COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Walter da Silva Brotto Junior

ÁLGEBRA LINEAR: APLICAÇÕES E REFLEXÕES

Rio de Janeiro
2021

Walter da Silva Brotto Junior

ÁLGEBRA LINEAR: APLICAÇÕES E REFLEXÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos

Rio de Janeiro
2021

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

B874 Brotto Junior, Walter da Silva

Álgebra linear: aplicações e reflexões / Walter da Silva Brotto Junior. - Rio de Janeiro, 2021.

92 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.
Orientador: Diego de Souza Nicodemos.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Álgebra linear. 3. Matrizes (Matemática). 4. Números complexos. I. Nicodemos, Diego de Souza. II. Colégio Pedro II. III Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Walter da Silva Brotto Junior

ÁLGEBRA LINEAR: APLICAÇÕES E REFLEXÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____
Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos (Orientador)
PROFMAT – Colégio Pedro II

____
Profª. Dr. Diana Sasaki Nobrega
UERJ – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

____
Profª. Dr. Andreia Carvalho Maciel Barbosa
PROFMAT – Colégio Pedro II

Rio de Janeiro
2021

Dedico esse trabalho à minha mãe, minha irmã, minha esposa e meu cunhado que são pessoas as quais amo muito.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e a São Jorge por me darem força, determinação nos momentos que nem eu acreditava.

À minha mãe, Claudia, por todo amor incondicional, por sempre incentivar a estudar, estando sempre ao meu lado e torcendo por mim.

À minha bisa (in memória), Alaide Oliveira, que eu carrego no meu coração por todos os momentos.

À minha esposa, Nayara Negrin, por todo amor, carinho e companheirismo, além de estar sempre junto comigo nessa caminhada, batalhando, lutando para que pudéssemos vencer juntos.

À minha irmã, Tassyane, minha princesa, que eu faço tudo para orgulha-la, essa vitória é nossa.

Ao meu amigo e cunhado, Felipe, que sempre esteve junto comigo.

Ao meu orientador e amigo, Diego Nicodemos, que sempre esteve junto comigo, discutindo, motivando e aconselhando.

À minha amiga, Mariana Dias, por todo incentivo e dicas para que eu pudesse melhorar o texto.

Aos meus colegas do PROFMAT que sempre estiveram presente nessa caminhada.

Agradeço as professoras Andreia Carvalho Maciel Barbosa e Diana Sasaki Nobrega por terem aceitado participar desta banca e poder contribuir para a melhoria deste trabalho.

RESUMO

BROTTO JR., Walter S.. **Álgebra Linear: Aplicações e Reflexões**. 2021. 92 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2021.

O presente trabalho apresenta aplicações da Álgebra Linear condizentes com o Ensino Básico, além de um conjunto de reflexões sobre a saída paulatina da Álgebra Linear dos Currículos da Educação Básica. Discutimos aspectos elementares e centrais da Álgebra Linear desde Matrizes até Autovalores e Autovetores. Convém destacar a proposta didática de introduzir os Números Complexos a partir de conceitos envolvendo Matrizes. Além disso, reproduzimos um ambiente inspirado no Jogo Super Sprint, onde investigamos o uso da Álgebra Linear na Computação Gráfica, abordando e adentrando em conceitos associados às Matrizes, aos Determinantes, aos Sistemas Lineares e às Transformações Lineares. Reunimos dados relativos à Álgebra Linear referentes aos Currículos do Ensino Básico relativos, a conteúdos presentes em Livros Didáticos e aos Programas de Vestibular que de certa forma parametrizam os conteúdos abordados no Ensino Básico. Estes dados de certa maneira sinalizam que a Álgebra Linear possivelmente vem sendo omitida e, em alguns casos, negligenciada das salas de aulas, dos livros didáticos e dos programas de vestibular. As reflexões propostas neste trabalho têm a intenção de conversar e debater com o leitor algumas questões sobre o futuro da Álgebra Linear na vida dos alunos do Ensino Básico.

Palavras-chave: Álgebra Linear; Aplicações; Matrizes; Números Complexos; Computação Gráfica; Transformações Lineares; Reflexão; Livro Didático.

ABSTRACT

BROTTO JR., Walter S.. **Linear Algebra: Applications and Reflections**. 2021. 92 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2021.

The present work contains applications of Linear Algebra consistent with Basic Education, in addition to a list of reflections on the gradual exit of Linear Algebra from Basic Education Curricula. We discuss elementary and central aspects of Linear Algebra from Matrices to Eigenvalues and Eigenvectors. It is worth mentioning the didactic proposal to introduce Complex Numbers based on concepts involving Matrices. In addition, we reproduced an environment inspired by the Super Sprint Game, where we investigated the use of Linear Algebra in Computer Graphics, approaching and entering into concepts associated with Matrices, Determinants, Linear Systems and Linear Transformations. We collect data on Linear Algebra referring to the Basic Education Curricula relative to the contents present in Didactic Books and to the Vestibular Programs that, in a certain way, parameterize the contents covered in Basic Education. In a way, these data indicate that Linear Algebra has possibly been omitted and, in some cases, neglected in classrooms, textbooks and vestibular exam programs. The reflections proposed in this work are intended to discuss questions about the future of Linear Algebra in the lives of Basic Education students.

Keywords: Linear Algebra; Applications; Matrices; Complex Numbers; Computer Graphics; Linear Transformations; Reflection; Textbook.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em 2020, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), divulgou uma pesquisa, a qual mostra que 74,7% da população brasileira têm acesso à internet, seja por meio de computadores, celulares, tablets, televisores ou outros recursos. A tecnologia está definitivamente presente em nossas vidas, seja para consultar informações, estabelecer conversas com amigos, jogar ou, simplesmente, servir nos entreter.

A crescente utilização da internet, bem como de softwares e de aplicativos, motivou-nos a estudar e a dissertar sobre alguns aspectos da importante teoria matemática que está por trás de toda esta tecnologia: a Álgebra Linear. Segundo Celestino (2000, p.9):

> [...] a importância da Álgebra Linear e das pesquisas sobre seu ensino-aprendizagem repousa no fato de que ela hoje se encontra subjacente a quase todos os domínios da Matemática. Desta forma, é imprescindível que aqueles que pretendem trabalhar com as ciências que utilizam a Matemática, tanto como objeto de seu estudo quanto como instrumento para outros estudos, domine, seus principais conceitos.

Sem dúvidas, a Álgebra Linear é um conteúdo de grande relevância para o desenvolvimento da abstração e do raciocínio lógico-dedutivo. Entretanto, acreditamos que vem sendo paulatinamente negligenciada ou mesmo omitida dos currículos do Ensino Básico e das salas de aula.

Segundo Furtado (2010, p. 5), muito há que ser realizado para mudar esse panorama, e nós, educadores, precisamos repensar profundamente sobre o Ensino da Álgebra Linear. A pesquisadora acrescenta, ainda, que os resultados obtidos em seus estudos sugerem uma fraqueza no Ensino da Álgebra Linear, destacando que o ensino-aprendizagem não se mostra eficiente quanto à compreensão dos proceitos[1] abstratos.

Para o leitor entender de onde surgiu o interesse nesta pesquisa, é necessário relatar algumas das minhas experiências. Ainda aluno da 2ª série do Ensino Médio, no Liceu Nilo Peçanha[2], escola estadual localizada em Niterói, lembro-me de estudar muito bem os conceitos de Matrizes, Operações, Escalonamento, Sistema de Equações, dentre outros assuntos. Conquanto, não tivemos o auxílio tecnológico e tampouco o estímulo das aplicações da Álgebra Linear. Já durante a graduação em Licenciatura em Matemática pela UERJ, tornei-me monitor da disciplina Álgebra Linear I, fato que me motivou a estudar tal área mais

---

[1] "Proceito" surge da aglutinação dos vocábulos "processo" e "conceito".

[2] Escola estadual localizada em Niterói, região metropolitana do Rio de Janeiro.

detidamente. Ainda assim, não tive estímulos tecnológicos por parte dos professores que lecionaram está disciplina, tampouco contato com aplicações dela em outras Ciências.

Por meio de minha experiência como professor de aproximadamente 6 anos, com alunos de Ensino Médio de escolas particulares, percebo que o foco de alunos e de professores no ingresso em grandes universidades contribui para a supressão da Álgebra Linear nas aulas de Ensino Básico, em especial devido à quase inexistência de seus conteúdos nas provas do ENEM. Nesse sentido, nossa pesquisa busca motivar, questionar e analisar a presença restrita da Álgebra Linear no Ensino Médio, partindo de sua contextualização em relação a outros campos da Matemática. Acreditamos ainda, que a partir da contextualização proposta no Capítulo 4, o estudante perceba quão bela e eficiente é a Álgebra Linear e seus aspectos enquanto facilitadora para o desenvolvimento, em especial da Computação Gráfica, como destacaremos no decorrer do capítulo.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda o estudo de transformações geométricas, bem como a utilização de tecnologia e de calculadoras, como podemos observar nos recortes a seguir:

> Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL, p. 527, 2018)

> Além disso, a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. (BRASIL, p. 528, 2018)

Em contrapartida, o documento ignora conceitos ainda presentes em currículos de alguns Estados brasileiros como os de Matrizes, Determinantes, Transformações Lineares e Sistema de Equações. Com o objetivo de sistematização desta pesquisa, organizamos a dissertação em quatro capítulos, que foram distribuídos de maneira que o leitor possa gradualmente progredir dentro de aspectos matemáticos formais, refletir sobre os rumos do ensino-aprendizagem em seguida aplicar os conhecimentos adquiridos.

No Capítulo 2, apresentamos conceitos centrais de Álgebra Linear que julgamos necessários para uma plena compreensão das aplicações propostas. Iniciamos o capítulo com o estudo de Matrizes, explorando suas operações e propriedades. Prosseguimos com as definições de Determinantes e Vetores, e encerramos com o estudo das Transformações Lineares, dos Autovalores e Autovetores associados a uma Matriz.

No Capítulo 3, propomos reflexões sobre a saída gradual dos conceitos de Álgebra Linear. Pesquisamos os conceitos presentes em cada Estado do Brasil, analisamos a abordagem dos conceitos nos Livros Didáticos e a contribuição do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) para o cenário atual, comparando os conteúdos propostos pelas Universidades Públicas do Rio de Janeiro e o ENEM.

No Capítulo 4, propomos uma integração entre os Números Complexos e a Álgebra Linear, logo após o leitor ter suficiente embasamento teórico matricial. Além desta aplicação, convidamos o leitor a embarcar no mundo matemático da Computação Gráfica. Munidos de conceitos um pouco mais aprofundados de Álgebra Linear e com o auxílio do Geogebra criamos uma pista de corrida, similar à de um jogo dos anos 1990, onde a ideia é deslocar o carrinho no Plano.

2 CONCEITOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Nesta seção, são abordados alguns tópicos de Álgebra Linear, especialmente os conceitos de matrizes, sistemas de equações, vetor, autovalor e autovetor. Esses tópicos são necessários para o entendimento das aplicações e reflexões propostas. Para maiores informações o leitor é convidado a consultar Boldrini e Steinbruch.

2.1 Definição de Matriz

Definição 1: Uma matriz real A, ou simplesmente matriz A de ordem $\mathrm{m \times n}$ é uma tabela com $\mathrm{m.n}$ números reais dispostos em m linhas e n colunas.

Uma definição mais formal pode ser encontrada em Andrade (2016, p.2) - [Estudo de Alguns Invariantes Espectrais]. Segundo o autor, dados dois número naturais $\mathrm{m, n} \geq 1$, uma matriz real $\mathrm{A_{m\,x\,n}}$ é uma aplicação de $\{1, 2, 3, \ldots, \mathrm{m}\} \times \{1, 2, 3, \ldots, \mathrm{n}\}$ em $\mathbb{R}$ cujos os elementos são denotados por $\mathrm{a_{ij}}$, para $\mathrm{i} \in \{1, 2, 3, \ldots, \mathrm{m}\}$ e $\mathrm{j} \in \{1, 2, 3, \ldots, \mathrm{n}\}$. Fixados i e j, $\mathrm{a_{ij}}$é a entrada na interseção da $\mathrm{i} -$ ésima linha com a $\mathrm{j} -$ ésima. Esta matriz é de ordem m x n e é representada por

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{a_{11}} & \mathrm{a_{12}} & \cdots & \mathrm{a_{1n}} \\ \mathrm{a_{21}} & \mathrm{a_{22}} & \cdots & \mathrm{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{a_{m1}} & \mathrm{a_{m2}} & \cdots & \mathrm{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

Ainda é possível entender uma matriz $\mathrm{A_{m\,x\,n}}$ como sendo um conjunto de n-vetores colunas cada um contendo m-entradas, ou m-vetores linhas cada um contendo n-entradas, como veremos na Seção 2.5 . Quando $\mathrm{m = n}$, a matriz A é dita Matriz Quadrada de ordem n. Quando todas as suas entradas são iguais à zero, batizamos de Matriz Nula.

Definimos 2 (Matriz Identidade): Definimos a Matriz Identidade como sendo a matriz quadrada $n\,x\,n$, na qual todas as entradas são nulas, exceto as componentes da diagonal principal a_{ij}, com $i = j$, que são iguais a 1. Representamos a Matriz Identidade por I_n, onde n representa a ordem da matriz. Desta forma:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2 Operações entre Matrizes

Definição 3 (Adição de Matrizes): A adição de duas matrizes só ocorre quando elas possuem a mesma ordem, sendo assim dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\,x\,n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\,x\,n}$. A soma de A com B, indicadas por $A + B$, é a matriz obtida adicionando-se os correspondentes elementos de A e B.

$$A + B = [c_{ij}]_{mxn} \text{ , onde } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Propriedades da Adição de Matrizes:

Antes de enumerarmos as propriedades, gostaríamos de destacar que são de fácil verificação, sendo assim, deixaremos a cargo do leitor. Para uma leitura mais aprofundada sugerimos a consulta a Boldrini e Steinbruch.

i) A adição de matrizes é comutativa e associativa, isto é, se $A, B\ e\ C$ são matrizes de ordem $m\ x\ n$, então:

$A + B = B + A$ *(Comutatividade);*
$(A + B) + C = A + (B + C)$ (*Associatividade*)

ii) Se A for uma matriz qualquer de ordem $m\ x\ n$ e $0_{m\,x\,n}$ for a matriz nula, então:

$A + 0 = 0 + A = A$ *(Elemento Neutro da Adição);*

iii) Se A é uma matriz qualquer $m\ x\ n$, então existe a matriz $-A$, de mesma ordem, tal que:

$A + (-A) = 0$ *(Elemento Simétrico da Adição).*

É importante destacarmos que a operação de subtração, entre as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\,x\,n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\,x\,n}$, indicada por $A - B$, pode ser vista como a adição entre a matriz A e a matriz $-B$, simétrica da matriz e B, ou seja, $A + (-B)$.

Definição 4 (Multiplicação por Escalar): Definimos a multiplicação (ou produto) da matriz $A = [a_{ij}]_{m\,x\,n}$ pelo escalar $c \in \mathbb{R}$, indicado por cA, como sendo a multiplicação de cada entrada da matriz pelo escalar c, ou seja:

$$cA = [ca_{ij}]_{m\,x\,n}.$$

Propriedades da Multiplicação por Escalar:

Para evitarmos quaisquer distorções, é cauteloso destacar que os escalares utilizados neste trabalho pertencem ao Conjunto dos Números Reais.

Se A e B são matrizes de ordem $m\,x\,n$ e c, c_1 e c_2 são escalares, então:

$i)$ $(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$ (*Distributividade*);
$ii)$ $c(A + B) = cA + cB$ (*Distributividade*);
$iii)$ $c_1(c_2A) = (c_1c_2)A$ (*Associatividade*).

Definição 5 (Multiplicação de Matrizes): Se A é uma matriz $m\ x\,p$ e B uma matriz $p\,x\,n$, o produto de A por B é a matriz $C = AB$ de ordem $m\,x\,n$, onde o elemento c_{ij} é obtido pela soma dos produtos dos elementos da $i - ésima$ linha de A pelos elementos correspondentes da $j - ésima$ coluna de B, isto é, $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$, com $i \in \{1,2, \dots, m\}$ e $j \in \{1,2, \dots, n\}$.

Propriedades da Multiplicação de Matrizes:

Se A, B, C e I_n são matrizes $n\,x\,n$. Então,

$i)$ $A(BC) = (AB)C$ (Associatividade);
$ii)$ $A(B + C) = AB + AC$ (Distributividade à esquerda);

$iii)$ $(B + C)A = BA + CA$ (Distributividade à direita);
$iv)$ $AI = IA = A$ (Elemento Neutro da Multiplicação);
$v)$ $(AB)^t = B^t A^t$ (*Distributividade da Transposta*).

2.3 Matriz Transposta

Definição 5(Matriz Transposta): A matriz transposta da matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$, indicada por A^t, é a matriz obtida a partir de A permutando suas linhas por suas colunas, ou seja, escrevendo-se as linhas de A como colunas, isto é:

$$A^t = [a_{ji}]_{nxm}.$$

Propriedades das Matrizes Transpostas:

$i)$ $(A^t)^t = A$;
$ii)$ $(A + B)^t = A^t + B^t$;
$iii)$ $(cA)^t = cA^t$.

2.4 Determinantes

Quando nos referimos ao determinante, isto é, ao número associado a uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, escrevemos $\det A$ ou $det[a_{ij}]$ ou |A|.

Convém ressaltar que as definições desta seção foram retiradas de Boldrini. Além disso, o conceito de determinante no caso geral envolve muitos símbolos, o que dificulta a leitura.

Antes de definirmos determinantes, vamos definir um conceito previamente para que possamos tornar a discussão mais simples e organizada.

Definição 6: Dada a permutação dos inteiros $1, 2, 3, \dots, n$, existe uma *inversão* quando um inteiro precede outro menor que ele.

Como ressaltamos anteriormente, o cálculo de determinante envolve muitos símbolos, para que possamos compreender a *definição 6*, vamos a um exemplo dado pela Tabela 1.

Consideremos as permutações de $1, 2, 3$ e vejamos para cada permutação o número de *inversões.*

Tabela 1: Permutação e Inversão

Permutação	Número de inversões	Entendendo as inversões
(1, 2, 3)	0	Observe que na sequência não há um número maior precedendo um menor.
(1, 3, 2)	1	Observe que o 3 precede o 2, ou seja, uma inversão.
(2, 1, 3)	1	Observe que o 2 precede o 1, ou seja, uma inversão.
(2, 3, 1)	2	Observe que o 2 precede o 1, e o 3 precede o 1, ou seja, duas inversões.
(3, 1, 2)	2	Observe que o 3 precede o 1 e o 2, ou seja, duas inversões.
(3, 2, 1)	3	Observe que o 3 precede o 2 e o 1. Além disso, o 2 precede o 1. Gerando três inversões.

Fonte: O autor, 2021

Definição 7 (Determinante): Seja a matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n. Definimos

$$\det[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

onde $J = J(j_1, j_2, \dots, j_n)$ é o número de *inversões* da permutação $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ e ρ indica que a soma é estendida a todas as $n!$ Permutações de $(1\ 2 \dots n)$.

Vejamos o exemplo para $n = 3$,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Observe que aparecem todos os produtos $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, onde $(j_1\ j_2\ j_3)$ são as permutações de $1, 2$ e 3 e $\rho = 3! = 6$ parcelas.

Como a linguagem dos determinantes é muito técnica, vejamos alguns exemplos numéricos:

a) $det\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^0.2.2 + (-1)^1.5.(-3) = 4 + 15 = 19$

b)

$$det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^0.1.1.2 + (-1)^1.1.0.1 + (-1)^1.0.3.2 + (-1)^2.0.0.1 + (-1)^2.2.3.1 + (-1)^1.2.1.1 = 6$$

Algumas propriedades especiais acerca de *Determinantes.*

Não pretendemos com o presente trabalho provar todas as propriedades enunciadas abaixo, caso o leitor deseje aprofundar-se no assunto, indicamos as seguintes bibliografias Boldrini e Steinbruch.

