

**COLÉGIO PEDRO II  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA,  
EXTENSÃO E CULTURA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA**

**ANA LUIZA BARBOSA CARDOSO SILVA**

**BREVE APONTAMENTO DE ESTUDOS DOS NÚMEROS  
RACIONAIS E IRRACIONAIS ATRAVÉS DAS  
REPRESENTAÇÕES DE DÍZIMAS**

Rio de Janeiro

2022



**ANA LUIZA BARBOSA CARDOSO SILVA**

**BREVE APONTAMENTO DE ESTUDOS DOS NÚMEROS RACIONAIS E  
IRRACIONAIS ATRAVÉS DAS REPRESENTAÇÕES DE DÍZIMAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, ofertado pela Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientador(a): Dra. Lílíana Manuela Gaspar Cerveira da Costa

Rio de Janeiro

2022

**COLÉGIO PEDRO II**  
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA**  
**BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER**  
**CATALOGAÇÃO NA FONTE**

S586 Silva, Ana Luiza Barbosa Cardoso

Breve apontamento de estudos dos números racionais e irracionais através das representações de dízimas / Ana Luiza Barbosa Cardoso Silva. - Rio de Janeiro, 2022.

53 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Liliana Manuela Gaspar Cerveira Costa.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Números racionais. 3. Números irracionais. I. Costa, Liliana Manuela Gaspar Cerveira. II. Colégio Pedro II. III Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Simone Alves - CRB7 5692.

**ANA LUIZA BARBOSA CARDOSO SILVA**

**BREVE APONTAMENTO DE ESTUDOS DOS NÚMEROS RACIONAIS E  
IRRACIONAIS ATRAVÉS DAS REPRESENTAÇÕES DE DÍZIMAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, ofertado pela Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Aprovado em 26 de abril de 2022.

**COMISSÃO EXAMINADORA**

---

Profa. Dra. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa

Colégio Pedro II

Orientadora

---

Me. Renato de Carvalho Alves

Colégio Pedro II

---

Me. Diego Tranjan Viug

Colégio Pedro II

Dedico esta, bem como todas as minhas conquistas, a minha amada avó Marlene Cardoso, ao meu amado padrinho Marcelo Cardoso e ao meu querido primo Rafael Cardoso, por estarem presentes em todos os momentos da minha vida. Ao meu noivo Vinícius Rafael, por toda paciência e amor.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como estudante, mas em todos os momentos é o maior apoio que alguém pode conseguir.

Um agradecimento especial a Prof. Dr<sup>a</sup>. Liliana pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho. Agradeço, também, a todos os professores que me acompanharam ao longo do curso e que, com empenho, se dedicam à arte de ensinar. E à instituição pelo ambiente criativo, de aprendizagem e oportunidade.

Agradeço a minha avó Marlene Cardoso, pois sem ela minha jornada nem seria possível. Portanto, o fato de estar completando mais uma vitória é graças a esta mulher incrível e batalhadora, que me ensinou tudo que sou hoje e sempre acreditou em mim.

Agradeço ao meu tio/padrinho Mestre Marcelo Cardoso, que por conhecer as angústias sofridas no processo, sempre esteve ao meu lado, me apoiando e me incentivando nas situações mais adversas. Sempre acreditando em mim, mesmo quando eu tinha dúvidas. Ele é o meu maior exemplo e inspiração nesta caminhada acadêmica.

Agradeço ao meu noivo Vinícius Rodrigues, por ser atencioso e paciente em todos os momentos que precisei. Além de ser meu ombro amigo e escutar todos os meus anseios, fazendo com que esta caminhada fosse mais agradável.

Agradeço, também, ao meu primo Rafael Cardoso, por todas as risadas em tempos de estresse. Aos meus amigos, que me acompanham desde a graduação, com suas opiniões e contribuições para este trabalho e para os amigos mais recentes que vieram por meio deste curso.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, em minha formação acadêmica, o meu mais sincero obrigado.



Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia das nossas palavras. O professor assim não morre jamais.

(Rubem Alves, 1999)

## RESUMO

SILVA, Ana Luiza Barbosa Cardoso Silva. **Breve apontamento de estudos dos números racionais e irracionais através das representações de dízimas.** 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2022.

Para o ensino dos números racionais e irracionais em materiais didáticos de apoio ao professor, tais como livros didáticos, cadernos e apostilas do aluno, comumente são estabelecidas sequências didáticas propostas para educação básica. Portanto, este trabalho visa, em um primeiro momento, caracterizar as sequências didáticas encontradas e as problemáticas existentes. Além disso, definem-se as habilidades específicas relacionadas ao conhecimento dos números racionais, irracionais, e em particular as dízimas, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Em um segundo momento, buscando abordagens via dízimas, foram selecionados 2 projetos, cujas propostas versam com a temática apresentada. O objetivo deste trabalho é efetuar um apontamento sobre as práticas e obter um panorama sobre o que é feito atualmente nas pesquisas da área. Assim, estabelecer discussões e definir os ganhos na aprendizagem dos conceitos de número racional e irracional via dízimas. Por fim, conclui-se que, as discussões na sala de aula são muito maiores pela via das dízimas, do que pelas abordagens sugeridas nos materiais de apoio didático, merecendo, por esse fato, maiores estudos. Assim, futuros professores e atuantes, que pretendem oportunizar noções e conceitos inerentes aos números racionais e irracionais em suas práticas, podem encontrar, em um mesmo documento, diferentes formas de abordagem, discussões e reflexões.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Números Racionais. Números Irracionais. Dízimas.

## ABSTRACT

SILVA, Ana Luiza Barbosa Cardoso Silva. **Brief note of Studies of rational and irrational numbers through the decimal representations.** 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2022.

The teaching materials supporting the professor as books, notebooks and handouts, generally establish sequences for the education of rational and irrational numbers as a didactic proposal to the basic education. From this assumption, this study is divided into two stages. In the first step, some didactic sequences and their issues were researched and described, and the specific skills related to the knowledge of rational and irrational numbers were listed, in particular the decimals, according to the Base Nacional Comum Curricular (BNCC), to the 7th, 8th and 9th grades. In the second part, two insights are revealed on the decimals, taking into account two projects researched in the bibliographic search. The objective of the present study is to carry out a brief introduction around the teaching practices of rational and irrational numbers through the decimals, in order to provide an initial picture on the state of the art through researches in this area. Thus, it is believed to be possible to establish discussions that bring positive results on learning the researched concepts. Although not completely conclusive, the presented notes indicate that discussions in class are more intense in approaches using decimals than when compared to those suggested in teaching materials. Hence, future professors and enthusiasts in the subject, that intend to enable notions and concepts inherent to the rational and irrational numbers in their practices, begin to have different means of approach, discussions and reflections in a single document, what may contribute for the development of future studies.

**Keywords:** Mathematics Education. Rational numbers. Irrational numbers. Decimal expansion.

## LISTA DE FIGURAS

<a href="#">Figura 1 - Conjunto dos números racionais</a>	27
<a href="#">Figura 2 - Frações</a>	28
<a href="#">Figura 3 - Dízima periódica</a>	28
<a href="#">Figura 4 - Números racionais e as dízimas periódicas</a>	29
<a href="#">Figura 5 - Passo a passo da fração geratriz</a>	30
<a href="#">Figura 6 - Apresentação de <math>\pi</math></a>	30
<a href="#">Figura 7 - Apresentação de <math>\sqrt{2}</math></a>	32
<a href="#">Figura 8 - Contextualização do irracional</a>	32
<a href="#">Figura 9 - A ideia de número irracional</a>	33
<a href="#">Figura 10 - Localizar os irracionais na reta numérica</a>	33
<a href="#">Figura 11 - Proposta por construção geométrica</a>	39
<a href="#">Figura 12 - Representação de fração contínua</a>	45
<a href="#">Figura 13 - Aplicação de frações contínuas</a>	45
<a href="#">Figura 14 - Aproximação para <math>\sqrt{2}</math></a>	46

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

DCN – Diretrizes Curriculares Nacionais

PCN – Parâmetro Curricular Nacional

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

RPM – Revista do Professor de Matemática

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

UEPB – Universidade Estadual da Paraíba

UNESP – Universidade Estadual Paulista

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1.1 Justificativa</b>	<b>15</b>
<b>1.2 Objetivos</b>	<b>16</b>
<b>1.2.1 Objetivo Geral</b>	<b>16</b>
<b>1.2.2 Objetivos Específicos</b>	<b>16</b>
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>17</b>
<b>3 METODOLOGIA</b>	<b>23</b>
<b>3.1 Critérios de seleção e análise</b>	<b>23</b>
<b>3.1.1 Critérios atendendo à BNCC</b>	<b>24</b>
<b>3.1.2 Propostas encontradas nos materiais de apoio didático</b>	<b>26</b>
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>33</b>
<b>4.1 “Sobre números irracionais e possibilidades para seu ensino”</b>	<b>33</b>
<b>4.1.1 Discussão do texto “Sobre Números Racionais e possibilidades para seu ensino”</b>	<b>37</b>
<b>4.2 “Números racionais: uma perspectiva envolvendo as frações contínuas”</b>	<b>41</b>
<b>4.2.1 Discussão do texto “Números racionais: uma perspectiva envolvendo as frações contínuas”</b>	<b>44</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>47</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>51</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática sempre foi alvo de discussões, causando muita divergência de opinião em relação a como deve ser tratada dentro de sala de aula. Acredita-se, porém, que o processo de aprendizagem é favorecido através da aproximação que o tema em estudo tenha com o aluno, podendo se apoiar em diversos recursos como ferramenta, tais como exemplos do cotidiano do aluno, atividades, jogos, vídeos, dentre outros. Neste trabalho, buscou-se dentre as propostas existentes sobre ensino de números racionais e irracionais, selecionar aquelas que elaboraram um material complementando o conteúdo apresentado com os materiais didáticos de apoio, tais como livros didáticos e cadernos disponibilizados pela Prefeitura do Rio de Janeiro e pelo Governo de São Paulo.

Ao fazer um retrospecto, o presente trabalho se desencadeou a partir de uma experiência acadêmica pessoal, podendo perceber que, mesmo tendo contato a todo momento com os números racionais e irracionais, não existia domínio suficiente para explicar o conceito que fundamenta cada conjunto numérico. Isso gerou uma indagação: será que fazia parte apenas de uma deficiência pessoal ou se trata de uma problemática resultante do modelo de ensino usado para tratar deste tema?

No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações. (BRASIL, 2018, p. 268).

