COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Antonio Jorge Tavares de Andrade

NOTAS SOBRE SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Rio de Janeiro
2020

Antonio Jorge Tavares de Andrade

NOTAS SOBRE SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos

Rio de Janeiro

2020

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

A554 Andrade, Antonio Jorge Tavares de
Notas Sobre Sistemas de Numeração / Antonio Jorge Tavares de Andrade - Rio de Janeiro, 2020.
123 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.
Orientador: Diego de Souza Nicodemos.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Tabuada. 3. Sistema de numeração. 4. Mudança de base. 5. Método de Horner-Ruffini. I. Nicodemos, Diego de Souza. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Antonio Jorge Tavares de Andrade

NOTAS SOBRE SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____ / _____ / _____.

Banca Examinadora:

____

Prof Dr. Diego de Souza Nicodemos (Orientador)

PROFMAT Colégio Pedro II

____

Prof Dr. Celso Marques da Silva Junior

CEFET - RJ

____

Profª Dr. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa

PROFMAT Colégio Pedro II

____

Prof Dr. Daniel Felipe Neves Martins

PROFMAT Colégio Pedro II

Rio de Janeiro

2020

Dedico esse trabalho à minha mãe, meu pai, meu irmão e minha esposa que são pessoas as quais amo muito.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe que sempre esteve ao meu lado nos piores e melhores momentos, e na maioria das vezes foi a pessoa que me inspirou a seguir em frente de cabeça erguida e dar a volta por cima quando precisava.

À minha esposa, amor da minha vida, que sempre esteve do meu lado como minha grande amiga, companheira e a pessoa que amo muito.

Ao meu irmão que sempre esteve do meu lado nos piores momentos e me deu força para ser o que sou hoje.

Ao meu orientador e amigo que sempre me motivou e sempre falava para persistir e seguir com o tema proposto até o final, me dando ótimas orientações.

Ao meu grande amigo Emanuel por ter me inspirado a escolher esse tema e me motivar.

E ao Colégio Pedro II que é a instituição no qual tenho muito orgulho de trabalhar hoje.

Se você quiser fazer uma torta de maçã do nada, você deve primeiro inventar o Universo.

Carl Sagan

RESUMO

ANDRADE, Antonio Jorge Tavares de. **Notas Sobre Sistemas de Numeração.** 2020. 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, 2020.

Abordamos questões sobre sistemas de numeração, desde o sistema de numeração decimal até sistemas de numeração menos usuais. Propomos o estudo de uma técnica para a determinação de tabuadas de multiplicação entre dois números, a partir da tabuada de multiplicação por nove. Além disso, apresentamos uma técnica para a mudança de um número de uma base para outra. Em geral, o método utilizado para resolver este problema consiste em escrever o número dado na base 10 e, a partir daí, transformá-lo para a base escolhida. Descrevemos o método de Horner-Ruffini para polinômios e o adaptamos para obter um procedimento direto da base original para a base desejada. Neste ínterim, nos deparamos com conceitos de equações polinomiais, teoria de polinômios, divisibilidade, além de propriedades de sistemas de numeração posicional. Propomos um roteiro de atividades que abordam questões envolvendo diversos sistemas de numeração. Exploramos o Método de Horner-Ruffini para Mudanças de Bases e as Tabuadas de Multiplicação em Bases arbitrárias através das mãos como recursos didáticos extraordinários para o desenvolvimento pleno de um conhecimento sólido acerca de sistemas de numeração.

Palavras-chave: Tabuada de Multiplicação; Sistema de Numeração; Mudança de Base; Método de Horner-Ruffini.

ABSTRACT

ANDRADE, Antonio Jorge Tavares de. **Notes on Numbering Systems.** 2020. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, 2020.

In this work we address questions about numbering systems, since decimal system until unusual numbering systems. We propose the study of a technique to determine multiplication tables between two numbers based on the nine multiplication table. In addition we present a technique to change a number from one base to another base. The method used to solve this problem in general consists of writing the given number in base 10 and, from there, writing it in the desired base. We describe the Horner-Ruffini method for polynomials and adapt it to obtain a procedure straight from the original base to the desired base. In the meantime, we faced concepts of polynomial equations, polynomials theory, divisibility, as well as properties of positional numbering systems. We thought in activities that address issues involving different numbering systems. We explored the Horner-Ruffini Method for Base Changes and the Multiplication Tables in Arbitrary Bases through the hands as extraordinary didactic resources for the full development of a solid knowledge about numbering systems.