$i)$ Os determinantes da matriz A e sua transposta A^t são iguais, ou seja, $\det A = detA^t$;

$ii)$ Se B é a matriz obtida de A permutando-se duas linhas de A, então $detB = -detA$;

$iii)$ Se B é a matriz obtida de A multiplicando-se uma linha de A por um escalar c, então $detB = c.detA$;

$iv)$ Se A tem uma linha nula, então $\det A = 0$;

$v)$ Se duas linhas de A são idênticas, então $\det A = 0$;

$vi)$ Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então $\det AB = \det A \,.\det B$;

$vii)$ Se A^{-1} é uma inversa da matriz A, então $\det A^{-1} = \frac{1}{detA}$.

2.5 Matrizes e Vetores

Como já antecipamos no início deste capítulo, podemos pensar uma matriz a partir de um conjunto de vetores. De acordo com Chagas, o estudo de vetores mostra-se relevante para um melhor aproveitamento no estudo da Álgebra Linear do Ensino Médio tornando mais significativo o estudo de conceitos como o de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares. A seguir definimos vetor e aprofundaremos esta relação entre as matrizes e os vetores.

Definição 8 (Vetor): Uma solução de um sistema de m equações lineares e n incógnitas é uma $n - upla$ de números reais. Definimos uma $n - upla$ de números reais como um vetor. Se uma $n - upla$ é representada como uma matriz $1\ x\ n$, nos referimos como um *vetor linha*. Se em vez disso, a $n - upla$ é representada por uma matriz $n\ x\ 1$, diremos que é um *vetor coluna*, bem como define Leon (2011).

Já que estaremos trabalhando quase exclusivamente com vetores colunas, vamos omitir a palavra coluna, e vamos nos referir simplesmente a vetor, subentendendo uma matriz coluna.

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ ou } \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

É de bom tom salientar que utilizaremos a definição acima, pois o enfoque do trabalho é sobre aspectos da Álgebra Linear e não Geometria Analítica. Para o leitor se aprofundar em vetores sugerimos as bibliografias: Delgado e Steinbruch.

Definição 9 (Delgado, 2017) : A norma ou comprimento de um vetor $\vec{v}$ é o número $\|\vec{v}\|$ dado pelo comprimento de um segmento representante de $\vec{v}$.

Quando $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é dado por

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2.6 Matrizes Invertíveis

Definição 10: Seja A uma matriz de ordem n. Se for possível encontrar uma matriz B de mesma ordem, tal que $BA = AB = I_n$, então dizemos que A é *invertível* e B é uma inversa de A. Caso contrário, dizemos que a matriz A é *não invertível* ou *singular*.

Quando B é a inversa de A escrevemos $B = A^{-1}$.

Proposição 1: Sejam A e B matrizes invertíveis de mesma ordem, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração:

Basta verificar que $B^{-1}A^{-1}(AB) = (AB)B^{-1}A^{-1} = I_n$.

2.7 Equações Matriciais

Definição 11: Sejam A e B matrizes ondem n. A equação

$$A.X = B$$

é uma *Equação Matricial*, sendo X uma matriz quadrada de ordem n.

Quando A é invertível, é natural observar que se multiplicarmos à esquerda ambos os lados da Equação Matricial $A.X = B$ por A^{-1} (matriz inversa de A), teremos a solução $X = A^{-1}B$.

2.8 Sistema de Equações Lineares

Definição 12 (Equação Linear): Chama-se *equação linear* toda equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_1,$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b_1 são números reais e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são incógnitas.

Definição 13 (Sistema Linear, Leon, 2011, p.1): Um sistema linear de m equações e n incógnitas é um sistema da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Evocando o produto de matrizes é possível escrever o Sistema Linear acima de modo matricial, como segue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Um conceito muito útil no âmbito dos sistemas lineares são as classificações das equações lineares, como segue:

- Quando $b_i = 0$, com $i \in \mathbb{N}$,a equação linear é dita *homogênea*.
- Quando $b_i \neq 0$, com $i \in \mathbb{N}$, a equação é dita *não homogênea*.

Neste momento, apresentaremos alguns exemplos para que as definições 11 e 12 soem mais naturais.

Exemplos:

a) $2x + 3y - 5z = 2$, é uma equação linear.

b) $4x - 3y^2 + z = 4$, não é uma equação linear, pois y é do 2º grau.

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$, onde pode ser escrito na *forma matricial* $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, tal sistema tem como solução $x = 2$ e $y = 0$.

d) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$, onde pode ser escrito na *forma matricial* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, tal sistema tem como solução $x = 1, y = 2$ e $z = 3$.

Convém observar que os Sistemas Lineares podem ser classificados a partir do seu conjunto solução, como segue:

i) Sistema Possível e Determinado (SPD): Tem solução única;

ii) Sistema Possível e Indeterminado (SPI): Tem infinitas soluções;

iii) Sistema Impossível (SI): Não tem solução.

2.9 Transformações Lineares

Antes de definir *Transformação Linear*, é de bom senso definir *Espaços Vetoriais*, como segue.

Definição 14 (Espaço Vetorial): Um *espaço vetorial real* é um conjunto V, não vazio, com duas operações: adição, $V \, x \, V \xrightarrow{+} V$, a multiplicação por escalar, $\mathbb{R} \, x \, V \xrightarrow{\bullet} V$, tais que para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, os axiomas abaixo são satisfeitos:

a) Em relação à adição:

i) $(\vec{u} + \vec{v}\,) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;

ii) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

$iii)\ Existe\ \vec{0} \in V\ tal\ que\ \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ é chamado vetor nulo);

$iv)\ Existe - \vec{u} \in V\ tal\ que\ u + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

b) Em relação à *multiplicação por escalar*:

$v)\ a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$;

$vi)\ (a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$;

$vii)\ (ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$;

$viii)\ 1\vec{u} = \vec{u}$.

Convém observar que os elementos do E*spaço Vetorial* V são chamados de vetores, independente de sua natureza. Pode parecer estranho, o fato de se chamar de vetores os polinômios, (quando V for constituído de polinômios), as matrizes (quando V for constituído de matrizes), os números (quando V for constituído for um conjunto numérico), e assim por diante. Podemos fazer isso, pois esses elementos de natureza tão distinta se comportam de forma idêntica nas operações de adição e multiplicação de escalar, como se estivéssemos trabalhando com os próprios vetores do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Além disso, se tivéssemos tomado para escalares o conjunto $\mathbb{C}$ dos Números Complexos, V seria um espaço vetorial complexo, assim como destaca Paliga (2012, p.6).

Definição 15 (Transformação Linear): Sejam V e W dois *espaços vetoriais*. Uma Transformação Linear é uma aplicação de V em W, $T: V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:

$i)$ Quaisquer que sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em V,

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v});$$

$ii)$ Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$, e $\vec{u} \in V$,

$$T(k\vec{u}) = kT(\vec{u}).$$

Tais condições são necessárias e suficientes. Entretanto, convém observar que substituindo $k = 0$ em $ii)$ obtemos $T(\vec{0}) = \vec{0}$. Isto nos diz que toda T*ransformação Linear* $T: V \to W$ leva o vetor nulo de V no vetor nulo de W.

Para que o leitor tenha melhor construção dos conhecimentos propostos pela Definição 14, deixamos alguns exemplos a seguir:

a) Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T\big((x, y)\big) = (2x, 0, x + y)$

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, onde $x_i, y_i, k \in \mathbb{R}$. Daí,

Condição 1:

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = T\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big) =$$
$$\big(2(x_1 + x_2), 0, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\big) =$$
$$(2x_1 + 2x_2, 0, x_1 + y_1 + x_2 + y_2) =$$
$$(2x_1, 0, x_1 + y_1) + (2x_2, 0, x_2 + y_2) =$$
$$T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

Portanto, a primeira condição está satisfeita.

Condição 2:

$$T(k\vec{u}) = T$$
$$(2kx_1, 0, kx_1 + ky_1) =$$
$$k(2x_1, 0, x_1 + y_1)$$
$$kT(\vec{u})$$

Como a segunda condição foi satisfeita, temos que T é uma transformação linear.

b) Não são transformações lineares:

$i)$ $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = cos(x), \forall x \in R$, pois $cos(x + y) \neq cos(x) + cos(y)$, em geral, apesar de $T(0) = 0$.

$ii)$ $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\big((x, y)\big) = (x + 1, y + 3)$, pois $T\big((0,0)\big) = (1,3) \neq (0,0)$.

Gostaríamos de ressaltar que toda matriz $m\,x\,n$ está associada à *Transformação Linear* de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Com efeito, seja A uma matriz $m\,x\,n$, Definimos $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, por $T_A(\vec{u}) = A.\vec{u}$, onde $\vec{u}$ é o vetor coluna, $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,ou seja, $T_A(\vec{u}) = [A]_{mxn}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$.

Das propriedades de operações de matrizes, segue que:
$T_A(\vec{u} + \vec{v}) = A.(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = T_A(\vec{u}) + T_A(\vec{v})$ e $T_A(k\vec{u}) = A(k\vec{u}) = k(A\vec{u}) = kT_A(\vec{u})$, portanto T_A é uma transformação linear.

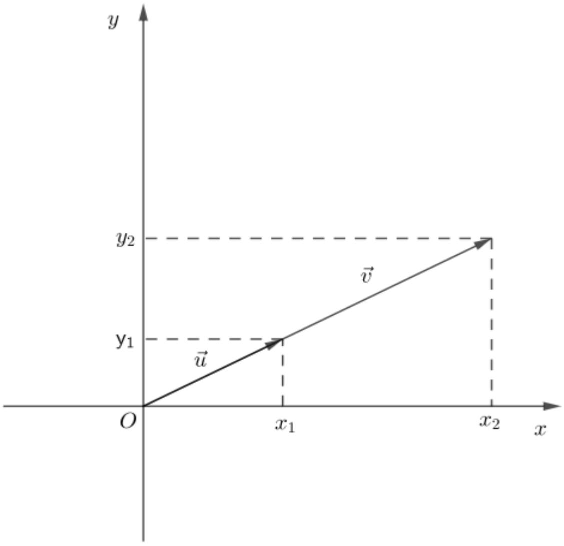
2.9.1 Transformações do Plano no Plano

i) Expansão, contração e identidade uniforme

A transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $T\big((x,y)\big) = \alpha(x,y)$ é denominada *expansão*, *contração* ou *identidade*

- Quando $\alpha > 1$, T é uma expansão;
- Quando $\alpha = 1$, T é identidade;
- Quando $0 < \alpha < 1$, T é uma contração.

Figura 1: Expansão Uniforme do vetor $\vec{u}$, onde $\vec{v} = \alpha\vec{u}$, $\alpha > 1$.



Fonte: O autor, 2020

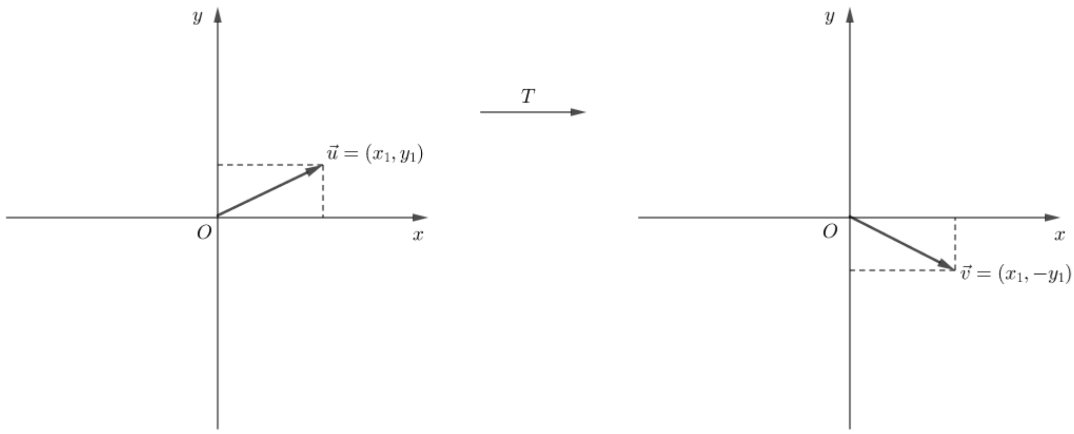
Podemos reescrever a expansão, contração ou identidade de maneira vetorial, da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

ii) Reflexão em Torno do Eixo x

A transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $T\big((x,y)\big) = (x,-y)$ é denominada *reflexão em torno do eixo x*.

Figura 2: Reflexão do vetor $\vec{u}$ em Torno do Eixo x



Fonte: O autor, 2020

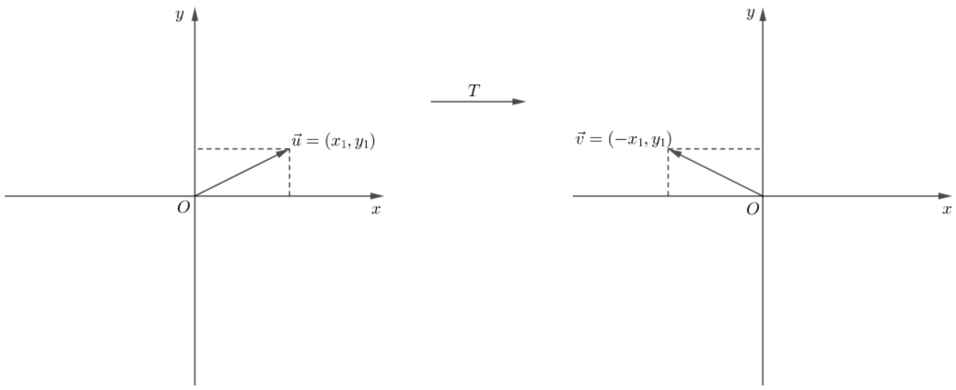
Podemos reescrever a *reflexão em torno do eixo x* de maneira vetorial, da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

iii) Reflexão em Torno do Eixo y

A transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $T\big((x,y)\big) = (-x,y)$, é denominada *reflexão em torno do eixo y*.

Figura 3: Reflexão do vetor $\vec{u}$ em Torno do Eixo y



Fonte: O autor, 2020

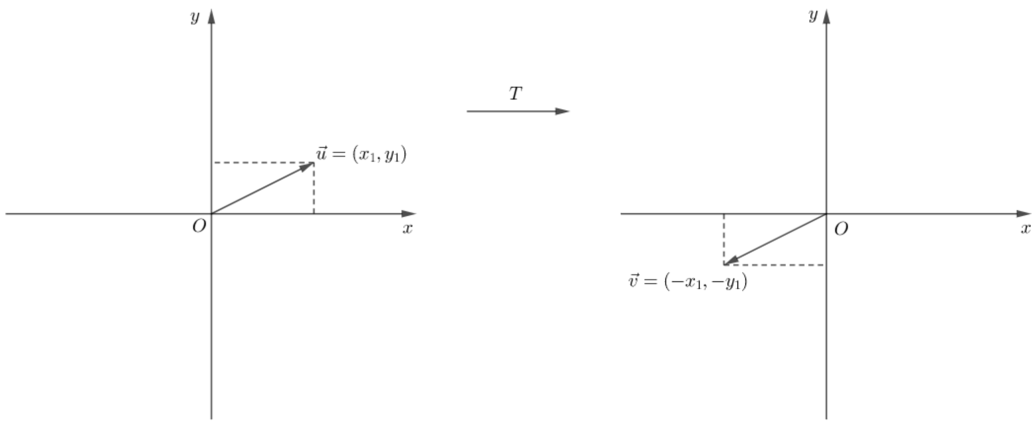
Podemos reescrever a *reflexão em torno do eixo y* de maneira vetorial, deste modo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

iv) Reflexão em Torno da Origem

A transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $T\big((x, y)\big) = (-x, -y)$ é denominada *reflexão em torno da origem*.

Figura 4: Reflexão do vetor $\vec{u}$ em Torno da Origem



Fonte: O autor, 2020

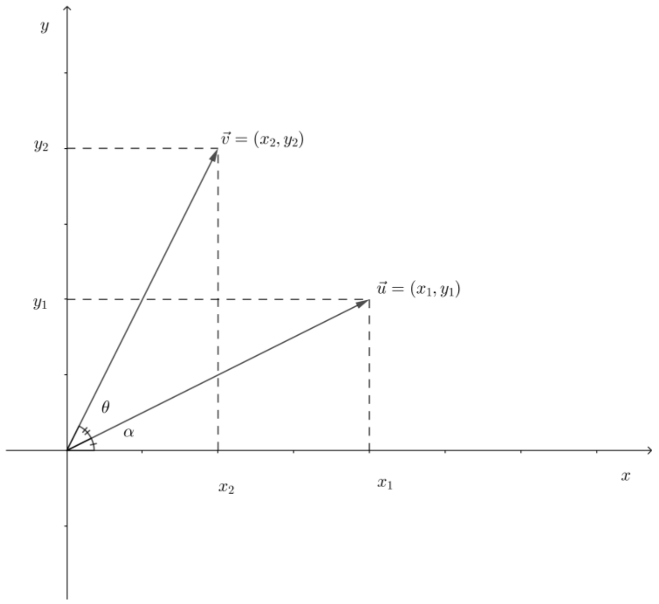
Podemos reescrever a *reflexão em torno da origem* de maneira vetorial, deste modo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

v) Rotação de um Ângulo θ no sentido anti-horário

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, tais que $\vec{v} = R_\theta(\vec{u})$, onde R_θ entende-se como a *transformação* via *rotação do vetor $\vec{u}$, θ graus no plano.*

Figura 5: Rotação do vetor $\vec{u}$ em θ graus



Fonte: O autor, 2020

Observe que, $y_2 = |\vec{v}|sen(\alpha + \theta) = |\vec{v}|.(sen\ \alpha\ .\cos\theta + sen\ \theta.\cos\alpha)$.

Mas, $x_1 = |\vec{u}|cos\ \alpha$ e $y_1 = |\vec{u}|sen\ \alpha$. Além disso, $|\vec{v}| = |\vec{u}|$.

Segue que, $y_2 = x_1\ sen\ \theta + y_1 \cos\theta$.

Analogamente,

$x_2 = |\vec{v}|\cos(\alpha + \theta) = |\vec{v}|.(\cos\theta\ .\cos\alpha - sen\ \theta.sen\ \alpha) = x_1 \cos\theta - y_1 sen\ \theta$.

Portanto, $R_\theta(\vec{u}) = (x_1 \cos\theta - y_1 sen\ \theta\ , x_1\ sen\ \theta + y_1 \cos\theta)$.

Podemos reescrever a *rotação* do vetor $\vec{u}$ em θ graus de maneira vetorial, como segue:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \cos\theta - y_1 sen\ \theta \\ x_1\ sen\ \theta + y_1 \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\ \theta \\ sen\ \theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Gostaríamos de ressaltar que a Matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é Matriz de rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário.

Nossa proposta com todos esses cálculos é a construção do passo a passo para que se chegue na matriz de rotação, possibilitando ao leitor o entendimento do processo de rotação. Para que o leitor construa de maneira mais agradável o conhecimento, a seguir vamos expor um exemplo.

Exemplo:

Consideremos um vetor qualquer do plano, desejamos rotacioná-lo $30°$.

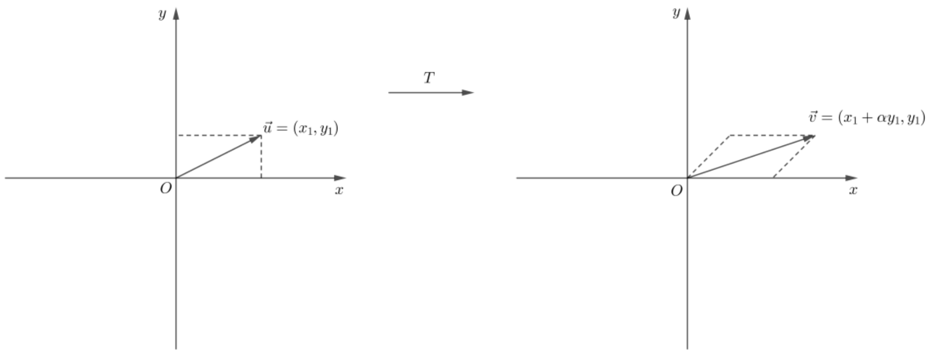
Neste caso, $\theta = 30°$. Com isso, $\cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen\ 30° = \frac{1}{2}$.

Sendo assim, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$.

$vi)$ *Cisalhamento Horizontal*

A transformação $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $T\big((x,y)\big) = (x + \alpha y, y), \alpha \in \mathbb{R}$ é denominada cisalhamento horizontal.