Também se torna como motivação para se abordar este tema o fato de se tratar de conjuntos cujos elementos representam medidas existentes na natureza e que são inspiração para grande parte da Matemática, além de se ter procurado encontrar e explicitar projetos que problematizam esta questão, de modo a esclarecer os conceitos de número racional e número irracional. Assim, o presente trabalho se desenvolve de modo a apontar as abordagens presentes nos livros didáticos e cadernos do aluno, do 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental, para que

após a seleção de projetos, sejam realizadas discussões com base no material investigado.

No capítulo 2 aborda-se a fundamentação teórica, através de revisão bibliográfica. Trazendo autores como Boyer (1974) e Roque (2012), para relacionar aspectos históricos da matemática; Moreira (2012) e D'Ambrósio (2005), para refletir sobre o papel do professor na aprendizagem; além de Broetto (2017), Niven (1984) e Costa e Monteiro (1996), para dialogar com as caracterizações dos números racionais e irracionais. Neste momento destaca-se, também, um importante papel da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para que se observe o desencadeamento e as circunstâncias em que diferentes conjuntos numéricos devem ser utilizados.

No capítulo 3 desenvolve-se a metodologia utilizada de busca bibliográfica, como forma de critério de seleção e filtragem de projetos. As buscas se deram através de documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (PCN), as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para a Educação Básica, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), além de buscas através de materiais de apoio didático ao professor, como livros didáticos e apostilas, para encontrar as formas que o conteúdo se apresenta. Os critérios serão detalhados no capítulo.

No capítulo 4 são apresentados dois projetos que se encaixaram nos critérios de seleção e se destacaram por apresentarem visões distintas e abordagens diferenciadas dentre os projetos encontrados, sendo levantados apontamentos e discussões baseados na BNCC. Seguindo-se um último capítulo onde se fazem algumas reflexões e considerações finais.

O trabalho foi desenvolvido de modo a evidenciar a necessidade de problematização do ensino dos números racionais e a transposição para os irracionais, além de buscar compreender as dificuldades que os professores encontram. Por se tratar de conceitos que não são facilmente construídos pelos alunos, cabe ao professor encontrar novas sugestões, e este projeto visa ser um facilitador desta última tarefa, já que se propõe, por meio de um apontamento inicial, tornar possível observar abordagens que se destoam das demais e estimular novas pesquisas diferenciadas.

## 1.1 Justificativa

Constantemente nos deparamos com diferentes tipos de número, dentre eles: os números inteiros, números decimais exatos, números com representação decimal infinita periódica. Todos esses números possuem uma característica em comum: fazem parte do conjunto dos números racionais. Por necessidades do dia-a-dia desde há muito tempo, o homem se deparou com valores não inteiros acarretando o surgimento dos números racionais, cujo estudo faz parte da matéria básica destacada nos programas de ensino fundamental, médio e superior do sistema de ensino na atualidade.

Os homens da idade da Pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas, durante a Idade do Bronze, parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações. As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para as frações unitárias - isto é, com numerador um. O recíproco de qualquer inteiro era indicado simplesmente colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado. Convém ressaltar que as frações (positivas, é claro) surgiram antes dos números negativos, que demoraram a ser aceitos como números. (BOYER, 1974, p. 9-10).

Os números racionais possuem dois tipos de representações decimais, sendo elas finita ou infinita, ou seja, segundo Niven (1984), suas representações terminam ou não terminam. Este olhar para os números racionais desperta a atenção, já que considera suas características e variedade de formas de representação, indo ao encontro do objeto de estudo no Ensino Fundamental. A importância de se voltar o olhar para as dízimas se deve a que estas permitem que se possam fazer as conexões necessárias com o objetivo de se construir os números irracionais.

A partir deste olhar, buscaram-se estudos e propostas realizadas sobre esta temática, para que fosse possível efetuar um levantamento e obter um panorama preliminar sobre o que é feito atualmente em sala de aula. Assim, futuros professores e atuantes podem encontrar, em um mesmo documento, diferentes formas de abordagem.

Para situar melhor o tema central do trabalho, destacam-se alguns questionamentos que o motivam:

- Quais as formas de abordagem comumente apresentada para o ensino de Números Racionais e Irracionais?
- A abordagem através de dízimas já foi explorada e apresentada como sugestão metodológica?
- Qual o contributo da abordagem via dízimas para a construção e aprendizagem dos conceitos de número racional e irracional?

## **1.2 Objetivos**

Este trabalho tem os seguintes objetivos geral e específicos:

### **1.2.1 Objetivo Geral**

Analisar diferentes propostas utilizadas para o ensino dos números racionais e de números irracionais voltadas para o Ensino Fundamental, com foco em abordagens que utilizam a representação de dízimas.

### **1.2.2 Objetivos Específicos**

- Descrever e analisar dois estudos que apresentam propostas para o ensino de números racionais e de números irracionais;
- Pontuar e discutir possíveis ganhos através da abordagem via dízimas para a construção do conceito de número racional e irracional.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A importância de se recorrer a situações de vivência do aluno para que os conceitos matemáticos sejam por ele construídos está presente nos documentos oficiais que norteiam a educação básica brasileira. Ao analisar os objetos de conhecimento, as habilidades específicas e a expectativa relacionadas à Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, requisitadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é possível notar a solicitação da base em relação a articular o conteúdo com a realidade do aluno.

Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária. (BRASIL, 2018, p. 269).

Pode-se observar a existência de uma correspondência com o processo histórico descrito por Boyer (1974) para a necessidade de uma nova representação numérica. O "surgimento" dos números racionais e irracionais na educação básica, geralmente se dá a partir de uma sucessão de acontecimentos que geram necessidade da utilização de novos conjuntos numéricos, ampliando os já conhecidos. As necessidades vão sendo apresentadas de modo que o aluno as consiga associar com problemas do dia a dia. Para que ocorra essa forma sequencial, os conjuntos numéricos estão dispostos como objeto de conhecimento, de acordo com a BNCC, desde os anos iniciais conforme o quadro

**Quadro 1** - Aparição dos conjuntos numéricos na BNCC

Ano Escolar	Conjunto Numérico	Objetos de Conhecimento
1º ano	Naturais	Leitura, escrita e comparação de números naturais (até 100).
4º ano	Racionais	Números racionais: representação decimal para escrever valores do sistema monetário brasileiro.
7º ano	Inteiros	Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações.
9º ano	Irracionais	Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica.

Fonte: BRASIL, 2018.

Os números racionais podem ser representados de forma decimal finita ou periódica, e sua definição é bem estruturada no Ensino Fundamental. Porém o mesmo não ocorre com o conjunto dos números irracionais, pois sua definição não ocorre de modo a fundamentar conceitos. Segundo Eves (1995), a descoberta dos números irracionais foi um marco na história da Matemática, embora exista grande controvérsia sobre este assunto. A exemplo de controvérsia, afirma-se que a descoberta dos irracionais apenas "representou uma nova situação que motivou novos desenvolvimentos matemáticos [...] não seriam exatamente as lacunas nos fundamentos da matemática que teriam sido resolvidas com a definição dos números irracionais[...]" (ROQUE, 2012, p. 97).

Quando se fala em racional, naturalmente, se pensa em razão, quer seja pela definição em matemática, quer seja pela etimologia da palavra. Portanto, em matemática, define-se número racional como sendo todo o número da forma  $\frac{a}{b}$  com  $a$  e  $b$  números inteiros e  $b \neq 0$ .

O teorema da Divisão Euclidiana garante que:

Sendo  $a$  e  $b$  números naturais com  $b \neq 0$ , existem dois únicos números inteiros  $q$  e  $r$  tais que  $a = q \cdot b + r$ , onde  $0 \leq r < |b|$ .

Mesmo quando o número inteiro  $a$  não é múltiplo do número inteiro  $b$ , Euclides, em seus Elementos utiliza, sem enunciar explicitamente, o fato que é sempre possível efetuar a divisão de  $a$  por  $b$ , evidenciando a existência de um resto. É este fato que conduz a uma caracterização dos números racionais em termos de sua representação decimal.

Temos que os números racionais não inteiros são expressos utilizando vírgulas e podem possuir uma representação finita ou infinita e periódica. Além disso, os decimais podem ser representados como soma de frações cujo denominador é uma potência de base dez. Logo, se estabelece uma conexão entre os números decimais e suas expansões decimais, como por exemplo:

$$36,725 = 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$$

Todavia, se um número não conseguir ser representado na forma na forma  $\frac{a}{b}$ , com  $a$  e  $b$  números inteiros e  $b \neq 0$ , será dito não racional, ou irracional. Porém, definir os irracionais desta maneira gera a interpretação de que quaisquer números, de quaisquer campos numéricos, que não possam ser representados na forma descrita também seja irracional, o que seria um equívoco. Logo, definir os irracionais como uma negativa dos racionais faz com que este conjunto não possua uma definição bem estruturada.

Os números irracionais possuem representações decimais infinitas não periódicas. Quando surgem em livros didáticos e cadernos do aluno na educação básica, possuem definições frequentemente limitadas: os números irracionais acabam por ser caracterizados em termos do que não são. Desta forma, tem-se que as definições frequentemente encontradas são: "i) números que não podem ser representados como frações de inteiros; ii) números cuja representação decimal é infinita e não-periódica; iii) números reais que não são racionais" (BROETTO, 2017 p. 34).

É possível dizer que o número irracional, de certa forma, se torna enigmático diante de suas definições. Afinal, ele não é uma fração de inteiros, não é uma dízima periódica e não é racional. Mas quais serão os danos ou ganhos de definir os irracionais em termos do que "não são"? Como construir seu conceito de modo significativo?

Sobre a forma decimal dos números racionais, é sabido que "representações decimais de alguns números racionais são finitas, terminam [...] outros números racionais têm uma representação decimal infinita, que não termina" (Niven, 1984, p. 34). Compreender estas distinções presentes nos racionais, de acordo com Niven, desperta a atenção devido às suas características e variedade de formas de representação, sendo este o objeto de estudo no Ensino Fundamental.

Uma reflexão feita por Niven, sobre a definição de racional, faz com que se note o papel da definição de um objeto matemático, especificamente dos racionais.

A definição de um número racional contém as palavras "um número que pode ser colocado na forma  $a/d$ , onde  $a$  e  $d$  são inteiros e  $d \neq 0$ ". Por que não dizemos simplesmente "um número da forma  $a/d$ , onde  $a$  e  $d$  são

inteiros e  $d \neq 0$ ”? O motivo é o seguinte: existem infinitos modos de descrever um dado número racional (por exemplo,  $2/3$  pode ser escrito como  $4/6$ ,  $6/9$ , ... ou  $2\pi/3\pi$ , ou  $2\sqrt{3}/3\sqrt{3}$ , ou  $-10/-15$ , mencionando apenas alguns) e não vamos querer que nossa definição de número racional dependa da maneira particular escolhida para representá-lo. (NIVEN, 1984, p. 31-32).

