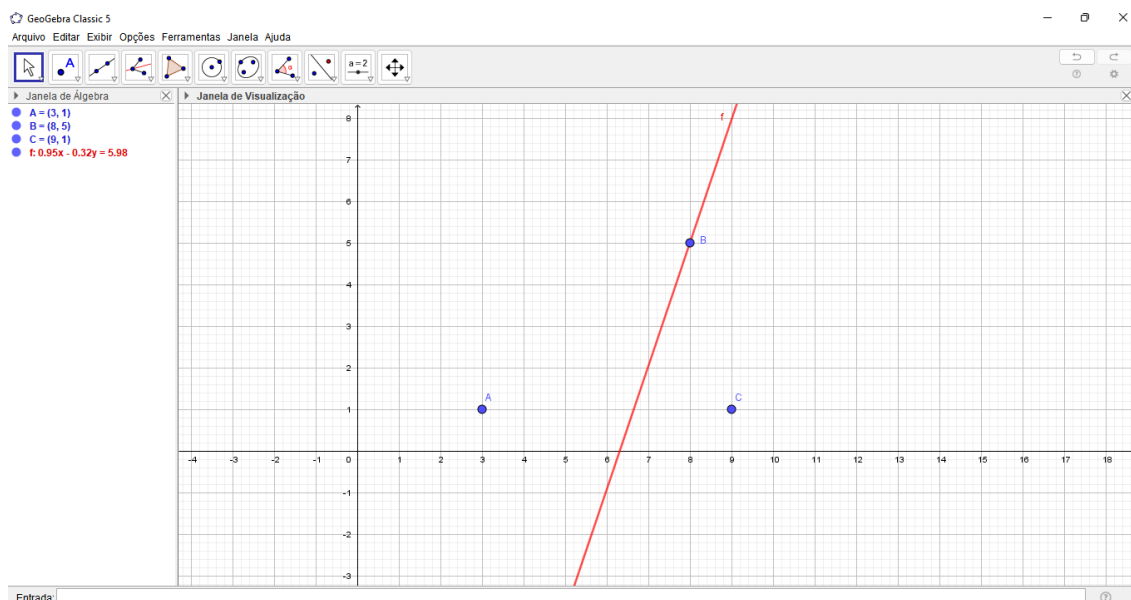
for interessante no problema. Devemos marcar na ordem que queremos a bissetriz (quando usarmos três pontos).

Figura 18 – Tela da ferramenta Bissetriz



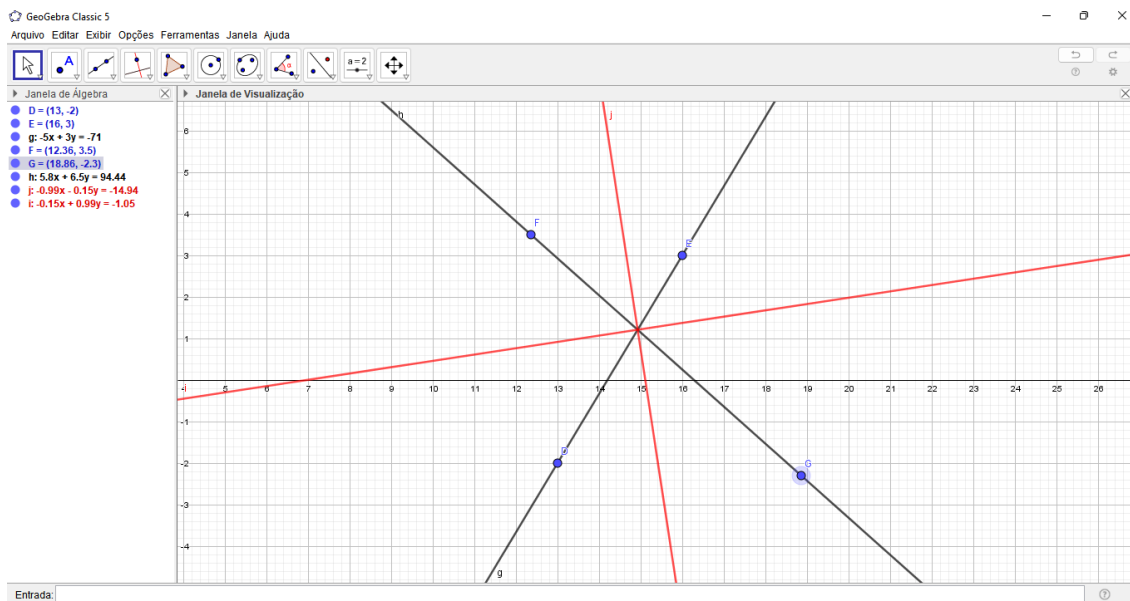
Fonte: Autoria própria

Figura 19 – Tela da bissetriz dado três pontos



Fonte: Autoria própria

Figura 20 – Tela da bissetriz dadas duas retas



Fonte: Autoria própria

➤ Ferramenta Ângulo


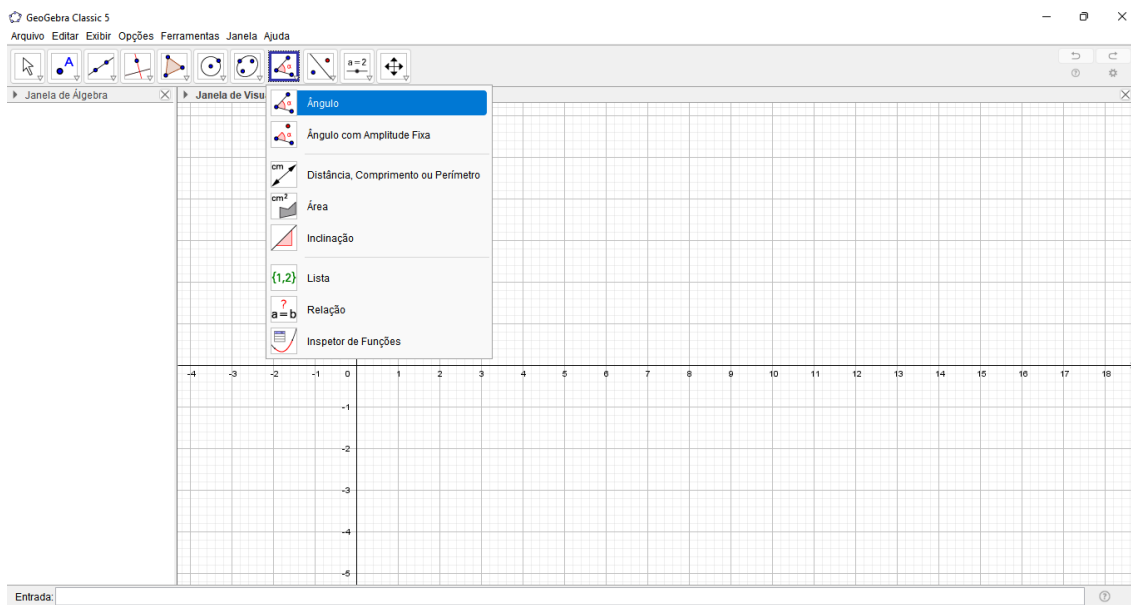
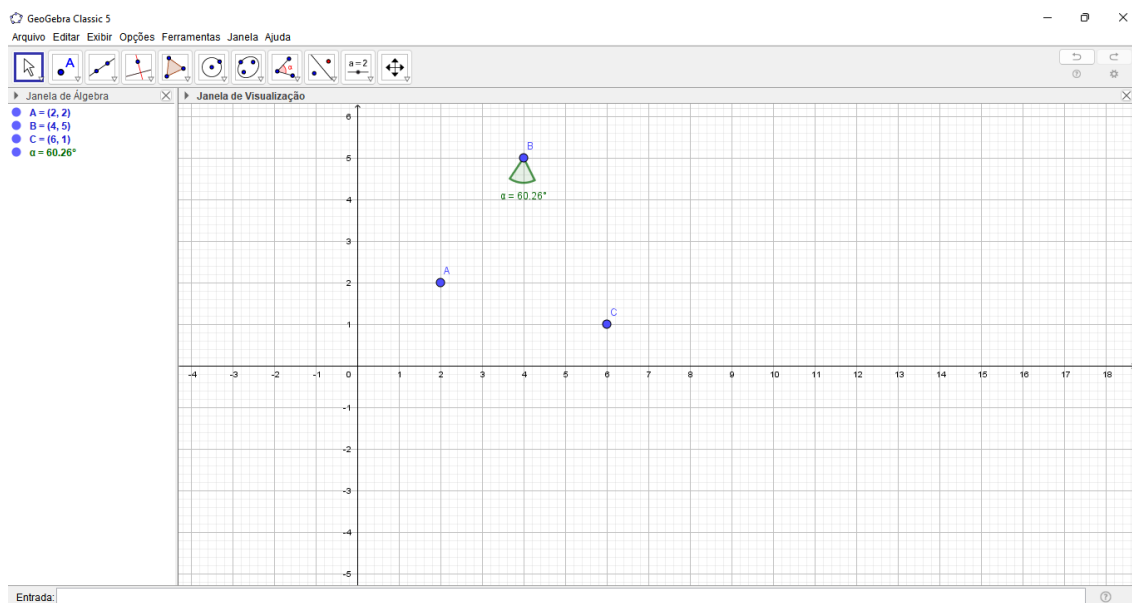
Ícone . Aqui marcamos o ângulo para encontrar sua medida. Podemos achar o ângulo entre três pontos ou duas retas.

Figura 21 – Tela da ferramenta Ângulo



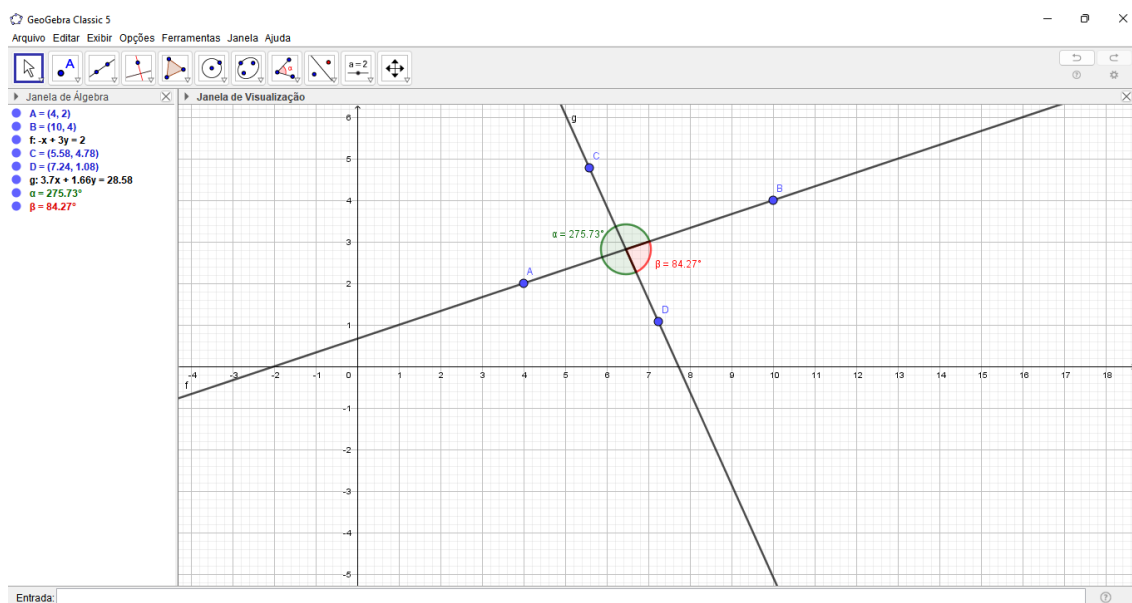
Fonte: Autoria própria

Figura 22 – Tela do ângulo dado três pontos



Fonte: Autoria própria

Figura 23 – Tela dos ângulos dadas duas retas



Fonte: Autoria própria

O GeoGebra tem outras ferramentas muito interessantes como mediatriz, construção das cônicas, cálculos de área e perímetro, construção de gráficos, entre outros. Ou seja, é um software completo que pode ser utilizado em diversas aulas de matemática. Aqui vimos apenas as ferramentas que serão utilizadas ao longo desse trabalho, mas vale a pena baixar e conhecer esse programa.

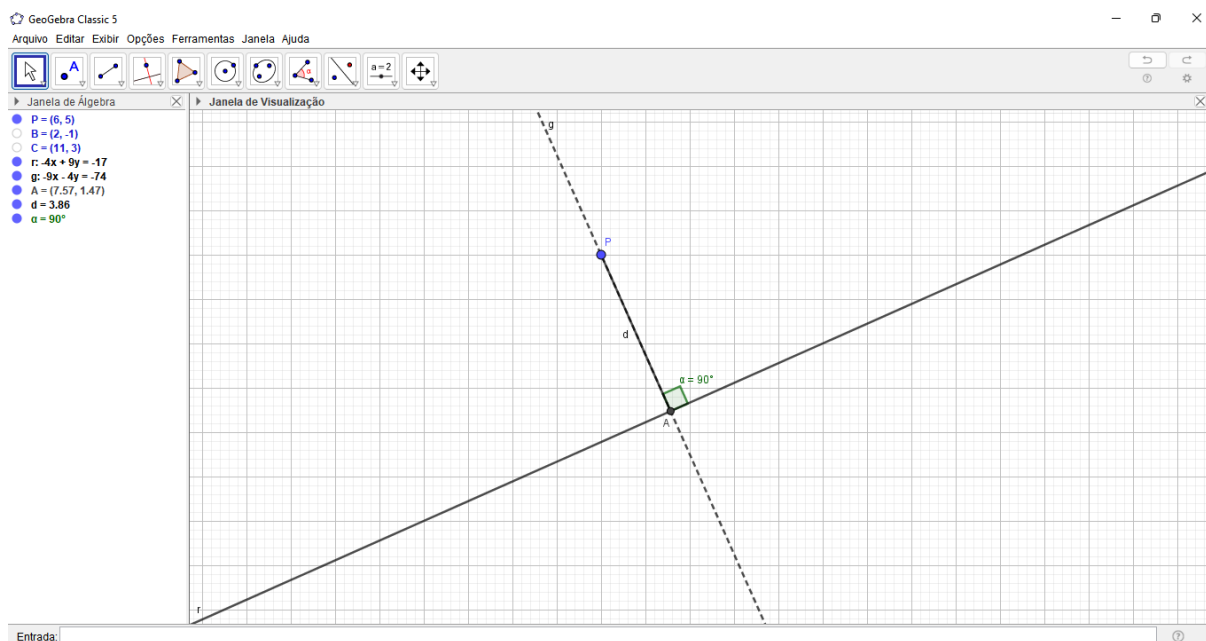
5 LUGARES GEOMÉTRICOS E SUAS DEFINIÇÕES

Antes de definirmos e mostrarmos os lugares geométricos, devemos mencionar sobre a noção de distância. Primeiramente iremos falar de distância entre ponto e reta, depois trabalharemos com as distâncias entre retas.

- Distância ponto e reta

Dados um ponto P e uma reta r , podemos traçar a reta que passa por P e é perpendicular a r , no ponto A . A distância entre P e a reta r é a distância entre os pontos P e A .

Figura 24 – Distância de reta e ponto

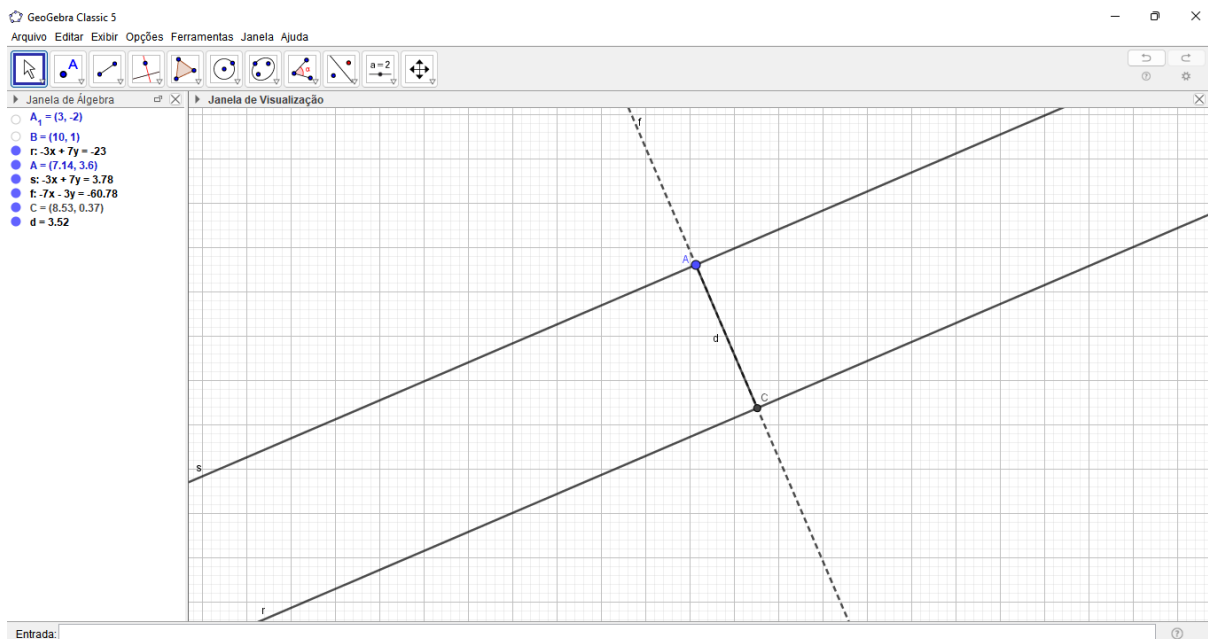


Fonte: Autoria própria

- Distância entre retas paralelas

Dadas as retas r e s , distintas e paralelas, a distância entre r e s é a distância entre qualquer ponto de umas delas e a outra reta (caso acima).