Figura 6: Cisalhamento na direção ao eixo x



Fonte: O autor, 2020

Podemos reescrever o *cisalhamento horizontal* de maneira vetorial, desta forma:

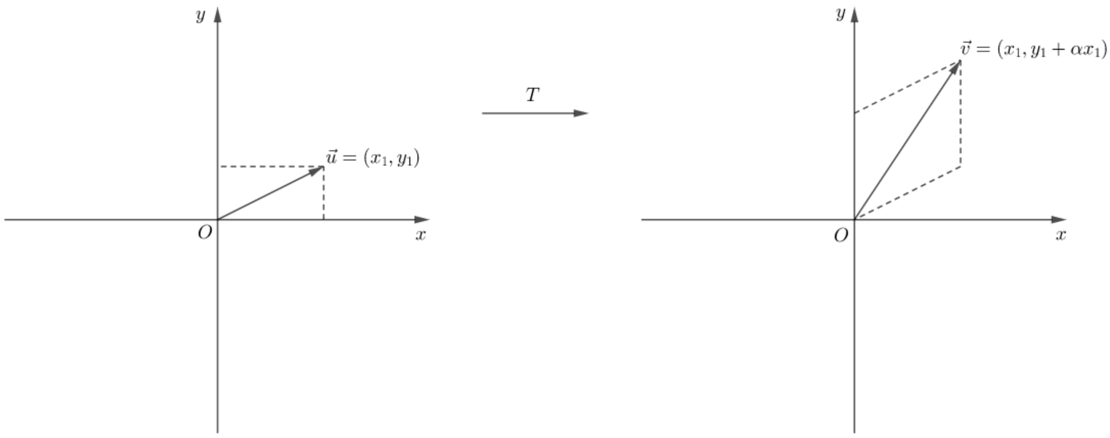
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ y \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Um ponto que gostaríamos que observado pelo leitor, que dificilmente encontramos de maneira direta em livros ou artigos, é que geometricamente falando, a transformação de cisalhamento provoca uma *rotação* e em seguida uma *expansão* no vetor.

vii) *Cisalhamento Vertical*

A transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $T\big((x,y)\big) = (x, y + \alpha x), \alpha \in \mathbb{R}$ é denominada cisalhamento vertical.

Figura 7: Cisalhamento na direção ao vetor y



Fonte: O autor, 2020

Podemos reescrever o *cisalhamento vertical* de maneira vetorial, desta forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y + \alpha x \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

De forma similar, um ponto que gostaríamos fosse observado pelo leitor, que dificilmente encontramos de maneira direta em livros ou artigos, é que geometricamente falando a transformação de cisalhamento provoca uma *rotação* e em seguida uma *expansão* no vetor.

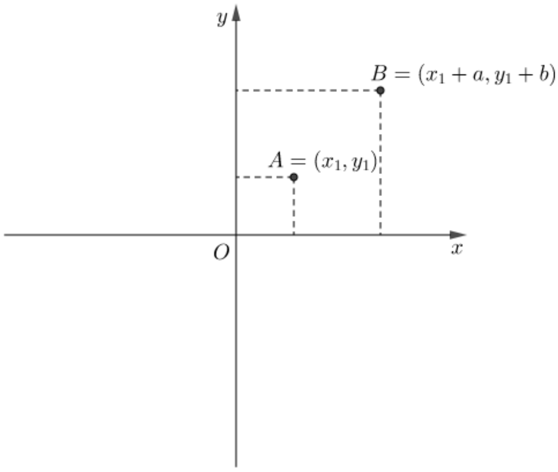
$viii$) *Translação*

A transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $T\big((x,y)\big) = (x + a, y + b)$ é denominada *translação*. Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

É de bom tom observarmos que quando $a = b = 0$, T como descrita acima não é uma transformação linear.

Figura 8:Translação do ponto A



Fonte: O autor, 2020

2.10 Autovalores e Autovetores Associados à Matrizes

O objetivo desta seção é estabelecer a importância dos determinantes no contexto da própria Álgebra Linear.

Definição 16 (Leon, 2011, p.265): Seja A uma matriz $n\ x\ n$. Um escalar λ é dito *autovalor* ou um *valor característico* de A quando existe um vetor não nulo x tal que $Ax = \lambda x$. O vetor x é dito *autovetor* ou *vetor característico associado* a λ.

Para determinarmos os autovalores associados à matriz A, escrevemos $Ax = \lambda Ix$. Em outras palavras,

$$Ax - \lambda Ix = (A - \lambda I_n)x = 0.$$

Para λ ser autovalor de A a equação acima precisa ser solúvel e não trivial, isto é, deve possuir solução e esta deve ser distinta da solução nula. Uma condição necessária e suficiente para que isso ocorra é de que

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Ainda segundo Leon (2011), podemos caracterizar a equação acima como um *polinômio característico* ou *equação característica*.

Para que possamos auxiliar o leitor na construção do conhecimento, expomos a seguir um exemplo.

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, determinar o autovalor associado à matriz A.

Como o autovalor associado a matriz A é determinado por $\det(A - \lambda I_2) = 0$, então

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 = 0$$
$$= \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Portanto, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$.

Então os autovalores da matriz A são 1 e -2.

Vamos determinar agora os autovetores associados à matriz A.

- Para $\lambda = 1$, temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ daí } \begin{bmatrix} -3x + 4y \\ -x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ então } \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}.$$

Segue que x = y.

Portanto os autovetores associados à matriz A, para $\lambda = 1$, são $\vec{v} = (x, x), x \neq 0$.

- Para $\lambda = -2$, temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ daí } \begin{bmatrix} -3x + 4y \\ -x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix}, \text{ então } \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}.$$

Segue que $y = \frac{1}{4}x$.

Portanto os autovetores associados à matriz A, para $\lambda = 2$, são $\vec{v} = \left(x, \frac{1}{4}x\right), x \neq 0$.

3 REFLEXÕES SOBRE A ÁLGEBRA LINEAR DO ENSINO BÁSICO

Este Capítulo foi dividido em três seções. Na Seção 3.1 investigamos a presença e as distorções entre os currículos de Ensino Básico dos estados brasileiros quanto ao tema Álgebra Linear. Na Seção 3.2, baseado na Tese de Doutorado de Barbosa (2014) nos propomos a uma analise das atualizações dos Livros Didáticos investigados por ela. Enquanto na Seção 3.3 comparamos as ementa dos vestibulares próprios das Universidades do Rio de Janeiro com a matriz de referência do ENEM e levantamos questionamentos a respeito da saída paulatina da Álgebra Linear na Educação Básica. Ressaltamos que as respostas a estes questionamentos não são tão relevantes quanto às reflexões levantadas por elas. Acreditamos que toda a comunidade preocupada com o rumo da Educação, em particular os educadores nas figuras dos docentes, deveriam pelo menos uma vez se perguntarem que direção está convergindo o Currículo da Matemática na Educação Básica no Brasil.

3.1 Os Currículos

Inicialmente fizemos um levantamento dos currículos de Matemática do Ensino Básico referentes à Álgebra Linear, porém nem todos estão disponíveis para consulta ou conseguimos encontrar na internet, o que consideramos uma falta grave, tendo em vista que tais documentos deveriam obrigatoriamente estar nos sites das Secretarias de Educação de cada estado para a consulta de toda a população.

Procurando dinamizar a leitura construímos a Tabela 2 em que apresentamos o nome do Estado consultado, a Sigla, o ano do Currículo (caso tenhamos encontrado) e quais conteúdos de Álgebra Linear contemplados.

Tabela 2: A presença da Álgebra Linear nos currículos do Ensino Médio nos Estados brasileiros

Estado	Sigla	Ano	Conteúdo de Álgebra Linear Proposto
Acre	AC	Indisponível	-
Alagoas	AL	Indisponível	-
Amapá	AP	Indisponível	-
Amazonas	AM	2012	• Aplicar o produto de matrizes para resolver situações problema; • Calcular o determinante de uma matriz

			quadrada de ordem 2 e 3; • Construir um sistema de equações a partir de uma situação-problema; • Utilizar diferentes métodos de resolução de sistemas.
Bahia	BA	2015	• Operacionalizar matrizes enquanto sistema que apresenta algumas propriedades do sistema dos números reais; • Desenvolver a compreensão das propriedades de adição e multiplicação de matrizes e suas representações; • Resolver sistemas lineares, associando-os a equações matriciais, utilizando o cálculo de determinantes no processo de discussão da solução dos mesmos.
Ceará	CE	2009	• Conceito de Matriz: Tipos de Matrizes; • Determinante de Matrizes de 1ª e 2ª Ordem; • Teorema de Laplace; • Regra de Sarrus; • Solução de um Sistema Linear.
Distrito Federal	DF	Indisponível	-
Espírito Santo	ES	2009	• Noções de matrizes: conceitos e representações; • Resolução de sistemas de equações do primeiro grau.
Goiás	GO	2012	• Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes; • Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes; • Reconhecer matrizes especiais; • Determinar a inversa de uma matriz; • Resolver problemas utilizando as operações com matrizes e a linguagem matricial; • Calcular o determinante de matrizes de ordem 2 ou 3; • Aplicar a Regra de Sarrus e o Teorema de Laplace; • Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações problemas para a linguagem matemática; • Distinguir sistemas lineares e associá-los a matrizes; • Determinar a solução de um sistema linear associando-o à uma matriz; • Resolver sistemas lineares e classificá-los.
Maranhão	MA	2017	• Representar genericamente uma matriz; • Construir uma matriz a partir da lei de formação; • Reconhecer os tipos de matrizes e seus elementos;

			• Adicionar, subtrair e multiplicar matrizes; • Calcular determinantes de ordens 2 e 3; • Reconhecer uma equação linear; • Classificar um sistema linear como possível ou impossível; • Determinar soluções de um sistema linear.
Mato Grosso	MT	Indisponível	-
Mato Grosso do Sul	MS	2012	• Representar genericamente uma matriz; • Matrizes especiais; • Operações com matrizes; • Matriz Inversa; • Determinante de uma matriz; • Teorema de Laplace e propriedades dos determinantes; • Resolução de sistemas por escalonamento; • Regra de Cramer; • Discussão de um sistema.
Minas Gerais	MG	-	Estão realizando uma consulta pública para um novo currículo de referência: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/ens-medio/consulta-publica Não localizamos currículo antigo.
Pará	PA	-	Não foi possível localizar nos sites de pesquisas e tampouco no site da secretaria de educação http://intranet.seduc.pa.gov.br/loginIntranet/index.php.
Paraíba	PB	Indisponível	-
Paraná	PR	Indisponível	-
Pernambuco	PE	2012	• Dominar a resolução matricial, cálculo do determinante e de sistemas de equações lineares e de discussão dos resultados encontrados. Identificar os diversos tipos de matrizes, associados a conjuntos de informações veiculadas no dia-a-dia e efetuar operações entre elas, compreendendo o significado dos resultados obtidos; • Calcular o valor do determinante de uma matriz de ordem n > 1; • Apresentar a solução de um sistema de equações lineares, utilizando a Regra de Cramer e/ou o método de escalonamento; • Classificar e discutir sistemas de equações lineares.
Piauí	PI	2013	NÃO HÁ NADA SOBRE ÁLGEBRA LINEAR.
Rio de Janeiro	RJ	2012	• Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes; • Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes; • Resolver problemas utilizando as operações

			com matrizes e a linguagem matricial; • Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3.
Rio Grande do Norte	RN	Indisponível	-
Rio Grande do Sul	RS	Indisponível	-
Rondônia	RO	2013	• Definir e operar com matrizes; • Aprender a resolução pelo método de escalonamento da matriz do sistema, mostrando que é o processo utilizado na resolução de sistemas nos computadores; • Entender que os sistemas de determinantes e da Regra de Cramer são utilizados apenas de forma teórica, na Geometria Analítica; • Comparar operações algébricas definidas como matrizes com aquelas com números reais; • Compreender que a notação matricial surge em outros campos de aplicações; • Entender determinante de matriz quadrada, que será retomado na Geometria Analítica.
Roraima	RR	Indisponível	-
Santa Catarina	SC	Indisponível	-
São Paulo	SP	2011	• Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas no plano; • Saber expressar, por meio de matrizes, situações relativas a fenômenos físicos ou geométricos (imagens digitais, pixels etc.); • Saber resolver e discutir sistemas de equações lineares pelo método de escalonamento de matrizes; • Reconhecer situações-problema que envolvam sistemas de equações lineares (até a 4a - ordem), sabendo equacioná-los e resolvê-los.
Sergipe	SE	Indisponível	-
Tocantins	TO	Indisponível	-

Fonte: O autor, 2020

Apesar de a Álgebra Linear estar presente na grande maioria dos currículos é possível observar distorções entre eles, de quais conteúdos devem ser ensinados ou não. Cabendo aqui uma crítica à demora na implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Segundo o Ministério da Educação (MEC), em 1996, foi aprovada a regulamentação de uma base nacional comum para a Educação, mas só em 2015, tivemos a primeira versão da BNCC, e hoje estamos na terceira versão do texto e não há de fato a utilização nos currículos estaduais. Ao olharmos para o ano dos documentos disponíveis, fica evidente que algumas

Federações brasileiras ainda não utilizam a BNCC como norteador, apesar de "aprovada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que em seu Artigo 26, regulamenta uma base nacional comum para a Educação Básica. (Brasil, 2015).

A Álgebra Linear juntamente com o Cálculo I (Cálculo Diferencial e Integral) são as disciplinas que mais reprovam na graduação como já destacou Celestino, em 2000, p.13:

> [...] além de permitir estabelecer conexões entre diferentes ramos, a Álgebra Linear também introduz uma linguagem e um raciocínio abstrato com os quais os alunos que a estudam pela primeira vez não estão acostumados a lidar. Por essas razões, a Álgebra Linear é disciplina com altos índices de reprovação.

Trouxemos ainda um levantamento feito pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) sobre as disciplinas que mais reprovaram na universidade no período de 2014 a 2017, há no documento a presença maciça da Álgebra Linear nos cursos de graduação. A análise dos dados sobre as disciplinas nos cursos de Engenharia de Produção e Licenciatura em Matemática sugerem que a Álgebra Linear é uma disciplina com alto índice de reprovação, como mostrado nas Figuras 31 e 32. Além dos dados da UFPE, a seguir apresentados, vamos destacar uma passagem do trabalho realizado por Furtado (2010, p. 2): "Observando os resultados negativos dos cursos de Álgebra Linear II na Universidade Federal do Rio de Janeiro, da qual sou aluna do Mestrado de Ensino em Matemática, e da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, da qual fui professora substituta em 2008 ministrando esta disciplina.". Uma afirmação que nos sugere uma semelhança entre os resultados de Álgebra Linear nas universidades em geral.

Figura 9: Disciplinas que mais reprovam no curso de Engenharia de Produção - UFPE

UFPE
PROPLAN

CENTRO CURSO
CTG ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Disciplinas que mais reprovam no período 2014.1 à 2017.2
(Ponto de Corte em pelo menos um subconjuntos de semestres maior que 40 % de reprovados)

Disciplina	Período 2014.1 a 2015.2					Período 2016.1 a 2017.2				
	Aprov	Reprov	R. Falta	NI	n	Aprov	Reprov	R. Falta	NI	n
ALGEBRA LINEAR 1	73,56	21,84	4,60	-	174	59,26	28,40	12,35	-	81
CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1	77,32	14,43	8,25	-	194	50,52	29,90	19,59	-	97
CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 3	76,40	17,42	6,18	-	178	53,33	35,56	11,11	-	90
COMPUTACAO ELETRONICA	62,37	22,58	15,05	-	186	56,03	21,55	22,41	-	116
ELETROTECNICA GERAL 1A	87,85	1,87	10,28	-	107	50,62	8,64	40,74	-	81
FISICA GERAL 1	75,53	13,83	10,64	-	188	49,53	34,58	15,89	-	107
GEOMETRIA ANALITICA 1	74,00	16,00	10,00	-	200	50,53	24,21	24,21	1,05	95
MECÂNICA DOS FLUIDOS 2	-	-	-	-	-	58,51	26,60	14,89	-	94
QUIMICA GERAL 1	69,57	19,57	10,87	-	184	57,14	16,67	26,19	-	84

Aprov= % de Aprovados; Reprov=%Reprovado por nota; R.Falta = %Reprovado por fata; NI=% de disciplinas não informadas a situação final; n= número de alunos matriculados no período

Fonte: UFPE[3]

Figura 10: Disciplinas que mais reprovam no curso de Licenciatura em Matemática - UFPE

UFPE
PROPLAN

CENTRO CURSO
CCEN MATEMÁTICA - LICENCIATURA

Disciplinas que mais reprovam no período 2014.1 à 2017.2
(Ponto de Corte em pelo menos um subconjuntos de semestres maior que 50 % de reprovados)

Disciplina	Período 2014.1 a 2015.2					Período 2016.1 a 2017.2				
	Aprov	Reprov	R. Falta	NI	n	Aprov	Reprov	R. Falta	NI	n
ALGEBRA LINEAR 1	-	-	100,00	-	2	18,18	-	81,82	-	11
ALGEBRA LINEAR L1	42,11	25,00	32,89	-	76	25,97	37,66	36,36	-	77
CALCULO L1A	50,55	19,78	29,67	-	91	41,30	17,39	41,30	-	46
CALCULO L2A	44,44	18,52	37,04	-	54	49,30	16,90	33,80	-	71
CALCULO L3A	40,91	9,09	50,00	-	22	40,85	16,90	42,25	-	71
COMPUTACAO L	82,43	-	17,57	-	74	29,27	7,32	59,76	3,66	82
ESTAGIO SUPERVISIONADO	30,00	20,00	50,00	-	10	100,00	-	-	-	1
ESTRUTURAS ALGEBRICAS L1A	36,96	6,52	56,52	-	46	81,13	5,66	13,21	-	53
ESTRUTURAS ALGEBRICAS L2A	31,03	17,24	51,72	-	29	93,18	4,55	2,27	-	44
FISICA L1	36,21	22,41	40,52	0,86	116	42,34	5,41	52,25	-	111
FISICA L2	50,00	26,92	21,79	1,28	78	42,17	22,89	34,94	-	83
FUNDAMENTOS DA MATEMATICA	41,30	36,96	21,74	-	46	67,69	9,23	23,08	-	65
GEOMETRIA ANALITICA L1	33,78	22,97	43,24	-	148	33,93	13,39	52,68	-	112
GEOMETRIA PLANA	35,44	37,97	26,58	-	79	55,93	27,12	16,95	-	59
GEOMETRIA PLANA L	40,63	46,88	12,50	-	32	-	-	-	-	-
MATEMATICA L1A	40,00	24,17	35,83	-	120	25,17	23,78	51,05	-	143
MONOGRAFIA	37,31	-	62,69	-	67	58,82	-	38,24	2,94	34
PRINCÍPIOS DE CONTAGEM	33,33	41,67	25,00	-	96	50,40	5,60	44,00	-	125

Aprov= % de Aprovados; Reprov=%Reprovado por nota; R.Falta = %Reprovado por fata; NI=% de disciplinas não informadas a situação final; n= número de alunos matriculados no período

Fonte: UFPE

3 https://www.ufpe.br/documents/38954/1317627/Relat%C3%B3rio+Disciplinas+que+mais+reprovam+2014+a+2017.pdf/f1ba5ea6-dbdb-4edd-b5e7-9b993f0ee838

Em 2000, Celestino já destacava o alto índice de reprovação na disciplina de Álgebra Linear. Ainda hoje, mais de 20 anos depois, nos parece que a Álgebra Linear ainda é uma disciplina com altos índices de reprovação. Neste momento, permite o seguinte questionamento: Por que estamos fazendo esse paralelo com os resultados nas universidades? Procedemos assim, porque as ementas das Disciplinas de Álgebra Linear trazem como objetos de estudo, em sua esmagadora maioria, os conceitos de Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares e Transformações Lineares.

Acreditamos que estes conceitos deveriam ter sido fundamentados na Educação Básica, já que grande parte deles são contemplados pelos antigos e atuais currículos de Ensino.