Dá a importância de se voltar o olhar para as dízimas com o intuito de entender seu papel na aprendizagem e as conexões possíveis na abordagem de números irracionais. Afinal, é neste aspecto que os racionais se diferem dos irracionais. Para uma dízima não periódica, não existirão dois inteiros na forma  $a/b$ , com  $b \neq 0$  que a represente, apenas será possível encontrar uma fração tão próxima quanto se queira.

Como objeto de estudo do presente trabalho, serão considerados os projetos que visem abordagens para o ensino dos conjuntos dos números racionais e irracionais. Tendo como foco as abordagens via dízimas, sejam elas finitas, periódicas e não periódicas, busca-se observar como estas influenciam e transpõem conceitos entre os racionais e irracionais.

A Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel,

[...] se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é não-literal e não-arbitrária. Nesse processo, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva. (MOREIRA, 2012, p. 2).

Ou seja, o processo de aprendizagem significativa só será alcançado quando se consegue relacionar, de modo intencional, o conhecimento prévio do aluno, com o conteúdo que está sendo abordado. Assim, este trabalho tem como perspectiva a Teoria da Aprendizagem Significativa, e entende como ferramentas de apoio a esta teoria de aprendizagem a utilização de meios como:

[...] um enunciado, uma pergunta, uma situação-problema, uma demonstração, um filme, uma leitura introdutória, uma simulação. [...] a condição é que preceda a apresentação do material de aprendizagem e que seja mais abrangente, mais geral e inclusivo do que este. (MOREIRA, 2021, p. 11).

Partindo de uma afirmativa comum, que certamente algum professor de

matemática em sua trajetória lhe disse, "a matemática está em tudo", surgem algumas indagações. Afinal, será que fica claro para todos que a matemática está em tudo? É de fácil percepção para o aluno associar qualquer temática dentro da matemática com um elemento da natureza?

Ao utilizar a afirmativa inicial como uma justificativa de importância da matemática, provavelmente o professor estará baseado em conhecimento próprio, uma vez que "A matemática tem uma situação privilegiada, pois relaciona-se com todas as áreas de conhecimento." (D'AMBROSIO, 2005, p. 68). Mas afirmar a presença da matemática, sem estar acompanhada de algo palpável dentro do universo do aluno pode causar estranheza, afinal se "a matemática está em tudo" então qualquer pessoa será capaz de observá-la, correto?

Neste momento, busca-se uma reflexão sobre o papel do professor e como sua ação pode ser fundamental, pois "(...) podemos dizer que transferência de conhecimentos é muito mais complexa que a mera instrução" (D'AMBROSIO, 2005, p. 70). Assim, o professor é aquele capaz de guiar o aluno para a observação da natureza sob a perspectiva da matemática, e faz com que esses conhecimentos sejam capazes de permitir ao aluno fazer essa observação de que "a matemática está em tudo" por si próprio.

Apesar de conceitos matemáticos, em particular os conceitos de número racional ou irracional aqui referidos, não se darem a partir de um esquema único e eficaz que produza sua completude, ou seja, não existe uma única representação capaz de produzir o todo do objeto matemático em questão (MORETTI, 2002, p. 347), no presente trabalho investigaremos abordagens que juntas podem contribuir para se elucidar os conceitos de número racional e de número irracional.

Acredita-se que investir esforços em aspectos históricos, como mais uma perspectiva deste trabalho, permite o engrandecimento da visão do professor e, conseqüentemente, dos alunos, pois a partir destes mesmos aspectos torna-se passível a percepção de avanços, dificuldades e mudanças que ocorreram ao longo dos séculos, reafirmando que "Muito mais do que um recurso didático para tornar as aulas mais 'interessantes' e 'atraentes', entendemos que a história da matemática é capaz de dar sentido aos números irracionais" (BROETTO, 2017, p. 68).

Em tempos mais antigos os números irracionais não eram definidos como tal,

apenas se classificavam como grandezas incomensuráveis e a sua existência causou alguma controvérsia, abalando principalmente o pensamento dos Pitagóricos (BOYER, 1974). Na atualidade, "Os números irracionais tais como os conhecemos hoje são resultado de uma construção recente da matemática, ocorrida na transição do século XIX para o século XX" (BROETTO, 2017, p. 70), e é possível observar que ainda existem dificuldades na sua compreensão, visto que desafiam o senso comum e a intuição geométrica.

Vale destacar que os números racionais e irracionais estão presentes nos currículos escolares, desde muito cedo, sendo abordados da mesma forma, que será apresentada na seção de materiais de apoio didático do professor. Portanto, ocorre uma naturalização dos números racionais e irracionais como elementos do conjunto dos números reais, apenas como aceitação de uma informação. Causar esta naturalização dificulta desenvolver novos pensamentos e novas abordagens que poderiam ser mais eficientes.

Um dos fatores que atrasa a compreensão dos números racionais é a utilização prematura das regras nos estudos das frações e decimais, visto que os alunos não reconhecem a ligação entre o seu conhecimento dos números e as respectivas regras na resolução de situações na aula de Matemática. (COSTA e MONTEIRO, 1996, p. 60)

Ainda segundo Costa e Monteiro (1996), como consequência de uma abordagem mais prática, os alunos têm dificuldade em conseguir captar o conceito de número racional, que serve como base para diversos conhecimentos, inclusive para a conceitualização dos números irracionais, tornando-se o primeiro passo para uma sequência de erros. O que se verifica é que os alunos tendem a reproduzir modelos já utilizados e ao reproduzirem de maneira robótica, sem avaliar as novas condições de um determinado contexto utilizado, demonstram uma deficiência na compreensão do conceito de número racional.

### 3 METODOLOGIA

A partir dos questionamentos apresentados anteriormente, buscou-se fazer um levantamento de pesquisas que visem propor novas abordagens para o ensino dos números racionais e irracionais e direcionadas para alunos do 7º ao 9º anos do ensino fundamental. A metodologia aplicada foi a de pesquisa bibliográfica descritiva e análise qualitativa do material selecionado.

Para ocorrer uma análise e seleção adequada dos materiais para análise, foram consultadas fontes pertinentes, como por exemplo, os PCN para o Ensino Fundamental, as DCN para a Educação Básica e a BNCC, para compreender se as propostas estavam dentro dos critérios estabelecidos por tais documentos e se eram adequadas para a o ano escolar que é neles estabelecido.

Através de buscas eletrônicas, efetuadas no Google Acadêmico, Portal de Periódicos da CAPES, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Revista do Professor de Matemática (RPM) e bibliotecas digitais, houve busca por trabalhos publicados que versam sobre o tema desta pesquisa. Todas as consultas foram voltadas para os anos finais do ensino fundamental no que se refere à matemática e/ou o conteúdo abordado na temática desta pesquisa. Cada documento oficial auxiliou nas melhores escolhas e critérios de acordo com seus objetivos, expostos a seguir.

#### 3.1 Critérios de seleção e análise

Para realizar a seleção de trabalhos/pesquisas voltadas para o tema em estudo, com o intuito de compreender melhor as capacidades a serem exploradas nos anos finais do ensino fundamental, no ensino da matemática, e articulação do conteúdo com o contexto social que deve ser realizado, utilizou-se os PCN para o Ensino Fundamental de Matemática pois estes “apresentam os objetivos em termos das capacidades a serem desenvolvidas em cada ciclo, assim como os conteúdos para desenvolvê-las” (BRASIL, 1998, p. 16) e as DCN para a Educação Básica, pois “São estas diretrizes que estabelecem a base nacional comum, responsável por

orientar a organização, articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas de todas as redes de ensino brasileiras” (BRASIL, 2013, p. 4).

Buscando as competências e habilidades específicas que devem ser desenvolvidas no ensino da Matemática, voltada para cada ano escolar, utilizou-se a BNCC “documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica” (BRASIL, 2018, p. 7).

### 3.1.1 Critérios atendendo à BNCC

Diante das habilidades específicas determinadas para cada ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental, pela BNCC, buscaram-se aquelas que tangem pontos relevantes para o estudo de dízimas periódicas e não periódicas Assim, as propostas selecionadas deverão estar de acordo com a BNCC. Será um critério de exclusão, caso alguma proposta não esteja de acordo com as habilidades citadas.

Embora de forma incipiente, no 6º ano dos Anos Finais do EF, surgem na BNCC algumas habilidades envolvendo a representação decimal dos números racionais.

**(EF06MA01)** Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.

**(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

**(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

**(EF06MA11)** Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora. (BRASIL, 2018, p.301).

Ainda de acordo com a BNCC, nos 7º e 8º anos do Ensino Fundamental, as habilidades EF07MA10 e EF07MA08, que devem ser alcançadas, dizem respeito aos números racionais. Os alunos devem ser capazes de comparar e ordenar “[...]”

frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador." (BRASIL, 2018, p. 307), e "[...] números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica" (BRASIL, 2018, p. 307).

Apesar de os números irracionais não serem abordados no 7º ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental, pode perceber-se que os alunos começam a ter contato gradual com esses números. São requeridas habilidades que envolvem noção de aproximação relacionada a medidas e contato inicial com o irracional  $\pi$ , através da construção de circunferências.

**(EF07MA29)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.

**(EF07MA33)** Estabelecer o número  $\pi$  como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica. (BRASIL, 2018, p. 309).

Portanto, através das habilidades EF07MA29 e EF07MA33, observa-se que, apesar de não existir a obrigatoriedade de definição de número irracional, abordam-se temas como aproximações e o surgimento do número  $\pi$ . Essas situações problematizam os racionais finitos como única forma de representação numérica. Surge, portanto, a necessidade de novas representações/representantes para novas situações, que serão resolvidas e definidas somente no 8º ano do Ensino Fundamental, segundo:

**(EF08MA02)** Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

**(EF08MA05)** Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica. (BRASIL, 2018, p. 313-315).

Assim, verifica-se que, no 8º ano, surge uma novidade relativa aos racionais cuja representação é uma dízima periódica. Diante desta nova representação, de acordo com a habilidade EF08MA05, ocorre a necessidade de relacionar procedimentos que manipulem as dízimas periódicas, para obtenção da fração geratriz.

Além disso, operações como potenciação e radiciação são apresentadas e

definidas com recurso aos racionais, pela habilidade EF08MA02. Esta sequência, exposta na BNCC, servirá para estruturar conceitualmente os racionais. Em seguida os irracionais são definidos no 9º ano do Ensino Fundamental II.