Figura 25 – Distância de retas paralelas

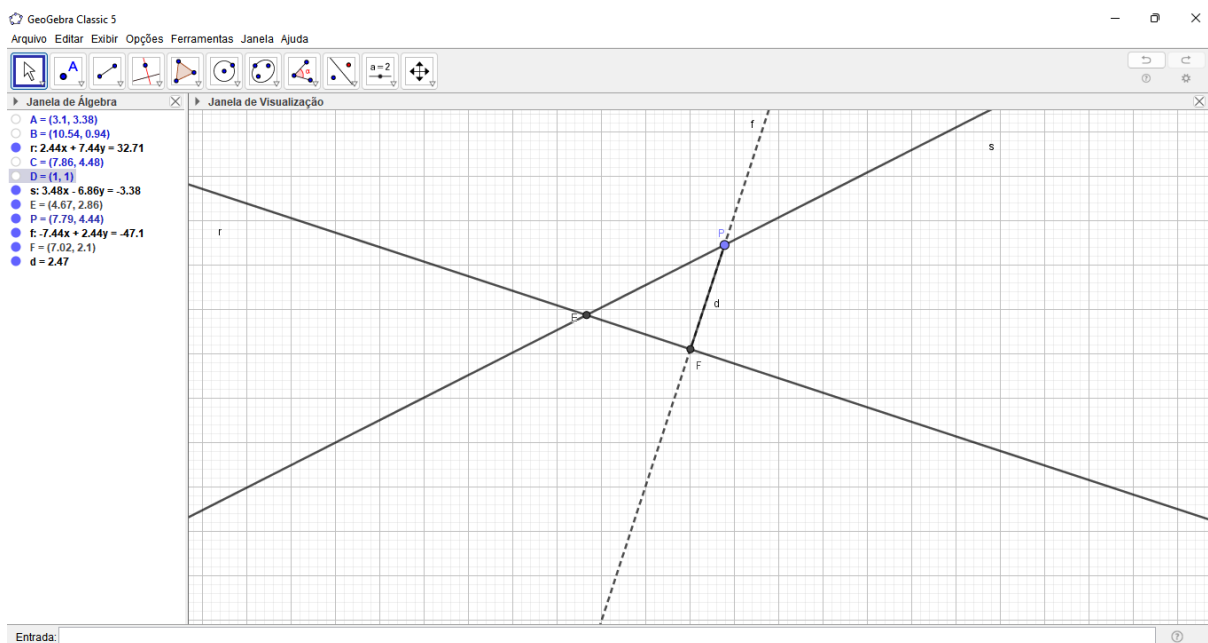


Fonte: Autoria própria

- Distância entre retas concorrentes

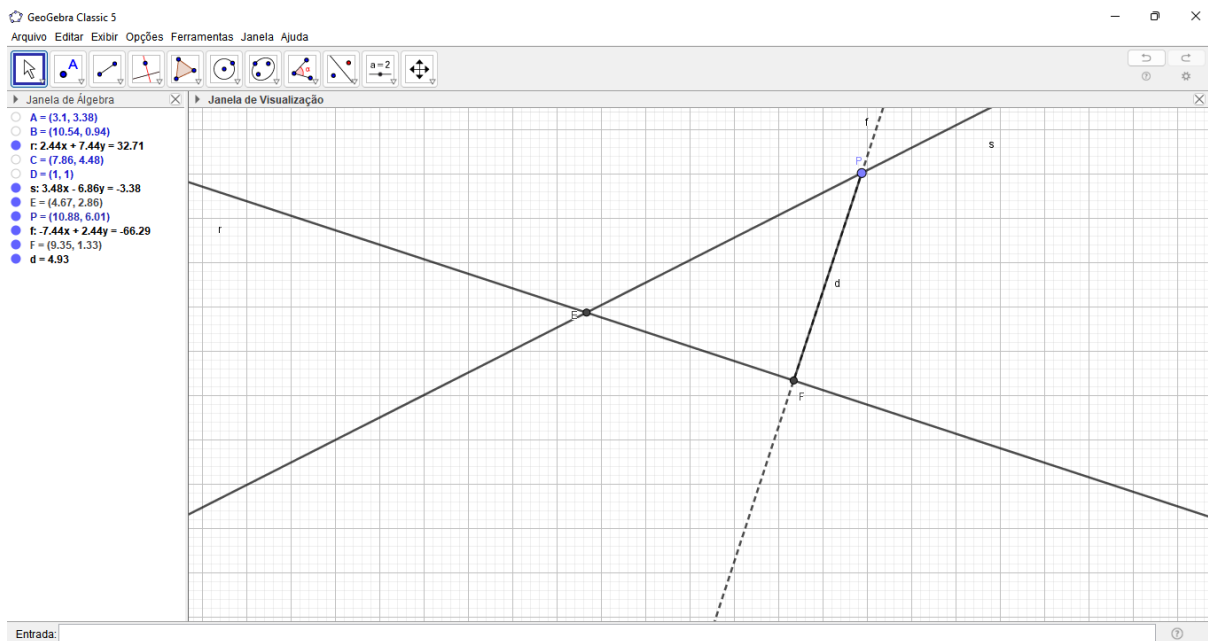
Nesse caso a distância varia de acordo com os pontos. No ponto de encontro entre as retas r e s , a distância será zero. Conforme afastamos os pontos, a distância aumenta.

Figura 26 – Distância de retas concorrentes



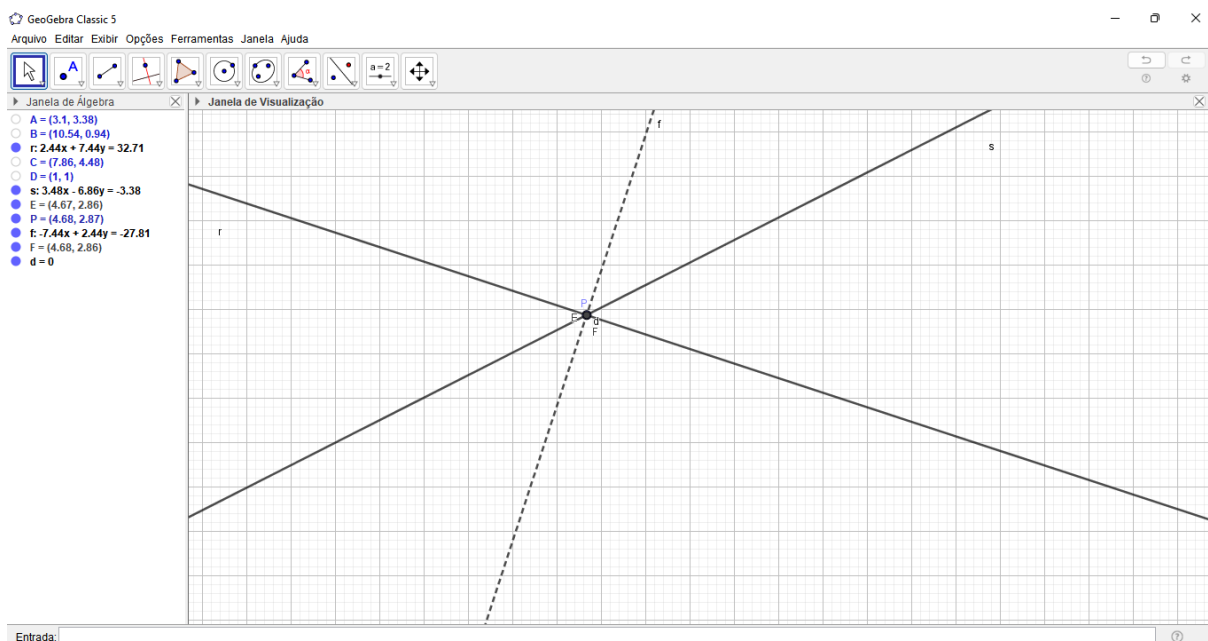
Fonte: Autoria própria

Figura 27 – Distância de retas concorrentes



Fonte: Autoria própria

Figura 28 – Distância de retas concorrentes



Fonte: Autoria própria

Agora podemos definir lugar geométrico.

Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano, o lugar geométrico dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto L do plano que satisfaz as duas

condições a seguir:

- (i) Todo ponto de L possui a propriedade P.
- (ii) Todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a L.

Em outras palavras, é o conjunto de pontos que satisfaz alguma condição pré-estabelecida. Nesse trabalho iremos estudar alguns lugares geométricos elementares, pois a proposta desse trabalho é para anos iniciais do segundo segmento.

Vamos definir e construir circunferência, bissetriz e mediatriz como lugares geométricos.

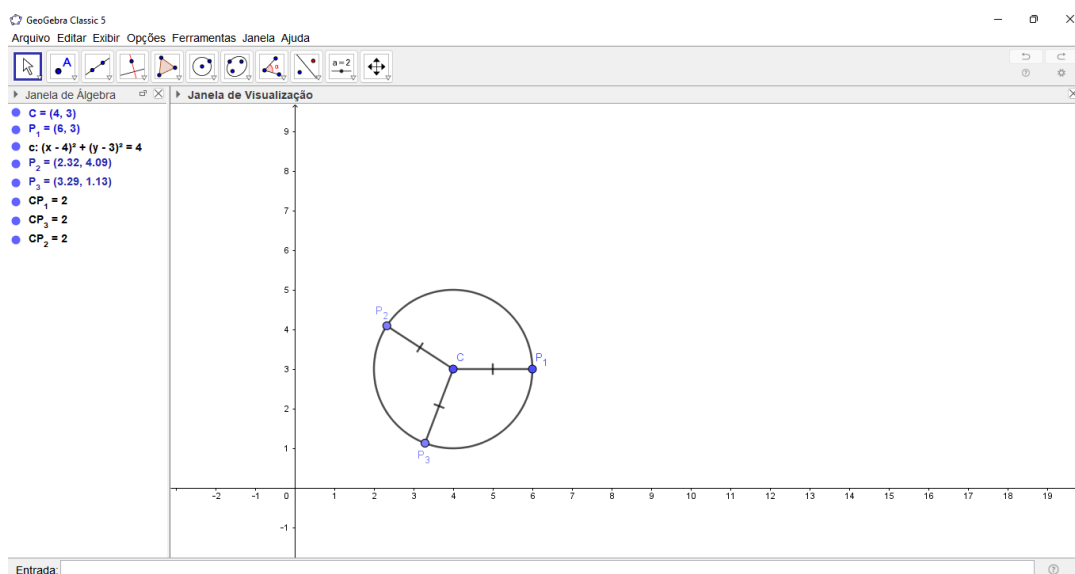
5.1 Circunferência

É o lugar geométrico formado pelo conjunto de todos os pontos que estão localizados a uma mesma distância r de um ponto fixo chamado centro. Para a construção desse lugar geométrico, basta fixar o ponto C e estabelecer uma distância r .

De acordo com Neto, dado um ponto C e uma distância r , o lugar geométrico dos pontos que distam r do ponto C chamamos de circunferência Ω de centro C e raio r . Ou seja,

$$\overline{CP_1} = r \leftrightarrow P_1 \in \Omega(C, r)$$

Figura 29 – Construção da circunferência



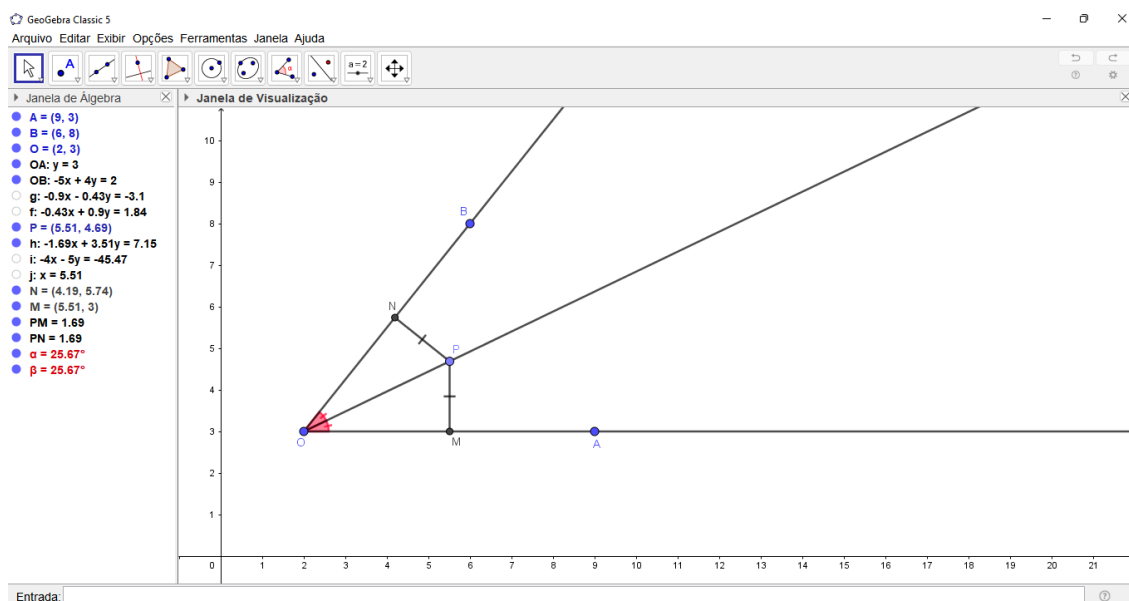
Fonte: Autoria própria

5.2 Bissetriz

A definição de bissetriz de um ângulo é o segmento de reta partindo da origem que divide o ângulo exatamente ao meio. Como lugar geométrico, temos que a bissetriz é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos segmentos que formam esse ângulo. Segundo Neto, seja $\widehat{A\hat{O}B}$ um ângulo dado. Se P é um ponto do mesmo, então

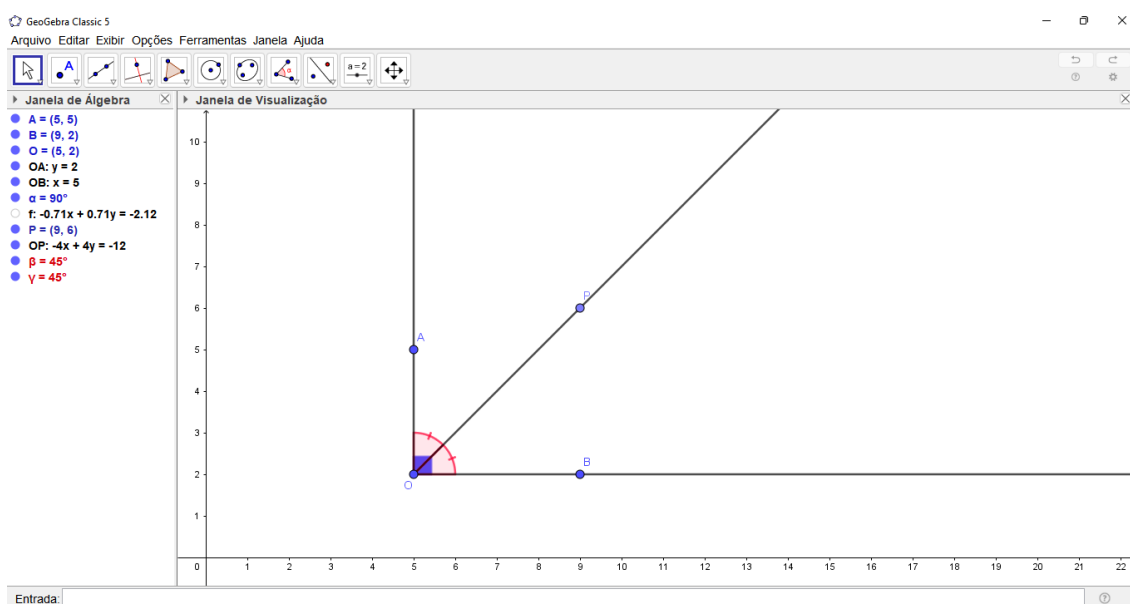
$$d(P, \overrightarrow{AO}) = d(P, \overrightarrow{BO}) \leftrightarrow P \in (\text{bissetriz de } \widehat{A\hat{O}B})$$

Figura 30 – Construção da bissetriz de um ângulo agudo



Fonte: Autoria própria

Figura 31 – Construção da bissetriz de um ângulo reto



Fonte: Autoria própria

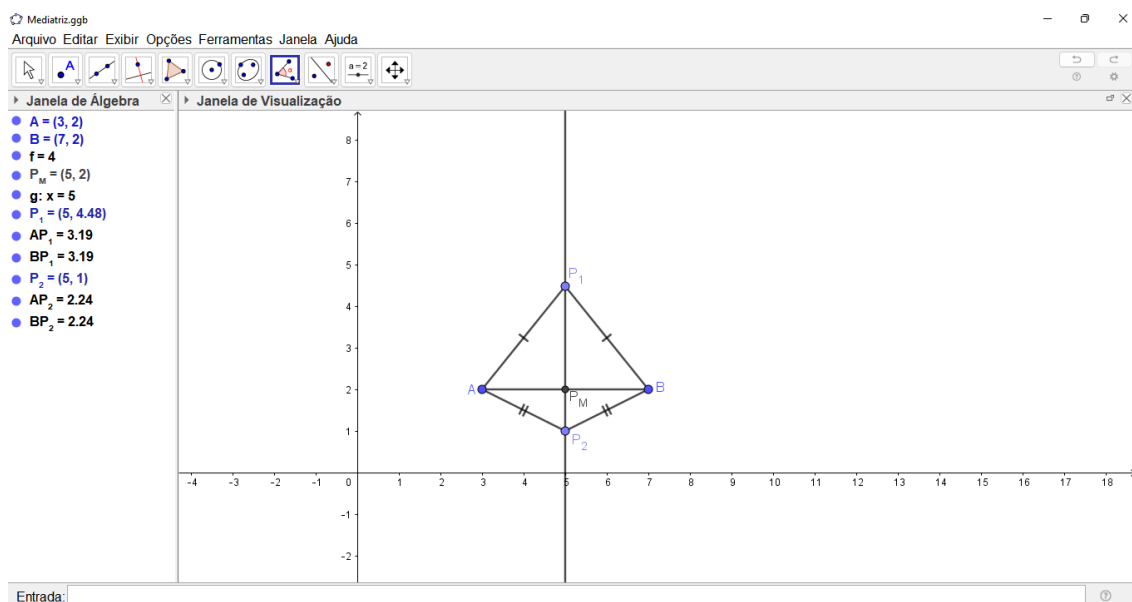
5.3 Mediatriz

Dados dois pontos distintos A e B, a mediatriz é determinada pela reta perpendicular ao segmento de reta AB que passa pelo ponto médio desse segmento. A definição como lugar geométrico da mediatriz é que todos os pontos pertencentes a ela são equidistantes aos pontos A e B.