3.2 Os Livros Didáticos

Os livros didáticos há muito tempo, fazem parte do cotidiano escolar. Em um passado não muito distante foi considerado o currículo a ser seguido antes das federações brasileiras produzirem os seus. Entendemos o livro didático como uma importante ferramenta didática de apoio as práticas educativas. O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) tem como objetivos básicos a aquisição e distribuição gratuita de Livros Didáticos para os alunos da Educação Básica das escolas públicas do país, como destaca o Ministério da Educação e Cultura.

> O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público. (BRASIL, 2017, não paginado)

Salientamos que nosso objeto de estudo está estritamente relacionado ao ensino de Matrizes, sendo assim não faremos uma análise dos livros selecionados na íntegra, e sim do capítulo que aborda o assunto em questão. Vale ressaltar também que não tivemos a pretensão de esgotar todas as obras aprovadas pelo PNLD, as obras selecionadas são inspiradas na Tese de Doutorado de Barbosa (2014). Em seu trabalho Barbosa (2014) nos convida a uma conversa com os Livros Didáticos, resolvemos então, analisar a atualização das obras por ela sugerida, levando em consideração os questionamentos por Barbosa (2014) levantados, além da importância de praticar exercícios aos moldes do ENEM, tendo em vista a importância deste exame na Educação Básica.

As obras analisadas estão dispostas na Tabela 3:

Tabela 3: Livros Didáticos

Coleção	Título	Autor (res)	Ano	Editora
I	Matemática: Contexto e Aplicações	Luiz Roberto Dante	2016	Ática
II	Matemática	Paiva	2015	Moderna
III	Matemática: Ciência e Aplicações	Gelson Iezzi et al.	2016	Saraiva

Fonte: O autor

Barbosa (2014, p. 67) analisa as obras de acordo com as seguintes questões:

> 1. Como é feita a apresentação de matrizes, suas operações e propriedades?
> 2. Como os conhecimentos sobre matrizes são apresentados em outros capítulos?
> 3. São propostas atividades que fazem conexão com a geometria, em particular com as Transformações no Plano?

As respostas destas questões estão dispostas nas Tabelas 4, 5 e 6.

Tabela 4: Resposta da Pergunta 1

Coleção	Pergunta 1: Como é feita a apresentação de matrizes, suas operações e propriedades?
I	O Livro inicia o capítulo de matrizes com uma imagem da obra “Smaller and Smaller”, do artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972), onde é possível observar diversas transformações geométricas como translação, rotação, reflexão e escala, como destacado em um quadro na obra. A seguir o autor traz um arcabouço histórico do estudo de matrizes. Antes de defini-la, na seção introdutória, é um recorte de uma partida de vôlei onde o autor trabalha a leitura e a interpretação de dados via tabelas. A representação genérica de uma matriz é valorizada na descrição, matrizes especiais e propriedades. Todas as propriedades são inseridas a partir de uma situação problema. A introdução de matriz inversa é feita de forma tradicional, sem contextualização e sem aplicação. Um ponto que avaliamos como

	interessante são as caixas "para refletir" as quais são apresentadas de maneira breve e interessante.
II	A introdução ao capítulo é feita através de uma situação problema, a respeito do controle de estoque de uma cafeteria, em seguida o autor traz um breve resumo histórico de matrizes. Após a motivação histórica o autor define matrizes e suas representações. A operação de Adição é introduzida a partir de uma situação problema, além disso, o autor explora de maneira considerável a ideia de matrizes associadas a tabelas. O produto de matrizes retoma o problema introdutório.
III	Na introdução, são apresentadas tabelas com informações coletadas de sites. O autor apresenta um breve resumo histórico e a seguir define matriz. A utilização da matriz genérica é bastante utilizada em todo o capítulo. A adição e multiplicação de matrizes são motivadas a partir de uma situação problema. A matriz inversa é inserida de modo tradicional, sem contextualização. Um ponto muito importante a ser destacado são as seções de conexão das matrizes com a computação gráfica.

Fonte: O autor, 2021

Tabela 5: Resposta da Pergunta 2

Coleção	Pergunta 2: Como os conhecimentos sobre matrizes são apresentados em outros capítulos?
I	O conhecimento de matrizes é utilizado nos capítulos que fala sobre determinantes e sistemas lineares, porém não é utilizada a linguagem matricial para a resolução de sistemas por escalonamento, apesar de utilizar o produto de matrizes para representar um sistema.
II	O capítulo de sistemas lineares ignora por completo a linguagem matricial, para a resolução de sistemas por escalonamento a técnica é toda aplicada diretamente nas equações do sistema. O autor retoma o conhecimento matricial somente no capítulo de determinantes.
III	No capítulo de sistemas lineares o autor faz uso do produto matricial para a representação de sistemas, mas abre mão do recurso matricial para a resolução via escalonamento. Ainda dentro do capítulo o autor apresenta matrizes completas e incompletas associadas a sistemas. Na seção determinante o autor utiliza a

	linguagem matricial.

Fonte: O autor, 2021

Tabela 6: Resposta da Pergunta 3

Coleção	Pergunta 3: São propostas atividades que fazem conexão com a geometria, em particular com as Transformações no Plano?
I	Sim, ao final do capítulo de matrizes o autor traz uma seção "Aplicações de Matrizes" que podemos destacar a ideia de transformações no plano: translação, rotação e escala. Além da proposta Geométrica, o autor traz uma seção de Criptografia cuja ideia é utilizar os conceitos matriciais para enviar mensagens. São propostos 10 exercícios para o leitor.
II	Ao final do capítulo de matrizes o autor traz uma seção "Matemática sem Fronteiras" na qual ele explora, de maneira breve, as transformações geométricas: Translação, Transformação por Escala e Rotação, são esses os aspectos detalhados. O autor propõe 3 exercícios a serem resolvidos, um para cada transformação. Além disso, o autor traz um parágrafo falando sobre computação gráfica.
III	O autor traz uma seção "Aplicações", nela ele utiliza a computação gráfica, produção de imagem para TV e cinema como exemplos para desenvolver as transformações no plano, o autor explica e fornece um exemplo para cada, porém não propõe exercícios aos alunos.

Fonte: O autor, 2021

Ao analisarmos as atualizações dos livros baseados nas mesmas questões propostas vislumbramos encontrar alguma mudança significativa dentro do que Barbosa (2014) nos apresentou. Constatamos que as versões atuais mudaram um pouco a introdução e os exercícios propostos, no mais seguem o mesmo modelo de apresentação, estruturação e aplicações.

A Tabela 7 fornece um levantamento dos exemplos e exercícios propostos, tendo como referência o ENEM.

Tabela 7: Levantamento dos Exemplos e Exercícios Propostos

Coleção	**Levantamento dos exemplos e exercícios propostos**
I	São propostos ao todo 58 exercícios, podemos verificar que o autor limitou-se as questões operacionais, não propôs nenhuma questão anterior de vestibular, apesar de um dos exemplos ser uma questão de concurso. Algumas questões trazem uma contextualização ou um enunciado mais elaborado, não identificamos questões aos moldes do ENEM.
II	São propostos 26 exercícios no capítulo de matrizes mais 38 no capítulo de determinantes, porém boa parte deles não usa conceito matricial. Ao todo identificamos 5 questões de vestibulares anteriores. No geral, o capítulo preocupa-se com questões operacionais sem muita contextualização.
III	No capítulo de matrizes o livro traz uma boa gama de exercícios, ao todo 61 problemas propostos, exemplos aos moldes dos exercícios. Podemos verificar que o livro ficou preso às questões operacionais, não propôs nenhuma questão de vestibular anterior e tampouco questões do ENEM, poucas são as questões que possuem um enunciado contextualizado.

Fonte: O autor, 2021

Os Livros Didáticos que analisamos preocupam-se excessivamente com as questões operacionais. Desse modo, o estudo das matrizes fica restrito a abordagens que envolvem, essencialmente, cálculos, e enfatizam técnicas operacionais. Além disso, o estudo das Transformações no Plano nem sempre é contemplado no Ensino Médio como uma aplicação do estudo de matrizes.

3.3 Os vestibulares

Nesta seção, fizemos um comparativo entre os conteúdos programáticos da área de Matemática dos exames da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), da Universidade Federal Fluminense (UFF), da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e o Exame Nacional do Ensino médio (ENEM). Para isto, vamos inicialmente comparar a Matriz da Matemática e suas Tecnologias do ENEM, o conteúdo programático do último Vestibular como forma exclusiva de acesso a UFF e UFRJ, e o último Vestibular de acesso a UERJ.

Destacamos que estamos investigando a saída paulatina da Álgebra Linear nas provas dos vestibulares, por isso, para que não tenhamos um capítulo muito extenso com conteúdos programáticos de todos os vestibulares, nos limitamos às seções que constam a presença do assunto nos editais dos exames da UERJ, UFF e UFRJ citando somente a parte que faz referência ao tema.

3.3.1 A comparação dos Conteúdos Programáticos dos exames

A seguir transcrevemos a matriz de referência do ENEM para que possamos comparar com os conteúdos programáticos indicados pela UFF, UFRJ e UERJ em seus vestibulares próprios, pois segundo descrito no site do INEP (www.inep.gov.br) os conteúdos da prova são determinados pelas matrizes de referência.

MATRIZ DE REFERÊNCIA ENEM EIXOS COGNITIVOS

(comuns a todas as áreas de conhecimento)

I. Dominar linguagens (DL): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II. Compreender fenômenos (CF): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III. Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV. Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V. Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura ea representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas,

determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade

ANEXO

Objetos de conhecimento associados às Matrizes de Referência

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

• **Conhecimentos numéricos:** operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

• **Conhecimentos geométricos:** características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

• **Conhecimentos de estatística e probabilidade:** representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

• **Conhecimentos algébricos:** gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.ºgraus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

• **Conhecimentos algébricos/ geométricos:** plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

Podemos observar que a matriz de referência do ENEM não faz alusão a conteúdos muito importantes para o desenvolvimento da Matemática assim como para um bom desempenho da vida acadêmica dos estudantes que ingressam nas áreas ditas exatas, esses conteúdos são: Álgebra Linear (matrizes, determinante, transformações), Números Complexos e Polinômios.

Agora transcreveremos parte dos conteúdos propostos de algumas universidades do Estado do Rio de Janeiro. É importante salientar que em 2010 ocorreu a grande mudança no sistema para novos ingressos, as universidades federais que ficam no estado passaram a aderir ao ENEM como único de exame de acesso, ainda naquele ano as universidades realizaram seus exames próprios pela última vez, a UERJ é a única universidade pública do estado que não aderiu ao sistema de ingresso através do ENEM, que permanece até hoje com seu vestibular próprio que consiste em duas fases, a primeira múltipla escolha comum a todos os candidatos e a segunda fase de provas específicas para o curso desejado.

Conteúdos UERJ 2020

1ª fase:
EIXOS DA ÁREA
Álgebra
• Expressões algébricas: operações; identidades; equações; inequações;
• Funções: afim; quadrática; exponencial e logarítmica; trigonométricas; representações gráficas; características e operações;
• Sucessões: aritméticas; geométricas; por recorrências; juros simples e compostos;
• Problemas de contagem: princípios de contagem; análise combinatória simples e com repetição; binômio de Newton;
• Matrizes: representações; operações; determinantes até 3ª ordem;
• Sistemas de equações: lineares; não lineares.

2ª fase:
Vetores e Geometria Analítica
• Vetores em R^2 e em R^3: adição; subtração; multiplicação por um número real; produto escalar, vetorial e misto;
• Geometria analítica no R^2: reta; circunferência; elipse; hipérbole; parábola;

• Matrizes: representações; operações; determinantes de 2ª e de 3ª ordens;
• Sistemas de equação: linear; não linear.

O cenário atual dos conteúdos relativos à Álgebra Linear propostos pela UERJ segue compatível com o Currículo apresentado pelo Estado do Rio de Janeiro.

Conteúdos UFRJ 2010

PARTE 3 – ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO E NO ESPAÇO.
• Operações com vetores de R^2 e R^3 .
• Reta e circunferência no R^2 .
• Elipse, hipérbole e parábola no R^2; equações cartesianas, representação gráfica e identificação dos elementos.
• Reta, plano e esfera no R^3 : equações e identificação dos elementos.
• Matrizes: operações. Inversa de uma matriz.
• Transformações lineares simples do R^2 e R^3.
• Determinantes de matrizes 2x2 e 3x3.
• Sistemas de equações.

Conteúdo UFF 2010

Parte III - Álgebra Linear e Geometria Analítica
• Vetores no R^2 e no R^3 : conceitos. Operações com vetores: adição, multiplicação de um vetor por um escalar. Produto escalar, produto vetorial e produto misto.
• O espaço vetorial R^2 .
• O espaço vetorial R^3 .
• Geometria Analítica Plana: retas e cônicas no R^2 .
• Geometria Analítica Espacial: retas, planos e esferas no R^3 .
• Matrizes e Determinantes: operações com matrizes. Inversa de uma Matriz. Determinantes de matrizes 2 x 2 e 3 x 3.
• Discussão de sistemas de equações lineares 2 x 2 e 3 x 3.

Como podemos observar através dos recortes nos conteúdos propostos acima destacados das universidades, em seu formato exclusivo de acesso, os novos candidatos eram examinados com temas ligados à Álgebra Linear, o que sugere que estatisticamente falando era mais provável terem contato com conceitos básicos de Álgebra Linear, o que atualmente com o ENEM torna-se mais difícil, visto que, através da matriz de referência o conteúdo de Álgebra Linear é preterido em relação a outros. Por todos os pontos levantados nesse Capítulo como currículo, vestibular e livro didático que acreditados que o ensino da Álgebra Linear vem gradualmente sendo preterido em relação a outros. No próximo Capítulo, apresentamos duas aplicações partindo de conhecimentos prévios de Álgebra Linear, aplicações essas que vislumbramos justificar, a relevância de se estudar os conceitos e aplicações na Educação Básica.

Por fim, restam alguns questionamentos, cujas respostas são menos primordiais do que as reflexões que elas decorrem.

- O ENEM continua sendo democrático como defende o Ministério da Educação e Cultura?
- O Ensino Superior parou para se preocupar com as mudanças do currículo básico?
- Para aonde está indo a Álgebra Linear retirada paulatinamente do Ensino Básico?
- O ENEM contribuiu para a saída gradual da Álgebra Linear do Ensino Básico?
- Existe diálogo entre a Educação Básica e o Ensino Superior?

4 APLICAÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR

Este capítulo foi dividido em duas seções. Na primeira seção, propomos uma didática não convencional para introduzir do Conjunto dos Números Complexos a partir de conhecimentos prévios de Álgebra Linear. Na segunda seção, trouxemos aspectos da Álgebra Linear presentes na Computação Gráfica.

4.1 Números Complexos e Álgebra Linear

Nesta seção, abordamos um pouco do aspecto histórico dos Números Complexos e a didática geralmente utilizada para introduzi-los no Ensino Médio. Além disso, propomos uma maneira didaticamente não convencional para introduzir os Números Complexos e suas propriedades essenciais a partir da Álgebra Linear. Aspiramos com isto, evidenciar o caráter versátil da Álgebra Linear e a importância de ainda mantê-la nos currículos do Ensino Básico.

Convém ressaltar que é notório que uma boa parcela dos professores de Matemática, embora já tenham estudado os conceitos básicos e as propriedades essenciais dos Números Complexos, acabam negligenciando ou mesmo omitindo-as de suas aulas por uma série de razões que vão desde a dificuldade em encontrar aplicações palpáveis para os Números Complexos até a inexistência de questões relacionadas ao tema no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que efetivamente norteia boa parte das instituições de Ensino Básico.

Utilizamos como referencial introdutório o livro do Soares (2009), encontramos ainda o trabalho realizado por Silva (2017) , porém entendemos que nossa proposta se distância da dele, uma vez que nos propomos ao olhar geométrico, sobre tudo atrelado as matrizes de rotação, além de nos distanciamos por completo da forma algébrica convencional que usualmente o conjunto é inserido na Educação Básica, além do cuidado em investigar a parte histórica.

4.1.1 Introdução

Os Números Complexos, representados pelo símbolo $\mathbb{C}$, são frequentemente associados à resolução de equações quadráticas cujas soluções são expressas por raízes quadradas de números negativos, porém historicamente não foram as equações do 2º grau que motivaram a descoberta de um novo conjunto numérico, e sim as equações do 3º grau.

Resolver equações sempre foi um assunto que fascinou os matemáticos. Vamos entender a complicada situação que motivou a descoberta do novo conjunto intitulado Conjunto dos Números Complexos. Para maiores informações o leitor é convidado a consultar o excelente trabalho escrito por Júnior.

Há relatos que *Scipione Del Ferro* (1465 – 1526) encontrou uma forma geral para resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, entretanto morreu antes de publicá-la. Seu pupilo *Antônio Maria Fior* conhecia a solução, nesse momento histórico *Fior* tentou ganhar notoriedade desafiando *Nicoló Fontana*, apelidado de *Tartaglia*, a uma competição de resolução de equações cúbicas.

A tentativa de *Fior* de ganhar notoriedade foi por água abaixo, pois o resultado do desafio foi considerado humilhante, visto que *Tartaglia* além de resolver todas as equações propostas por *Fior* não teve as suas equações resolvidas uma vez que implicavam nas soluções de equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. Vale ressaltarmos que Fior tinha apenas o conhecimento de como aplicar a fórmula que *Del Ferro* desenvolvera, *Tartaglia* por outro lado, além de descobrir como chegar na solução das equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, foi além conseguindo estender o seu estudo para equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$.

Reza a lenda que a notícia do duelo chegara aos ouvidos de *Girolamo Cardano* (1501 – 1576), que obteve reconhecimento em suas contribuições na Astronomia, Medicina, Filosofia e Matemática. Consta que *Cardano* implorara a *Tartaglia* a solução das equações cúbicas, que inicialmente recusou-se a compartilha-las. Após muitas conversas, *Cardano* conseguiu que *Tartaglia* revelasse a solução com o juramento de não divulgar para mais ninguém. Cardano, então descumpre o juramento e publica a solução em seu livro *Ars Magna* (1545), importante obra da época, que simbolizou uma nova etapa na Matemática, exibindo pela primeira um algoritmo para equação das cúbicas e biquadradas. Dentre as inovações que Cardano introduziu na Ars Magna estava o método para transformar equações cúbicas $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ em equações sem o termo quadrático em uma nova variável, realizando a seguinte substituição $x = y - \frac{b}{3}$, obtendo a equação $y^3 + py + q = 0$, onde $p = c - \frac{b^2}{3}$, $q = \frac{2b^3 - 9bc + 27d}{27}$ e chegando na solução da equação cúbica $y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q^2}{2} - \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$. Com este trabalho, *Cardano* reconheceu que uma equação cúbica deveria ter três raízes.

Outro matemático que contribuiu para o desenvolvimento dos Números Complexos foi o italiano *Rafael Bombeli*, principalmente referente à linguagem simbólica destes números.

Atualmente os Números Complexos são inseridos, no Ensino Médio, de diversas maneiras pelos professores, condizendo ou não com a história. Muitos sugerem que seja introduzida a ideia de um Número Complexo, também chamado de *número imaginário*, a partir de equações quadráticas de discriminante negativo, outros professores preferem respeitar o aspecto histórico e iniciam a abordagem através das equações cúbicas. Há ainda aqueles que definem as operações de soma e multiplicação sobre pares ordenados e introduzem o Conjunto dos Números Complexos através da bijeção que existe entre eles e o Conjunto $\mathbb{R}^2$.

Convidamos o leitor a adentrar no mundo dos Números Complexos pelos olhos exclusivamente da Álgebra Linear.

4.1.2 Embasamento Teórico

Iniciamos esta seção através da definição de três importantes conjuntos que serão primordiais para embasar a didática proposta por nós para o estudo dos Números Complexos.

Definição 1: O Conjunto das Matrizes Quadradas de ordem 2 em que a diagonal principal é toda igual a um número real a e a diagonal secundária é formada por um número real -*b* e seu simétrico b será representado por $M_2(\mathbb{R}) = \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\}$. O Conjunto de todos os pontos do Plano será definido por $\mathbb{R}^2 = \{(a,b); a, b \in \mathbb{R}\}$ e seja $\mathbb{C} = \{a + bi/a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\ e\ i^2 = -1\}$ o *Conjunto dos Números Complexos.*

Proposição 1: A função $\varphi: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, definida por $\varphi(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}) = (a, b)$ é um isomorfismo. Neste caso, escrevemos $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$.