Keywords: Times Tables; Numbering Systems; Change of Base; Horner-Ruffini Method.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento desenfreado da computação, saber lidar com números nas mais distintas bases de numeração, em especial na base binária, tornou-se algo muito valioso. O desenvolvimento das linguagens de programação como o Python, Javascript, Shell Script entre outras, têm automatizado e otimizado o trabalho de programadores, mas conhecer como são escritas as linhas de código requer um estudo refinado sobre o funcionamento de sistemas de numeração não decimais.

Conversões em medidas de tempo e medidas angulares são exemplos clássicos de bases de numeração distintas da decimal que muitas vezes ignoramos ao adentrar nesta parte da aritmética do Ensino Básico.

Desde sempre a Aritmética me desafiou, em parte pelos anos e anos de aulas ministradas no ensino regular e no ensino pré-militar, mas também pela natureza inerente dela estimular o raciocínio lógico através de problemas aparentemente simples e de fácil compreensão. Esta habilidade presente na aritmética, em instigar o estudante, me condicionou a estar continuamente estudando, pesquisando, conectando conteúdos, aprendendo sempre.

A partir daí, observando o funcionamento de muitos programas, percebi que ensinar mudanças de bases de numeração, inclusive a binária poderia, desde o Ensino Básico, ser bastante útil.

Um fato que sempre me chamou muito a atenção é que algumas propriedades de sistemas de numeração são herdadas pela teoria de polinômios e vice-versa. Realizando uma pesquisa na literatura existente descobri, em Iezzi (2003), que existia um método para calcular as raízes de um polinômio[1] através de transformações. Estas transformações são chamadas por Iezzi de Transformadas Aditivas e Transformadas Multiplicativas. Neste trabalho, utilizamos a transformada aditiva para mudanças de bases de numeração de um modo bem similar àquele proposto por Iezzi para polinômios. Este método, utilizado sobre bases de numeração, será batizado por nós de Método de Horner-Ruffini Para Mudança de Base.

Pratiquei esse algoritmo, inúmeras vezes com alunos de turmas preparatórias e, como qualquer algoritmo, possui suas vantagens e desvantagens. A princípio, os alunos gostaram do método. Mais tarde, quando efetuamos operações de mudanças de base com números muito distantes entre si (por exemplo, passar da base 30 para a base 2), relataram uma dificuldade

1 Em Iezzi (2013), os exemplos exibidos remetiam-se a polinômios de graus 3 e 4. Vale observar, pelo Teorema de Galois (Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~engler/aulas_IX_mm445.pdf. Acesso em: 2 5 de novembro de 2020.), que não há fórmula fechada utilizando operações básicas e radicais para determinar as raízes de um polinômio de grau maior ou igual que 5.

maior para usar o algoritmo. Com a prática, fui observando que esse algoritmo é menos trabalhoso para bases relativamente próximas entre si.

Outro fato que me chamava atenção é a tabuada do nove na base decimal ser amplamente usada como um macete e nunca ser minimamente justificada. Meu orientador chamou a atenção para um fato até então desconhecido por mim e pediu para que eu investigasse com mais detalhes: o algoritmo da multiplicação com as mãos funciona também com outros números e com outras bases de numeração. A explicação matemática de tais fatos pode melhorar o entendimento do funcionamento das estruturas numéricas e de suas operações, fazendo com que os alunos tenham uma visão mais ampla e aprofundada do sistema decimal de numeração.

Segundo Curi (2011), trabalhos sobre sistemas de numeração tornam-se importantes, pois, até mesmo professores têm dificuldades e pouco preparo em lidar com esses conteúdos restritos ou não ao sistema de numeração decimal.

O objetivo geral deste trabalho consiste em mostrar a importância de estudar e aprofundar os estudos em bases e em sistemas de numeração na educação básica, enquanto os objetivos específicos recaem em mostrar métodos de mudança de base, em especial o Método de Horner-Ruffini para Mudanças de Base, e como se comportam as tabuadas de multiplicação de números naturais na base decimal e em bases distintas da decimal.

No Capítulo 2, desenvolvemos arcabouços teóricos e mostramos algumas fontes de consulta aos PCN e à BNCC. Sinalizamos para a importância de um ensino bem embasado sobre numeração decimal, bem como a importância do domínio da leitura, da escrita e de suas operações fundamentais, do aprendizado de bases de numeração não decimais utilizados ao longo da história, relatados na Seção 2.1.