Ainda de acordo com Neto, dados pontos A e B no plano, a mediatriz de AB é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de A e de B.

$$P \in (\text{mediatriz de } AB) \leftrightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$$

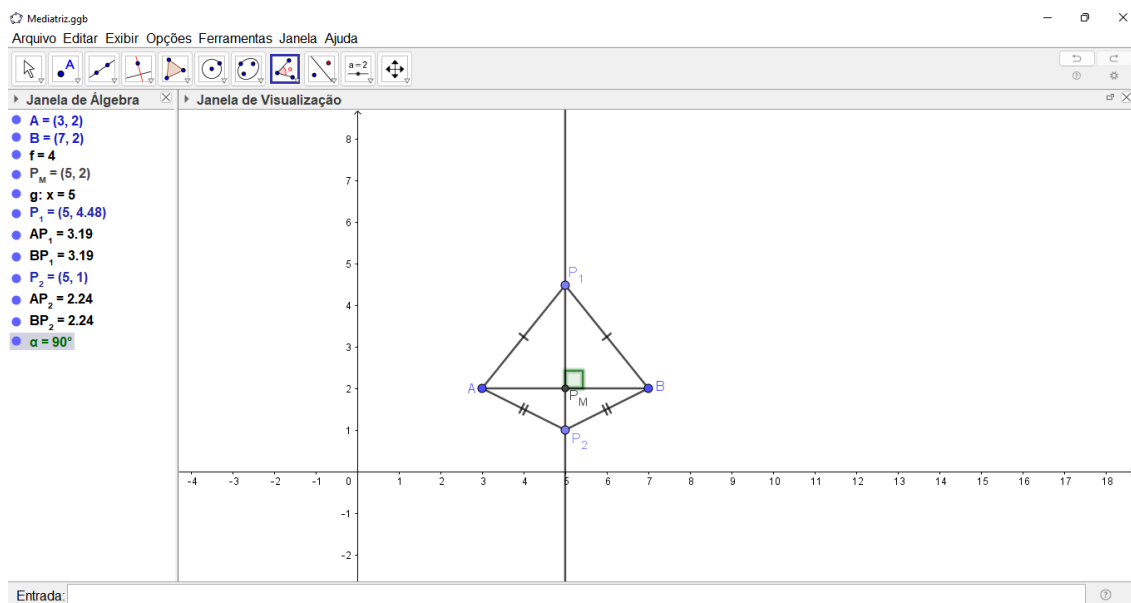
Figura 32 – Construção da mediatriz



Fonte: Autoria própria

Uma propriedade importante sobre a mediatriz: ela é perpendicular ao segmento dado, como podemos observar na figura a seguir.

Figura 33 – Análise da propriedade de mediatriz



Fonte: Autoria própria

De acordo com a BNCC, todos esses conteúdos são trabalhados no segundo segmento do ensino fundamental, como mostra a tabela abaixo com o ano de escolaridade, o objeto de conhecimento e as habilidades.

Tabela 1 – Objetos e habilidades da BNCC 7º e 8º anos

Ano de Escolaridade	Objeto de Conhecimento	Habilidades
7º ano	Circunferência como lugar geométrico	EF07MA22 Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

8° ano	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	EF08MA17 Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
--------	--	---

Fonte: BNCC

Mas podemos inserir esses assuntos ainda no 6° ano, pois nesse ano de escolaridade os alunos já passam a conhecer retas perpendiculares, noção de ângulos e medidas, que são conceitos básicos utilizados nas definições dos lugares geométricos escolhidos para esse trabalho. As retas perpendiculares usamos na mediatriz, comprimento (ou distância) para circunferência e ângulos para bissetriz.

Tabela 2 – Objetos e habilidades da BNCC 6° ano

	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares.	EF06MA22 Utilizar instrumentos, como régua e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. EF06MA23 Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um
--	--	--

6° ano		objeto no plano segundo pontos de referências e distancias.
	Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento...	EF06MA24 Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa,... sem uso de fórmula, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais.
	Ângulos: noção, usos e medida	EF06MA27 Determinar medidas de abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.

Fonte: BNCC

Como podemos ver, de acordo com a BNCC, os conteúdos trabalhados são dados a partir do 7° ano, mas as propostas de atividades são para alunos menores, portanto devemos trabalhar a origem e os significados de cada palavra, para que os alunos compreendam os conceitos também de forma intuitiva.

Portanto, vamos analisar cada uma dessas palavras. E essa é uma atividade que pode ser feita com os alunos, para que eles possam entender os conceitos trabalhados nesse trabalho.

Figura 34 – Origem da palavra circunferência

CIRCUNFERÊNCIA = CIRCUN + FERRE
 ↓ ↓
 ao redor carregar,
 portar

Fonte: origemdapalavra.com.br

Aqui vemos que podemos associar circunferência a “portar ao redor”, ou seja, intuitivamente podemos associar os pontos ao redor de um ponto central.

Figura 35 – Origem da palavra bissetriz

BISSETRIZ = BI + SECTUS
 ↓ ↓
 duas cortado
 vezes

Fonte: origemdapalavra.com.br

Já nesse caso, temos que a bissetriz corta em dois, ou seja, divide o ângulo ao meio.

Figura 36 – Origem da palavra mediatriz

MEDIATRIZ = MEDIUS + TRIX
 ↓ ↓
 meio, entre formador de
 duas partes, palavras
 intermediário femininas

Fonte: origemdapalavra.com.br

Aqui vemos que a palavra está associada a intermediário, entre duas partes, que é exatamente o que mediatriz quer dizer.

Ou seja, também podemos trabalhar conceitos matemáticos através da formação das palavras e seus significados, sem que o aluno precise ficar decorando definições e conceitos. O aluno conseguindo compreender a palavra, ele também compreende o conceito sua construção.

Outra abordagem importante de se trabalhar com crianças é apresentando o uso dos conceitos no dia a dia deles. Para que o aluno possa ver aplicação no objeto de conhecimento. Essa sempre foi uma das maiores queixas em matemática e atualmente o ensino da matemática tem se reformulado de forma a mostrar mais aplicações e menos teorias engessadas. Claro que teoria é importante pois fundamenta todo o conhecimento, mas quando o aluno não consegue aplicar o conteúdo ou não consegue ver uso em algo atual, ele acaba perdendo o interesse.

Então veremos objetos em que os alunos podem associar aos três conceitos analisados nesse trabalho e a partir desses objetos, compreender o que cada um

significa e onde podem ser aplicados.

Figura 37 – Exemplos dos lugares geométricos aplicados no cotidiano



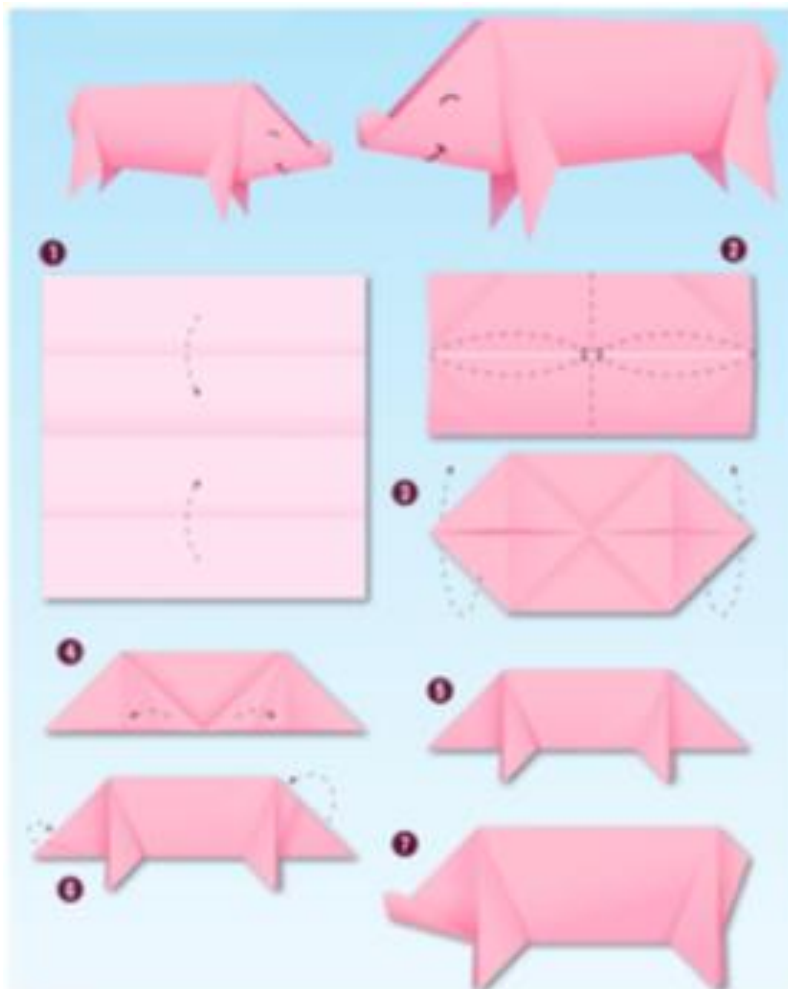
Fonte: <https://pt.dreamstime.com/imagem-de-stock-royalty-free-roda-de-carro-do-vetor-image7284766> e <https://www.ispsaude.com.br/bambole-desmontavel-88cm-liveup-p-ME03828A>

Figura 38 – Exemplos dos lugares geométricos aplicados no cotidiano



Fonte: <https://www.arquiteta.com.br/blog/como-fazer-o-calculo-de-telhas-de-um-telhado/> e <https://shopee.com.br/Par-De-Esquadros-Acrylic-Desenho-T%C3%A9cnico-21-Cm-Sem-Chanfro-Sem-Gradua%C3%A7%C3%A3o-Fenix-i.347852409.6393122929>

Figura 39 – Exemplos dos lugares geométricos aplicados no cotidiano



Fonte: <http://dobraduraouorigami.blogspot.com/2011/12/dobradura-de-porquinho.html>

6 ATIVIDADES

Nesse capítulo vamos analisar as atividades propostas sobre cada lugar geométrico visto nesse trabalho e como o professor pode utilizar a tecnologia em sala de aula para cada um desses assuntos.

6.0.1 Atividade Circunferência

A lanchonete *Quero Mais* resolveu começar a entregar os lanches na casa dos clientes, mas com uma limitação de distância. Eles entregam num raio de 3 km, ou seja, casas localizadas dentro desse espaço recebem o lanche em casa. Maria, Thiago, Aline e Rafael moram no mesmo bairro que a lanchonete está localizada.

Considerando A = lanchonete

B = casa da Aline

C = casa do Thiago

D = casa do Rafael

E = casa da Maria

Figura 40 – Desenhos de casa



Fonte: <https://pt.vecteezy.com/arte-vetorial/4868603-conjuntos-de-diferentes-casas-de-desenho-animado>

Refaça o esquema das casas e da lanchonete no GeoGebra e vamos usar algumas ferramentas para responder as perguntas abaixo.

Figura 41 – Atividade 1



Fonte: Autoria própria

a) Em qual (quais) casa(s) a lanchonete realiza entrega?

b) E qual (quais) não recebem o lanche?

c) Existe alguma casa que fica no limite da entrega? Se sim, qual?

Matematicamente, podemos definir os pontos como interno ou externo à circunferência. Agora determine quem é interno e quem é externo à circunferência de centro A e raio 3.

Agora veremos a circunferência como o lugar geométrico dos pontos que tem a mesma distância do centro. Essa distância chamamos de raio. Existem pontos que fazem parte desse lugar geométrico. Na situação acima, quais são?

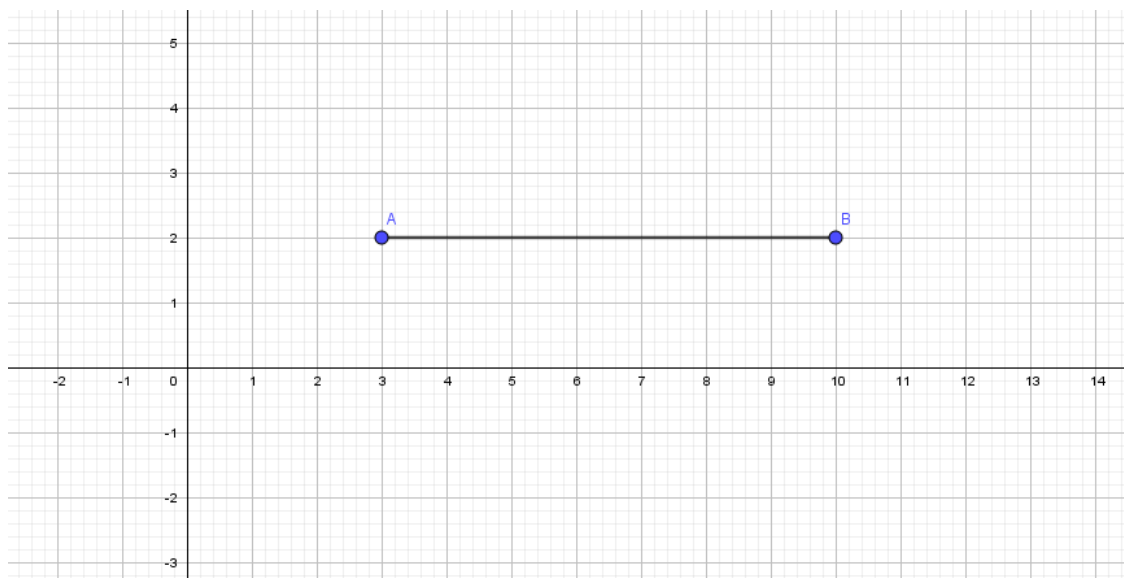
d) Se a lanchonete contrata mais um entregador e aumenta o raio de entrega para 6 km, vai ter alguma diferença em alguma casa?

e) Agora a lanchonete entrou em crise e terá que retirar os entregadores. Como ficaria o raio nessa situação?

6.0.2 Atividade Mediatrix

No GeoGebra, marque dois pontos A e B quaisquer e o segmento AB. Como na figura abaixo.

Figura 42 – Atividade 2



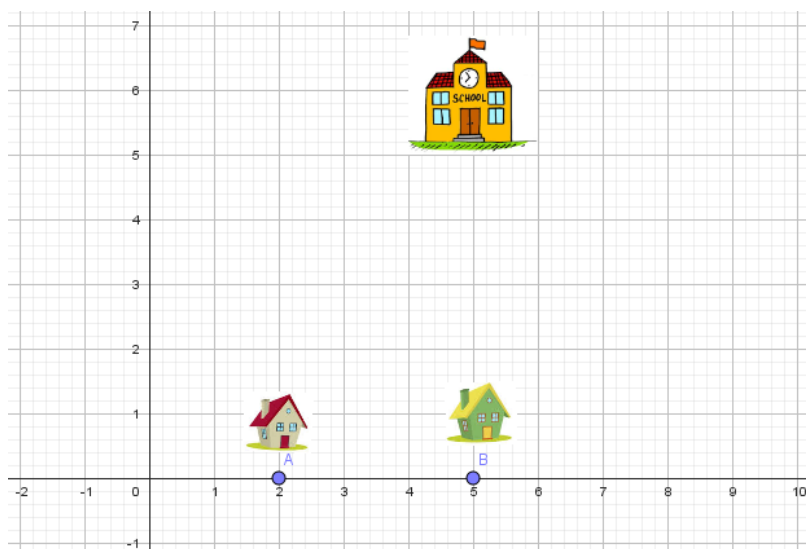
Fonte: Autoria própria

- Você consegue marcar um ponto que tenha a mesma distância do A e do B?
- Provavelmente você marcou bem no meio do segmento, mas você consegue marcar mais algum?

6.0.3 Atividade Ponto Médio

Marcela mora na casa 2 da Rua Paraíso e Michele, sua amiga, mora na casa 5 da mesma rua, como na figura abaixo.

Figura 43 – Atividade 3



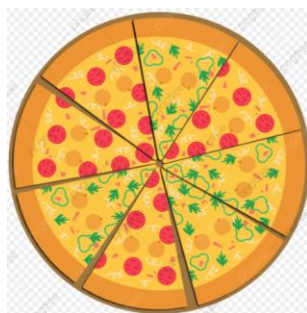
Fonte: Autoria própria

Elas sempre se encontram exatamente no meio do caminho entre suas casas para irem à escola juntas. Onde fica esse ponto de encontro? Se uma delas ou as duas mudarem de casa, o encontro muda de lugar?

6.0.4 Atividade Bissetriz

Ana, Marcela, Pedro e João são primos e resolveram viajar juntos. No sábado a noite pediram uma pizza de 2 sabores para entregar em casa, mas a pizzaria esqueceu de fatiar. Cada um vai comer 2 fatias, uma de cada sabor e ficaram pensando como dividir igualmente os pedaços. Marcela disse que para os pedaços ficarem iguais, os ângulos (a abertura no canto de cada fatia) das fatias devem ser iguais também, como mostra a imagem.

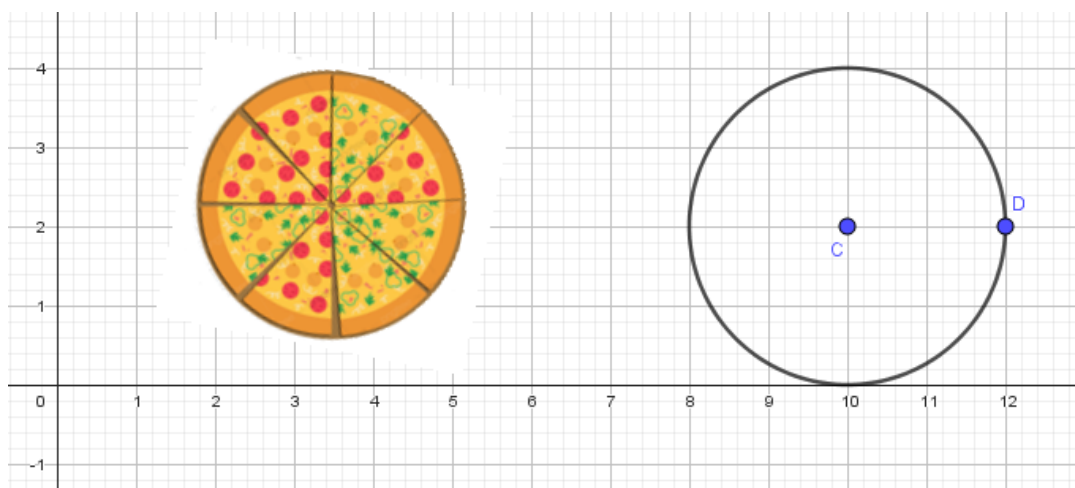
Figura 44 – Atividade 4



Fonte: https://pt.pngtree.com/freepng/cartoon-exquisite-hand-drawn-pizza-illustration_4888219.html

João lembrou do GeoGebra e que ele pode ajudá-los nessa situação. Que tal ajudarmos? Vamos fazer no GeoGebra uma circunferência de raio 3, como está abaixo.