Demonstração:

Seja o conjunto das matrizes $M_2(\mathbb{R})$ munido das operações de adição e multiplicação como definidas na seção 2.2.

Sejam $M_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$ elementos de do conjunto $M_2(\mathbb{R})$.

Vamos mostrar que a função $\varphi: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, definida por $\varphi(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}) = (a, b)$ é um homomorfismo.

Para a Adição, temos que:

$\varphi(M_1 + M_2) = \varphi(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}) = \varphi(\begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix}]) = (a+c, \mathrm{b+d}) =$ $(a, b) + (c, d) = \varphi(M_1) + \varphi(M_2)$.

E para o Produto:

$$\varphi(M_1 \cdot M_2) = \varphi\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (ac - bd, ad + bc) = (a, b) \cdot (c, d) = \varphi(M_1) \cdot \varphi(M_2).$$

Portanto, $\varphi: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ é um homomorfismo.

Agora, mostraremos que $\varphi: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ é uma bijeção.

Suponhamos $\varphi(M_1) = \varphi(M_2)$, segue que $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$. Portanto, $M_1 = M_2$ o que nos diz que φ é injetora.

Seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Note que existe $M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ tal que $(a, b) = \varphi(M)$. Portanto, φ é sobrejetora.

Concluímos que $\varphi: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ é bijetora.

Como $\varphi: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ é homomorfismo bijetor e $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$.

Acabamos de verificar que os conjuntos $M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^2$ são isomorfos. Vamos mostrar através da Proposição 2 que $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ também são isomorfos.

Proposição 2: A função $\omega: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, definida por $\omega((a, b)) = a + bi$ é um isomorfismo. Neste caso, escrevemos $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

Demonstração:

Seja $\mathbb{R}^2$, munido das operações usuais de adição e multiplicação.

Dados $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ pertencentes a $\mathbb{R}^2$, vamos mostrar que $\omega: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, definida por $\omega((a, b)) = a + bi$ é um homomorfismo.

Para a Adição, segue que:

$\omega(A + B) = \omega((a, b) + (c, d)) = \omega((a + c, b + d)) = (a + c) + (b + d)i = (a + bi) +$ $(c + di) = \omega(A) + \omega(B)$.

Para o Produto:

$\omega(A \cdot B) = \omega((a,b)\cdot(c,d)) = \omega((ac-bd, ad+bc)) = ac - bd + (ad+bc)i$

$\omega(A \cdot B) = ac + bdi^2 + adi + bci = (a+bi)\cdot(c+di) = \omega(A)\cdot\omega(B)$.

Portanto, $\omega: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ é um homomorfismo.

Resta mostrar que ω é bijetora.

Suponhamos $\omega(A) = \omega(B)$. Segue que $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$. Portanto, $A = B$ o que garante que ω é injetora.

Seja $a + bi \in \mathbb{C}$. Note que para todo número complexo de parte real a e parte imaginaria b, temos $a + bi = \omega((a,b)) = \omega(A)$. Portanto, ω é sobrejetora.

Finalmente, ω é bijetora e $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

O fato de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ serem isomorfos nos diz que um número real pode ser representado geometricamente através de um plano, ou seja, os elementos pertencentes a $\mathbb{C}$ são bidimensionais.

O que fizemos através das Proposições (1) e (2) foi balizar matematicamente a didática que iremos propor. Para isto foi necessário já usar os conhecimentos que temos acerca do que é um Número Complexo e de suas operações de Adição e Multiplicação. Portanto, são isomorfos, por transitividade, $M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{C}$. Gostaríamos também de ressaltar que seria possível demonstrar direto o isomorfismo entre $M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{C}$, porém optamos por usar as Proposições (1) e (2) em prol da didática uma vez que é comum a representação de um Número Complexo no Plano.

Em suma, agora somos tecnicamente capazes de associar diretamente os elementos do Conjunto das Matrizes $M_2(\mathbb{R})$ com o Conjunto dos Números Complexos. Didaticamente propomos que a abordagem dos Números Complexos via Álgebra Linear para o Ensino Básico comece efetivamente a partir da subseção 4.1.3.

4.1.3 Abordagem Matricial

É possível iniciarmos a abordagem dos Números Complexos investigando a solução da equação matricial $x^3 + px^2 = q$, respeitando a característica histórica. Contudo de acordo com Soares (2009), também é possível considerar esta abordagem a partir da Equação Matricial $X \cdot X = -I_2$, de modo que possamos apenas nos apropriar dos conhecimentos já adquiridos pela Álgebra Linear de Ensino Básico. A Proposição 3 estabelece uma solução factível para a Equação Matricial acima.

Proposição 3: A matriz dada por $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma solução para a Equação Matricial $X \cdot X = -I_2$.

Demonstração:

Seja a matriz $X = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ pertencente ao conjunto $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$. Substituindo-a em $X \cdot X = -I_2$, temos o seguinte:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, segue que: $a^2 - b^2 = -1$ e $2ab = 0$.

Como $2ab = 0$, temos: $a = 0 \; ou \; b = 0$.

Quando $a = 0$, temos: $-b^2 = -1 \; \therefore \; b = \pm 1$

Quando $b = 0$, temos: $a^2 = -1$, e não existe $a \in \mathbb{R}$, satisfazendo a equação.

Portanto, $X' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ou $X" = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

É notório que a maneira natural de comprovar a validade da Proposição 3 seria substituir e verificar a validade da candidata a solução dada, porém nosso objetivo na demonstração acima é ilustrar como encontrar a solução proposta. Convém reiterar que a equação $X \cdot X = -I_2$ possui mais de uma solução, porém nos interessa a solução dada pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Batizaremos abreviadamente esta matriz de $i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e a chamaremos de *Unidade Imaginária.*

Definição 2 (Número Complexo): Seja $Z \in M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$. Define-se Z como Número Complexo através da matriz $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Munido das operações matriciais definidas no Capítulo 2, podemos escrever um Número Complexo da seguinte maneira:

$$Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = a. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b. \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a.I_2 + bi.$$ [4]

[4] Não utilizaremos a notação $a.I_2 + bi$, pois queremos nos distanciar da associação a forma algébrica de representação do Número Complexo, e sim queremos que ele seja visto como a matriz cuja diagonal principal possui elementos iguais e a diagonal secundária é simétrica.

Vejamos alguns exemplos:

a) $Z_1 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, observe que Z_1 *é um Número Complexo*, pois satisfaz a definição.

b) $Z_2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, note que Z_2 *não é um Número Complexo*, pois possui elementos diferentes na diagonal principal.

c) $Z_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, note que Z_3 *é um Número Complexo*, pois pode ser reescrito da seguinte maneira $Z_3 = \begin{bmatrix} 3 & -(-4) \\ (-4) & 3 \end{bmatrix}$, possibilitando que fique explícita a definição de um Número Complexo.

d) $Z_4 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, observe que Z_4 é um Número Complexo, pois possui diagonal principal com elementos iguais e diagonal secundária com elementos simétricos.

4.1.4 Representando um Número Complexo no Plano

Todo Número Complexo pode ser representado como um ponto do Plano. A este ponto damos o nome de *afixo*. Para entender como proceder com esta representação viabilizamos através da Proposição 4 o significado geométrico da unidade imaginária.

Proposição 4: Sejam as matrizes X quadrada de ordem 2 e I_2 a identidade. Na solução da Equação Matricial $X.X = I_2$, a Unidade Imaginária $i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ representa a matriz de rotação $\frac{\pi}{2}\, rad$ no sentido anti-horário do plano.

Demonstração:

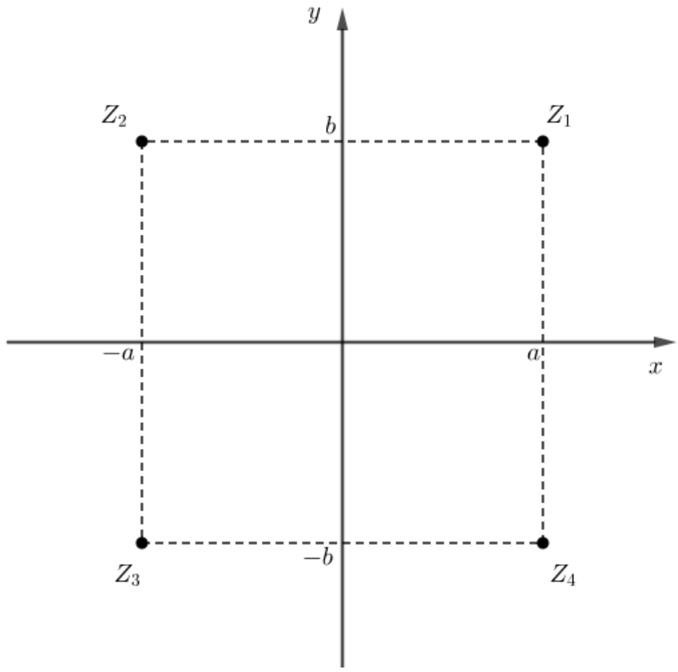
Como vimos no Capítulo 2, seção *2.10.1, a matriz de rotação é dada por* $\begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$.

Substituindo $\theta = \frac{\pi}{2}\, rad$, temos $\begin{bmatrix} cos\frac{\pi}{2} & -sen\frac{\pi}{2} \\ sen\,\frac{\pi}{2} & cos\,\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Vejamos agora como ficam, no Plano, os Números Complexos:

$Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $Z_2 = \begin{bmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{bmatrix}$, $Z_3 = \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$ e $Z_4 = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ na Figura 9.

Figura 11: Representação do número complexo no plano



Fonte: O autor, 2020

É pertinente sublinhar que os eixos coordenados gozam, neste contexto, de uma nomenclatura peculiar, sendo os eixos horizontal e vertical denominados *Eixo Real* e *Eixo Imaginário*, respectivamente.

Além disso, a parte $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ do Número Complexo $Z = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$ é denominada Parte Real do Número Complexo $Z = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$, enquanto a parte $\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$ é a sua *Parte Imaginária*.

As operações sob o Conjunto dos Números Complexos também são definidas a partir das operações matriciais. As operações de *Adição (ou Soma)* e *Multiplicação (ou Produto)* entre elementos do conjunto $M_2(\mathbb{R}) = \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\}$ são definidas a seguir. Consequentemente, decorrem as operações de *Adição (ou Soma) e Multiplicação (ou Produto)* sob o Conjunto dos Números Complexos.

Consideraremos, para as Definições 3 e 4, $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $Z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$ pertencentes a $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$.

Definição 3 (Adição (ou soma) de Complexos):

$$Z_1 + Z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} = (a+c)I_2 + (b+d)i.$$

Definição 4 (Multiplicação (ou Produto) de Complexos:

$$Z_1.Z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix} = (ac-bd)I_2 + (ad+bc)i.$$

As operações de Adição e Multiplicação em $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$ gozam das propriedades associativa e comutativa e das presenças de elementos neutros e de inversos, como veremos a seguir:

i) *Associatividade da Soma:* $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$.

Demonstração:

$$(Z_1 + Z_2) + Z_3 = \left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a+c+e & -(b+d+f) \\ b+d+f & a+c+e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c+e & -(d+f) \\ d+f & c+e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} +\right.$$
$$\left.\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}\right) = Z_1 + (Z_2 + Z_3).$$

ii) *Associatividade da Multiplicação:* $(Z_1.Z_2).Z_3 = Z_1.(Z_2.Z_3)$.

Demonstração:

$$(Z_1.Z_2).Z_3 = \left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} ace-adf-bde-bcf & -(acf+ade+bce-bdf) \\ acf+ade+bce-bdf & ace-adf-bde-bcf \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} ce-df & -(cf+de) \\ cf+de & ce-df \end{bmatrix} = Z_1.(Z_2.Z_3).$$

iii) *Comutatividade da Soma:* $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$.

Demonstração:

$$Z_1 + Z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+a & -(d+b) \\ d+b & c+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = Z_2 + Z_1.$$

iv) *Comutatividade da Multiplicação*[5]*:* $(Z_1.Z_2).Z_3 = Z_1.(Z_2.Z_3)$.

Demonstração:

$(Z_1.Z_2).Z_3 = \left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} ace-adf-bde-bcf & -(acf+ade+bce-bdf) \\ acf+ade+bce-bdf & ace-adf-bde-bcf \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} ce-df & -(cf+de) \\ cf+de & ce-df \end{bmatrix} = Z_1.(Z_2.Z_3)$.

v) *Elemento Neutro da Adição*: o elemento neutro da soma é o complexo $Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0I + 0i$.

Com efeito,

$$Z_1 + Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = Z_1.$$

vi) *Elemento Neutro da Multiplicação:* o elemento neutro da multiplicação é dado pelo Número Complexo $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Com efeito,

$$Z_1.I = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = Z_1.$$

vii) *Inverso Aditivo:* para cada $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$ o inverso aditivo é o complexo $Z_1' = \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$. Com efeito,

$$Z_1 + Z_1' = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$viii$) *Inverso Multiplicativo:* para todo $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$ não nulo, o seu inverso multiplicativo é dado pelo Número Complexo $Z_1^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}.\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. Com efeito,

$$Z_1.Z_1^{-1} = Z_1^{-1}.Z_1 = \frac{1}{a^2+b^2}.\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

[5] Em geral o Produto de Matrizes não é comutativo, entretanto as Matrizes que definem um Número Complexo comutam na multiplicação.

Convém observar que $Z^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}.\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}.\overline{Z}$, a definição 5, a seguir, nos ajudará a entender melhor a notação $\overline{Z}$, que se refere ao conjugado de um Número Complexo.

Definição 5 (Conjugado do número complexo): O Conjugado do Número Complexo $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, é representado por $\overline{Z}$ e definido pela rotação de $\frac{\pi}{2}$ rad de $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Aplicando a Matriz de Rotação de $\frac{\pi}{2}$ rad em $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, obtemos o seu conjugado dado por $\overline{Z} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. Convém observar que o conjugado de um número complexo Z é obtido pela matriz transposta de Z, isto é, $\overline{Z} = Z^t$.

Propriedades do Conjugado:

Sejam $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $Z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$ pertencentes a $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$.

i) *Distributividade da Adição:* $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$

Demonstração:

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}.$$

ii) *Distributividade da Multiplicação*: $\overline{Z_1.Z_2} = \overline{Z_1}.\overline{Z_2}$

Demonstração:

$$\overline{Z_1.Z_2} = \overline{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \overline{Z_1}.\overline{Z_2}.$$

iii) *O produto entre um complexo e seu conjugado é sempre um número real:* $Z_1.\overline{Z_1} \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

$$Z_1.\overline{Z_1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} = (a^2+b^2)I_2 \in \mathbb{R}.$$

Definição 6 (Divisão de Complexos): A divisão de um complexo Z_1 por um complexo Z_2 em que $Z_1, Z_2 \in M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$ e $Z_2 \neq 0$ é dada da seguinte maneira:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 . Z_2^{-1}, \text{ onde } Z_2^{-1} \text{ é a matriz inversa de } Z_2.$$ [6]

Observe que $Z_2^{-1} = \frac{1}{c^2+d^2} . \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(Z_2)} . \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(Z_2)} . \overline{Z_2} = \frac{1}{\det(Z_2)} . Z_2^t$. Assim, podemos reescrever a divisão de um complexo Z_1 por um complexo Z_2, da seguinte maneira:

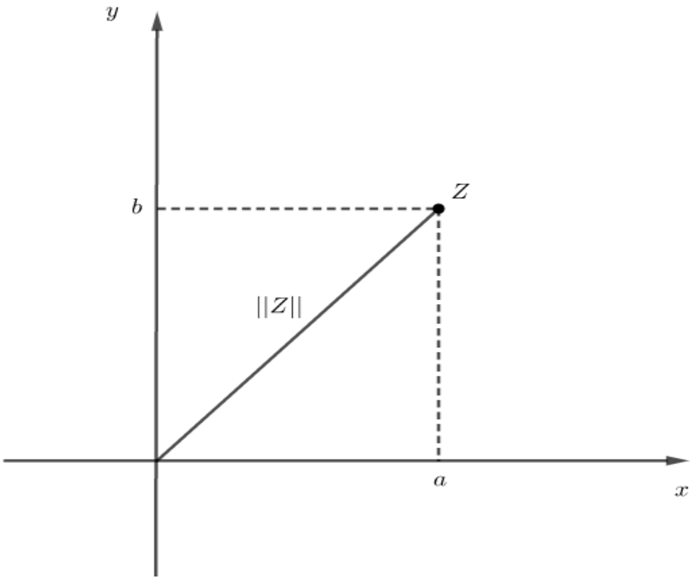
$$\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 . Z_2^{-1} = Z_1 . \frac{1}{\det(Z_2)} . \overline{Z_2} = \frac{Z_1 . \overline{Z_2}}{\det(Z_2)}.$$

Definição 7 (Norma de um Número Complexo): Dado o complexo $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, com $Z_1, Z_2 \in M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$ definimos a norma de Z, como sendo o número real não negativo $||Z|| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\det(Z)}$.

A norma de um Número Complexo pode ser vista, no Plano, como a distância do afixo à origem, como ilustrado na figura 10.

[6] Utilizamos Z_i^{-1}, com $i \in \mathbb{N}$ como inversa pois foi a notação utilizada no Capítulo 2 de embasamento teórico.

Figura 12: Representação geométrica da norma de um Número Complexo



Fonte: O autor, 2020

A seguir vamos enunciar e provar o Teorema 1 que será usado posteriormente para que possamos demonstrar algumas propriedades da norma.

Teorema 1: Dados os Números Complexos $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $Z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$, com $Z_1, Z_2 \in M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$, vale a desigualdade $|ac + bd| \leq \left||Z_1|\right|. \left||Z_2|\right|$.

Demonstração:

Sejam $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $Z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$, $Z_1, Z_2 \in M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$.

É óbvio que $0 \leq (ad - bc)^2$. Desenvolvemos chegamos em $0 \leq a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2$, ou ainda em, $2abcd \leq a^2d^2 + b^2c^2$.

Somando $a^2c^2 + d^2d^2$, na última desigualdade, segue que:

$a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 \leq +a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$.

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2).(c^2 + d^2)$$

$$|ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2}$$

$$|ac + bd| \leq \left||Z_1|\right|. \left||Z_2|\right|.$$

Propriedades da Norma:

Sejam os complexos $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $Z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$, com $Z_1, Z_2 \in M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$.

$i)\ ||Z_1|| = ||\overline{Z_1}||$;

$ii)\ ||Z_1.\overline{Z_1}|| = ||Z_1||^2$;

$iii)\ ||Z_1.Z_2|| = ||Z_1||.||Z_2||$;

$iv)$ Desigualdade triangular: $||Z_1 + Z_2|| \leq ||Z_1|| + ||Z_2||$.

Demonstração:

$i)\ ||Z_1|| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = ||\overline{Z_1}||$.

$ii)$ De $Z_1.\overline{Z_1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$, segue que

$||Z_1.\overline{Z_1}|| = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 0} = a^2 + b^2 = ||Z_1||^2$.

$iii)$ De $Z_1.Z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix}$, segue que:

$$||Z_1.Z_2|| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$$
$$= \sqrt{(ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2}$$
$$= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}$$
$$= \sqrt{(a^2 + b^2).(c^2 + d^2)}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2} = ||Z_1||.||Z_2||\ .$$

$iv)$ Como $Z_1 + Z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{bmatrix}$, segue que:

$$||Z_1 + Z_2|| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$$
$$||Z_1 + Z_2||^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2$$
$$= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd)$$
$$= ||Z_1||^2 + ||Z_2||^2 + 2(ac + bd)$$
$$\leq ||Z_1||^2 + ||Z_2||^2 + 2|ac + bd|$$

Do Teorema 1, segue que:

$||Z_1 + Z_2||^2 \leq ||Z_1||^2 + 2||Z_1||.||Z_2|| + ||Z_2||^2 = (||Z_1|| + ||Z_2||)^2$.

Ou seja, $\left||Z_1 + Z_2|\right| \leq \left||Z_1|\right| + \left||Z_2|\right|$.

As potências da Unidade Imaginária $i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ocorrem sempre em rotações de $\frac{\pi}{2}\,rad$ no sentido anti-horário do plano, sendo possível observarmos os ciclos: $i^0 = I_2, i,\ i^2 = -I, i^3 = -i$. Vamos examinar esta característica das potências de $i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Formalmente falando, mostraremos que dado $n \in \mathbb{N}$, temos que $i^n = i^r$, onde r é o resto da divisão de n por 4.