No Capítulo 3, discutimos as tabuadas de multiplicação pelo recurso das mãos, algo bem conhecido pela cultura popular, mas pouco difundido, ao nosso ver, em salas de aula. Acreditamos que entender a tabuada do nove e suas variações, utilizando o recurso das mãos, acena para um entendimento mais amplo das propriedades dos sistemas de numeração decimal e não-decimal. Tendo isto em mente, desenvolvemos um algoritmo para calcular tabuadas próximas do nove, tendo ele e a base decimal como pontos de partida. Também abordamos, neste capítulo, outras bases de numeração, introduzimos a tabuada de multiplicação um número qualquer b-1 na base de numeração b, onde b é um número natural maior do que 1, mostrando suas semelhanças com a tabuada do nove na base decimal.

No Capítulo 4, introduzimos o Método Prático de Horner-Ruffini para polinômios, de acordo com Iezzi (2003). Incluímos conceitos básicos de operações de polinômios e transformadas aditivas. Este capítulo servirá de alicerce para o Método de Horner-Ruffini em Mudanças de Base, discutido no Capítulo 5, onde iniciamos o conceito básico do que é base de numeração, suas propriedades e sua forma polinomial. Discutimos alguns métodos usuais de mudança de base de numeração, outras nem tão usuais assim, como as bases de potência (mudança da base b para a base b^n).

Sugerimos um rol de atividades, no Capítulo 6, que têm como objetivo inserir professor e aluno nestas redes de conceitos discutidos anteriormente. Todas as atividades foram cuidadosamente pensadas e atribuímos soluções a elas no apêndice deste trabalho. Vale ressaltar que as soluções destas atividades servem como norte, com o intuito unicamente de servir como material de estímulo para ambos professor e aluno. Incentivamos a descoberta de soluções distintas e criativas que convirjam para o desenvolvimento dos conceitos de bases e de sistemas de numeração.

2 ARCABOUÇOS TEÓRICO E HISTÓRICO

Com a algoritmização das operações fundamentais, principalmente a adição e a multiplicação, não se torna necessária tanta reflexão para executá-las. No ensino básico, ao ensinar uma criança a somar, subtrair, multiplicar e dividir, acreditamos que é necessário deixar claro para os alunos como funciona o sistema posicional decimal, detalhando o que são as ordens, classes, como passar de uma ordem para a outra, e explicar o motivo pelo qual chamamos nosso sistema de numeração de sistema de numeração decimal.

Segundo Curi (2011), o ensino do Sistema de Numeração Decimal, apesar de ser simples e corriqueiro, ainda é um tema não trivial para alunos e também professores. Curi (2011) observa ainda que o ensino mecânico afeta, também, no método de ensino dos professores, por terem aprendido na sua escolarização básica de uma maneira mecânica, e não terem visto com mais profundidade em sua formação de professores.

Soldatelli (2016) afirma que as pessoas aprendem a executar o algoritmo da multiplicação, porém o ato de implementar o algoritmo se torna tão mecânico, que acabam não compreendendo o que está por detrás dele.

Esta pouca compreensão do sistema decimal de numeração faz com que justificativas do famoso “e vai um”, “e pede um emprestado”, sejam fracas e muitas vezes não existam. Até o cálculo mental fica prejudicado, pelo fato do aluno não compreender algo que seu professor talvez também não compreenda, que são os procedimentos de composição e de decomposição dos números no Sistema de Numeração Decimal.

A numeração e suas representações mudaram bastante ao longo da história. Existiam sistemas que não eram posicionais. Alguns possuíam outros métodos de operações e muitos usavam o princípio da adição como representação numérica. Segundo Rocha (2019, p.12):

> Nem sempre se usou o princípio posicional e, ainda, muito tempo se passou para que se usasse o símbolo zero. Porém, com essas características, o sistema de numeração evoluiu e passou a registrar quantidades maiores. Alguns dos sistemas que foram criados por povos antigos são utilizados até hoje em medidas de tempo e unidades de medidas.

Ainda de acordo com Rocha (2019), o estudo de bases não convencionais mostra grandes semelhanças de estruturas com a base 10. É importante ressaltar que aprender as estruturas das operações com números decimais é algo extremamente novo para o aluno. Consequentemente, apresentar essas operações com bases de numeração não decimal pode proporcionar uma compreensão mais ampla do que ocorre com o sistema posicional de numeração decimal, pelo fato do aluno ter contato com o Princípio Fundamental do Sistema Posicional de Numeração (que veremos na seção 5.1.3), dando uma melhor compreensão em expressões como “e vai um”, “pega um emprestado e vira mais dez”, e assim por diante.

Além disso, a experiência em pensar as operações e propriedades em outras bases dá aos professores a oportunidade de compreender as dificuldades a serem transpostas por seus alunos ao serem apresentados ao sistema de numeração decimal.