**(EF09MA01)** Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

**(EF09MA02)** Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

**(EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (BRASIL, 2018, p. 317-319).

Somente no 9º ano os números irracionais são abordados explicitamente e então definidos, como se pode observar nas habilidades EF09MA01 e EF09MA02. Porém, não se possui uma habilidade específica que exija a correlação entre os racionais e irracionais, sendo a habilidade EF09MA02 a que mais se aproxima disso, pois ao compreender os irracionais como parte dos reais, faz surgir deste modo uma única ligação com os racionais.

Se percebe, ao destacar as habilidades da BNCC, a necessidade de o professor construir meios que permitam criar conexões entre os conteúdos abordados. O que ocorre, na prática, são os conhecimentos sendo passados em blocos, onde conteúdos matemáticos se conectam mas são expressos em “blocos”, cabendo ao professor recorrer a outros materiais e abordagens para que os conceitos sejam significativos para o aluno. Assim, as abordagens a serem selecionadas, serão aquelas que se consigam articular as habilidades da BNCC e respectivos conteúdos da maneira mais significativa.

### 3.1.2 Propostas encontradas nos materiais de apoio didático

Esta etapa do trabalho teve por objetivo encontrar, nos materiais de apoio didático, as abordagens e propostas para o estudo de números racionais e irracionais, nos 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. Entende-se por "materiais

de apoio didático", livros, as apostilas e os cadernos disponibilizados pela prefeitura do Rio de Janeiro e o Governo de São Paulo. Os materiais colhidos foram: livros didáticos, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD); Material Rioeduca, disponibilizado pela Prefeitura do Rio de Janeiro, para o 1º semestre de 2022; Currículo em Ação, disponibilizado pelo Governo do Estado de São Paulo, para o ano letivo de 2022.

Através da exposição das abordagens dispostas nos materiais de apoio didático sobre os números racionais e irracionais, serão pontuadas vias que funcionam como introdução desses conceitos ao aluno.

Em um primeiro momento, observa-se como os números racionais são definidos, desde o 7º ano até o 9º ano. Em grande parte do material coletado, os números racionais são definidos como sendo o quociente de dois números inteiros, com o denominador diferente de zero, conforme ilustra a Figura 1.

**Figura 1** – Conjuntos dos números racionais

**O conjunto dos números racionais**

Você já viu a definição de número racional.

O conjunto dos números racionais, indicado pela letra  $\mathbb{Q}$ , é formado por todos os números racionais, ou seja, todos os números que podem ser escritos na forma fracionária, com numerador inteiro e denominador inteiro diferente de zero. Simbolicamente, ele é representado por:


$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, \text{ com } p \text{ e } q \text{ números inteiros e } q \neq 0 \right\}$$

Fonte: DANTE, 2018a, p. 80.

No material apresentado pelo Rioeduca (Rio de Janeiro, 2022a), para o 7º ano, as frações são apresentadas sem conexão com os números racionais. Apresenta-se, na Figura 2, uma tentativa de definição sobre frações, que limita sua representação a quantificar, não considerando a representação como medida. Na sequência, são propostos exercícios de frações com representações visuais, para chegar em sua representação decimal finita. Ou seja, abordam-se as representações fracionária e decimal dos racionais, sem defini-los.

**Figura 2 – Frações**

Uma **fração** representa uma **divisão** em partes com **quantidades iguais**.



A palavra **fração** vem do latim *fractus*, que significa partido, dividido ou quebrado.

Fonte: RIO DE JANEIRO, 2022a.

Os livros didáticos apresentam, para os 7º e 8º anos, as dízimas periódicas como forma de representação infinita dos números racionais não inteiros, ou seja, em sua forma decimal infinita e periódica (Figura 3). Tal representação com dízimas é diretamente associada ao fato de se observar a divisão entre dois inteiros, sem pontuar que a situação inversa também será um racional, ou seja, que qualquer dízima periódica será um número racional.

**Figura 3 – Dízima Periódica**

**Dízima periódica**

Para obter a forma decimal do número racional  $\frac{1}{3}$  podemos realizar o cálculo a seguir.

$$1 : 3 \rightarrow \begin{array}{r} 1 \phantom{00} \\ 10 \phantom{00} \\ 10 \phantom{00} \\ 10 \phantom{00} \\ \vdots \end{array} \left| \begin{array}{r} 3 \\ 0,333\dots \end{array} \right.$$

Ao efetuar essa divisão, obtemos o número 0,333..., que é uma **dízima periódica**, em que o algarismo 3, **período** dessa dízima, se repete indefinidamente. Essa repetição pode ser indicada por meio de um traço acima do período da dízima, ou seja,  $0,\overline{3}$ .

Veja outros exemplos de dízimas periódicas e o seu respectivo período:

- Em  $0,\overline{7}$  o período é 7.
- Em  $1,\overline{23}$  o período é 23.
- Em  $4,0\overline{651}$  o período é 651.

Os números  $0,\overline{7}$  e  $1,\overline{23}$  são exemplos de **dízimas periódicas simples**, pois o período aparece logo depois da vírgula.

O número  $4,0\overline{651}$  é um exemplo de **dízima periódica composta**, pois o período não aparece logo depois da vírgula.

Fonte: SAMPAIO (2018b, pg. 15)

Também pode se observar na Figura 3, que são estabelecidos o período de uma dízima e sua classificação em simples ou composta. Apesar do ponto

ressaltado, em apenas relacionar a dízima como a forma decimal de uma fração, encontrou-se uma abordagem que difere das demais, como pode se observar na Figura 4, em que se define as representações decimais das dízimas periódicas como números racionais.

**Figura 4 – Números racionais e as dízimas periódicas**

**Os números racionais e as dízimas periódicas**

Toda **dízima periódica** é um número racional, pois pode ser transformada em uma fração. Essa fração é chamada de **fração geratriz**, pois ela **gera, dá origem** à dízima periódica.

Observe a dízima 0,123321456789... Como ela não é periódica (não há parte que se repete), não é possível transformá-la em uma fração. Esse tipo de número, que você estudará no livro do 9º ano, não pertence ao conjunto dos números racionais.

Fonte: DANTE (2018b, pg. 21)

Ainda sobre as dízimas periódicas, a sequência encontrada nos diferentes materiais didáticos consultados, é que se encontre a fração geratriz das dízimas periódicas. O processo é comumente ensinado como uma "receita", em que o aluno deve seguir uma sequência de passos para encontrar a fração que gerou a dízima apresentada. A dízima periódica neste sentido, se dá como um problema a ser resolvido por um simples processo, pela aplicação de um algoritmo, sem discussão sobre sua infinitude, conforme ilustra a Figura 5.

**Figura 5 – Passo a passo da fração geratriz**

Dada a dízima periódica 0,777..., é possível encontrar sua fração geratriz.

1º passo – Nomeie a dízima periódica de  $x = 0,777\dots$  (equação 1).

2º passo – Multiplique ambos os membros da igualdade por um número de base 10, conforme a quantidade de algarismos do período da dízima periódica:

um algarismo no período – multiplicar por 10;  
dois algarismos no período – multiplicar por 100;  
três algarismos no período – multiplicar por 1000 e assim sucessivamente.  $10x = 7,777\dots$  (equação 2).

3º passo – Subtraia a equação 1 da equação 2:

$$\begin{array}{r} 10x = 7,777\dots \\ -x = 0,777\dots \\ \hline 9x = 7 \\ x = \frac{7}{9} \end{array}$$

Então,  $\frac{7}{9}$  é a fração geratriz da dízima periódica 0,777...

Fonte: São Paulo, 2022a

Outro aspecto relevante observado, é a presença dos números irracionais que, apesar de apenas serem definidos no 9º ano do Ensino Fundamental, surgem em momentos anteriores, já que os alunos têm contato com os irracionais em diferentes contextos. Como, por exemplo, no 7º ano, o número  $\pi$  é apresentado quando aborda-se o comprimento da circunferência (Figura 6) como sugerido na habilidade EF07MA33 . Nota-se, porém, que não há qualquer associação com os números irracionais, nem qualquer referência ao tipo de representação decimal desse número.

**Figura 6 – Apresentação de  $\pi$**

Ela percebeu que, em cada caso, a medida do comprimento da circunferência era cerca de 3,1 vezes a medida de seu diâmetro. Curiosa, Júlia perguntou à professora sobre essa "coincidência". A professora, então, explicou que os valores que Júlia encontrou ao dividir a medida do comprimento das circunferências pela medida dos diâmetros correspondentes são próximos a um número chamado de  $\pi$  (lemos "pi"). Um valor aproximado para esse número é:

$$\pi \approx 3,1415926$$

Nos cálculos relacionados à medida do comprimento de uma circunferência, podemos usar o valor aproximado de  $\pi$  com duas casas decimais: 3,14.  
Podemos escrever:

$$\frac{C}{d} = \pi \text{ ou } C = \pi \cdot d$$

Como a medida de comprimento  $d$  do diâmetro é igual ao dobro da medida de comprimento  $r$  do raio da circunferência, podemos escrever a igualdade anterior na forma:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Fonte: SAMPAIO (2018a, pg. 190)

Outra situação, a exemplo de presença dos irracionais em anos anteriores ao 9º ano em uma abordagem no contexto dos números racionais, visando efetuar um cálculo de radiciação no 8º ano, apresenta-se  $\sqrt{2}$  como uma raiz não exata, e, por consequência, não é racional (Figura 7). Tais referências não fazem quaisquer associações com os irracionais e nem ressaltam suas características para que abra um espaço de discussão em sala de aula.

**Figura 7** – Apresentação de  $\sqrt{2}$

- Quando extraímos a raiz quadrada de um número racional não negativo e obtemos um número racional, dizemos que a raiz quadrada é uma **raiz exata**. Nos exemplos acima, todas as raízes quadradas são exatas, pois resultam em um número racional.
- Nem sempre a raiz quadrada de um número racional não negativo é um número racional. Por exemplo,  $\sqrt{2}$  não é um número racional, pois não existe um número racional que, elevado ao quadrado, resulte em 2. Nesse caso, dizemos que  $\sqrt{2}$  é uma raiz não exata, pois não resulta em um número racional.

Fonte: SAMPAIO (2018b, pg. 30)

Quando o aluno chega ao 9º ano, são definidos e contextualizados os números irracionais e os mesmos números,  $\pi$  e  $\sqrt{2}$  serão colocados em situações para que sua “chegada” seja compreendida, como pode-se observar na Figura 8 retirada de um livro didático, em que o número surge como a medida da diagonal de um quadrado.

**Figura 8** – Contextualização do Irracional

**Medida do comprimento da diagonal do quadrado**

Considere um quadrado  $ABCD$  qualquer de lado de medida  $\ell$ .  
 Observe que a diagonal  $\overline{AC}$  corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  medem  $\ell$ .