Seja $i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a unidade imaginária do Conjunto dos Números Complexos $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$. As potências de i são as seguintes:

$i)$ *Potência Zero:* $i^0 = I_2$, pois i^0 é uma notação para representarmos $i.i^{-1}$. Desta maneira,

$$i^0 = i.i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

$ii)$ *Potência Um:* por definição, segue que $i^1 = i$.

$iii)$ *Potência Dois:* $i^2 = -I_2$, pois $i^2 = i.i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I_2$.

É importante comentarmos que $i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -sen\frac{\pi}{2} \\ sen\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$ é a matriz de rotação de $\frac{\pi}{2}\,rad$. Portanto, $i^2 = -I_2$ é equivalente a uma rotação de $\frac{\pi}{2}\,rad$ do complexo i, no sentido anti-horário.

$iv)$ *Potência Três:* $i^3 = -i$, pois $i^3 = i^2.i = -I_2.i = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -i$.

Observe que agora $i^3 = -i$ é equivalente a uma rotação de $\frac{\pi}{2}\,rad$ do complexo $i^2 = -I_2$, no sentido anti-horário.

$v)$ *Potência Quatro:* $i^4 = I$, pois $i^4 = i^3.i = I_2$, obtida pela rotação de $\frac{\pi}{2}\,rad$ do complexo $i^3 = -i$, no sentido anti-horário.

$vi)$ *Potência Cinco:* $i^5 = i$, pois $i^5 = i^4 = I_2.i = i$, obtida pela rotação de $\frac{\pi}{2}\,rad$ do complexo $i^4 = I_2$, no sentido anti-horário.

vii) *Potência Seis:* $i^6 = -I_2$, pois $i^6 = i^5.i = -I_2$, obtida pela rotação de $\frac{\pi}{2} rad$ do complexo $i^5 = i$, no sentido anti-horário.

$viii$) *Potência Sete:* $i^7 = -i$, pois $i^7 = i^6.i = -i$, obtida pela rotação de $\frac{\pi}{2} rad$ do complexo $i^6 = -I_2$, no sentido anti-horário.

ix) *Potência Oito:* $i^8 = I_2$, pois $i^8 = i^7.i = I_2$, obtida pela rotação de $\frac{\pi}{2} rad$ do complexo $i^7 = -i$, no sentido anti-horário.

Indutivamente é possível obter a n-ésima potência $i^n = i^{n-1}.i$, onde $n \in \mathbb{N}$, obtida pela rotação de $\frac{\pi}{2} rad$ do complexo i^{n-1}, no sentido anti-horário.

A seguir vamos enunciar a Proposição 5, uma proposição bem técnica que trata do menor ângulo não nulo entre dois Números Complexos, tal proposição será útil posteriormente para que possamos obter uma nova representação de um Número Complexo.

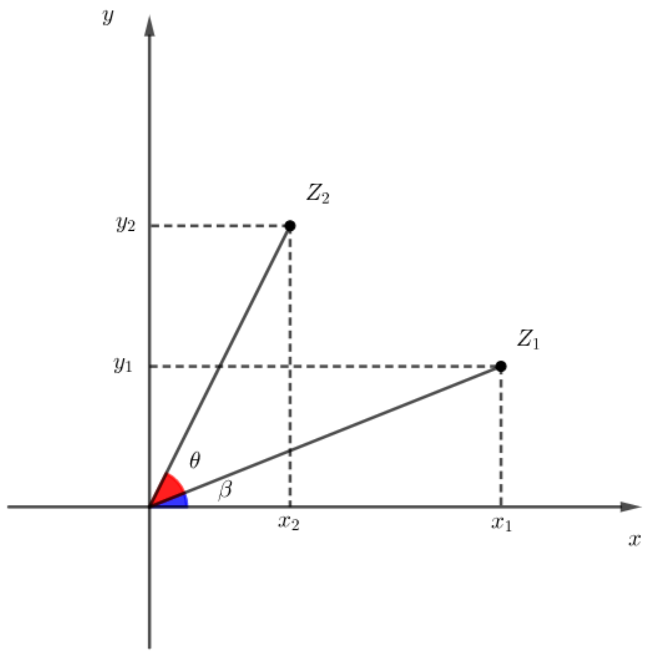
Proposição 5 (Ângulo entre dois Números Complexos): Sejam os Números Complexos $Z_1 = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}$ e $Z_2 = \begin{bmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix}$, onde $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N}$. O menor ângulo, não negativo, entre dois Números Complexos Z_1 e Z_2 é dado por

$$\theta = \arccos \frac{x_1.x_2 + y_1.y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Demonstração:

Consideremos as representações planas dos complexos $Z_1 = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}$, $Z_2 = \begin{bmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix}$ pertencentes a $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$ e θ o menor ângulo, não negativo, formado por Z_1 e Z_2.

Figura 13: Representação do complexo no plano com ângulo θ



Fonte: O autor, 2020.

Note que $\cos\beta = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$, $sen\,\beta = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$, $\cos(\theta+\beta) = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$ e $sen\,(\theta+\beta) = \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

Observe ainda que $\cos\theta = \cos\big((\theta+\beta)-\beta\big) = \cos(\theta+\beta).\cos\beta + sen\,(\theta+\beta).sen\,\beta$

Substituindo as expressões das razões trigonométricas na última equação, obtemos:

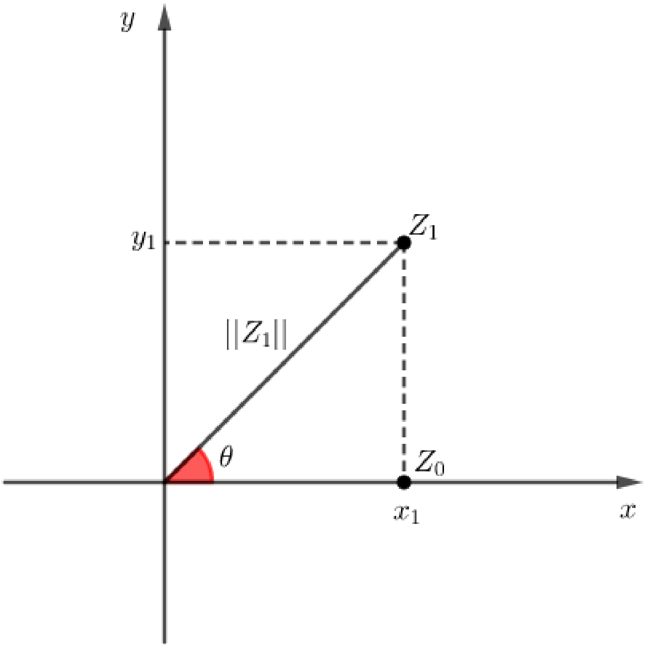
$$\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} + \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \frac{x_1.x_2+y_1.y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

Portando, $\theta = \arccos\frac{x_1.x_2+y_1.y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

De posse da informação sobre o menor ângulo não negativo entre dois Números Complexos, introduziremos uma representação para um destes números a partir de seus ângulo e norma.

Sejam $Z_0 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}$ e $Z_1 = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}$pertencentes a $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$ e θ o menor ângulo não negativo entre os dois complexos Z_0 e Z_1,como mostrado na Figura 12.

Figura 14: Ângulo entre dois complexos



Fonte: O autor, 2020

Como $\cos\theta = \frac{x_1}{||Z_1||}$, temos que $x_1 = ||Z_1||.\cos\theta$. Além disso, $sen\,\theta = \frac{y_1}{||Z_1||}$, o que implica em $y_1 = ||Z_1||.sen\,\theta$.

Finalmente, a Forma Polar ou Trigonométrica do Número Complexo Z_1 é dada por:

$$Z_1 = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ||Z_1||.\cos\theta & -||Z_1||.sen\,\theta \\ ||Z_1||.sen\,\theta & ||Z_1||.\cos\theta \end{bmatrix} = ||Z_1||.\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

sendo $||Z_1||$ a norma de Z_1 e θ o ângulo não negativo obtido entre o Eixo Real e a norma de Z_1.

É importante ressaltarmos que estamos justificando a importância da Álgebra Linear nos Currículos e nas Aulas do Ensino Básico e por isso não nos aprofundamos nas propriedades do Conjunto dos Números Complexos.

Convém ressaltar que há ainda a possibilidade de adentrar na *Forma Exponencial* de um Número Complexo. Contudo procuramos apresentar ao leitor não só a *Forma Matricial* de um Número Complexo, mas também suas operações e propriedades que julgamos centrais sempre dentro do contexto da Álgebra Linear, isto é, procuramos manter as definições, propriedades, teoremas, proposições e demonstrações no ambiente das matrizes e de suas operações e propriedades.

Entendemos que esta proposta didática é bastante ambiciosa principalmente em um momento em que só vemos a retirada de conteúdos dos Currículos de Ensino Básico, entretanto acreditamos que uma das melhores formas de manter a Álgebra Linear viva em nossos Currículos e salas de aula é contextualizá-la com outros conceitos quer sejam estes conceitos matemáticos ou não.

Apresentamos, através da Tabela 8, quatro formas de representar um Número Complexo. As formas algébrica, matricial, trigonométrica e exponencial. Estudamos, neste trabalho, essencialmente as formas matricial e trigonométrica. A forma algébrica é aquela corriqueiramente apresentada e explorada no Ensino Básico, por isso procuramos nos manter afastados dela. Para mais informações sobre a forma exponencial sugerimos ao leitor a consulta de Dante.

Tabela 8: Equivalência dos Números Complexos

Forma Algébrica	Forma Matricial	Forma Trigonométrica	Forma Exponencial
$z = a + bi$	$Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$	$z = \rho.(cos\ \theta + isen\ \theta)$	$e^{\theta i} = \cos\theta + isen\ \theta$

Fonte: O autor, 2020.

Por fim, exibimos através da Tabela 9, um esvoço de plano de aula que vislumbramos auxiliar o professor em uma aula cujo tema seja o Conjunto dos Números Complexos através de conhecimentos matriciais previamente balizados. Assim como Schewtschik (2017, p.2) pensamos que:

> [...] uma boa aula é aquela que é muito bem planejada, que tem objetivos claros e precisos e uma avaliação que revele a aprendizagem pretendida naquele exato momento. Se assim se caracteriza uma boa aula, podemos conjecturar que o planejamento do professor se tornará um instrumento de garantia de aprendizagem dos alunos na medida em que revelar uma relação entre objetivo de aula e avaliação da aprendizagem correspondente, considerando atividades que levem o aluno a desenvolver habilidades pretendidas naquela aula.

Tabela 9: Esboço de Plano de Aula

ESBOÇO DE PLANO DE AULA			
	CONTEÚDO	**OBJETIVO**	**TEMPO**
AULA 1	Matrizes, contexto histórico, equação matricial, Representar um Número Complexo no plano, Conjugado de um Número Complexo.	• Identificar e representar um Número Complexo através da linguagem matricial; • Identificar e representar o conjugado em um Número Complexo; • Representar um Número Complexo no plano.	50 MIN.
AULA 2	Operações matriciais, Operações entre Números Complexos, norma do Número Complexo.	• Trabalhar as operações de adição, multiplicação e divisão entre Números Complexos; • Representar geometricamente a norma.	50 MIN.
AULA 3	Multiplicação de Matrizes, Rotação, Potência de um Número Complexo.	• Representar genericamente as potências de um Número Complexo; • Associar à potência do Número Complexo a rotação de 90° no sentido anti-horário.	50 MIN.
AULA 4	Ângulo entre Números Complexos, Divisão entre Complexos.	• Identificar o ângulo entre dois Números Complexos; • Equivalência na representação entre Números Complexos;	50 MIN.

Fonte: O autor, 2021

4.2 Álgebra Linear na Computação Gráfica

Nesta seção, abordamos um pouco do que é Computação Gráfica, aspecto histórico e quais os desdobramentos atuais e futuros. Além disso, criamos um ambiente com o auxilio do Geogebra para que pudéssemos aplicar os conhecimentos de Transformações Lineares que estuamos no segundo Capítulo.

4.2.1 O que é Computação gráfica?

Segundo a ISO [7](International Standards Organization) a Computação Gráfica pode ser definida como o conjunto de métodos e técnicas utilizados para converter dados para um dispositivo gráfico.

De acordo com a definição da ISO somos levados diretamente a um importante ponto da computação gráfica, o processamento de imagem. Uma imagem é caracterizada por conjuntos de pontos, retas e curvas. Tais características nos fornecem uma maneira de descrever uma imagem de forma matricial. Para alterarmos alguma imagem usamos conceitos de transformações, possibilitando rotacionar, transladar, dilatar ou comprimir (mudança de escala) uma imagem.

Nesta seção, não temos a pretensão de ensinar o leitor a fazer animações, uma das preocupações foi apresentar o aspecto histórico, visto o impacto que os computadores, celulares e tablets têm em nossa sociedade nos dias atuais. Outra preocupação é apresentar exemplos de aplicações elementares, de tal modo a justificar o ensino mais profundo da Álgebra Linear no Ensino Médio. Temos a consciência de que a Álgebra Linear é mentora dos softwares que gerenciam boa parte da Computação Gráfica. A seguir, discutimos como esses conceitos matemáticos se tornaram cruciais para a Computação Gráfica.

4.2.2 Contexto Histórico

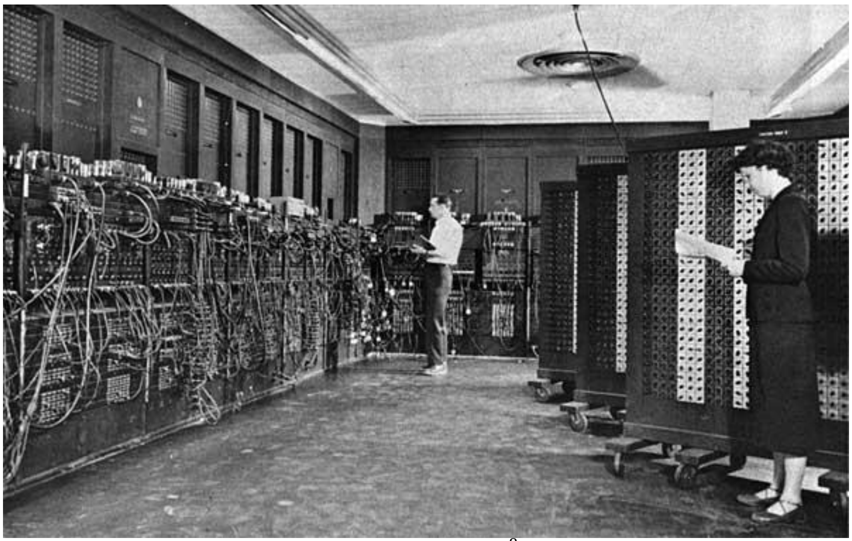
É difícil precisar quando a Computação Gráfica de fato foi introduzida, mas existe um consenso entre os pesquisadores que o primeiro computador a possuir recursos gráficos de visualização de dados numéricos foi o ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) desenvolvido por John Eckert e John Mauchly em 1946. Importante ressaltar que nesse momento vivíamos o temor da Segunda Guerra Mundial que acabara de terminar em 1945. A Figura 15 exibe o imenso e pioneiro computador ENIAC.

A dificuldade de precisar este aspecto histórico é relatada por Fonseca Filho (2007, p.23) em:

[7] ISO é o órgão que padroniza e normatiza atividades em 162 países, o Brasil faz parte desde a fundação em 1947.

> [...] cada nova geração de informatas depara-se com um duplo problema: a impossibilidade de ter uma visão global sobre todo o conhecimento precedente e, mais acentuadamente ainda, a história do desenvolvimento das várias especialidades. Não estão individualizados os eventos, por vezes complexos, que antecederam o saber atual e também não se possui um quadro que os reúna, para se ter uma idéia geral, coerente e significativa. A evolução tecnológica se nos apresenta abrupta, através de saltos descontínuos, e todo o trabalho que antecede cada etapa aparece coberto por uma camada impenetrável de obsolescência, algo para a paleontologia ou para os museus, como se nada pudesse ser aprendido do passado.

Figura 15: O ENIAC – Primeiro computador do mundo



Fonte: Techtudo[8]

Na década de 1960, foi concebido por alunos do MIT (Massachusetts Institute of Technology) o primeiro jogo de computador que utilizava Computação Gráfica, chamado de “Spacewar”, como mostrado na Figura 16. Mais tarde, em 1972, com fins comerciais, foi criado o primeiro vídeo game batizado de “Magnavox Odyssey”, Figura 17. Em 1995, foi lançado nos Estados Unidos, o filme “Toy Story”, Figura 18, desenvolvido pela PIXAR Animation Studios, o primeiro longa metragem totalmente feito por animação digital.

[8] https://www.techtudo.com.br/artigos/noticia/2011/02/primeiro-computador-do-mundo-faz-65-anos.html, acesso: 06/04/2020

Figura 16: Spacewar, primeiro game de computador

Fonte: Cnet[9]

Figura 17: Magnavox Odyssey, primeiro vídeo game

Fonte: História por trás da história[10]

[9] https://www.cnet.com/news/seminal-computer-video-game-spacewar-lives-again/ Acesso: 24/04/20
[10] http://historiaportrasdahistoria.blogspot.com/2015/08/a-incrivel-historia-do-primeiro.html, Acesso: 24/04/2020

Figura 18: Toy Story, primeiro longa

Fonte: Catraca[11]

Atualmente a Computação Gráfica está presente em boa parte das áreas do conhecimento humano, da Medicina, com técnicas de visualização em 3D, até as Engenharias, especialmente com o uso da ferramenta tradicional CAD (Computer-Aided Design). As perspectivas futuras, segundo Westcon (2017) destinam-se a: software (realidade em que o objetivo é treinar computadores a desenvolverem seus próprios raciocínios), nuvem (pesquisas por e-mail, melhores rotas de viagem rodoviária, armazenamento de arquivos, aumento na segurança de backups) e arquitetura (chips especializados automatizados para empregos específicos e para diferentes técnicas de exploração de mecânicas quânticas, tornando possível cruzar uma grande variedade de conjuntos de dados simultaneamente).

No Brasil, o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) além de ser um grande centro de pesquisa no âmbito da Matemática também é, um grande centro de pesquisa em computação gráfica, com o laboratório VISGRAF, criado em 1989. O laboratório VISGRAF coordenado por Luiz Velho tem cinco linhas de pesquisa: interfaces e aplicações; modelagem e visualização; animação e multimídia; visão e processamento de imagem; e música computacional. Todas as linhas de pesquisa estão alinhadas com as perspectivas futuras apresentadas por Westcon, 2017.

Em entrevista ao jornal O Globo, Velho (2013, não paginado), coordenador do projeto VISGRAF, conta um pouco sobre o desenvolvimento do projeto:

> Nossa proposta ao criar o VISGRAF era fazer Matemática Aplicada Computacional na área de novas mídias. Fomos um dos primeiros grupos a fazer

[11] https://catracalivre.com.br/agenda/toy-story-no-mis/, Acesso: 24/04/2020

> visualização de Matemática. Começamos com a visão de que as áreas estão relacionadas, e fomos entrando em síntese de imagem, processamento de imagem, modelagem. Vieram, depois, o movimento, o tempo e o som, com vídeo e animação, e a coisa começou a se estender. Hoje, a tecnologia está chegando num ponto em que você precisa o tempo todo formular como ela vai ser usada pelas pessoas. Pensando, por exemplo, nos smartphones: para ser bom, não basta ter a tecnologia e a computação. Aquilo é feito para um ser humano, que vive de comunicação e está dentro de um processo cultural, que envolve também aspectos de percepção, os sentidos. O designer entra aí. Mas o design ainda não chegou lá. É preciso montar grupos multidisciplinares para trabalhar.

4.2.3 Aplicação dos Conceitos Matriciais nas Animações

O exemplo que nos propusemos estudar é inspirado no jogo *Super Sprint (1986)*, cujo objetivo era ser o mais rápido. Parte do jogo ilustrado na Figura 19, apesar de não ser um jogo muito atual tornou-se objeto de estudo, pois ainda há no mercado jogos e animações com a mesma filosofia, porém com um acabamento gráfico mais refinado, como por exemplo o Forza Horizon 4, mostrado na Figura 20.