Figura 45 – Atividade 4



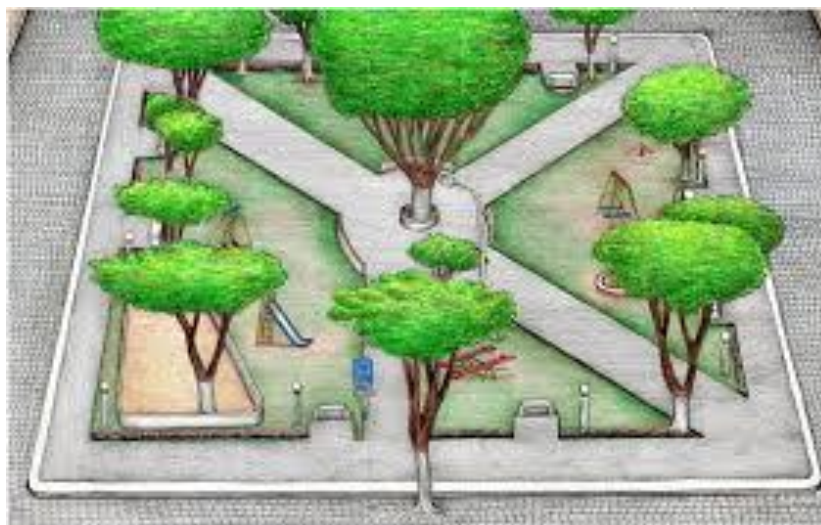
Fonte: Autoria própria

Agora podemos descobrir o tamanho de cada fatia. E aí? Qual deve ser o tamanho para a divisão ser igual?

6.0.5 – Atividade Bissetriz

A prefeitura da cidade resolveu fazer uma praça quadrada de medida 6 metros. Para facilitar a passagem de pedestres a prefeitura decidiu fazer um acesso por dentro da praça que esteja distante dos dois lados de forma igual.

Figura 46 – Atividade 5



Fonte: <https://blogdoaleciobrandao.com.br/macabas-e-criada-associacao-dos-moradores-do-coite/>

Será que conseguimos ajudar a prefeitura nessa situação? Onde deveria ficar o acesso sendo que deve ser um caminho equidistante dos pontos da extremidade da praça...

Agora que ajudamos a prefeitura a construir o caminho, vamos analisar como foi feita essa distância. Esse caso se enquadra em distância entre ponto e reta ou entre retas? E se for entre retas, que tipo de retas?

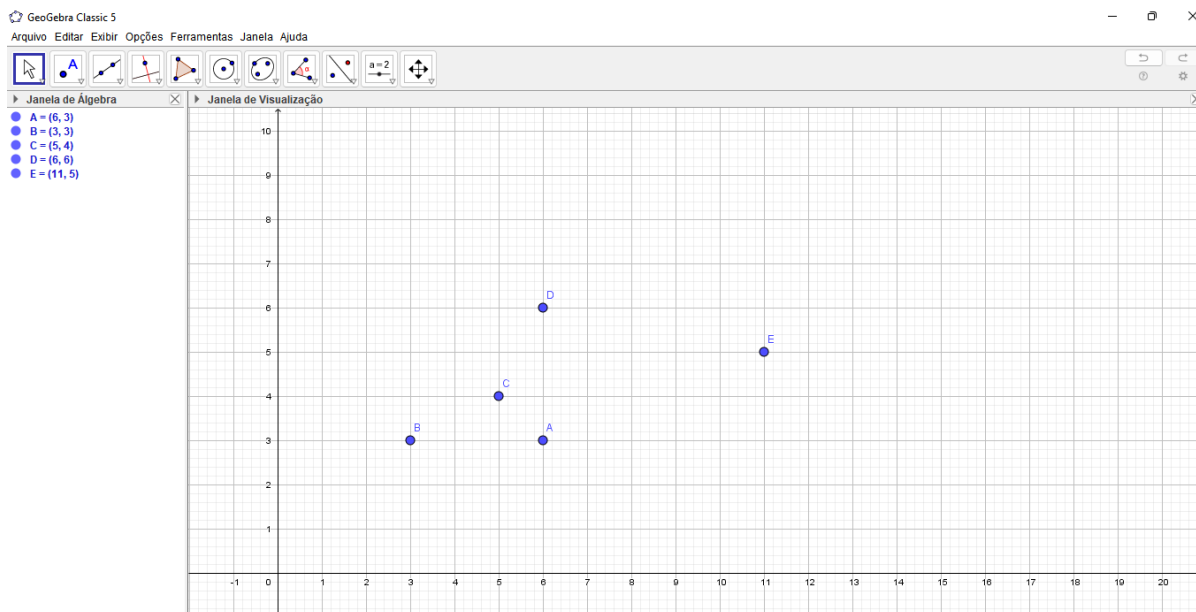
6.1 PROPOSTAS DE SOLUÇÕES DAS ATIVIDADES

6.1.1 Atividade 1 Circunferência

Usando o GeoGebra:

Com a ferramenta *Ponto*, fazemos as marcações da lanchonete e das casas.

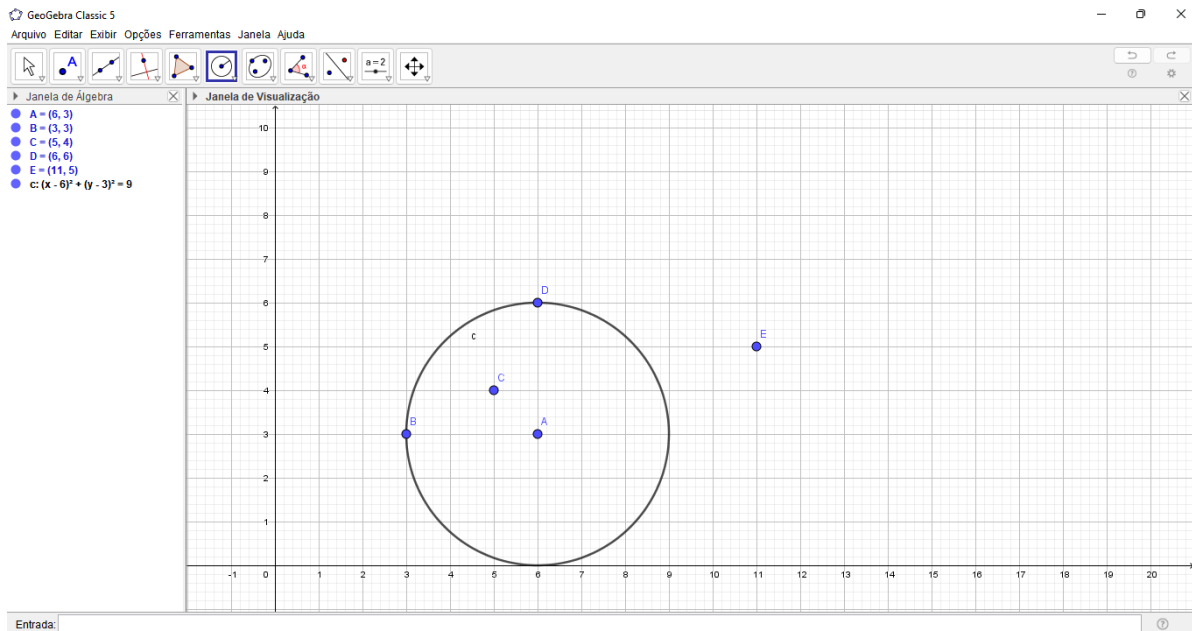
Figura 47 – Solução atividade 1



Fonte: Autoria própria

Agora com a ferramenta *Círculo: Centro e Raio*, colocamos o centro em A que é a localização da lanchonete e raio 3, como é a distância que a lanchonete entrega.

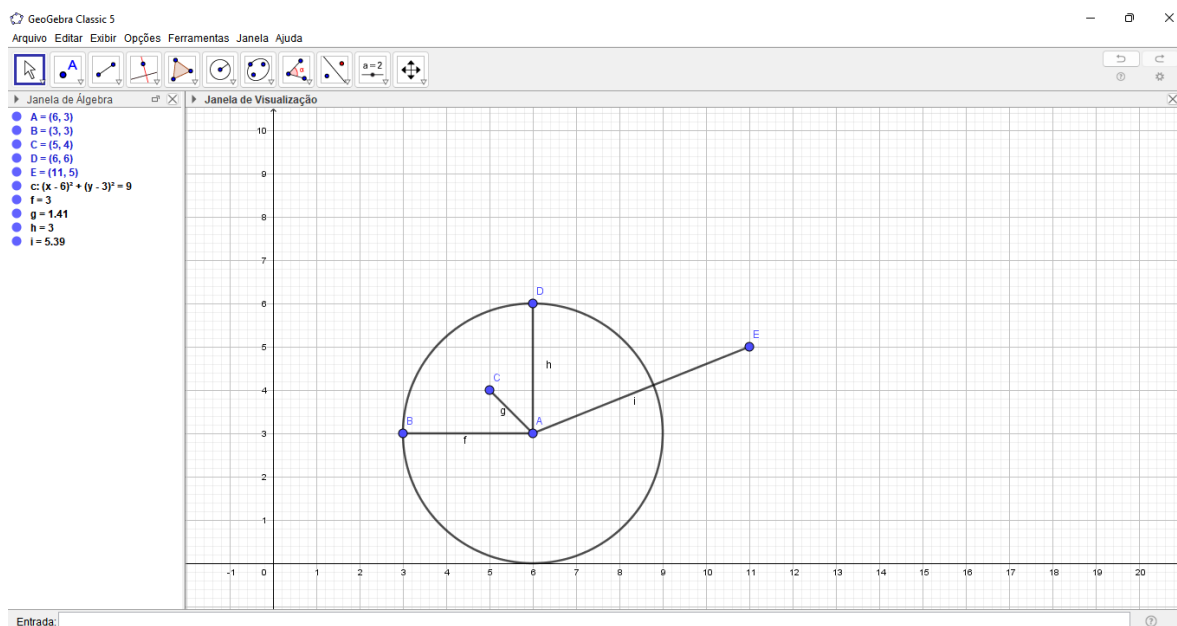
Figura 48 – Solução atividade 1



Fonte: Autoria própria

Com a ferramenta *Segmento de reta*, vamos determinar as distancias das casas até a lanchonete.

Figura 49 – Solução atividade 1



Fonte: Autoria própria

Aqui já é possível responder os itens perguntados, pois já temos as distâncias da lanchonete até cada casa.

(a) As casas da Aline, do Thiago e do Rafael recebem o lanche em casa pois ficam dentro do limite estipulado.

(b) A casa da Maria não recebe, pois a distância até a lanchonete é maior que 3 km.

(c) As casas da Aline e do Rafael ficam no limite da entrega, pois a distância até a lanchonete é exatamente 3 km.

Matematicamente, podemos definir os pontos como interno ou externo à circunferência. Agora determine quem é interno e quem é externo à circunferência de centro A e raio 3.

Ponto C – interno, pois a distância é menor que 3.

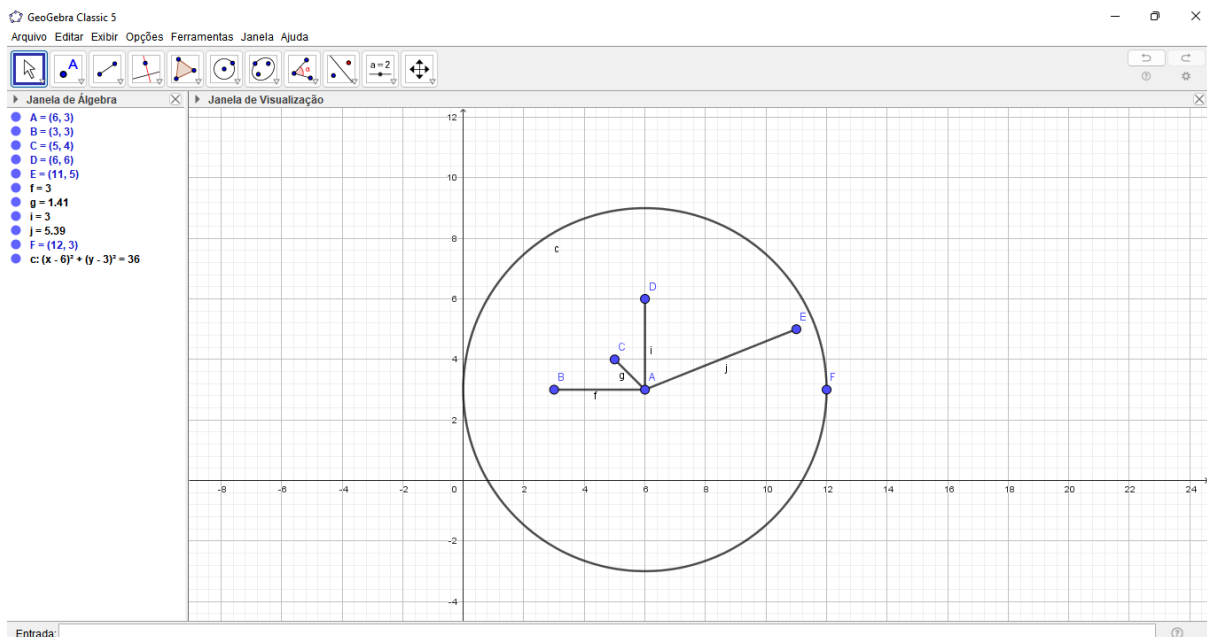
Ponto E – externo, pois a distância é maior que 3.

Agora veremos a circunferência como o lugar geométrico dos pontos que tem a mesma distância do centro. Essa distância chamamos de raio. Existem pontos que fazem parte desse lugar geométrico. Na situação acima, quais são?

Os pontos B e D pertencem a esse lugar geométrico pois a distância é exatamente 3.

(d) Basta aumentarmos o raio para 6 e verificar se haverá mudança nas entregas.

Figura 50 – Solução atividade 1

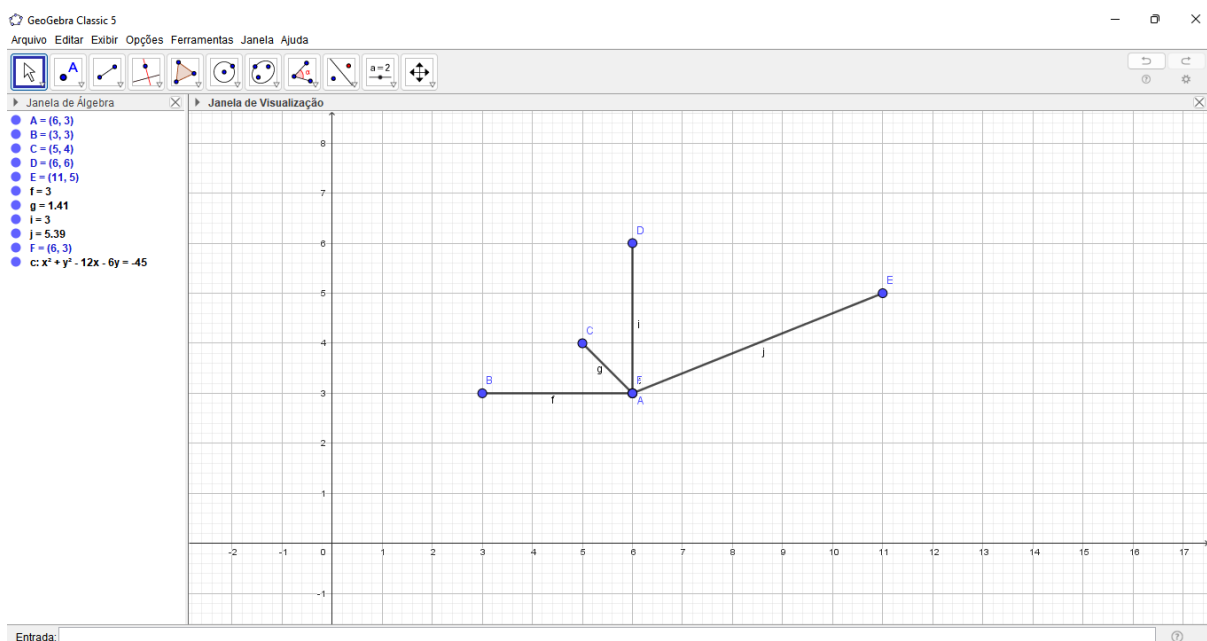


Fonte: Autoria própria

Ou seja, a casa da Maria passa a receber a entrega, portanto houve mudança nas entregas.

(e) Da mesma forma que o item (d), vamos levar o ponto F (que define o raio de entrega) até o ponto A, já que não haverá entregadores.

Figura 51 – Solução atividade 1



Fonte: Autoria própria

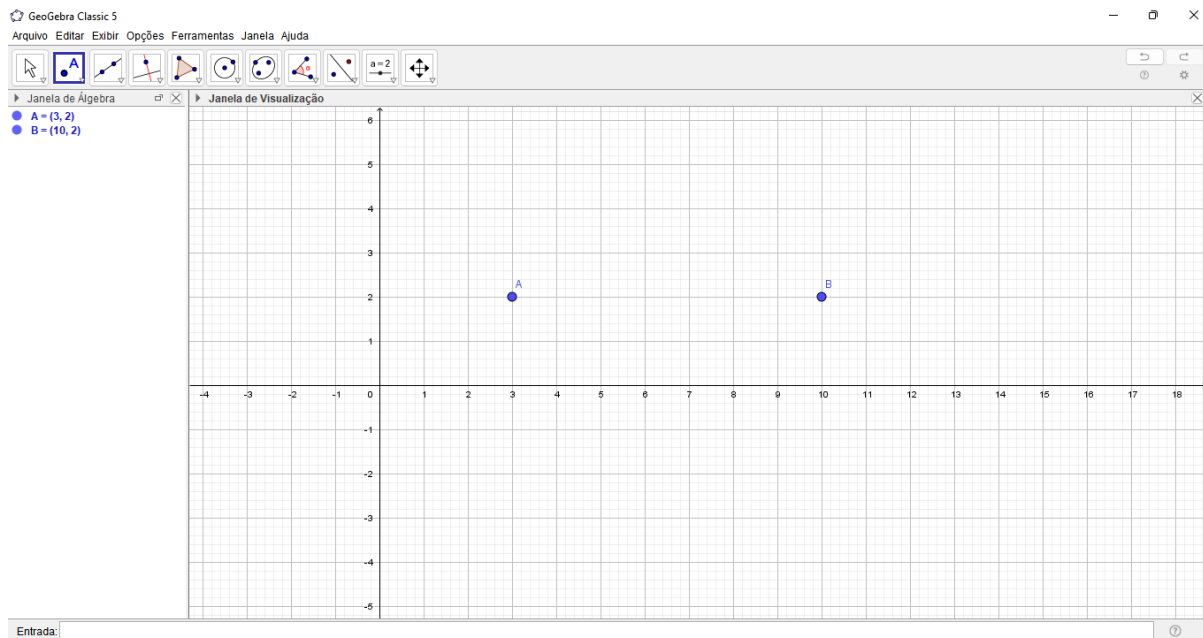
Vemos que nessa situação o raio é zero.