Segundo o Portal da Educação, os Parâmetros Curriculares Nacionais ou simplesmente os PCN, criados nos anos de 1997 e 1998, tinham como objetivos democratizar e tornar equânime os conteúdos a serem estudados no Ensino Fundamental. Em 1999 os PCN foram estendidos ao Ensino Médio, com a mesma característica de nortear os currículos a serem trabalhados na fase final do Ensino Básico, e ambos estão em vigor até a presente data.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1997), podemos apresentar o conceito de número no aspecto cardinal, mostrando a possibilidade da criança evocá-lo mentalmente sem precisar indicá-lo por meios físicos presentes, além de ser indicador de posição, fazendo com que a criança entenda o aspecto ordinal do número, onde ela associa o número a lugar ocupado por um objeto, pessoa ou alguma posição em uma listagem. Os PCN ainda preveem que números também podem ser usados como códigos, como por exemplo, números de telefone, senhas de banco, placas de carro, etc.

Ainda sobre a temática números, os PCN – Matemática – Livro 03 (BRASIL, 1997, p.48) sugerem sua apresentação, para o primeiro ciclo do Ensino Fundamental da seguinte maneira:

> As escritas numéricas podem ser apresentadas, num primeiro momento, sem que seja necessário compreendê-las e analisá-las pela explicitação de sua decomposição em ordens e classes (unidades, dezenas e centenas). Ou seja, as características do sistema de numeração são observadas, principalmente por meio da análise das representações numéricas e dos procedimentos de cálculo, em situações-problema.

Já para o segundo ciclo do Ensino Fundamental, os PCN (BRASIL, 1997) dizem que explorar os números naturais como um recurso a resolver problemas, além de ser um objeto que pode ser estudado por si mesmo. As crianças já possuem um conhecimento prévio de sua aplicabilidade, de modo que atividades de leitura, escrita, comparação e ordenação tomam como ponto de partida números que a criança conhece e muda com a adição de novos conceitos. Problemas envolvendo cálculo elementar contribuem, também, para o desenvolvimento da concepção de número. Problemas que envolvem deslocamentos numa pista graduada, avanços e recuos, encontrar a quantidade de elementos de coleções que se separam, juntam e repartem.

A exploração dos conceitos prévios e as escritas pessoais não exclui a importância dos docentes ensinar as escritas convencionais, a fim de que os alunos tenham referência para se apropriarem de conhecimentos socialmente estabelecidos. Isto também é previsto pelos PCN (BRASIL, 1997, p.66) “As características do sistema de numeração – agrupamentos de 10 em 10, valor posicional – serão observadas, principalmente, por meio da análise das representações numéricas e dos procedimentos de cálculo em situações-problema.”

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[2] (BRASIL, 2017), é um documento de caráter normativo que se aplica, exclusivamente, à educação escolar e visa garantir aprendizagens essenciais a todos os alunos durante toda a Educação Básica, estando orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos para a solidificação de uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), o conhecimento matemático é imprescindível para os alunos da Educação Básica pela sua aplicabilidade em diversas situações da sociedade, contribuindo na formação de cidadãos mais críticos e conscientes de suas responsabilidades sociais.

A elaboração da BNCC (BRASIL, 2017) busca desfragmentar as políticas educacionais brasileiras de modo que os alunos tenham as mesmas condições de aprendizado e busca assegurar o desenvolvimento de dez competências gerais. A BNCC define como competência a mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, no exercício da cidadania e do mundo do trabalho. Para maiores detalhes, o leitor é convidado a acessar BNCC (BRASIL, 2017, p. 8).

No que tange ao Ensino de Matemática, a BNCC prevê apenas o ensino de Sistemas de Numeração Decimal, indo na contramão do que é defendido por Rocha (2019), que é uma ampla abordagem aos mais diversos sistemas de numeração de modo a proporcionar uma experiência mais complexa e estruturada de todas as operações e propriedades das diversas Bases de Numeração.

A evolução do sistema de numeração pode não parecer, mas decorreu de muitas mudanças ao longo da existência humana. Assim como a linguagem, a contagem em si evoluiu da forma mais rústica (uso de talhas numéricas, que são marcações feitas em pedras

2 BNCC em Planilha Ensino Fundamental – Matemática, disponível em: http://download.basenacionalcomum.mec.gov.br/, acesso em 25 de novembro de 2020 e BNCC em Planilha Ensino Médio – Matemática, disponínel em: http://download.basenacionalcomum.mec.gov.br/, acesso em 25 de novembro de 2020.

ossos, madeiras, etc), até o uso de supercomputadores que trabalham em bases binárias múltiplas vezes em frações de segundo.