Figura 19: Super Sprint

Fonte: Game Fabrique[12]

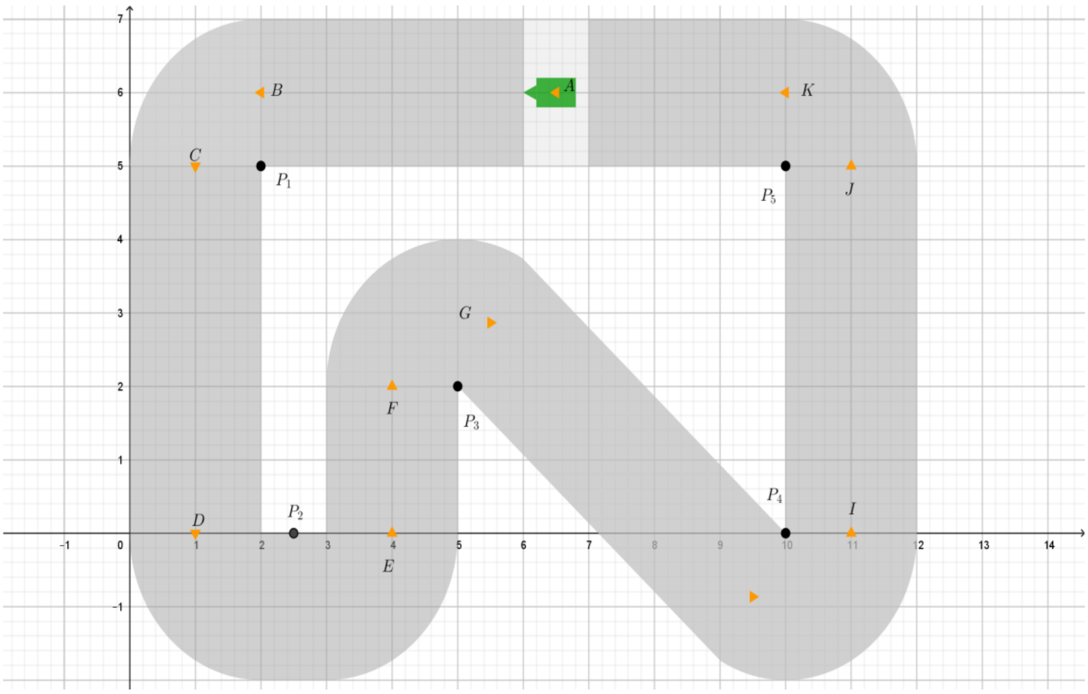
[12] https://joysticknervoso.files.wordpress.com/2016/02/captura-de-tela-de-2016-02-07-102537.png, acesso: 27/05/2020 – 20:25

Figura 20: Forza Horizon 4

Fonte: Forzamotor[13]

O objetivo desta seção é descrever matricialmente o movimento de um carrinho. Para isso simulamos uma pista no Geogebra, representada pela Figura 21. Inicialmente um carro encontra-se no ponto A= (6.5, 6), ponto de partida, e desloca-se sucessivamente até retornar ao ponto A, percorrendo o caminho ABCDEFGKA. Para realizar esta tarefa, utilizamos a Teoria de Transformações Matriciais no Plano, discutida no Capítulo 2.

Figura 21: Mapa do Jogo



Fonte: O autor, 2020.

[13] https://forzamotorsport.net/, Acesso em: 18/06/2020

As coordenadas de cada um dos pontos do contorno do carrinho em repouso no ponto A, representado na Figura 21, encontram-se nas colunas da matriz T.

$$T = \begin{bmatrix} 6.2 & 6.8 & 6.8 & 6.2 & 6.2 & 6.2 & 6 \\ 5.8 & 5.8 & 6.2 & 6.2 & 6.1 & 5.9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Como o objetivo é passar por cada um dos pontos apresentados no mapa, o carrinho deve-se deslocar até o ponto B = (2,6). Para isso é necessário transladá-lo horizontalmente para esquerda, ou seja, devemos adicionar o vetor $\overrightarrow{AB} = (-4.5,0)$ a cada ponto do contorno do carrinho, o que pode ser feito adicionando a matriz T a matriz M.

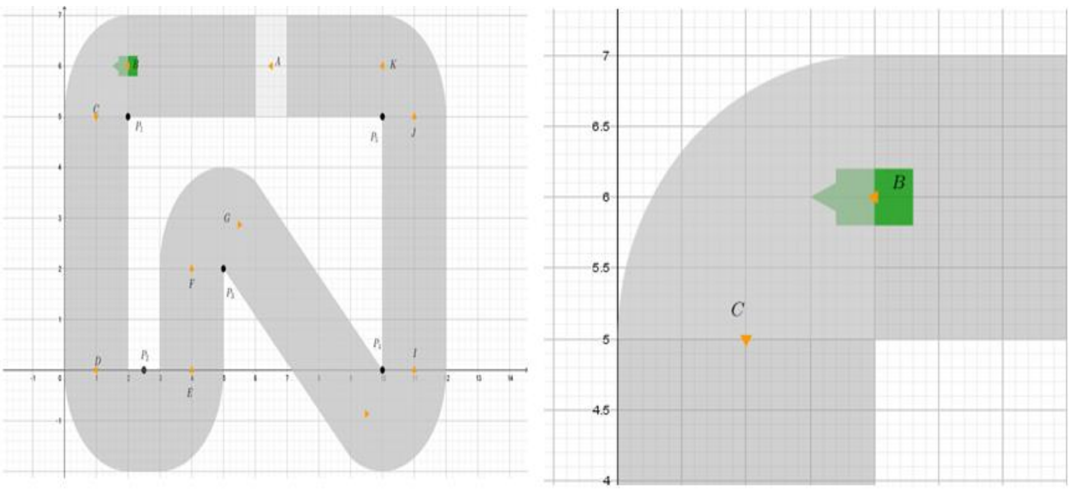
$$M = \begin{bmatrix} -4.5 & -4.5 & -4.5 & -4.5 & -4.5 & -4.5 & -4.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A nova matriz $T_1 = T + M$, é igual:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1.7 & 2.3 & 2.3 & 1.7 & 1.7 & 1.7 & 1.5 \\ 5.8 & 5.8 & 6.2 & 6.2 & 6.1 & 5.9 & 6 \end{bmatrix}.$$

A Figura 22 mostra o carrinho agora deslocado horizontalmente para o ponto B.

Figura 22: Mudança de posição de A para B



Fonte: O autor, 2020

Para o carrinho se deslocar para o próximo ponto, ponto C, necessário girar 90º e transladar, no sentido anti-horário, em relação ao ponto $P_1 = (2{,}5)$. Se cada vértice do carrinho é denotado por (x, y), então os vértices do carrinho após a rotação serão dados por:

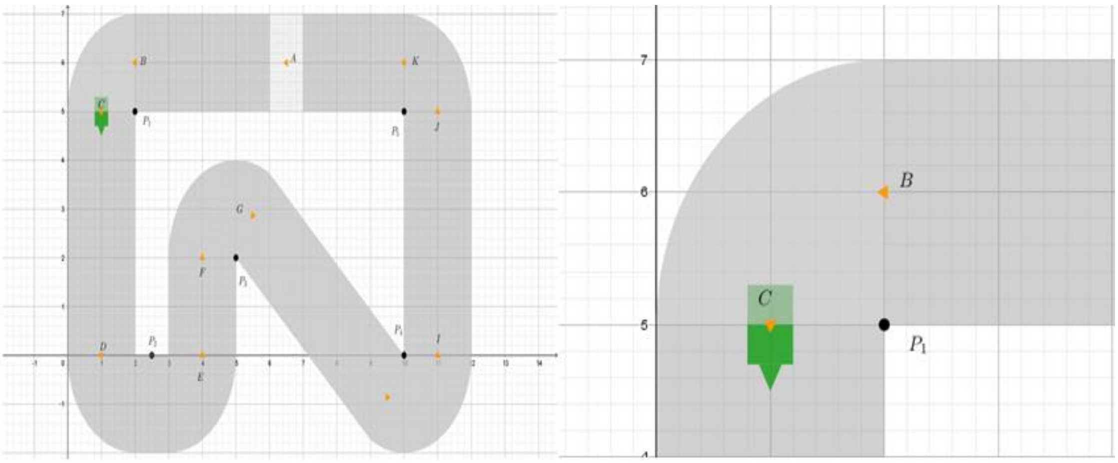
$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos\ 90° & -sen\ 90° \\ sen\ 90° & \cos\ 90° \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x-2 \\ y-5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x-2 \\ y-5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Segue que,

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.2 & 0.8 & 0.8 & 0.9 & 1.1 & 1 \\ 4.7 & 5.3 & 5.3 & 4.7 & 4.7 & 4.7 & 4.5 \end{bmatrix}.$$

A Figura 23 mostra a rotação do carrinho do ponto B até o ponto C.

Figura 23: Mudança de posição de B para C



Fonte: O autor, 2020

Para o carrinho se deslocar para o ponto D, é necessário transladá-lo verticalmente, ou seja, devemos adicionar o vetor $\overrightarrow{CD} = (0, -5)$, a cada vértice do contorno do carrinho, isso pode ser feito adicionando a matriz T_2 a matriz

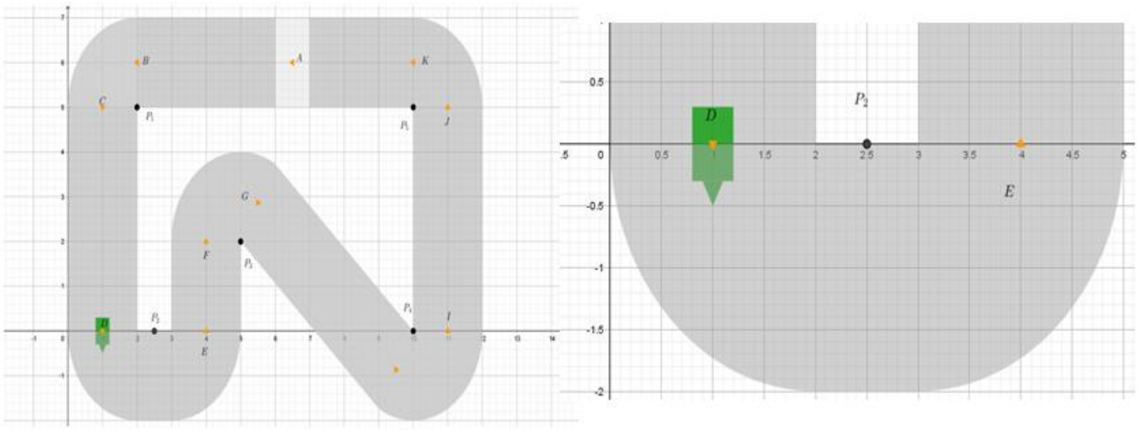
$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Obtendo a nova matriz:

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.2 & 0.8 & 0.8 & 0.9 & 1.1 & 1 \\ -0.3 & 0.3 & 0.3 & -0.3 & -0.3 & -0.3 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

O movimento é ilustrado pela Figura 24.

Figura 24: Mudança de posição de C para D



Fonte: O autor, 2020

Para o carrinho ir para o próximo ponto, o ponto E, é necessário girar 180º no sentido anti-horário e transladar, em relação ao ponto $P_2 = (2.5,0)$. Se cada vértice do contorno do carrinho é dado por (x, y), então os vértices do contorno do carrinho após o processo são dados por:

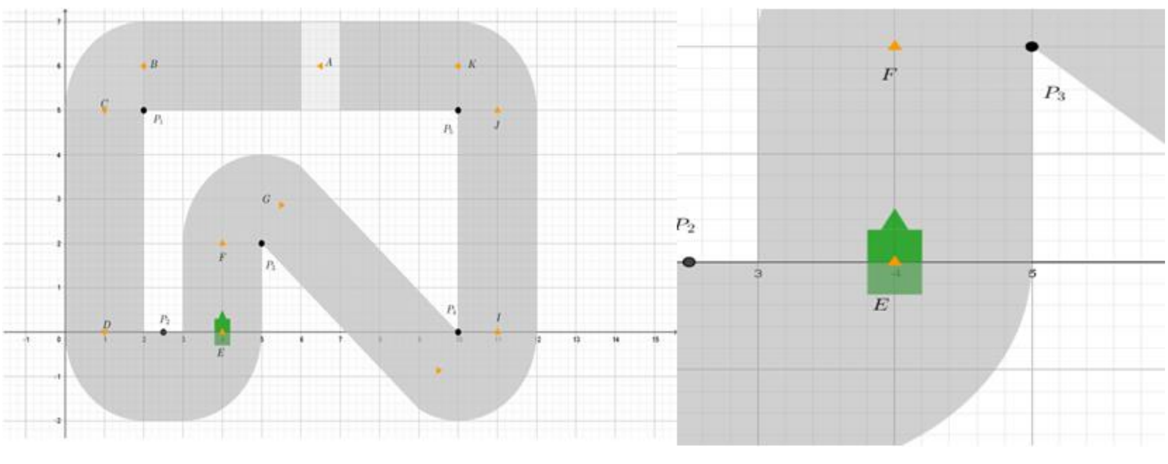
$$T_4 = \begin{bmatrix} \cos\ 180° & -sen\ 180° \\ sen\ 180° & \cos\ 180° \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x - 2.5 \\ y - 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x - 2.5 \\ y - 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Segue que,

$$T_4 = \begin{bmatrix} 3.8 & 3.8 & 4.2 & 4.2 & 4.1 & 3.9 & 4 \\ 0.3 & -0.3 & -0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Esta rotação e translação estão exibida na Figura 25.

Figura 25: Mudança de Posição de D para E



Fonte: O autor, 2020

Para o carrinho ir até o ponto F, ele deve ser transladado verticalmente. Isto pode ser feito através do vetor $\overrightarrow{EF} = (0, 2)$, aplicado a cada vértice de seu contorno. Abreviadamente adicionamos a matriz T_4 a matriz M_2.

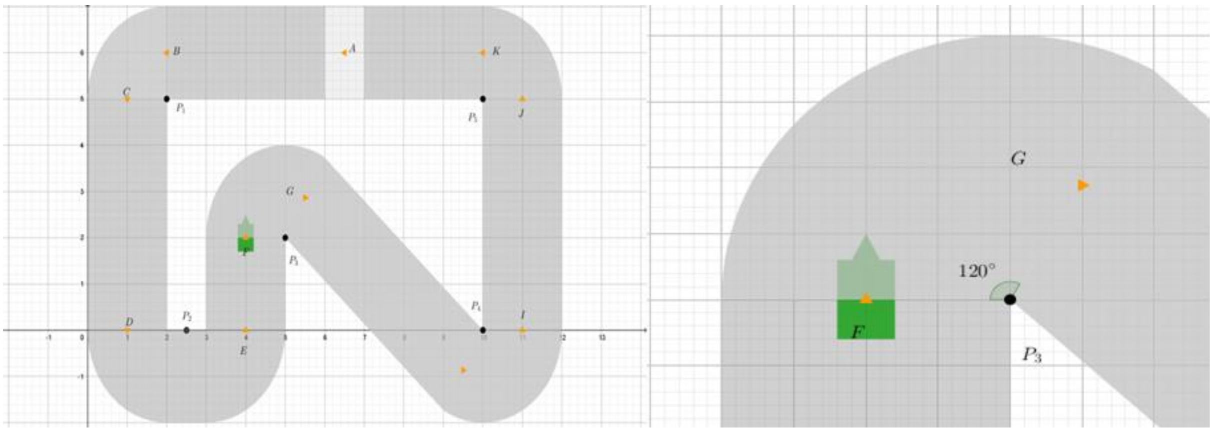
$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obtendo a matriz,

$$T_5 = \begin{bmatrix} 3.8 & 3.8 & 4.2 & 4.2 & 4.1 & 3.9 & 4 \\ 2.3 & 1.7 & 1.7 & 2.3 & 2.3 & 2.3 & 2.5 \end{bmatrix}.$$

O deslocamento para o ponto F está ilustrado na Figura 26.

Figura 26: Mudança de posição de E para F



Fonte: O autor, 2020

Agora deslocaremos o carrinho para o ponto G através de um giro de 120º no sentido horário em relação ao ponto $P_3 = (5, 2)$, e de uma translação.

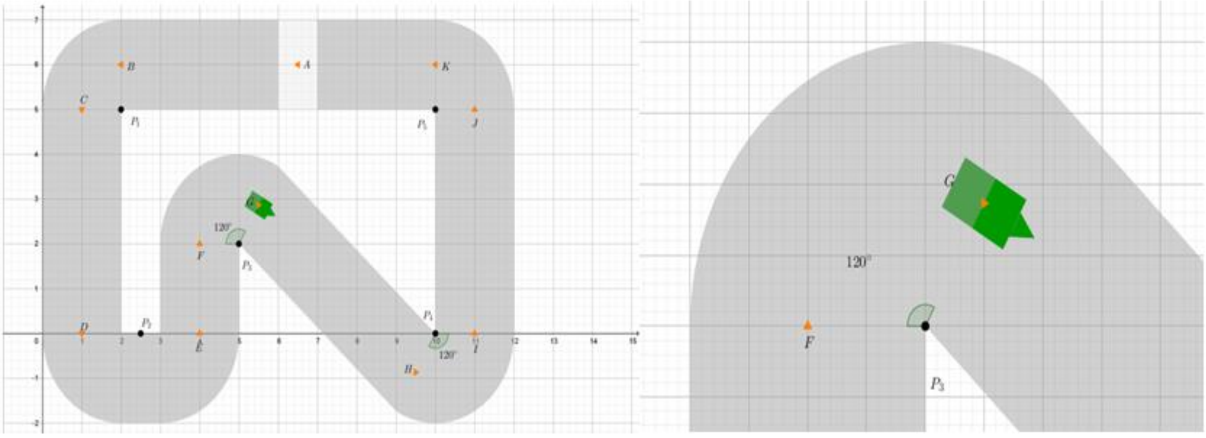
$$T_6 = \begin{bmatrix} \cos\ (-120°) & -sen\,(-120°) \\ sen\,(-120°) & \cos\ (-120°) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x-5 \\ y-2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x-5 \\ y-2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Segue que,

$$T_6 = \begin{bmatrix} 5.86 & 5.34 & 5.14 & 5.66 & 5.71 & 5.81 & 5.93 \\ 2.89 & 3.19 & 2.84 & 2.54 & 2.63 & 2.80 & 2.62 \end{bmatrix}.$$

A Figura 27 mostra o processo de rotação e translação anunciado a cima.

Figura 27: Mudança de posição de F para G



Fonte: O autor, 2020

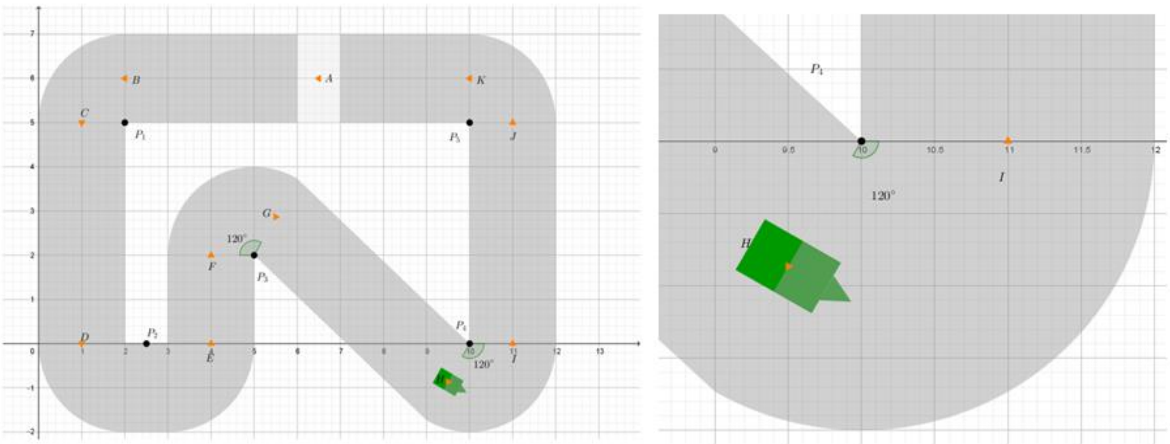
Para o carrinho ir até o ponto H, ele deve ser transladado na direção do vetor $\overrightarrow{GH} = (4, -3.73)$. Isto pode ser feito aplicado $\overrightarrow{GH} = (4, -3.73)$ a cada vértice de seu contorno. Abreviadamente adicionamos a matriz T_6 a matriz M_3.

$$M_3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ -3.73 & -3.73 & -3.73 & -3.73 & -3.73 & -3.73 & -3.73 \end{bmatrix}.$$

Obtendo a matriz $T_7 = \begin{bmatrix} 9.86 & 9.34 & 9.14 & 9.66 & 9.71 & 9.81 & 9.93 \\ -0.84 & -0.54 & -0.89 & -1.19 & -1.1 & -0.93 & -1.11 \end{bmatrix}.$

A Figura 28, a seguir ilustra o movimento descrito a cima.