6.1.2 Atividade 2 Mediatriz

No GeoGebra:

Com a ferramenta *Ponto*, marcamos dois pontos A e B.

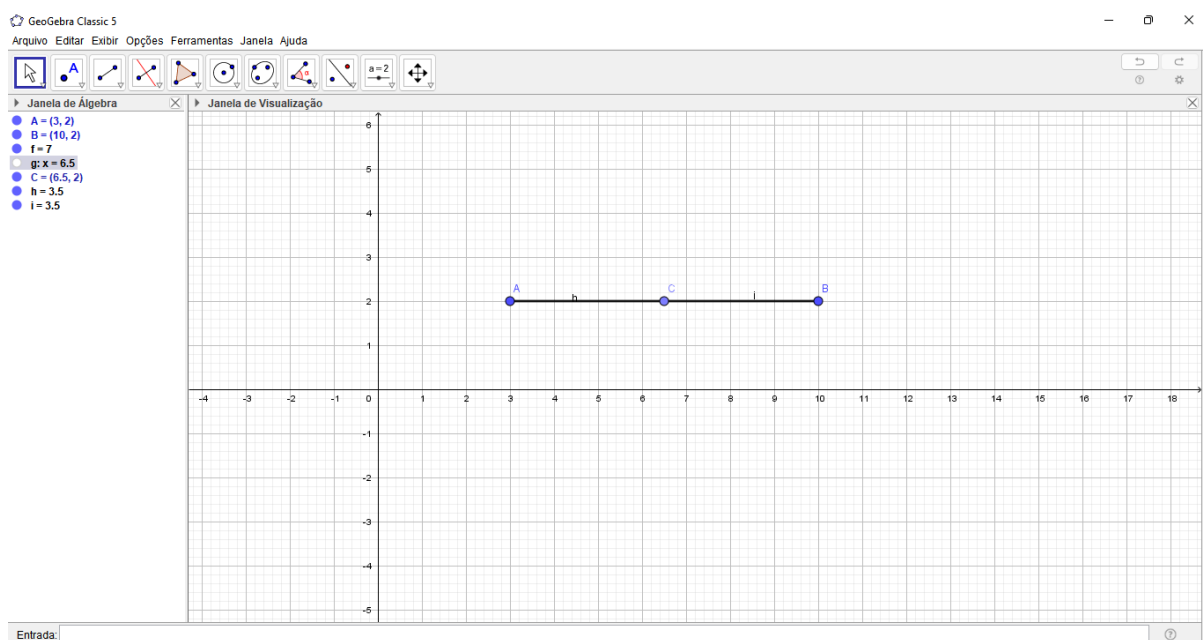
Figura 52 – Solução atividade 2



Fonte: Autoria própria

Com a ferramenta *Segmento de reta*, traçamos o segmento AB.

Figura 53 – Solução atividade 2

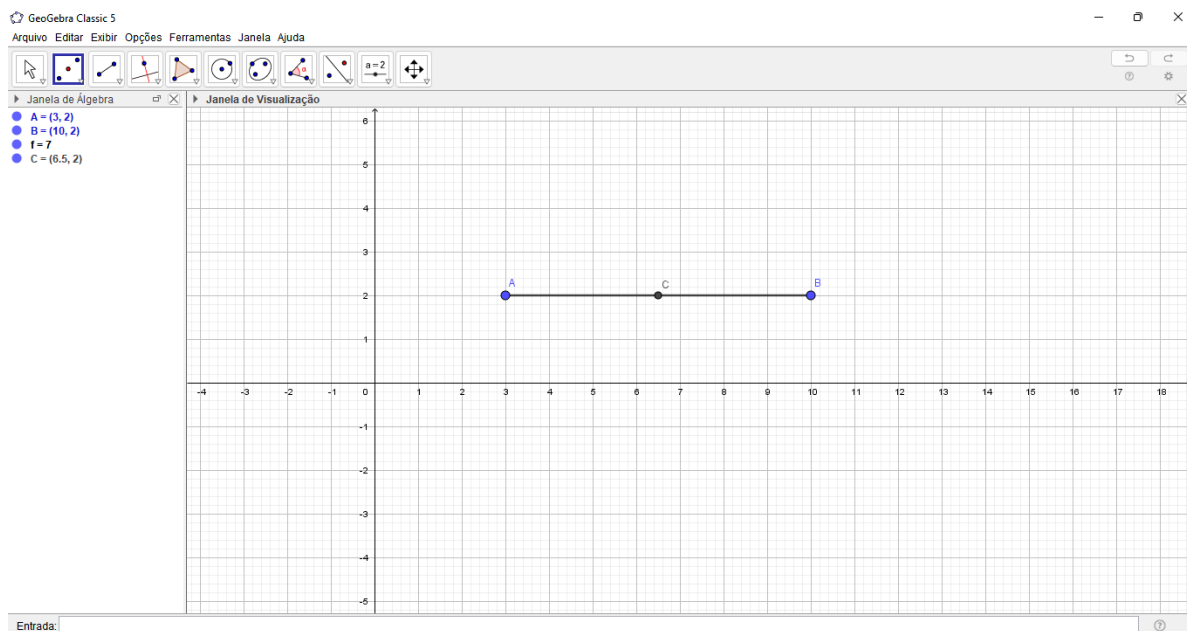


Fonte: Autoria própria

Levamos os alunos a deduzir que o meio da linha é um ponto distante igualmente de A e de B.

Então com a ferramenta *Ponto médio* marcamos esse ponto, chamado C.

Figura 54 – Solução atividade 2

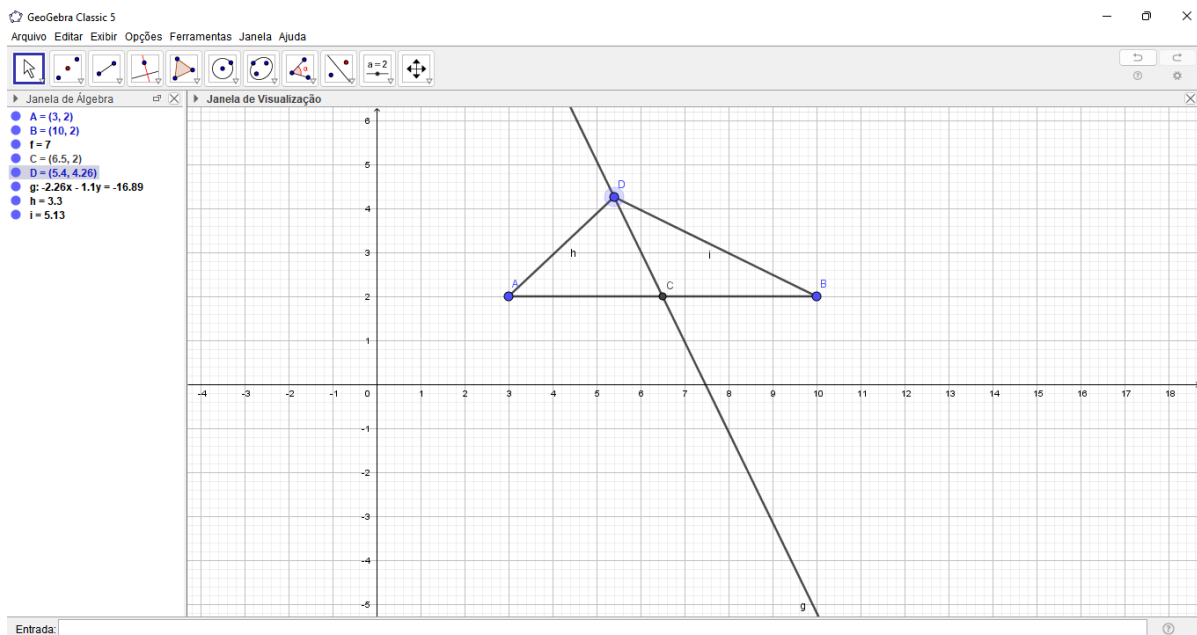


Fonte: Autoria própria

Aqui respondemos o item (a).

Para responder o item (b) perguntamos aos alunos se esse ponto C é único ou se temos mais opções. Aqui perguntamos se fizemos uma reta passando por C resolve. Usando a ferramenta *Reta*, traçamos uma reta qualquer e marcamos um ponto dela, vendo que a condição da distância não é satisfeita.

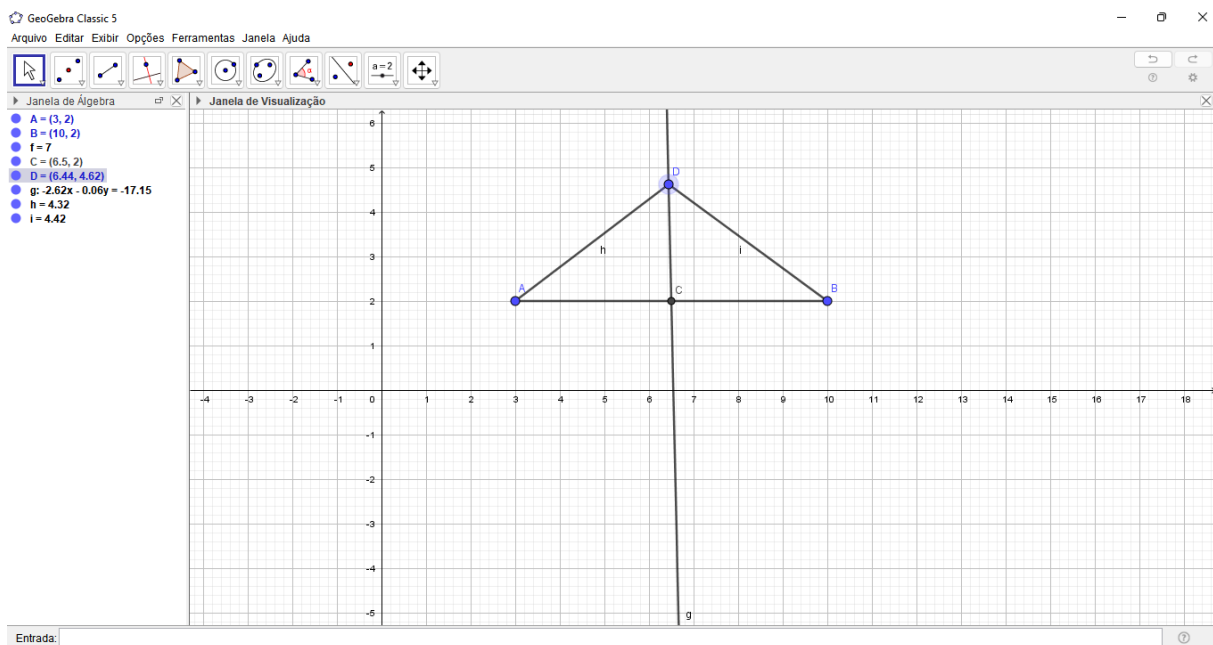
Figura 55 – Solução atividade 2



Fonte: Autoria própria

Agora mexemos com o ponto D, mostrando que quanto mais perpendicular a reta fica, mais próximas ficam as distâncias AD e BD.

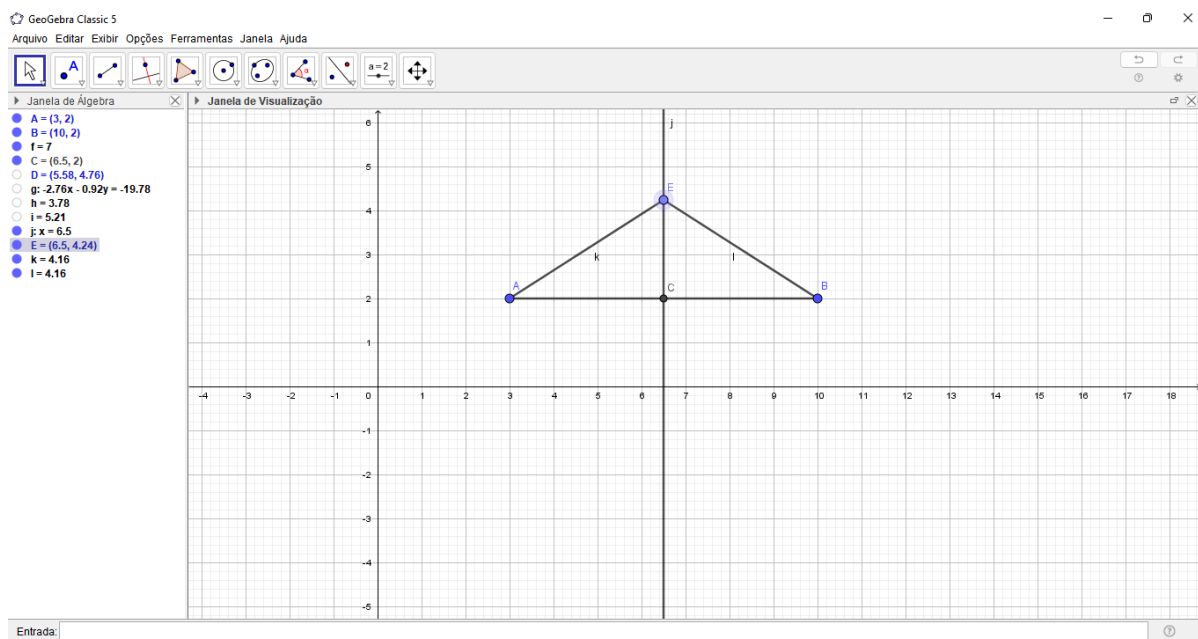
Figura 56 – Solução atividade 2



Fonte: Autoria própria

Agora com a ferramenta *Reta perpendicular* passando por C, podemos analisar os segmentos.

Figura 57 – Solução atividade 2



Fonte: Autoria própria

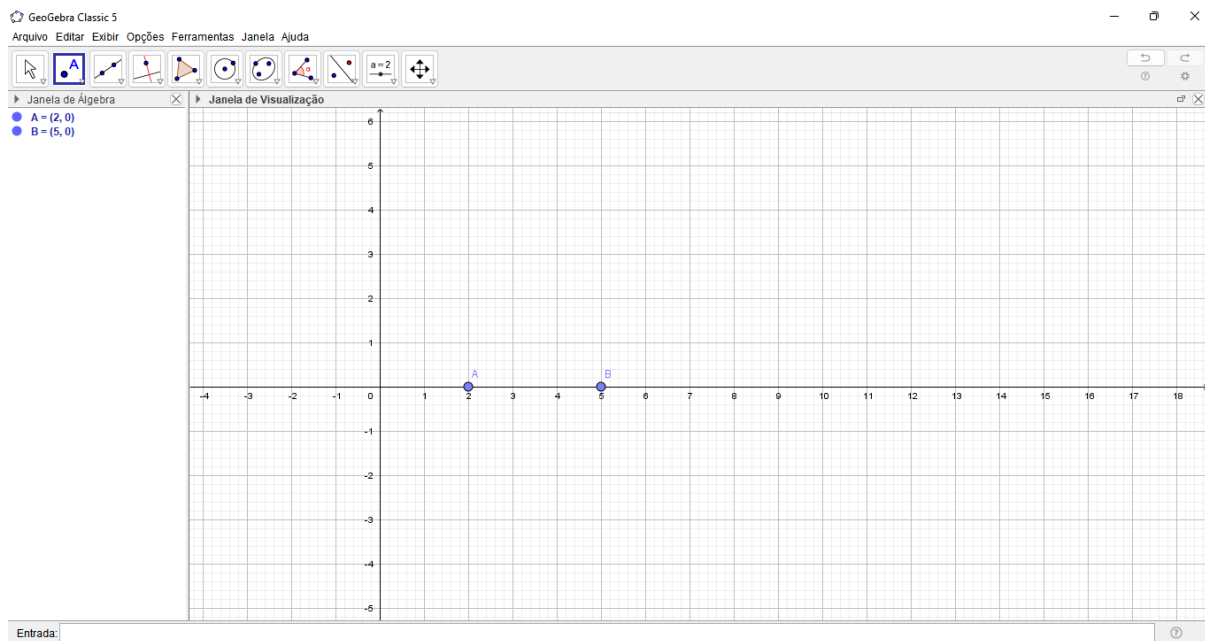
Agora corremos com o ponto D sobre essa reta e analisamos que os segmentos são sempre iguais. Apresentamos essa reta como a mediatriz do segmento AB e observamos que ela passa pelo ponto médio, forma 90° e os pontos são equidistantes das extremidades do segmento.

6.1.3 Atividade 3 Ponto Médio

Utilizando o GeoGebra:

Com a ferramenta *Ponto*, vamos marcar os dois pontos em cima da linha nos números 2 e 5, como na figura proposta na atividade.

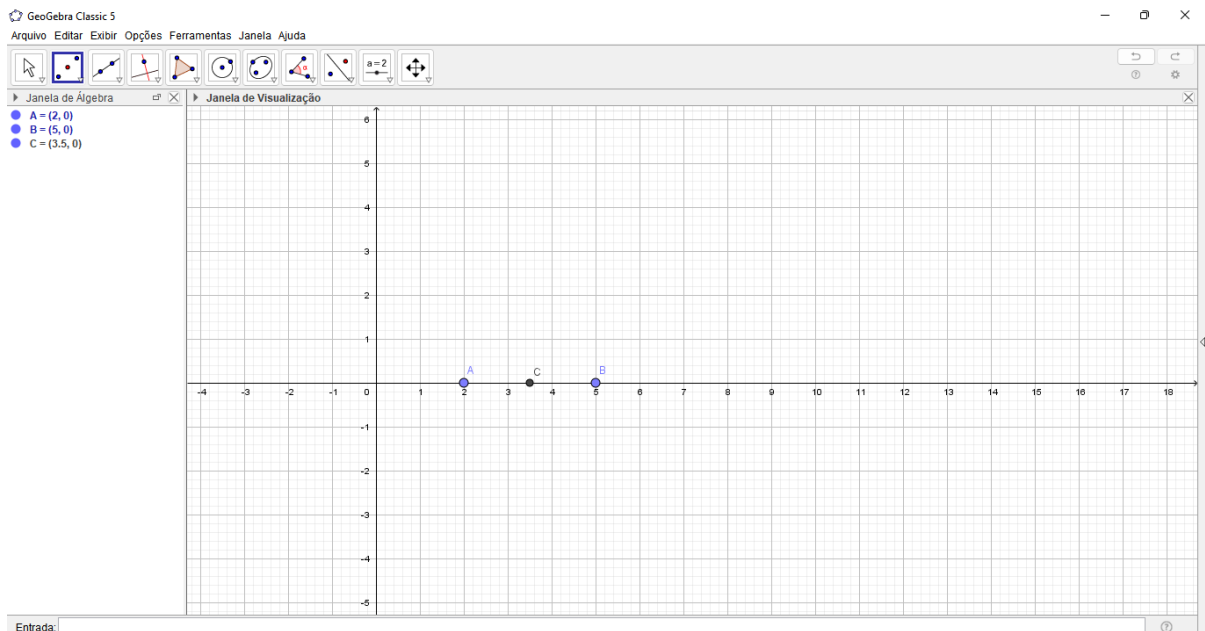
Figura 58 – Solução atividade 3



Fonte: Autoria própria

Usando a ferramenta *Ponto médio*, vamos descobrir esse local (Ponto C).