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo  $ABC$ , temos:

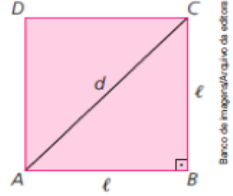
$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$

$$d^2 = 2\ell^2$$

Calculando a raiz quadrada de ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$d = \ell\sqrt{2}$$

Portanto, a medida do comprimento da diagonal de um quadrado de lado de medida  $\ell$  é dada por:

$$d = \ell\sqrt{2}$$


Banco de Imagens/Avaliao da editora

Fonte: SAMPAIO (2018c, pg. 128)

A definição comumente encontrada está exposta na Figura 9, em que expressa-se o número irracional como uma dízima não periódica e que não pode ser expressa na forma de fração. Assim, ficam definidos os números irracionais por aquilo que eles não são.

**Figura 9** – A ideia de número irracional**NÚMEROS IRRACIONAIS**

Os **números irracionais** são aqueles que **não podem** ser representados como quociente (uma divisão) entre dois números inteiros (divisor  $\neq 0$ ) e sua **representação decimal é infinita e não periódica**. Exemplos:  $\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$ ;  $\sqrt{3} = 1,7320508 \dots$ ;  $\pi = 3,14159265 \dots$ ;  $e = 2,71828182 \dots$ ;  $\Phi = 1,61803398 \dots$

Fonte: RIO DE JANEIRO, 2022c.

Seguindo com as exibições das pesquisas efetuadas, encontra-se uma abordagem de números irracionais do tipo radical quadrático, através de uma representação geométrica, mostrando mais uma variedade de propostas para inserir o conjunto dos números irracionais. A exemplo desta última abordagem pode ver a Figura 10, retirada do caderno do professor do Currículo em Ação do Governo do Estado de São Paulo, que possui algumas orientações ao professor.

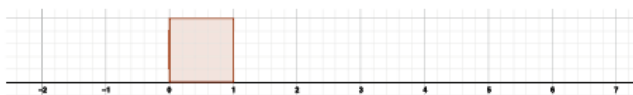
**Figura 10** - Localizar os irracionais na reta numérica

**Objetivo:** Localizar números irracionais na reta numérica.

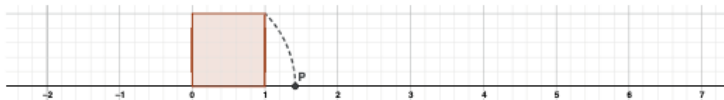
**Conversa inicial:** As construções geométricas são o ponto central desta atividade, pois essa é uma forma de representar os números irracionais na reta numérica fazendo uso do protagonismo do estudante. Não há nela instruções de como realizar as construções, apenas sua comanda. Sugere-se uma mediação de tais construções. É importante que os estudantes tentem realizar as construções sugeridas, utilizando régua e compasso antes da formalização.

3.1 Os números Irracionais podem ser representados na reta numérica por meio de construções geométricas.

- a) Desenhe um quadrado de lado 1, com um de seus vértices no ponto zero e um de seus lados sobre a reta numérica abaixo.



- b) Em seguida, com a ponta seca do compasso no ponto 0 e abertura do compasso com a medida da diagonal, construa o arco até cortar a reta numérica, marcando um ponto.



O ponto encontrado sobre a reta numérica será o ponto do número Irracional  $\sqrt{2}$ .

Fonte: São Paulo, 2022d, p. 254

Este levantamento das abordagens apresentadas nos materiais de apoio didático, que são material de base para o professor em sala de aula, servirá como um direcionamento para analisar e selecionar projetos de pesquisa. Nesta análise, será observado se os projetos versam com o que é comumente apresentado aos alunos ou se é uma abordagem diferente e se incluem o estudo das dízimas.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este componente da presente pesquisa ficou centrada em duas propostas que estão de acordo com os objetivos e critérios anteriormente referidos, nomeadamente que se articulem com as habilidades da BNCC e respetivos conteúdos da maneira mais significativa. As buscas foram realizadas em plataformas digitais, tais como: Google Acadêmico, Portal de Periódicos da CAPES, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Revista do Professor de Matemática (RPM), Biblioteca Digital de Tese e Dissertação da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e Repositório Institucional UNESP. Diante de uma pré-seleção de 20 projetos que envolviam estudos relacionados com o ensino dos números racional e irracional, apenas 2 satisfizeram os pré-requisitos. Assim, serão apresentados e discutidos apenas os seguintes trabalhos:

- **“Sobre números irracionais e possibilidades para seu ensino”** – Jesus e Oliveira (2018).
- **“Números racionais: uma perspectiva envolvendo as frações contínuas”** – Pommer W. e Pommer, C. (2013)

Os demais textos não serão abordados visto que, em geral, apresentam propostas semelhantes às encontradas nos materiais de apoio didático ou ideias próximas aos dois textos que foram selecionados para esta discussão. Além disso, foram encontrados projetos em que apenas se levantavam discussões, sem propostas efetivas para serem aplicadas na educação básica, especificamente nos anos finais do Ensino Fundamental.

Portanto, a seguir serão apresentados e discutidos os projetos selecionados, pois os mesmos constroem olhares sobre o tema dos números racional e irracional, com propostas diferentes das habituais ou releituras interessantes, que serão discutidas.

### 4.1 “Sobre números irracionais e possibilidades para seu ensino”

O artigo de Jesus e Oliveira (2018), inicia referindo a dificuldade que os alunos possuem, mesmo para os que chegaram no Ensino Médio, ao definir o que é

um número irracional, confundindo o uso de reticências para representar a infinitude da parte decimal com o ser irracional. As pesquisadoras afirmam que a distinção entre os números racionais e irracionais, por muitas vezes, é apenas visual. As autoras apontam que as dificuldades de ensinar sobre esse tema na Educação Básica está na construção de conceitos dos números irracionais.

Muitas vezes a distinção entre os números racionais e irracionais se faz através do reconhecimento de padrões visuais, podendo originar uma classificação equivocada. Portanto, pontuam que esta abordagem visual ocasiona uma confusão entre o número irracional e as suas aproximações pelos racionais. Por outro lado, existe a identificação do irracional como aquele número que não possui raiz quadrada exata.

Diante da problemática apontada sobre a construção do conceito do irracional e do que se indica nos PCN para os anos finais do Ensino Fundamental, as autoras buscam responder às seguintes questões:

Como podemos relacionar os números irracionais a outros objetos e acontecimentos? De que modo os números irracionais podem ser conectados a outras áreas, aos Temas Transversais, ao cotidiano e a outros temas matemáticos? Isso é possível? (JESUS; OLIVEIRA, 2018, p. 332).

As pesquisadoras recorrem a diferentes pontos de vista apontados por autores que discorrem sobre história da matemática, trazendo diferentes ideias de irracionalidade e incomensurabilidade. Neste caminho, elas apontam a complexidade do que está em causa, com os séculos decorridos desde que na Grécia antiga se provou a irracionalidade de  $\sqrt{2}$ , até ao que conhecemos sobre os cortes de Dedekind. Assim, os irracionais demoraram séculos até serem formalmente definidos, demonstrando a dificuldade de compreensão e a necessidade de explorar este tema com especial cuidado. Portanto, acredita-se que observar as possibilidades em que, historicamente, as ideias de irracionalidade apareceram, irá auxiliar na colocação de novas propostas para seu ensino.

Para propor abordagens diferentes ou reconstruídas, Jesus e Oliveira, referem dificuldades e erros no ensino dos números irracionais na educação básica apontados por outros autores, tais como: Pommer; Bortolossi e Mózer; Moreira e

David. A partir de cada problema destacado, as autoras propõem uma abordagem a fim de solucionar ou evitar erros na construção do conceito de irracionalidade.

Um problema trazido pelas autoras é a consideração de aproximações que livros didáticos e professores fazem para os números irracionais, como por exemplo identificar o número irracional com uma sua aproximação,  $\sqrt{3} = 1,73$ , sem deixar bem claro que o valor 1,73 é uma aproximação e que, por isso, ao operar com este valor, o resultado obtido também será um valor aproximado e que um erro é cometido. Uma proposta para ser abordada no 7º ano do Ensino Fundamental para começar a construir conceitos desde cedo, é utilizar o processo do algoritmo da divisão entre dois números naturais cujo resultado seja uma dízima e fazer com que os alunos observem o quociente, compreendendo “a definição de período de uma dízima periódica e trabalhem com a ideia de infinito dentro de um processo que não tem fim” (p. 336).

Para alunos de 8º e 9º anos, que já conhecem e operam com as raízes quadradas, as autoras propõem que, com o auxílio de uma calculadora, seja abordada a obtenção de raízes irracionais, calculando suas aproximações, ou seja, aproximações essas que ocorrem por racionais. A exemplo do que é proposto, considere calcular  $\sqrt{n}$ . Segue que:

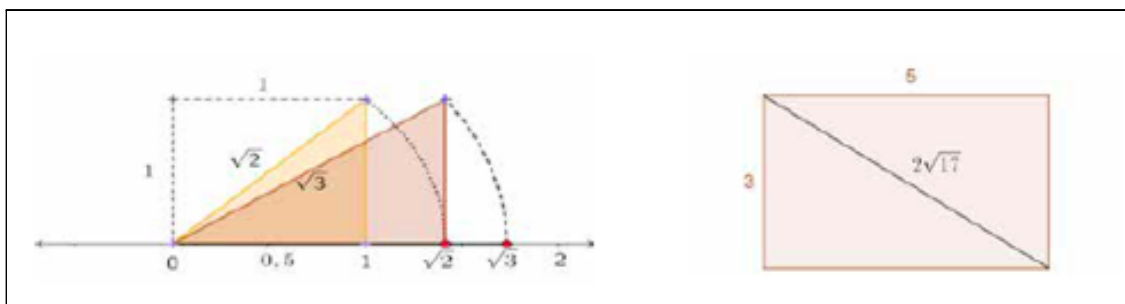
1. Primeiro, determinam-se os quadrados perfeitos mais próximos de  $n$ . Assim  $\sqrt{n}$  fica compreendida entre dois inteiros consecutivos,  $k$  e  $k + 1$ , tais que:  $k^2 < n < (k + 1)^2$ .
2. Em seguida, escolhe-se um valor qualquer  $m$ , entre  $k$  e  $k + 1$ , e eleva-se esse número  $m$  ao quadrado, comparando seu resultado com  $n$ . Se  $n > m^2$ , então  $m < \sqrt{n} < k + 1$ , caso contrário  $k < \sqrt{n} < m$ .
3. Agora, repete-se o procedimento 2., para o intervalo onde  $\sqrt{n}$  se encontra.