Figura 28: Mudança de posição de G para H



Fonte: O autor, 2020

Agora deslocaremos o carrinho para o ponto I através de um giro de 120º no sentido anti-horário em relação ao ponto $P_4 = (10, 0)$, e de uma translação.

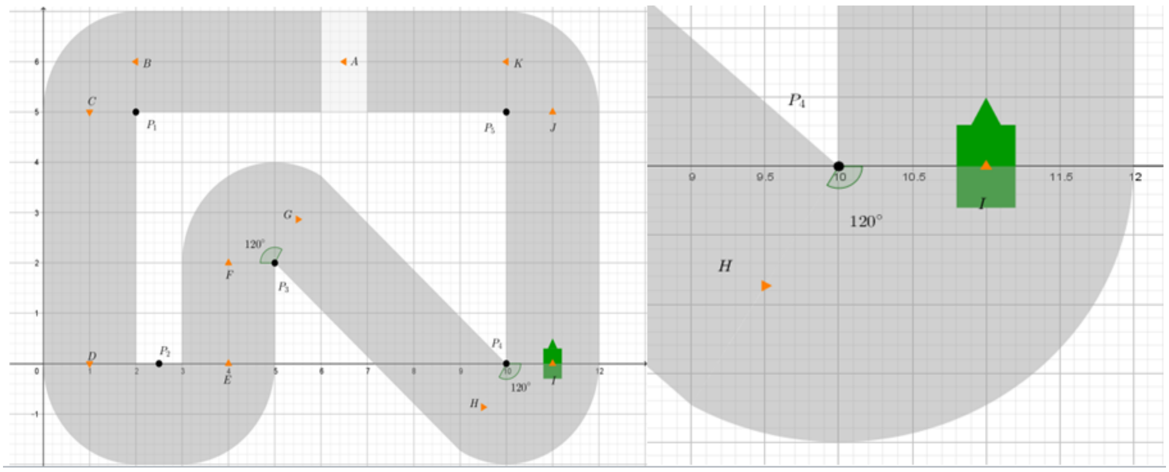
$$T_8 = \begin{bmatrix} \cos\ (120°) & -sen\ (120°) \\ sen\ (120°) & \cos\ (120°) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x - 10 \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x - 10 \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Segue que,

$$T_8 = \begin{bmatrix} 10.8 & 10.8 & 11.2 & 11.2 & 11.1 & 10.9 & 11 \\ 0.3 & -0.3 & -0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

O movimento do carrinho pode ser observado na Figura 29.

Figura 29: Mudança de posição de H para I



Fonte: O autor, 2020

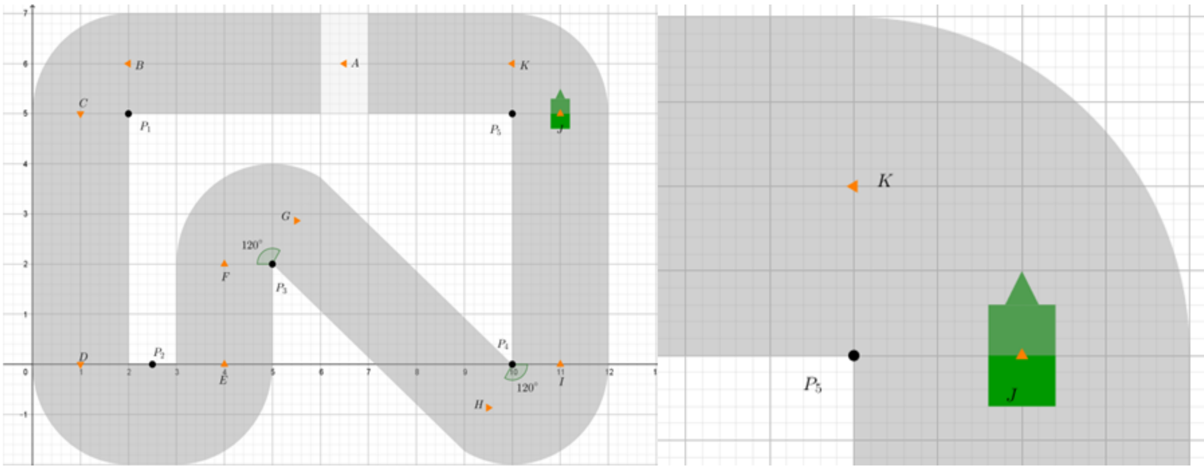
Para o carrinho ir até o ponto J, ele deve ser transladado verticalmente na direção do vetor $\overrightarrow{IJ} = (0,5)$. Isto pode ser feito aplicando $\overrightarrow{IJ} = (0,5)$ a cada vértice de seu contorno. Abreviadamente adicionamos a matriz T_8 a matriz M_4.

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Obtendo a matriz $T_9 = \begin{bmatrix} 10.8 & 10.8 & 11.2 & 11.2 & 11.1 & 10.9 & 11 \\ 5.3 & 4.7 & 4.7 & 5.3 & 5.3 & 5.3 & 5.5 \end{bmatrix}.$

A Figura 30, a seguir ilustra o movimento descrito a cima.

Figura 30: Mudança de posição de I para J



Fonte: O autor, 2020

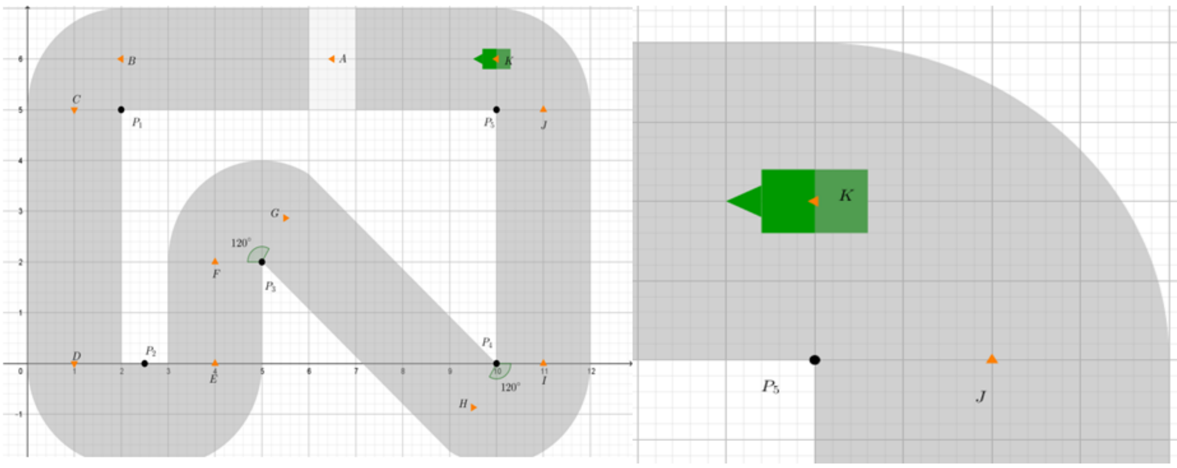
Para o carrinho ir para o próximo ponto, o ponto K, é necessário girar 90º no sentido anti-horário e transladar, em relação ao ponto $P_5 = (10{,}5)$. Se cada vértice do contorno do carrinho é dado por (x, y), então os vértices do contorno do carrinho após o processo são dados por:

$$T_{10} = \begin{bmatrix} \cos\, 90° & -sen\; 90° \\ sen\; 90° & \cos\, 90° \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x - 10 \\ y - 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x - 10 \\ y - 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Obtendo a matriz $T_{10} = \begin{bmatrix} 9.7 & 10.3 & 10.3 & 9.7 & 9.7 & 9.7 & 9.5 \\ 5.8 & 5.8 & 6.2 & 6.2 & 6.1 & 5.9 & 6 \end{bmatrix}.$

O movimento do carrinho pode ser observado na Figura 31.

Figura 31: Mudança de posição de J para K



Fonte: O autor, 2020

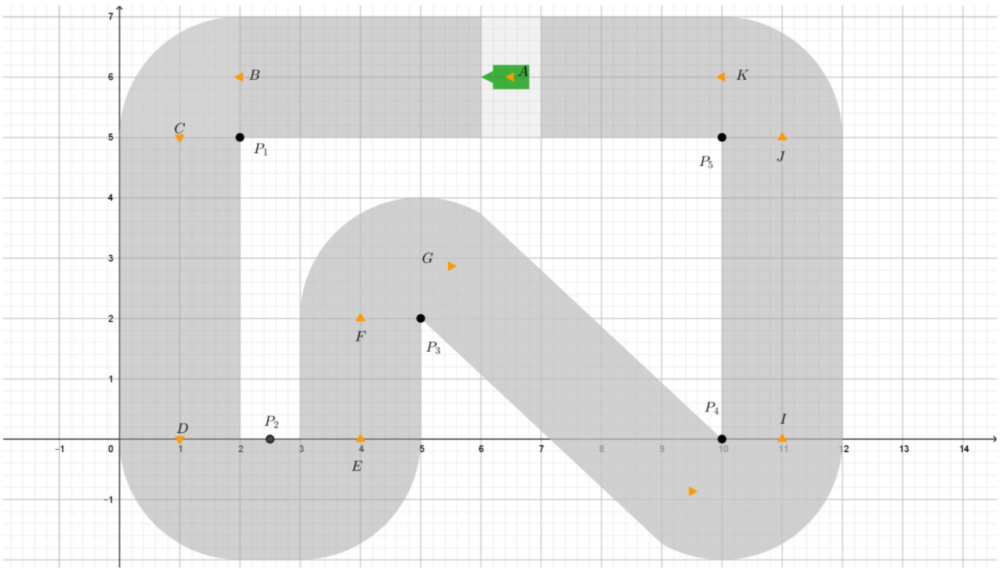
Por fim, para que o carrinho retorne ao ponto A, ele deve ser transladado horizontalmente na direção do vetor $\overrightarrow{KA} = (-3.5,0)$. Isto pode ser feito aplicando $\overrightarrow{KA} = (-3.5,0)$ a cada vértice do seu contorno. Abreviadamente adicionamos a matriz T_{10} a matriz M_5.

$$M_5 = \begin{bmatrix} -3.5 & -3.5 & -3.4 & -3.5 & -3.5 & -3.5 & -3.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obtemos a matriz $T = \begin{bmatrix} 6.2 & 6.8 & 6.8 & 6.2 & 6.2 & 6.2 & 6 \\ 5.8 & 5.8 & 6.2 & 6.2 & 6.1 & 5.9 & 6 \end{bmatrix}.$

Finalmente o carrinho deu uma volta completa no circuito, retornando ao ponto A, como mostrado na Figura 32.

Figura 32: Volta à posição inicial



Fonte: O autor, 2020

Ressaltamos mais uma vez que esta seção tem a pretensão de tornar evidente a relevância do Ensino de qualidade da Álgebra Linear na Educação Básica. Mostramos uma aplicação singela de Transformações Lineares através de operações Matriciais. Acreditamos em que a Álgebra Linear é de suma importância para o desenvolvimento da computação, uma vez que a Computação Gráfica é utilizada em diversas áreas.

5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS DE PESQUISA

Este trabalho buscou enfatizar a necessidade de um estudo sólido e aprofundado sobre a Álgebra Linear no Ensino Básico, em especial os conceitos referentes às Matrizes, nesse sentido, nossa pesquisa é capaz de motivar, questionar e analisar a presença restrita da Álgebra Linear no Ensino Médio, partindo de sua contextualização em relação a outros campos da Matemática. Acreditamos que a relevância desta pesquisa reside em propor objetos de estudos não convencionais para as práticas pedagógicas já fixadas em nossos currículos e no cotidiano escolar, as quais continuam sendo tratadas superficialmente através de questões operacionais, sem ponderar as contundentes aplicações e os potenciais recursos tecnológicos inerentes ao tema.

Tal como pontuado neste trabalho, a quarentena nos trouxe muitos obstáculos, impossibilitou que entrássemos em bibliotecas para consulta, inviabilizou o contato com docentes de Universidades, professores com os quais não tínhamos vínculo ou contato algum para apresentar a pesquisa, discutir ideias e ouvir relatos de experiência sobre o Ensino, sobre como os alunos têm chegado às Universidades estudando cada vez menos a Álgebra Linear no Ensino Básico.

Apesar deste cenário, realizamos uma pesquisa que entendemos ser coerente e relevante do ponto de vista das aplicações. Em consonância com as práticas pedagógicas, investigamos todos os currículos da esfera estadual disponíveis na internet. Convém reiterar, ainda, que a realização deste trabalho só foi possível em grande parte graças aos recursos da Álgebra Linear ao dispor da tecnologia.

Mais uma vez gostaríamos de ressaltar a nossa convicção da importância da Álgebra Linear no Ensino Básico. Acreditamos que problemas contextualizados e relacionados ao cotidiano do indivíduo tendem a despertar maior interesse e a instigar o espírito de pesquisa; com este trabalho, foi possível conhecer importantes aplicações envolvendo operações básicas da Álgebra Linear, tal como o estudo de Matrizes e Transformações Lineares. As aplicações permitem que os alunos do Ensino Básico pesquisem, discutam e modelem problemas com o uso da tecnologia.

O processo foi bem desafiador e motivador para seguirmos pesquisando a importância da Álgebra Linear, seja na Educação Básica ou Superior. No terceiro capítulo, trouxemos algumas aplicações, uma delas Introdução ao Conjunto dos Números Complexos, teoria riquíssima, que acreditamos que possa ser aprofundada em outros trabalhos, assim como na seção Computação Gráfica cabe a ser explorada a teoria de programação que há por trás da geração de imagens.

Pretendemos, futuramente, debruçarmo-nos sobre o estudo da Álgebra Linear aplicada a Teoria de grafos que é um ramo da Matemática conhecido como Teoria Espectral de Grafos. Também é de nosso interesse prosseguir com a pesquisa na área da Educação Matemática, mais especificamente relacionada à Álgebra Linear.

Por fim, é oportuno destacar a importância do PROFMAT para a pesquisa e para a qualificação dos professores e educadores. Sem dúvidas, Programas de Pós-Graduação como esse tendem a universalizar a Educação tornando-a mais equânime em todo o Brasil.

REFERÊNCIAS

AGÊNCIA BRASIL. **Um em cada quatro brasileiros não têm acesso a internet**. Globo.com. 29/04/2020. Negócios. Disponível em: https://epocanegocios.globo.com/Tecnologia/noticia/2020/04/um-em-cada-4-brasileiros-nao-tem-acesso-internet-mostra-pesquisa.html. Acesso em: 15 janeiro 2021.

BARBOSA, Andreia C. Maciel. **Transformações no Plano: Alunos do Ensino Médio Interagindo em Ambiente Colaborativo Virtual.** 2014. 174 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, 2014.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra Linear**. 2ª edição. Campinas, SP: Editora Harbra, 1980.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf. Acesso em: 10 de maio de 2020.

CERRI, Cristina ; MONTEIRO, Martha S**. História dos Números Complexos.** São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2001. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em: 12 dez. 2020.

CHAGAS, Alexandre Silva. **O Geogebra como Ferramenta de Auxílio no Ensino de Vetores no Ensino Médio**. 2014. 86 f. Dissertação (Mestrado Profmat). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 3ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2016.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; e CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção Profmat).

FONSECA FILHO, Cléuzio. **História da Computação** : O caminho do pensamento e da tecnologia. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2007.

FONSECA FILHO, Cléuzio. **História da Computação** : O caminho do pensamento e da tecnologia. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2007.

FURTADO, Ana Luiza C. **Dificuldade na Aprendizagem de Conceitos Abstratos de Álgebra Linear.** 2010. 166 f. Dissertação (Mestrado PEMAT-UFRJ). Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

GONÇALVES, Adilson; SOUZA, Rita M. L. **Introdução à Álgebra Linear**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1977.

GONÇALVES, Haniel S. **A importância das matrizes e Transformações lineares na Computação gráfica**. 2013. 42 f. Dissertação (Mestrado Profmat). Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

IEZZI, Gelson. **Matemática: Ciência e Aplicações**. 9ª edição. São Paulo: Editora Saraiva, 2016.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA - IMPA. **Brasil promovido à Elite da Matemática**. Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: https://impa.br/noticias/brasil-e-promovido-a-elite-da-matematica-mundial/. Acesso em: 20 de outubro de 2020.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Matriz de Referência ENEM**. Brasília, 2009. Disponível em: http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 30 de novembro de 2020.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Resultado PISA**. Brasília, 2019. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206. Acesso em: 20 de outubro de 2020.

KASPRZYKOWSKI, André G. de A**. Análise Comparativa da Prova de Matemática do ENEM e do Vestibular da UFRJ**. 2014. 66 f. Dissertação (Mestrado Profmat). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

LABORATÓRIO VISGRAF. **O Globo**. Rio de Janeiro, 2013. Design Rio. Disponível em: https://oglobo.globo.com/rio/laboratorio-visgraf-10439617. Acesso em: 22 fev. 2021

PAIVA, Manoel. **Matemática**. 3ª edição. São Paulo: Editora Moderna, 2015.

PALIGA, Aline. **Espaços Vetoriais**. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/nucleomatceng/files/2012/07/Espa%C3%A7os-Vetoriais.pdf. Acesso em: 10 de fevereiro de 2021.

PINTO JÚNIOR, Ulício. **A história dos Números Complexos: " das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand"** . 2009. 94 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

RORRES, Anton. **Álgebra linear Com Aplicações**. 8ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.

SANTOS, Silvia Lucia P. **Análise das provas de Matemática do vestibular da UERJ e do ENEM**. 2020. 104 f. Dissertação (Mestrado Profmat). Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

SCHEWTSCHIK, Annaly. **O Planejamento de aula: um instrumento de garantia de aprendizagem**. Artigo. 2017. Disponível em: https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/26724_13673.pdf . Acesso em: 3 de março de 2021.

SILVA, Samuel M. **NÚMEROS COMPLEXOS: uma abordagem matricial**. 2017. 74 f. Dissertação (Mestrado Profmat). Universidade Federal de Roraima, Roraima, 2017.

SOARES, Marcio G. **Cálculo em Uma Variável Complexa**. 5ª edição. Rio de Janeiro: Impa, 2009.

STEINBRUCH, Alfredo e WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. 1995. 1ª edição. Rio Grande do Sul. Editora Pearson, 1987.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO RIO DE JANEIRO. **Edital UERJ 2020**. Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: https://www.vestibular.uerj.br/?page_id=7168. Acesso em: 30 de novembro de 2020.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO. **Disciplinas que mais reprovam na UFPE**. Pernambuco, 2018. Disponível em: https://www.ufpe.br/documents/38954/1317627/Relat%C3%B3rio+Disciplinas+que+mais+reprovam+2014+a+2017.pdf/f1ba5ea6-dbdb-4edd-b5e7-9b993f0ee838 . Acesso em: 20 de novembro de 2020.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO. **Edital UFRJ**. Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: https://acessograduacao.ufrj.br/processos/2010-1/2010-1-acesso-a-graduacao/inscricao-concurso-de-acesso-2010/Concurso_2010_Manual.pdf . Acesso em 02 de dezembro de 2020.

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE. **Edital UFF**. Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: http://www.coseac.uff.br/2010/arquivos/UFF-Vestibular%202010%20-%20Programa%20das%20provas.pdf . Acesso em: 02 de dezembro de 2020.

WESTCON. As novas perspectivas para o futuro da computação. **Winspire**.03/08/2017. Disponível em: Disponível em: https://www.winspire.com.br/as-novas-perspectivas-para-o-futuro-da-computacao/ . Acesso em: 25 de janeiro de 2021