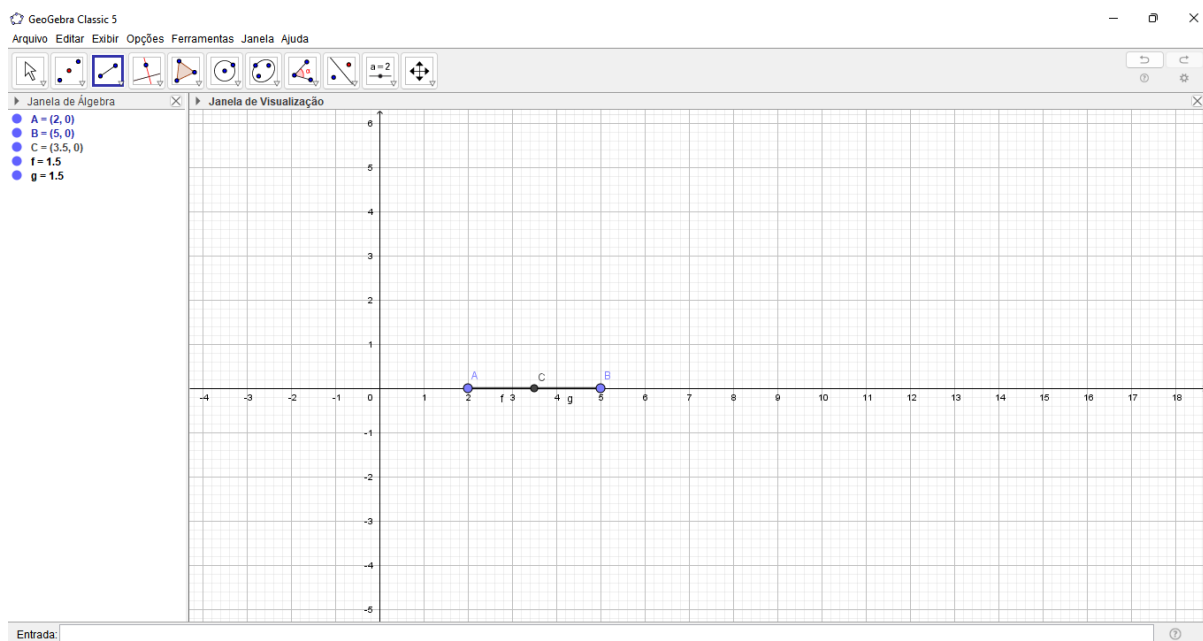
Figura 59 – Solução atividade 3



Fonte: Autoria própria

Agora com a ferramenta *Segmento de reta* vamos determinar as medidas das distâncias de AC e CB e observar que são iguais, respondendo o item (a).

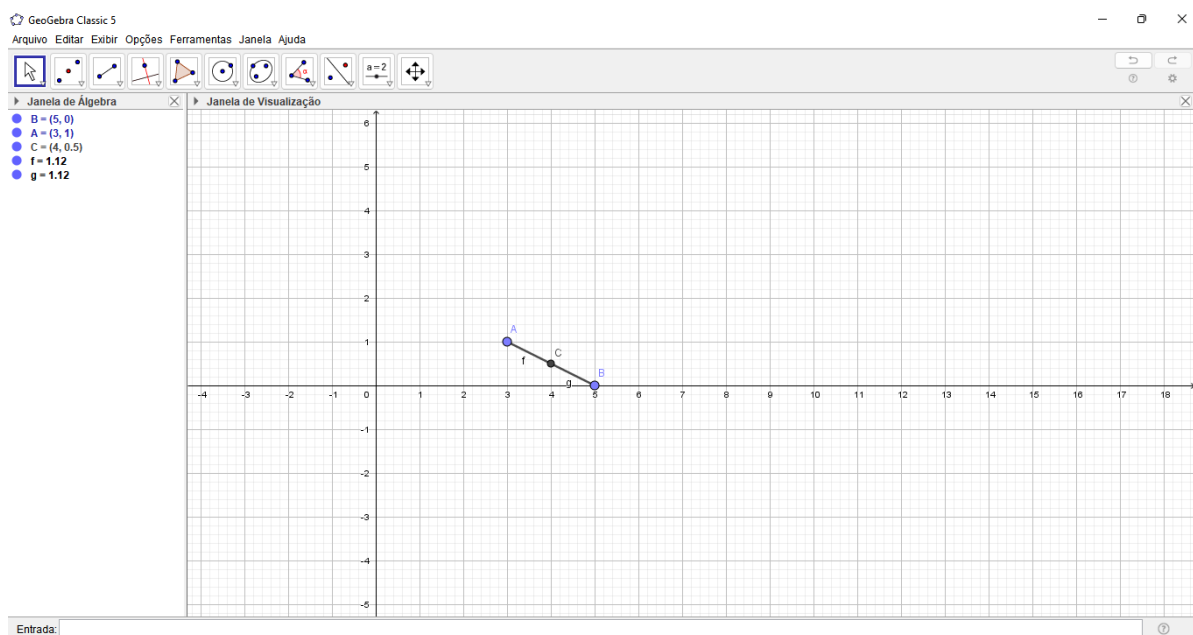
Figura 60 – Solução atividade 3



Fonte: Autoria própria

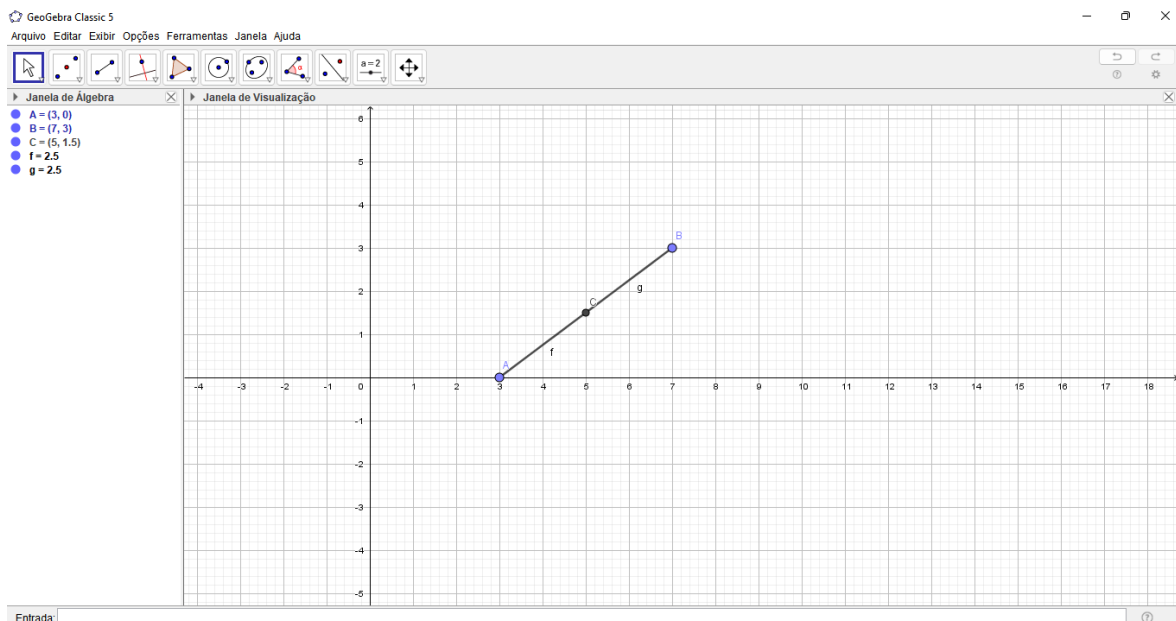
Para responder o item (b), brincando com os pontos A e/ou B, observando que o ponto de encontro muda de acordo com as casas, mas que as distâncias entre os segmentos sempre permanecem iguais.

Figura 61 – Solução atividade 3: variando apenas a casa da Marcela



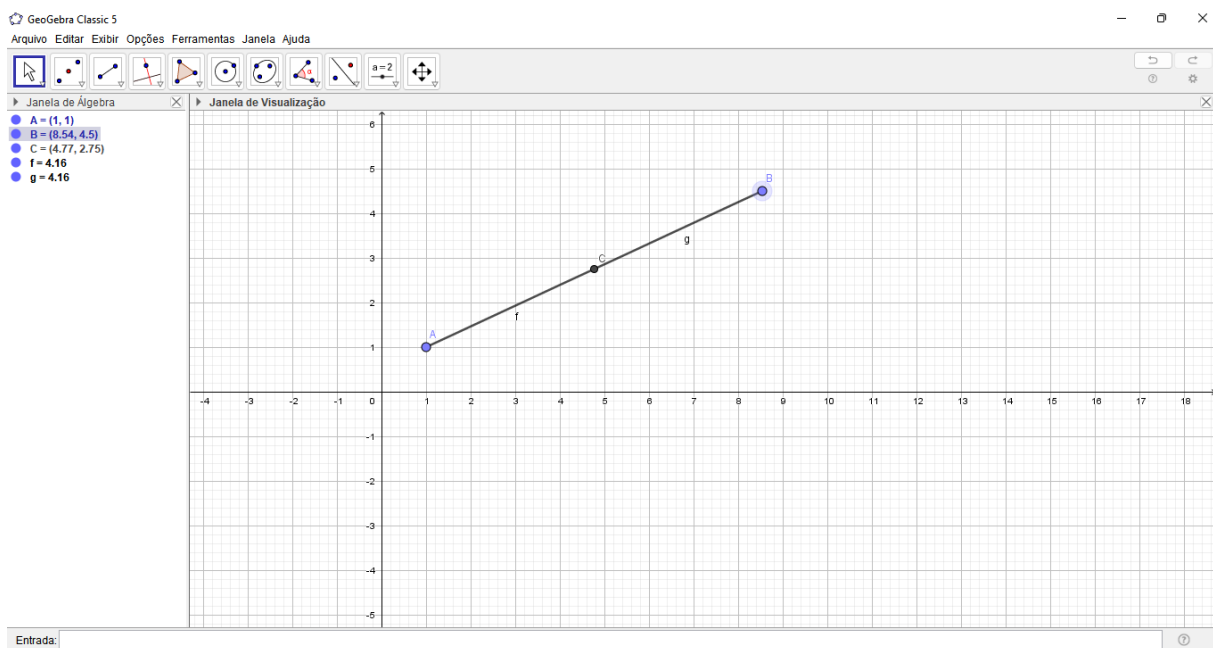
Fonte: Autoria própria

Figura 62 – Solução atividade 3: variando apenas a casa da Michele



Fonte: Autoria própria

Figura 63 – Solução atividade 3: variando as duas casas



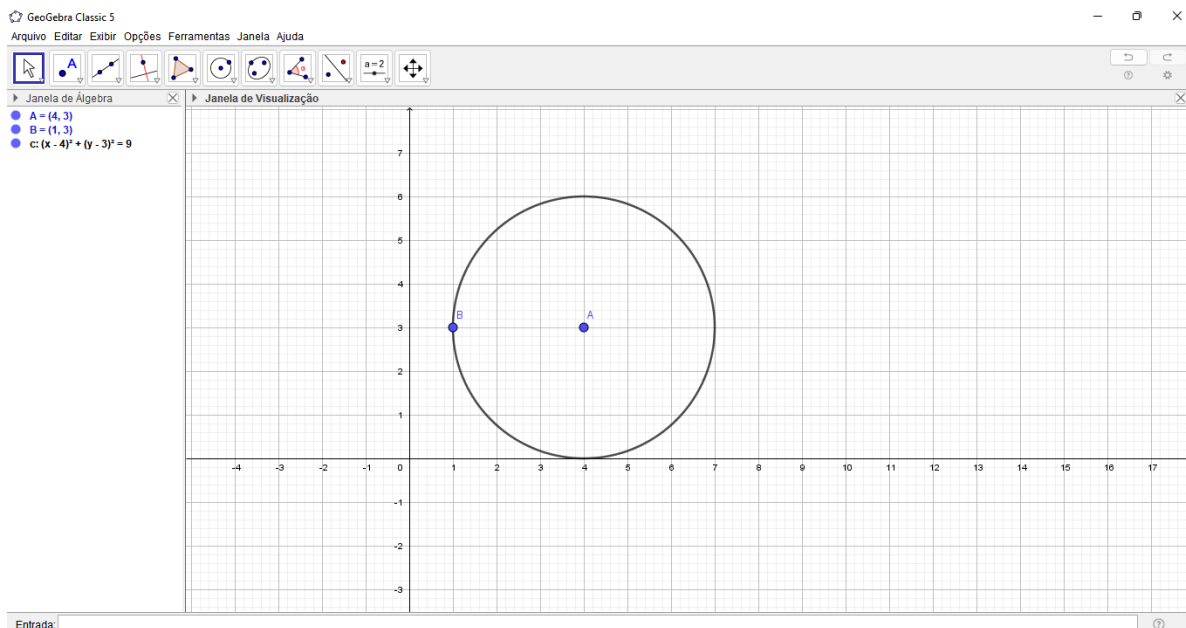
Fonte: Autoria própria

6.1.4 Atividade 4 Bissetriz

No GeoGebra:

Com a ferramenta *Círculo dados Centro e um de seus pontos*, traçamos a circunferência de centro A e com o B pertencendo.

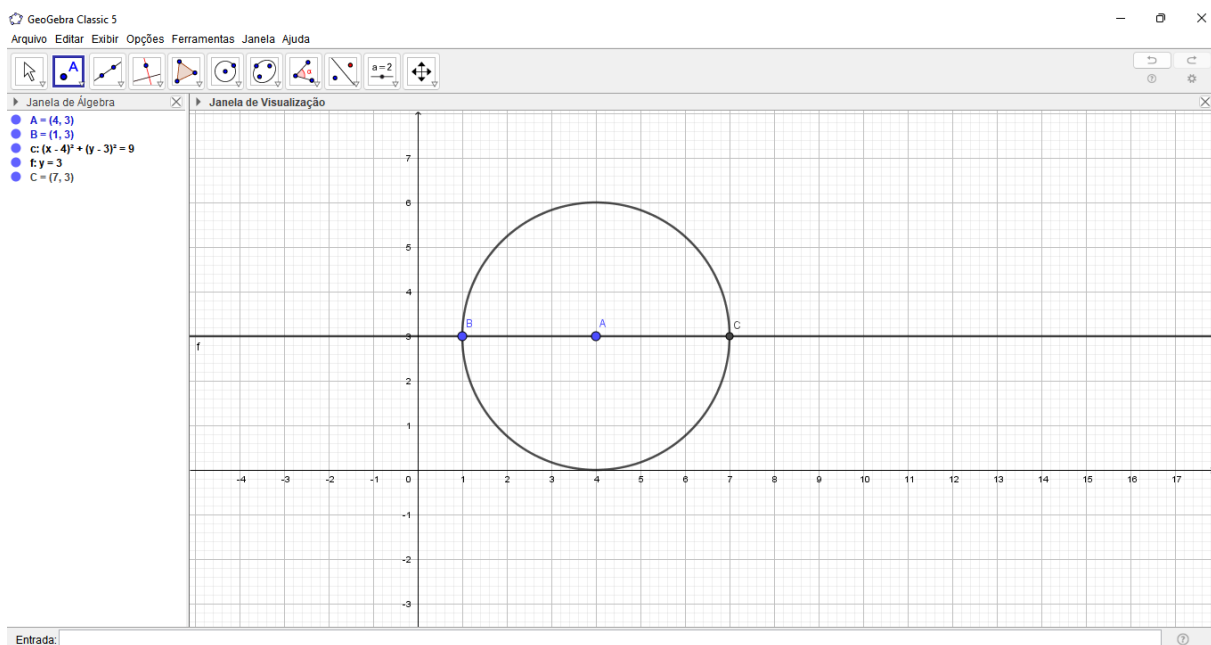
Figura 64 – Solução atividade 4



Fonte: Autoria própria

Agora com a ferramenta *Reta*, traçamos passando por A e B, encontrando o ponto C.

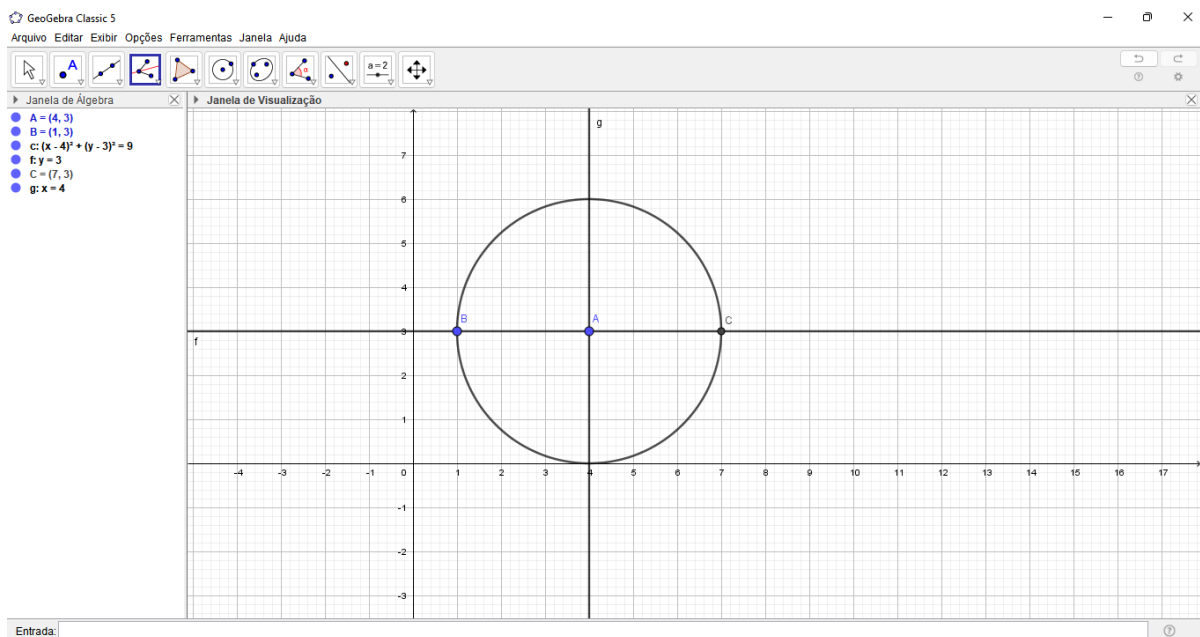
Figura 65 – Solução atividade 4



Fonte: Autoria própria

Com a ferramenta *Bissetriz*, marcamos os pontos B, A e C (nessa ordem) para fazer uma nova partição igual.