Através deste processo repetidas vezes, os alunos irão determinando intervalos cada vez menores e com isso irão encontrar valores cada vez mais próximos da raiz irracional. Neste momento, espera-se que o professor abra espaço para discussão de infinito e de aproximações, que serão pontos de relevância na

continuidade do estudo de números irracionais. Deve falar-se em valores aproximados por falta e por excesso, sem deixar de salientar que não se sabe o erro cometido, pois não é possível conhecer o valor exato, mas é possível controlar esse erro.

A terceira e última proposta das autoras, trata-se de abordar as representações dos números irracionais na reta numérica, através de construções geométricas, conforme ilustra a Figura 11. O objetivo é que através desta abordagem, o professor mostre que apesar de alguns irracionais estarem em uma localização aproximada, aqueles que representam a medida das diagonais de retângulos, possuem um comprimento exato e preciso, tanto quanto seus lados.

**Figura 11** – Proposta por construção geométrica



Fonte: Jesus e Oliveira (2018, p. 338)

A tratativa proposta é que o professor solicite aos alunos que construam um retângulo de lados com medidas inteiras e encontrem o valor de sua diagonal, tanto algebricamente, quanto visualmente utilizando uma régua graduada para medi-la. Neste momento, propõe-se uma discussão em sala de aula para relacionar as medidas obtidas algebricamente e manualmente, visto que serão encontradas medidas exatas e aproximadas.

Além destas problemáticas apontadas, as autoras levantam o fato de que o  $\pi$  começa por ser associado à razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, o que pode originar algum conflito pelo fato de ser uma razão. Depois, na conversão de ângulos em radianos para graus, em que se considera um ângulo de  $\pi$  radianos equivalente a  $180^\circ$ , sem deixar bem claro que estão utilizando diferentes unidades de medida e sem precisar bem o que fundamenta o conceito de radiano.

Tais associações se contrapõem à definição de número irracional e devem ser discutidas em sala de aula pelo professor, com o intuito de esclarecer noções de aproximação e equivalência.

Para as autoras, "perspectivas distintas enriquecem abordagens dos números irracionais que podem ser promovidas. (Re)criar situações próximas às que podem ter se sucedido historicamente e para ela produzir significados[...] parece uma abordagem possível e didaticamente interessante." (p.339). Acreditando portanto, que o professor possui um papel fundamental de complementar o que é oferecido nos livros didáticos sobre os números irracionais e desenvolver práticas educativas que problematizam questões que foram levantadas como problemas comuns enfrentados no ensino de números irracionais.

#### 4.1.1 Discussão do texto "Sobre Números Racionais e possibilidades para seu ensino"

O texto selecionado, apesar de não trazer novidades em sua proposta metodológica, propõe olhares e perspectivas de abordagens que apesar de facilmente pensadas não são devidamente exploradas, valendo como uma leitura de reflexão para professores, mas não possuindo abordagens diferenciadas. A pesquisa se apoia neste artigo, visto que existiu dificuldade em encontrar propostas que se encaixassem nos critérios da BNCC e que fugissem dos padrões adotados nos materiais de apoio didático. Além disso, o artigo levanta inquietações extremamente relevantes e que precisam ser discutidas dentro de sala de aula e pontos que merecem discussão sobre o papel da relação professor-aluno.

Jesus e Oliveira (2018), discorrem sobre a limitação que as aproximações de irracionais por racionais causam e a confusão trazida pela falta de esclarecimento sobre aproximações e igualdade. Pontos como, considerar  $\sqrt{3} = 1,73$ ,  $\pi = 3,14$ ,  $\pi$  igual a razão entre comprimento da circunferência e seu diâmetro ou  $\pi = 180^\circ$  em vez de  $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ , se contrapõem ao conceito de irracionalidade que esses números possuem. Assim, para um melhor esclarecimento, estas igualdades e afirmativas precisam vir acompanhadas de discussões entre infinito e aproximações, bem como a importância das unidades de medida serem sublinhadas.

De fato, as inquietações das autoras servem como reflexão. Mas não existem exemplos sobre posicionamentos adequados diante das situações. Uma abordagem possível para a transformação de radianos para graus e a afirmação equivocada que  $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ , poderia ser melhor conduzida via História da Matemática. Desta forma, se torna possível trazer como curiosidade e como forma de conexão entre  $180^\circ$  e  $\pi \text{ rad}$  o método adotado por Ptolomeu (87-165 d.C.), "Este calculou entre 0 e 180 graus, a cada meio grau, todas as cordas de todos os ângulos. Isto o fez encontrar uma aproximação para  $\pi$  como sendo 3,14166, sendo esta inigualável por muito tempo." (OLIVEIRA, 2015). Desta forma, a medida do comprimento do arco de  $180^\circ$  é igual a  $\pi$ .

Mais um destaque relevante para o artigo de Jesus e Oliveira (2018), é o fato de que em todas as propostas o professor possui um papel crucial para promover a fundamentação dos conceitos de número irracional, buscando fazê-lo desde o 7º ano do Ensino Fundamental, através dos racionais e da exibição de suas dízimas periódicas. Portanto, seria este um processo centrado no professor? Até que ponto a relação professor-aluno interfere no conhecimento obtido pelo aluno? Seria esta uma limitação do artigo? As autoras não problematizam a relação professor-aluno e aluno-professor.

Partindo para as abordagens sugeridas pelas autoras, as mesmas afirmam as possibilidades de aplicação de algumas abordagens que contemplem articulações entre os racionais e irracionais, desde o 7º ano do Ensino Fundamental, as habilidades EF07MA11 e EF07MA12 da BNCC contém características que permitem a inclusão deste conteúdo.

**(EF07MA11)** Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.

**(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (BRASIL, 2018, p. 307).

Portanto, torna-se possível explorar, junto aos alunos do 7º ano, promover a construção dos conceitos relacionados à aproximação, que são importantes para a compreensão da construção de números irracionais que será feita no 9º ano. Mas será que poderiam ser apresentadas em séries anteriores?

As discussões sobre infinito e aproximação são frequentemente levantadas por Jesus e Oliveira (2018). Apesar de não encontrarmos na BNCC ou nos livros didáticos pesquisados, elementos e abordagens que problematizam o infinito e representações aproximadas na escola básica, as autoras conseguem explorar estes aspectos de modo simples e de fácil compreensão pelos alunos. As abordagens utilizam instrumentos comuns como calculadora e régua, para dar ferramentas e limitações consistentes aos alunos e gerar inquietação diante do processo.

As autoras trazem a discussão de infinito de modo intuitivo após cálculos aproximados de raízes irracionais, utilizando a calculadora como auxiliar para que os alunos não se percam em cálculos enfadonhos e repetitivos e, com isso, se perca a essência da situação a ser explorada. Esta abordagem pode ser usada a partir do 8º ano do Ensino Fundamental, pois a habilidade da BNCC "(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica" (BRASIL, 2018, p. 313), contempla o processo utilizado.

Assim, a abordagem proposta do cálculo, com o auxílio da calculadora para realizar as multiplicações dos quadrados dos decimais, levanta discussões em sala de aula, permitindo discussões sobre infinito relacionado aos números irracionais, e aproximações via racionais utilizando cálculos conhecidos pelos alunos. Sendo assim, esta proposta requer conhecimentos que envolvem multiplicação, para determinar os quadrados, e multiplicação com números decimais. Essas habilidades são determinadas pela BNCC, no 6º ano.

**(EF06MA11)** Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.(BRASIL, 2018, p. 301).

A habilidade EF06MA11, proposta pela BNCC para o 6º ano, corrobora para mostrar que operar com os racionais acontece antes do que as autoras propõem. Portanto, a primeira abordagem de Jesus e Oliveira (2018) poderia ser aplicada em anos anteriores, cabendo apenas a noção e contextualização que, ao realizar os produtos, são obtidos quadrados dos valores cada vez mais próximos do valor

irracional que se quer descobrir.

Na terceira abordagem, as autoras propõem o uso de construções geométricas para localização dos irracionais na reta numérica, além de demonstrar que, dado qualquer número irracional positivo, apesar de sua representação infinita, existe um segmento cujo comprimento é finito e tem medida igual a este número. Esta abordagem pode permitir aos alunos um novo olhar para os irracionais, relacionando representações infinitas com medidas finitas. Porém, ao sobrepor em uma reta numérica  $\sqrt{2}$ , por exemplo, como seria possível distinguir a olho nu ou utilizando uma régua, que o número,  $\sqrt{2}$ , não está no 1,5 cm ou 1,4 cm?

Devido a limitação visual e da graduação da régua, este questionamento pode ser levantado pelos alunos. Esta abordagem vai contra a ideia de evitar confusões que as aproximações trazem para a compreensão do irracional, defendida por Jesus e Oliveira (2018). Mas o que não se aborda é que, ao utilizarem esse procedimento com os alunos, pode ocorrer uma interpretação inadequada de que o irracional possui uma representação numérica racional.

Apesar de Jesus e Oliveira (2018) não especificarem o ano a ser aplicada a proposta geométrica, só seria possível utilizar esta abordagem no 9º ano, devido ao conhecimento envolvido sobre o Teorema de Pitágoras. A habilidade específica que determina este conhecimento aparece em "(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos" (BRASIL, 2018, p. 319).

Portanto, constata-se que este artigo de Jesus e Oliveira não possui um diferencial. Apesar de as autoras olharem criticamente a forma como a "construção" do número irracional é ensinada, existem limitações no que é proposto como solução. Conseguir transpor assuntos de modo sutil e eficiente é uma questão que merece ser levantada, mas no que se refere aos números racionais e irracionais, ainda exige maiores discussões.

Assim, se mantém a necessidade de o professor desenvolver práticas que gerem discussões e formem conceitos importantes de modo significativo para o aluno. Afinal, o conceito de irracionalidade ou incomensurabilidade, exige um elevado nível de abstração, gerando uma dificuldade a mais na compreensão dos

irracionais e conferir significado aos conceitos é uma peça chave para seu ensino.

#### **4.2 “Números racionais: uma perspectiva envolvendo as frações contínuas”**

A proposta trazida por Pommer W. e Pommer C. (2013), tem por objetivo utilizar as frações contínuas para relacionar as formas fracionárias e decimais dos números racionais. Consequentemente, abre vias para a abordagem dos números racionais, irracionais e outros assuntos matemáticos que são abordados na escola básica, exceto no que tange à continuidade. Apesar de o tema “frações contínuas” não estar estabelecido nos PCN, para os autores, o documento recomenda aliar as frações ordinárias com as frações decimais para alunos nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, portanto os alunos já possuem maturidade e bagagem necessárias para a compreensão do tema.