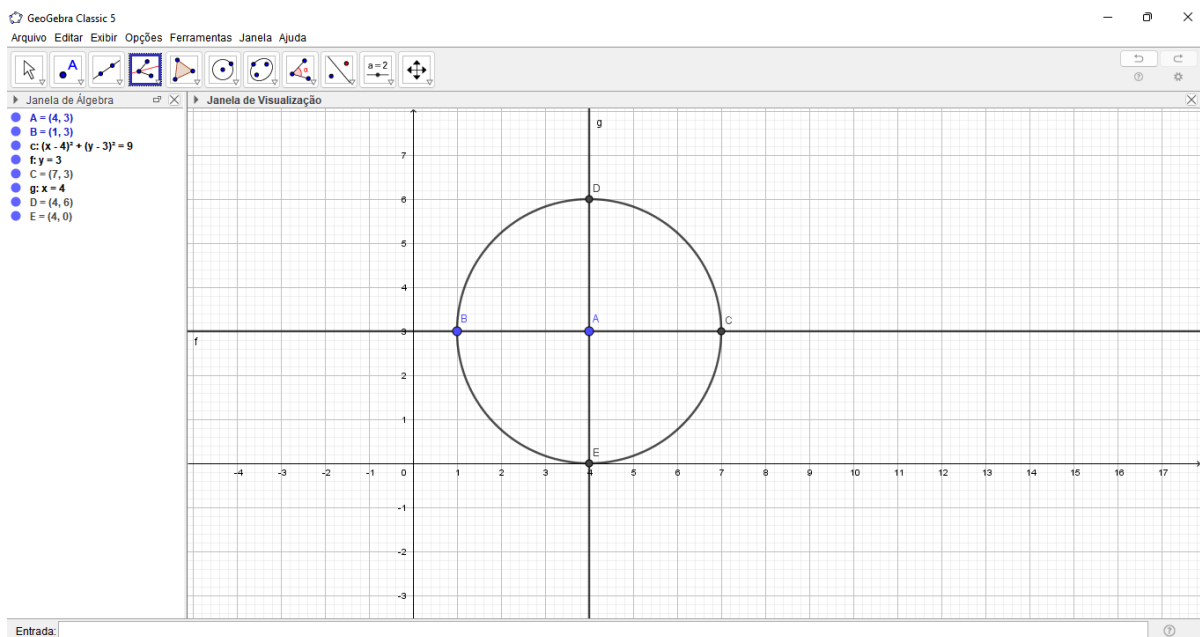
Figura 66 – Solução atividade 4



Fonte: Autoria própria

Com a ferramenta *Ponto*, marcamos os pontos D e E, nessa nova reta (que é a bissetriz).

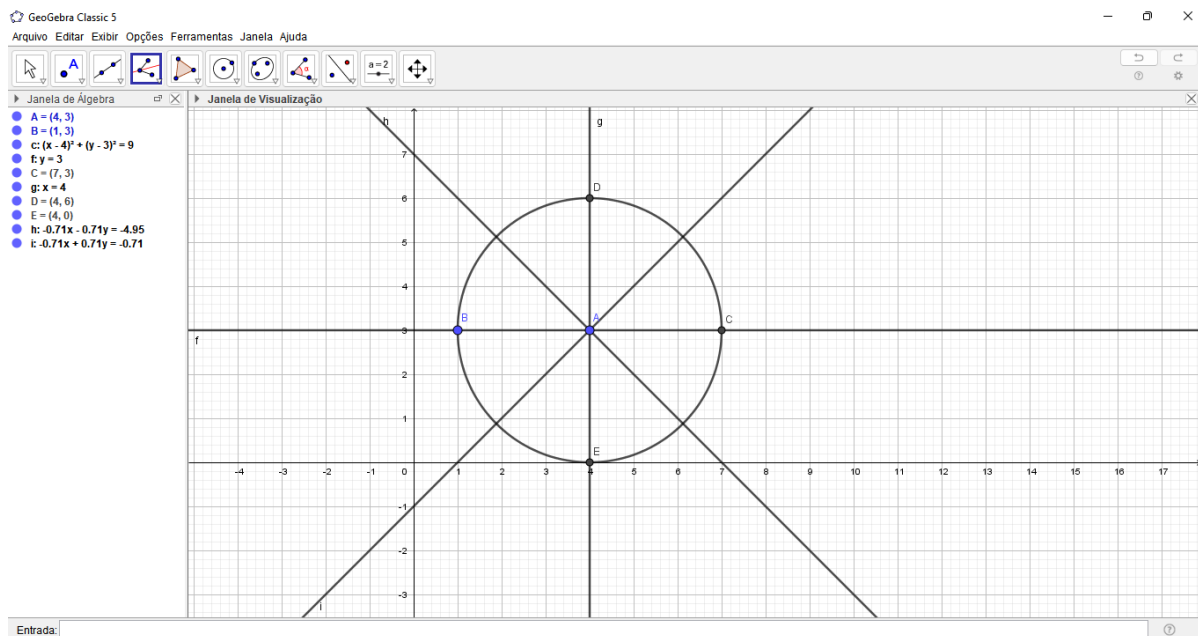
Figura 67 – Solução atividade 4



Fonte: Autoria própria

Voltamos na ferramenta *Bissetriz* e traçamos as outras marcando B-A-D e e D-A-C (nessa ordem).

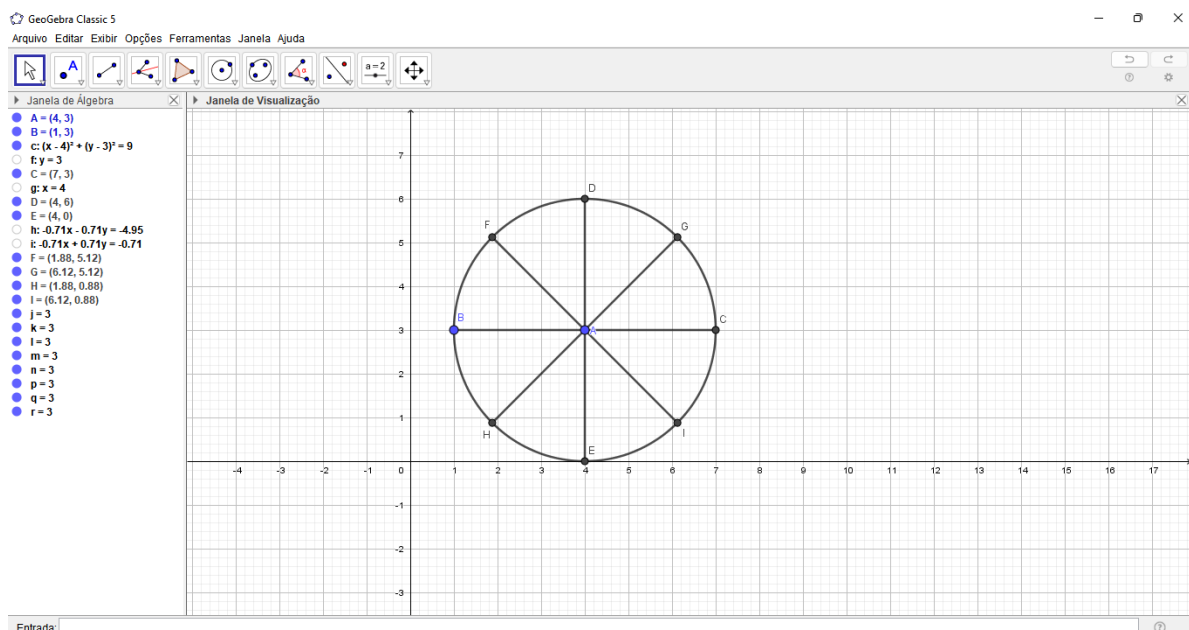
Figura 68 – Solução atividade 4



Fonte: Autoria própria

Agora já temos 8 pedaços exatamente iguais, vamos marcar os pontos F, G, H e I e com a ferramenta *Segmento*, traçamos as divisões.

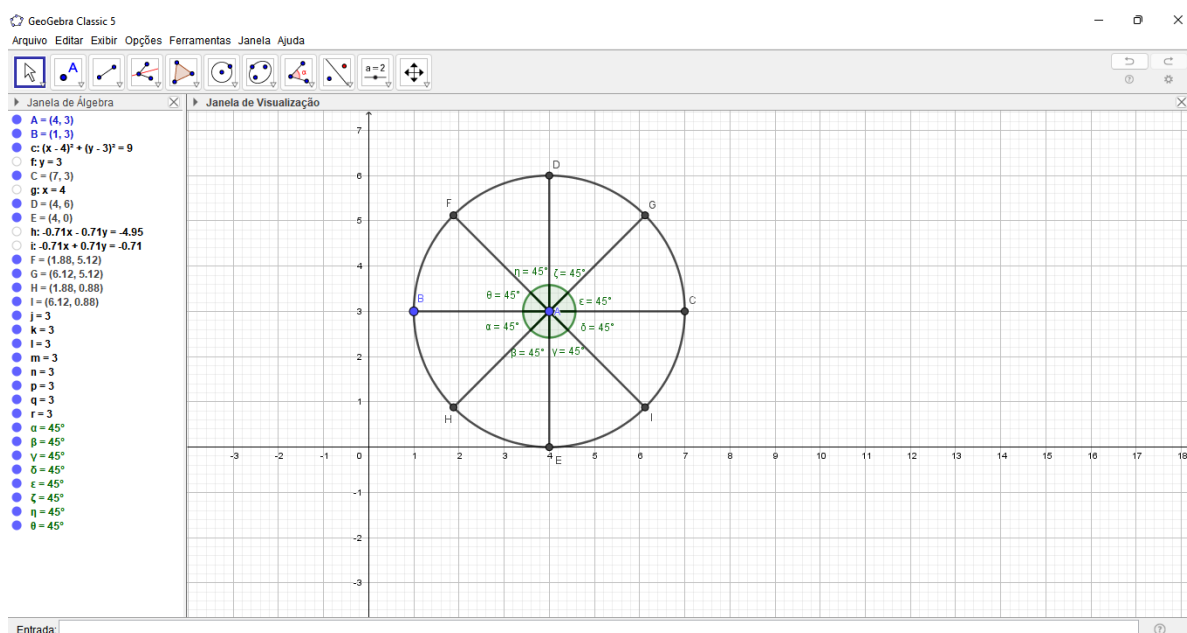
Figura 69 – Solução atividade 4



Fonte: Autoria própria

Agora vamos conferir se está tudo igual com a ferramenta *Ângulo*.

Figura 70 – Solução atividade 4



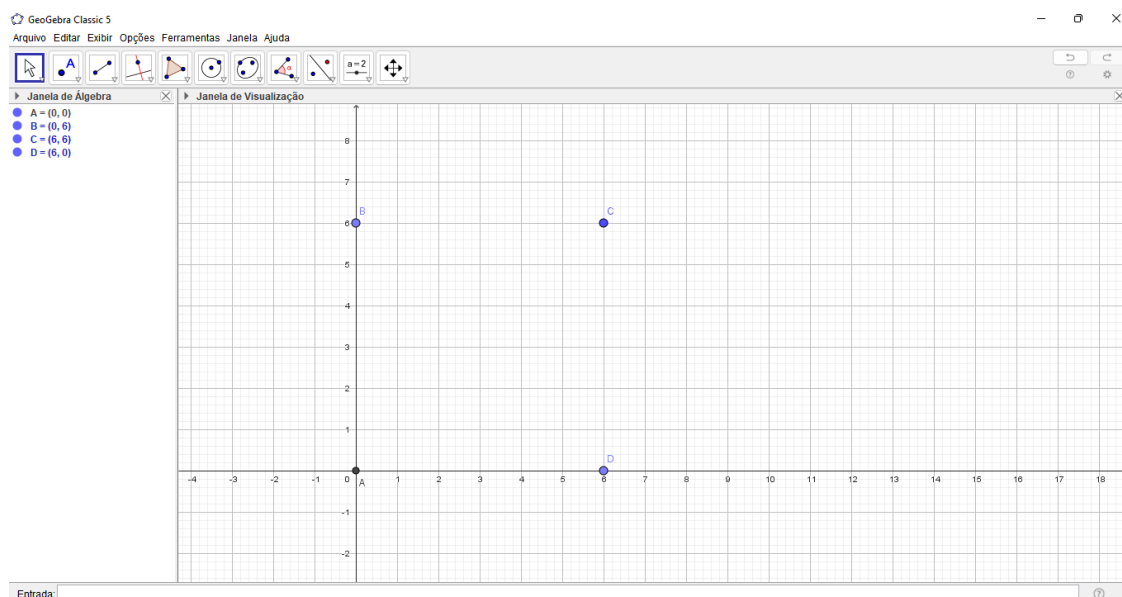
Fonte: Autoria própria

Ou seja, eles descobriram que para dividir igualmente a pizza em 8 pedaços o ângulo deve ser igual a 45° (como mostra o GeoGebra).

6.1.5 Atividade 5 Bissetriz

Primeiro iremos marcar 4 pontos que serão os “cantos” da praça com distância 6 entre eles.

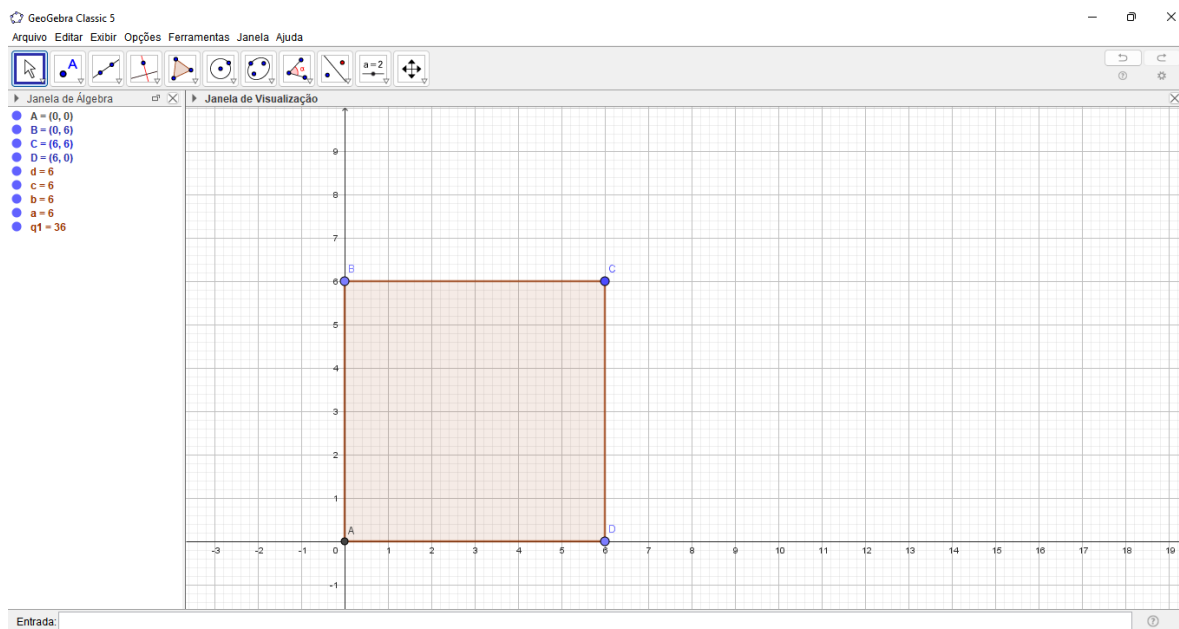
Figura 71 – Solução atividade 5



Fonte: Autoria própria

Agora vamos na ferramenta *Polígono* e construiremos o quadrado.

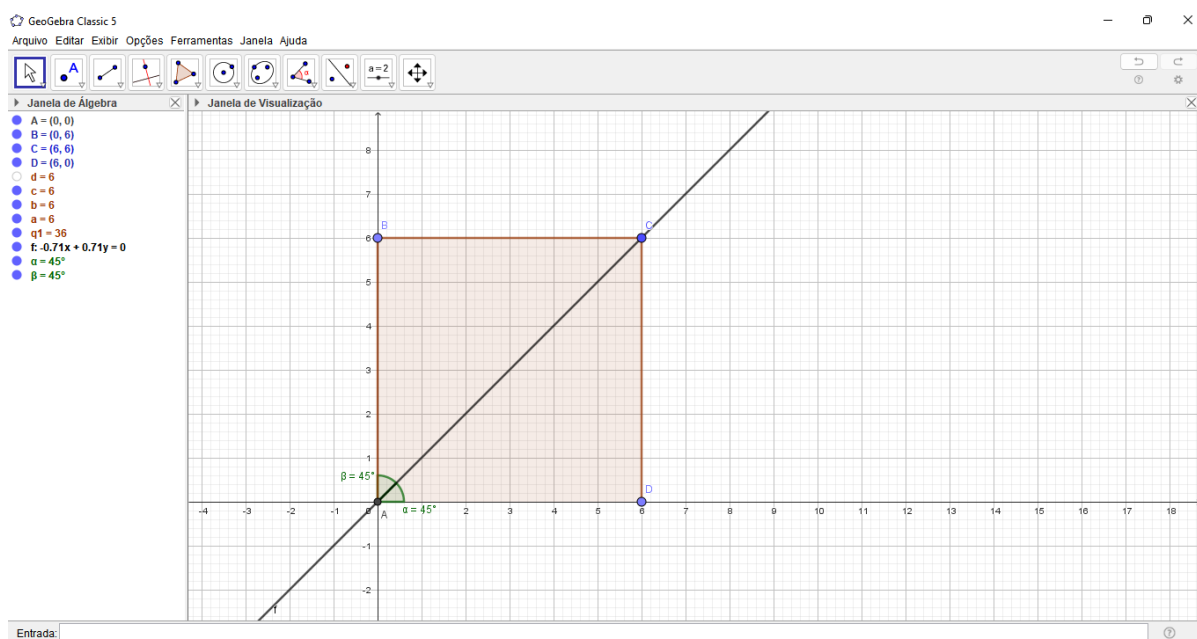
Figura 72 – Solução atividade 5



Fonte: Autoria própria

Agora com a ferramenta *Bissetriz*, iremos construir a bissetriz do ângulo \hat{A} .

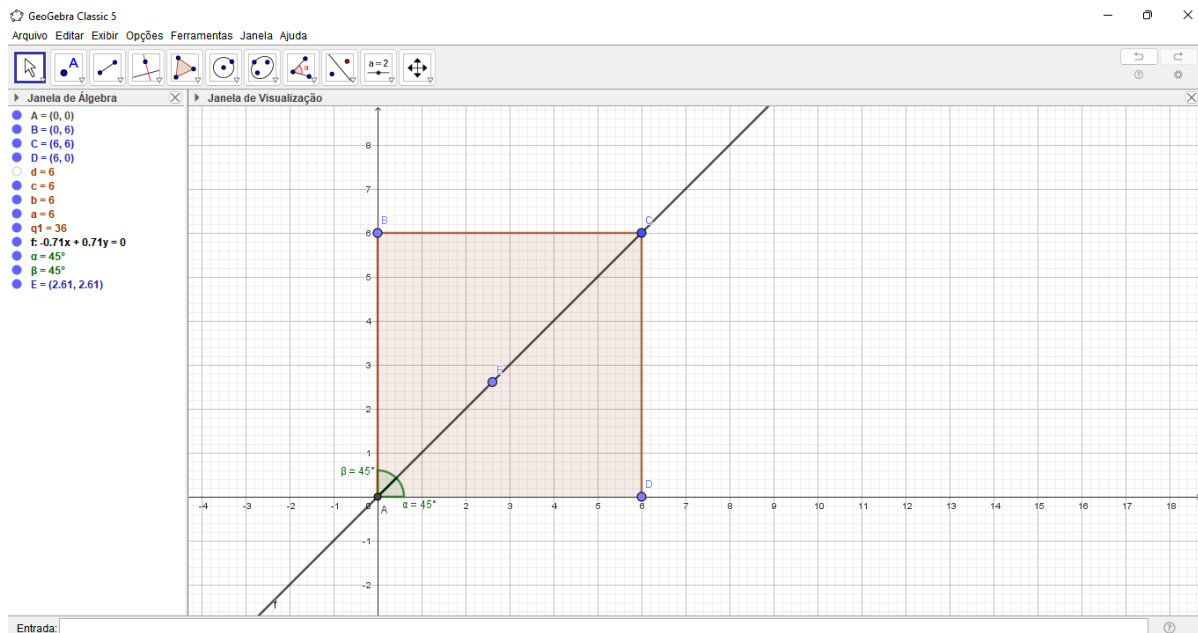
Figura 73 – Solução atividade 5



Fonte: Autoria própria

Na reta bissetriz, vamos marcar um ponto P qualquer.

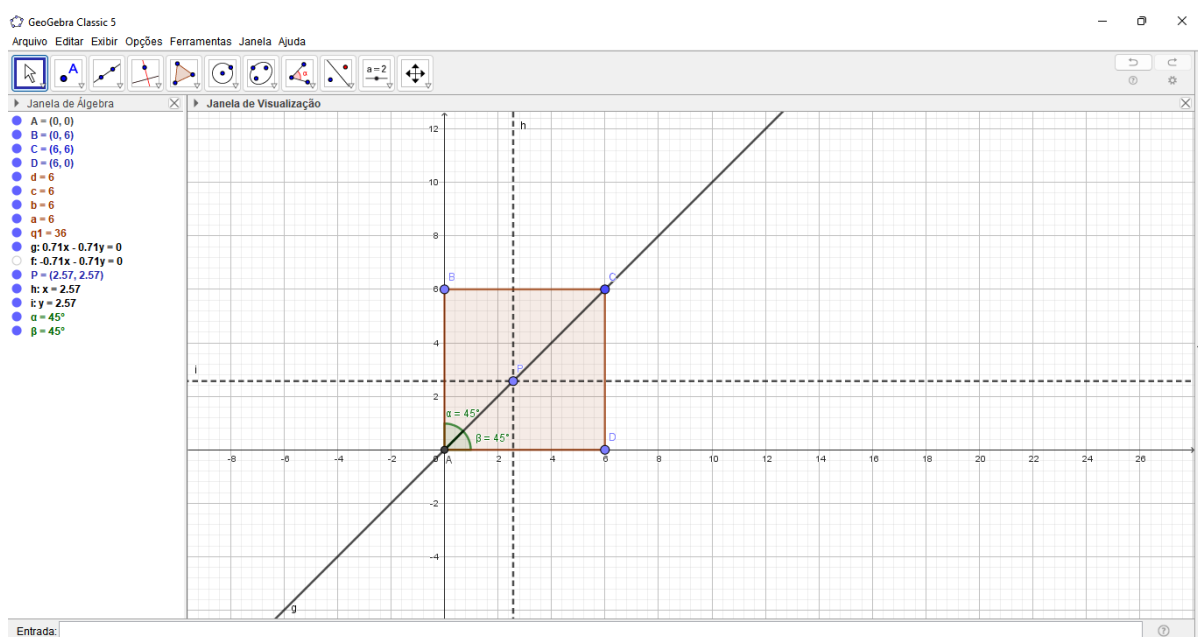
Figura 74 – Solução atividade 5



Fonte: Autoria própria

Agora com a ferramenta Perpendicular, vamos traçar as retas perpendiculares aos lados AB e AD passando pelo P.

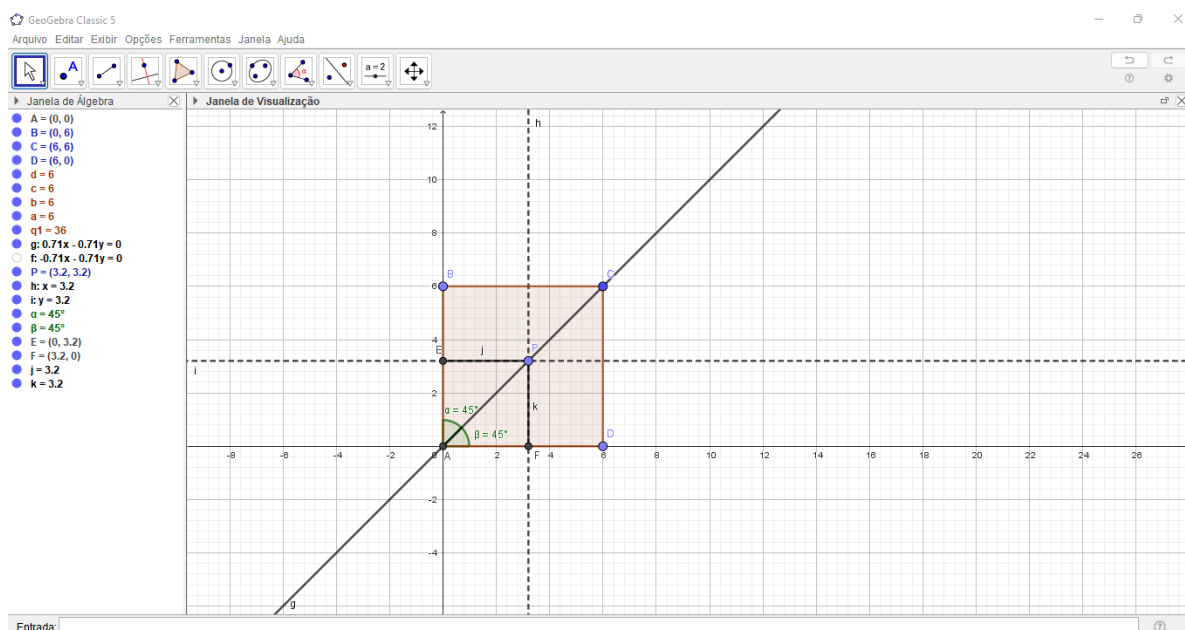
Figura 75 – Solução atividade 5



Fonte: Autoria própria

Agora iremos usar a ferramenta *Segmento* e vamos medir.

Figura 76 – Solução atividade 5



Fonte: Autoria própria

Agora podemos mover o ponto P de forma que não importa qual seja, estando na bissetriz as distâncias serão iguais.

Com as atividades e soluções já apresentadas, agora falaremos individualmente sobre as possibilidades de cada uma das atividades, pois sabemos que nem todas as escolas dispõem de equipamentos disponíveis para realizar as atividades da forma apresentada. A primeira sugestão é utilizar o GeoGebra para celular, que é uma versão mais simples do software utilizado.

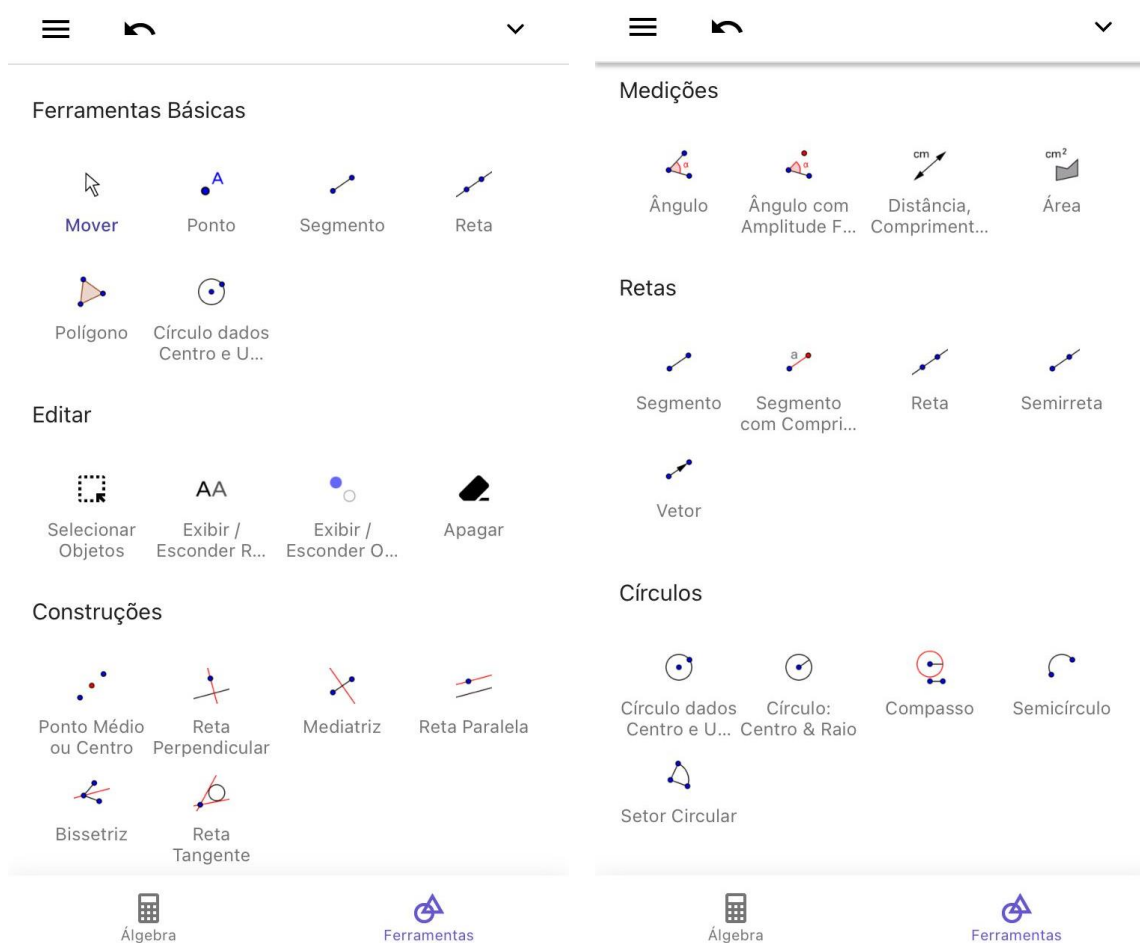
Existem 4 versões de aplicativo: Calculadora Gráfica GeoGebra, GeoGebra Geometria, Suíte GeoGebra Calculadora e Calculadora GeoGebra 3D. Para realizar essas atividades, o software adequado é o GeoGebra Geometria.

Figura 77 – Versão utilizada



Fonte: APP Store

Figura 78 – Ferramentas disponíveis da versão celular



Fonte: APP Store

Apesar de mais limitado, a versão do celular possui todas as ferramentas necessárias e é de fácil utilização para crianças. Mas essa alternativa é válida caso os alunos tenham em mão um celular compatível com o programa. Caso apenas alguns possuam, podem realizar as tarefas em dupla ou no máximo trio, para que todos compreendam e participem.

Mas sabemos que nem todas as realidades escolares são assim. Há muitos alunos que não possuem celular com internet ou muitas escolas sem nenhum equipamento e as vezes até sem material básico. Vamos adequar cada atividade a essa realidade.

A proposta para a atividade 1 é utilizar papel quadriculado imitando a malha do GeoGebra e os alunos reproduzirem a localidade de cada casa e da lanchonete e realizarem o passo a passo para responder as questões propostas. Com o papel quadriculado fica fácil do aluno reproduzir, marcar e concluir a tarefa. Uma outra opção

seria utilizar os próprios alunos e um barbante para fazer a circunferência. No chão da sala fazemos os eixos e utilizamos 5 alunos para representarem os locais. Com o barbante, delimitamos a região de entrega e assim, podemos responder a atividade.

Já para a atividade 2 a melhor opção é o papel quadriculado e uma régua, para fazer as medições dos segmentos. Aqui os alunos representam os pontos e o segmento. Para o item “a” os alunos acham facilmente o ponto médio (que como o nome diz, divide ao meio). A partir daí o aluno traça uma ou duas retas quaisquer, passando pelo ponto médio e mede os segmentos para analisar se são equidistantes. Com as opções apresentadas pelos alunos, podemos ajudá-los a deduzir que quanto mais vertical a reta, mais próximos os valores ficam, até chegarmos na reta perpendicular e aí eles medirem e perceberam que essa é a solução do item “b”.

Para a atividade 3 podemos recriar no chão da sala, usando dois alunos para representar as casas. Com um barbante grosso unimos as duas casas e determinamos onde fica exatamente o meio, usando uma fita métrica para encontrar o meio. Depois vamos variando as posições, aumentando ou diminuindo o barbante e medindo, mostrando que o ponto médio varia de acordo com as extremidades.

E para a última atividade, usamos um molde de pizza, tesoura, régua e transferidor. No molde, fazemos a primeira partição ao meio, após isso usamos o transferidor para mostrar que o ângulo ficou 180° . Depois dividimos ao meio usando a marca de 90° do transferidor e aqui chegamos em quatro partes iguais. Fazemos o mesmo processo, agora dividindo o 90° ao meio, ficando oito partes com 45° cada. Aqui os alunos cortam os pedaços e podem colocar um em cima do outro e conferir se estão iguais.

7 CONCLUSÕES FINAIS

O ensino de geometria vem sendo explorado cada vez mais em trabalhos, artigos e congressos, pois há alguns anos raramente era trabalhado em sala sendo colocado nos capítulos finais dos livros didáticos e não tendo tempo para ensiná-los. Com essa nova visão dessa área da matemática, muitas vezes vista como uma parte independente da álgebra, a geometria deve ser trabalhada desde os anos iniciais do ensino fundamental I e muitos conceitos básicos ensinados ainda na educação infantil. Nesse trabalho foi apresentado uma forma de ensinar três lugares geométricos para alunos dos anos finais do ensino fundamental I e anos iniciais do ensino fundamental II, já que esses conteúdos não são diretamente trabalhados nessas séries.

O uso de tecnologias já é uma realidade no cotidiano dos alunos e de algumas escolas, visto que a pandemia agilizou o processo, mesmo que de uma forma ainda não satisfatória. Com esse trabalho podemos aplicar conteúdos mais avançados de uma forma mais simplificada em séries anteriores, já permitindo ao aluno conhecer ferramentas e elementos geométricos.

É sabido que a área de geometria é uma problemática pois temos alunos que não conseguem visualizar geometricamente, o que compromete toda a aprendizagem e aplicação dos conceitos. Os softwares estão disponíveis para auxiliar os alunos a enxergarem as construções e permitindo que eles possam concluir as propriedades de cada uma delas. Também foram apresentadas sugestões do ensino desses lugares geométricos de uma forma mais lúdica, envolvendo os alunos em todas as etapas, permitindo que esse ensino ocorra também em escolas com maiores dificuldades tecnológicas, como sabemos que ainda existem.

Portanto é possível construir uma educação inovadora, com ferramentas que vão ajudar e garantir a participação dos alunos no processo de aprendizagem, afinal eles são os maiores interessados em uma educação melhor.

8 REFERÊNCIAS

ALVES, G. de S. e SOARES, A. B. **Geometria dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae**. http://www.geogebra.im-uff.mat.br/biblioteca/WIE_George_Adriana.pdf Acesso em: 01 ago. 2022

BRASIL. [BNCC]. **Base Nacional Comum Curricular**. Organizado por Ministério da Educação. Brasília, DF, 14 dez. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf . Acesso em: 20 mai. 2022.

DUTRA, Marlene de Alencar; Paz, Tatiana Santos da. **Informática Educativa: licenciatura em educação profissional científica e tecnológica**. 1. ed. Universidade Aberta do Brasil – Instituto Federal de educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Fortaleza, CE, 2015.

NETO, Antonio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar – Vol. 2 Geometria Euclidiana Plana**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. p. 93-97.

SOUZA, F. C. A. G. **Geometria dinâmica: um estudo**. COPPE/UFRJ, 211 p . Dissertação de Mestrado em Engenharia de Sistemas e Computação, RJ, 1998.

GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>. Acesso em 25 mai. 2022.

Origem das palavras. Disponível em: <https://origemdapalavra.com.br/>. Acesso em 03 jun. 2022.