Inicialmente, para os autores se faz necessário analisar historicamente tanto os conceitos dos números racionais, quanto os desdobramentos didáticos diante dos racionais. Em suas análises, observaram uma usual associação do uso de figuras geométricas e frações para o ensino dos números racionais. Para os autores, tal fato se explica, ou devido ao processo histórico egípcio ou pela proposta de Piaget, para que a criança perceba que a divisão em partes iguais não altera o todo.

Diante de diversas discussões a respeito da utilização de “representação figural” para o ensino de frações, os pesquisadores citam diversos autores que possuem opiniões distintas em relação a seu uso. Para explorar as opiniões divergentes, trazem dois autores: um apoiado nas condições ditas essenciais por Piaget, para a introdução de frações, outro em contraposição que critica o modo estático que o modelo parte-todo apresenta, desassociando a característica do processo de medida que o número racional possui. Contudo, trazem autores que unificam as divergências, ou seja, que consideram o uso da “representação figural” junto a sua representação decimal, de modo a se complementarem e transmitirem em sua totalidade do campo numérico dos racionais.

Porém, é a partir de um problema matemático, que aborda os números racionais por segmentos e subdivisões com a sua comensurabilidade, e seus desdobramentos possíveis de abordagem que é proposto o uso de frações

contínuas como uma ferramenta articuladora entre a representação decimal e fracionária dos racionais; e, um desenrolar para a introdução dos números irracionais. Em seguida, mostram através de exemplos, uma articulação possível entre as frações contínuas e os números racionais.

Os autores apresentam as frações contínuas simples conforme ilustra a Figura 12. Nela, é possível observar que as frações possuem sempre numerador um e seu processo pode ser finito ou não. Quando se tratar de um processo finito significa que o número representado é racional, porém se este processo for infinito o número será irracional. Para ilustrar tais acontecimentos, os autores utilizam exemplos.

**Figura 12** – Representação de fração contínua

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5 + \dots}}}} = [a_1; a_2, a_3, a_4, a_5 \dots]$$

Fonte: Pommer W. e Pommer C., 2013, p. 7

Para maior compreensão e discussão da abordagem, os autores utilizam as frações  $\frac{18}{7}$  e  $\frac{318}{76}$  como exemplos de números racionais, em seguida fez-se uso da aplicação de frações contínuas para suas representações (Figura 13). O intuito dos autores é relacionar a finitude das frações contínuas com os números racionais.

**Figura 13** – Aplicação de frações contínuas

$$\frac{18}{7} = 2 + \frac{4}{7} = 2 + \frac{1}{\frac{7}{4}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} \quad \text{ou} \quad \frac{318}{76} = 4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

Fonte: Pommer W. e Pommer C., 2013, p. 8

Note que o desenvolvimento apresentado para o cálculo de  $\frac{18}{7}$  não está completo, faltando ainda desenvolver a última parte. Esta falha pode ocasionar erros na sua aplicação em sala de aula, portanto o processo completo está

determinado a seguir.

$$\frac{18}{7} = 2 + \frac{4}{7} = 2 + \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

Uma discussão possível e proposta pelos autores é a articulação dos racionais com os irracionais através do uso das frações contínuas, pois elas permitem aproximações cada vez melhores por racionais. Como um dos primeiros contatos com irracionais é pelo número  $\sqrt{2}$ , os autores exibem como encontrar uma aproximação para o mesmo, via frações contínuas ilustrado abaixo (Figura 14), de modo que os aspectos fundamentais dos números racionais e irracionais se relacionem em simultâneo, ampliando sua compreensão.

**Figura 14** – Aproximação para  $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} c_0 &= \sqrt{2} = 1,4142136 = 1 \text{ (1ª convergente)} \\ c_1 &= \sqrt{2} = 1,4142136 = 1 + 0,4142136 = 1 + \frac{1}{2,4142136} \approx 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ (2ª convergente)} \\ c_2 &= 1 + 0,4142136 = 1 + \frac{1}{2,4142136} = 1 + \frac{1}{2 + 0,4142136} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2,4142133}} \approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} \text{ (3ª convergente)} \\ c_3 &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2,4142133}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + 0,4142133}} \approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{17}{12} \text{ (4ª convergente)}. \end{aligned}$$

Fonte: Pommer W. e Pommer C., 2013, p. 8-9 (figura adaptada pelo autor)

Pommer e Pommer acreditam que por meio das frações contínuas a articulação entre os números racionais e irracionais são dinamizados na educação básica, pois

[...] por sua origem histórica remontando a gregos e desenvolvida posteriormente, que eventualmente é abordada no Ensino Básico como ilustração histórica ou curiosidade, poderia ser incluída na problemática deste nível de escolaridade numa abordagem acessível e compreensível. (POMMER W. ; POMMER C., 2013, p. 9).

Aponta-se o fato que a relação existente entre os números racionais e

irracionais é pouco abordada na educação básica, se fazendo necessário meios que permitam a articulação dos assuntos matemáticos que os envolvem e permitem as conexões existentes. Portanto, através das frações contínuas, os autores afirmam que se concebe “[...] os vários modos de representação dos números racionais – as formas fracionária e decimal - como também insere um contexto das aproximações [...] que se enreda com outro objeto matemático: os números irracionais” (p. 10).

#### 4.2.1 Discussão do texto “Números racionais: uma perspectiva envolvendo as frações contínuas”

O segundo texto selecionado traz consigo uma abordagem diferenciada e articulada de modo a estabelecer conexões entre os números racionais e os números irracionais, através do uso de frações contínuas. Apesar de não se tratar de um conteúdo específico para a educação básica, podendo aparecer apenas como uma curiosidade conforme apontam os autores, os alunos de 7º a 9º anos, possuem conhecimento matemático prévio que são necessários para compreensão de frações contínuas simples.

**(EF07MA11)** Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.

**(EF08MA05)** Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

**(EF09MA04)** Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações. (BRASIL, 2018, p. 307, 313 e 317).

Ao destacar as habilidades EF07MA11, EF08MA05 e EF09MA04, do 7º, 8º e 9º anos respectivamente, observa-se que contemplam as habilidades de operar com os racionais em suas diferentes representações. Portanto, o conhecimento requerido para a aplicação de frações contínuas simples está disposto pela BNCC, dando a ideia de que os alunos estarão aptos para compreender e utilizar essas frações contínuas como um recurso complementar, cabendo ao professor articular as conexões entre as representações e o processo do algoritmo para abordar os racionais finitos e infinitos e a irregularidade dos irracionais.

A articulação de representações fracionárias e decimais é crucial para estabelecer os conceitos fundamentais de número racional. Por muitas vezes, em livros didáticos, nos deparamos com abordagens dos números racionais de modo desconexo com outros conteúdos matemáticos e com pouca ênfase em sua caracterização. Tal fato acaba por limitar o seu sentido, não permitindo fundamentar as suas diferentes representações decimais, finitas e infinitas.

Quando se relaciona a existência de dízima periódica com os números racionais, cria-se uma nova “classe” de racionais, como apontado nas interpretações comuns em livros didáticos. Os materiais coletados surgem com uma nova estrutura de racionais, como um problema a ser resolvido pelas frações geratrizes.

Um questionamento aqui levantado é se o uso das frações contínuas no ensino fundamental, sugerido por Pommer W. e Pommer C. (2013), se tornaria uma dificuldade a mais para os alunos. Visto que, naturalmente, o conceito de fração exige maior compreensão dos alunos, então existe uma dificuldade a mais apresentada pelos alunos sobre conceito de fração, se tornando uma temática mais delicada para se abordar.

[...] os alunos apresentam muitas dificuldades relacionadas ao conteúdo de fração, dentre elas podemos citar: o cálculo das quatro operações básicas, o conceito de fração, divisão parte-todo, calcular o m. m. c., de soma e subtração com denominadores iguais ou diferentes, multiplicação e divisão de frações. (FONSECA e SANTOS, 2019, p.65)

Sendo assim, mesmo abordando temas conhecidos pelos alunos do 7º ao 9º ano, as frações contínuas possuem fatores de dificuldade pelo uso de frações, tornando-se um ponto crítico para a pertinência de introduzir este processo em sala de aula. Por se tratar de um artigo sem aplicações práticas, não é possível definir se "numa abordagem acessível e compreensível" (p. 9) seria possível que a articulação dos conceitos de número racional e irracional tivesse êxito.

De fato, uma abordagem de aproximações por frações contínuas explora a complementaridade entre os conjuntos numéricos racionais e irracionais. Mas é inegável que, implicitamente, as frações contínuas trazem ideias de limite e convergência. Assuntos que não fazem parte do contexto da escola básica e que acrescem uma dificuldade conceitual ao tema. Portanto, para versar com a escola

básica, os autores deveriam expor discussões sobre a relevância para alunos do 8º e 9º anos "dominarem" os números irracionais.

A crença dos autores é que "a utilização do tema das Frações Contínuas, não como mais um componente curricular, mas sim como tema gerador, permite articular as formas fracionária e decimal do conjunto dos números racionais" (2013, p. 9). Por não se tratar de uma obrigatoriedade do currículo ou da BNCC, os autores visam a utilização de frações contínuas como uma ferramenta de articulação, uma via para significar os racionais e de se chegar aos irracionais sem quebras. Mas quando busca-se aliar uma abordagem eficaz, que permita ensinar significativamente, esta prática não une as duas perspectivas. Afinal, há uma necessidade de abstração muito alta, e os alunos podem observar que, na prática, manipulam apenas números com duas ou três casas decimais.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Existe uma ampla discussão, no âmbito da Educação Matemática, sobre o ensino dos números racionais e irracionais e suas dificuldades. Diante do processo histórico, observa-se que de fato desde que a incomensurabilidade surge, existe relutância e divergência de compreensões, a chamada “crise dos incomensuráveis”. Se ocorreu ou não uma crise, ainda existe alguma controvérsia, mas o que se pode concluir é que a compreensão dos irracionais não é simples e deve ser discutida.

Este trabalho faz um apontamento inicial do que é encontrado em diferentes estudos. Em procura de respostas para os questionamentos que se encontram nas justificativas deste trabalho, partiu-se em busca de projetos e artigos. Através de uma pré-seleção de vinte artigos, escolheram-se dois para serem apresentados, pois se encaixavam nos critérios estabelecidos no âmbito desta pesquisa.

Nesses projetos, encontram-se duas visões distintas de abordagem dos números racionais e transposição para os irracionais, que por tratarem esse processo de transição, versam com a análise deste projeto. Além disso, ambos utilizam como apoio à prática as dízimas. Demonstrando que as dízimas são exploradas mesmo que implicitamente, ou seja, sem que elas sejam o foco do estudo, as dízimas servem como meio de amplificação de discussões em sala de aula, no que se refere ao estudo dos números racionais e irracionais.

As duas visões distintas existentes entre os artigos referem-se ao fato de que o artigo de Jesus e Oliveira (2018) traz, através do ensino de questões comumente encontradas, um espaço para discussões dentro de sala de aula, enquanto que o artigo de Pommer W. e Pommer C. (2013) se apoia na utilização de um objeto matemático (frações contínuas) que não é visto no ensino básico. Portanto, através destas visões pontuadas lado a lado, é possível provocar uma discussão sobre o que é apresentado no material de apoio oferecido ao professor.

Um ponto em comum entre as abordagens aqui trazidas é o fato de utilizarem as representações decimais e as dízimas como um meio de intensificar os conceitos de número racional e irracional. Através das dízimas, ambos pontuam relações com o infinito, a regularidade existente na periodicidade das dízimas quando abordados os racionais, a irregularidade presente nas dízimas não periódicas, quando tratam

dos irracionais, e as utilizam na passagem de um conjunto numérico para o outro. Portanto, será que existem ganhos em abordar as dízimas de maneira mais profunda?

Diante do que foi encontrado neste trabalho, é possível definir que as abordagens dos materiais de apoio didático possuem a mesma sequência didática. No 7º ano do ensino fundamental são definidos os números racionais, seguido de suas operações com limitação de representação, sem apresentar as dízimas periódicas. No 8º ano, após operarem com os racionais, abordam-se as dízimas periódicas e o método de obtenção da fração geratriz. Por fim, no 9º ano, os alunos definem os números irracionais, como sendo "aqueles que não podem ser representados como quociente (uma divisão) entre dois números inteiros (divisor  $\neq 0$ ) e sua representação decimal é infinita e não periódica" (RIO DE JANEIRO, 2022b, p. 38).

Qual seria a relevância de introduzir este tema aos alunos, sendo que ao aproximarmos os irracionais no cotidiano do aluno, na prática, eles não os utilizam? Este apontamento não é levantado por nenhum dos artigos selecionados. Mas é um ponto relevante, visto que este trabalho tem como perspectiva a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. Ao tentar imaginar algum conhecimento prévio do aluno que envolva irracionais, se torna quase impossível que esta situação aconteça, visto que, na prática, apenas lidam com números de duas ou três casas decimais.

Discussões ainda merecem ser levantadas, mas este trabalho revela que mesmo com duas ações e visões distintas de abordagem, o meio que se utiliza para significar os conceitos de número racional e de número irracional é a dízima. Verificando-se que existem mais proximidades do que dualidades entre os racionais e irracionais, quando tratamos das dízimas. A limitação existente nestas práticas está em como tornar significativo para o aluno, e não somente para o conteúdo.

Como tais abordagens são pouco desenvolvidas nos materiais didáticos oferecidos ao professor, fica clara a existência de uma reprodução de procedimentos que reafirmam os conteúdos matemáticos categorizados em blocos, abrindo margem para uma visão desconexa entre os temas. Assim, este trabalho trouxe consigo reflexões e discussões que apontam sobre a importância de tratar os

conceitos dos números racionais e irracionais de maneira mais próxima ao aluno.

Na busca pelos materiais didáticos de apoio, constata-se que existe respeito ao que é exigido pela BNCC. Porém, uma ressalva que levantamos neste apontamento, é que a BNCC tem o intuito de estabelecer o mínimo necessário e adequado em cada fase e ano escolar, não obstante ao fato de que estabelecer articulações maiores seja possível. Note que, em relação à temática números, na matemática referente ao ensino fundamental anos finais, tem-se:

[...] o desenvolvimento do pensamento numérico não se completa, evidentemente, apenas com objetos de estudos descritos na unidade Números. Esse pensamento é ampliado e aprofundado quando se discutem situações que envolvem conteúdos das demais unidades temáticas: Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. (BRASIL, 2018, p. 269).

O argumento apresentado deixa uma necessidade evidente de articulação entre conteúdos para que se construa o pensamento numérico e sua compreensão. Mas o que vemos ocorrer é uma interpretação do documento sob uma leitura direta, horizontal e categorizada por tópicos. Com isso, existe uma contradição ao que é indicado pela BNCC.

A leitura dos objetos de conhecimento e das habilidades essenciais de cada ano nas cinco unidades temáticas permite uma visão das possíveis articulações entre as habilidades indicadas para as diferentes temáticas. Entretanto, recomenda-se que se faça também uma leitura (vertical) de cada unidade temática, do 6º ao 9º ano [...] Essa maneira é conveniente para comparar as habilidades de um dado tema a ser efetivadas em um dado ano escolar com as aprendizagens propostas em anos anteriores [...] tendo em vista que as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes. (BRASIL, 2018, p. 298-299).

Assim, corroborando com o argumento acima, o objetivo de contribuir para o levantamento e discussão de vias que articulam os números racionais e irracionais foi atingido. Com foco nas representações decimais finitas e dízimas, os estudos apresentados levantam como estes objetos matemáticos podem ser melhor explorados, para além de uma habilidade em particular a ser cumprida e disposta na BNCC.

Os caminhos percorridos e os referenciais expostos podem permitir

ressignificações e ampliações do tema do presente trabalho, ampliando tanto para aplicação em sala de aula quanto para futuras propostas didáticas. Podendo ainda, se tornar um facilitador para buscas de futuros leitores e pesquisadores sobre a articulação entre os números racionais e irracionais.

Diante de tais considerações, o relato deste trabalho se encerra, mantendo a intenção de contribuir e, principalmente, em meio às respostas que se propunha em responder, conseguir um esclarecimento válido através dos referenciais coletados e dos artigos encontrados.

## REFERÊNCIAS

- BIANCHINI, E.. **Matemática - Bianchini**: manual do professor / Edwaldo Bianchini. 9. ed. São Paulo: Moderna, 2018.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo, Universidade de São Paulo, 1974.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries)**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica. **Brasília**: MEC, SEB, DICEI, 2013.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**: educação é a base. Brasília: MEC/SEF, 2018. <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf)>. Último acesso em: 27 jan. 2022.
- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. **Aprendizagem significativa – breve discussão acerca do conceito**. <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/191-aprendizagem-significativa-breve-discussao-acerca-do-conceito>>. Acesso em: 11 fev. 2022.
- BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. **Números irracionais para professores (e futuros professores) de matemática**: uma abordagem direcionada à sala de aula. 1. ed. Vitória, ES: Edifes, 2017.
- COSTA, C; MONTEIRO, C. **Dificuldades na aprendizagem dos números racionais**. Educação e matemática, n. 40, p. 60-63, 1996.
- D'AMBROSIO, U. O Programa Etnomatemática como uma proposta de reconhecimento de outras formas culturais. **Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL**, v. 2, p. 63-71, 2005.
- DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática, 7º ano**: ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018a.
- DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática, 8º ano**: ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018b.
- DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática, 9º ano**: ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018c.
- EVES, H. W.. **Introdução à história da matemática**.. 5. ed. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2011, 849 p.

FONSECA, S. S. da; SANTOS, R. dos. Dificuldades dos alunos do 7º ano do ensino fundamental em aprender fração. **Revista Insignare Scientia-RIS**, v. 2, n. 1, p. 50-66, 2019.

JESUS, B. C. D.; OLIVEIRA, V. C. A. Sobre números irracionais e possibilidades para seu ensino. **Revista de Estudo e Pesquisa em Educação**, v. 20, n. 2, 2018.

JÚNIOR, J. R. G. **A conquista da matemática: 8º ano: ensino fundamental: anos finais** / José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

MATOS, R. N. **Uma contribuição para o ensino aprendizagem dos números racionais: a relação entre dízimas periódicas e progressões geométricas**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni, 2017.

MORALES, E; NÓBREGA, J. Um estudo sobre a abordagem dos números irracionais em livros didáticos de matemática do ensino médio. In: ENEM - ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12. São Paulo – SP. Julho, 2016.

MOREIRA, M. A. O que é afinal aprendizagem significativa? **Revista cultural La Laguna Espanha**, 2012. Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf>. Último acesso em: 06/4/2022.

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. **Revista Contrapontos**, v. 2, n. 3, p. 343-362, 2002.

NIVEN, Ivan. **Números: racionais e irracionais**. SBM, 1984.

OLIVEIRA, F. L. S.. Histórico, cálculo e irracionalidade de pi-grego. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015.

POMMER, W. M.; POMMER, C. P. C. R. Números Racionais: uma perspectiva envolvendo as frações contínuas. In: SEMINÁRIO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE NOVA ANDRADINA, V. Mato Grosso do Sul. 2013.

RIO DE JANEIRO. Ministério da Educação. Documento de orientação curricular do estado do Rio de Janeiro: Educação Infantil e Ensino Fundamental. **Rio de Janeiro: Undime-RJ e Undime Nacional**, 2019.

RIO DE JANEIRO. Cadernos Pedagógicos: 7º ano Matemática. Rio de Janeiro: Secretaria Municipal de Educação, 2022a.

RIO DE JANEIRO. Cadernos Pedagógicos: 8º ano Matemática. Rio de Janeiro: Secretaria Municipal de Educação, 2022b.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Ed. 1. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAMPAIO, F. A. **Trilhas da matemática, 7º ano: ensino fundamental, anos finais / Fausto Arnaud Sampaio.** São Paulo: Saraiva, 2018a.

SAMPAIO, F. A. **Trilhas da matemática, 8º ano: ensino fundamental, anos finais / Fausto Arnaud Sampaio.** São Paulo: Saraiva, 2018b.

SAMPAIO, F. A. **Trilhas da matemática, 9º ano: ensino fundamental, anos finais / Fausto Arnaud Sampaio.** São Paulo: Saraiva, 2018c.

SÃO PAULO. Governo do Estado de São Paulo. Secretaria da Educação. **Currículo em Ação: caderno do aluno, matemática, ciências da natureza e ciências humanas.** São Paulo, 2022. 1 v. Sétimo ano, ensino fundamental, anos finais. Disponível em: [https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2022/01/WEB\\_00\\_49734013\\_SPFE-7-ano-EF-MIOLO-5P.pdf](https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2022/01/WEB_00_49734013_SPFE-7-ano-EF-MIOLO-5P.pdf). Acesso em: 27 fev. 2022a.

SÃO PAULO. Governo do Estado de São Paulo. Secretaria da Educação. **Currículo em Ação: caderno do professor, matemática.** São Paulo, 2022. 1 v. Primeiro Semestre, ensino fundamental, anos finais.

<[https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2022/01/WEB\\_EF\\_Prof\\_Mat\\_v1\\_P9.pdf](https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2022/01/WEB_EF_Prof_Mat_v1_P9.pdf)>. Acesso em: 27 fev. 2022c.

SOUTO, A. M. **Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica.** 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.