Alguns métodos de contagem se destacavam por serem usados para medições astronômicas, como a base sexagesimal babilônica, enquanto outros ganharam destaque pela simplicidade em sua escrita e operações como os indo arábicos, usados até hoje. Sem dúvida, a história da matemática pode ser um belo meio didático para um entendimento mais pleno das estruturas e das operações entre os números, especialmente na educação básica.

O sistema de numeração decimal, inicialmente adotado na Europa devido aos romanos, não era um sistema decimal posicional. Com a disseminação e o emprego dos algarismos indo arábicos pelo continente europeu, a adoção do zero e o método posicional facilitaram bastante a vida de comerciantes, camponeses e coletores de impostos, pois, as operações fundamentais nesse sistema são bem menos complexas. De acordo com Castro (2016, p. 74):

> As Cruzadas, de 1095 a 1270, favoreceram o intercâmbio dos cristãos europeus com a cultura muçulmana. Parte do clero participante dessas Cruzadas aprendeu as operações Matemáticas com a técnica de al-Khowarizmi, que desenhava os números na areia sem valer-se às colunas do ábaco. Surgem, desse modo, os primeiros “algoristas” europeus (defensores do cálculo por algarismos de origem hindu).

Reiterando Castro (2016), citamos uma habilidade prevista na BNCC (BRASIL, 2017, p.301) que encerra bem esta questão:

> Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.

No decorrer da Secção 2.1, nos debruçamos sobre a questão histórica dos mais diversos sistemas de numeração, desde os Sumérios e Babilônios, até o uso pelos supercomputadores. Nesta próxima seção, nossa fonte de pesquisa e consulta foi Cordova (2012) e Roque (2012).

2.1 Algumas Questões Históricas

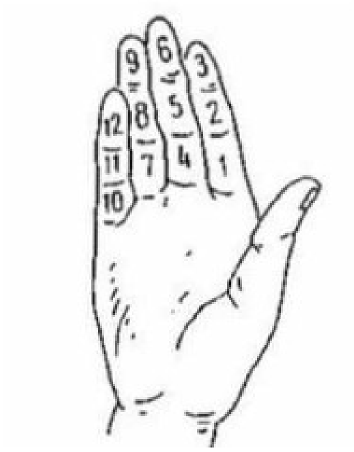
Quando os homens começaram a contar, usavam dedos, cascalhos, ossos, nós de uma corda e algumas outras formas para obter números sucessivos. Em contrapartida, as quantidades a serem contadas foram crescendo cada vez mais, aparecendo, assim, a necessidade de um sistema de contagem mais amplo e a elaboração de mais símbolos para representar uma certa quantidade, o que chamamos hoje de base de numeração.

A base de numeração mais utilizada ao longo de nossa história é a base decimal. Há de se pensar que isto se deve pela quantidade de dedos em nossas mãos. Existem exceções, como por exemplo, a civilização maia que usava, em conjunto, as bases 5 e 20, e a civilização babilônica, que usava ambas as bases 10 e 60.

Segundo Fomín (1975), o sistema decimal de numeração demorou bastante para ocupar a posição dominante que possui hoje. Em períodos distintos da história muitos povos empregaram sistemas de numeração distintas da decimal.

Ainda segundo Fomín (1975), um sistema que tinha uma grande difusão era o sistema duodecimal. Sua origem, curiosamente, também está ligada ao cálculo pelos dedos. Tomando como base quatro dedos da mão, exceto o polegar, possuem no total 12 falanges, como mostra a Figura 1, usando o dedo polegar para contar a partir das falanges, de 1 até 12.

Figura 1 - As doze falanges na mão



Fonte: Fomín, 1975

O legado do sistema duodecimal se mantém até os dias de hoje, ao termos contato no cotidiano com termos como dúzia, meia dúzia, grosa, que nada mais é do que doze dúzias (144 unidades). São utilizados amplamente no comércio de alimentos como ovos, frutas, legumes etc. Segundo Fomín (1975), os ingleses conservam vestígios do sistema duodecimal em suas unidades de medida (1 pé equivale a 12 polegadas).

A maioria dos sistemas de numeração adotados conseguiam representar com exatidão todos os números de acordo com suas necessidades. Porém, haviam sistemas que não representavam de forma simples nem de um jeito prático, grandes quantidades e havia ainda sistemas que confundiam alguns números com outros.

Por outro lado, existiam sistemas de numeração que tornavam altamente complexo o problema de efetuar operações básicas como a multiplicação, usando métodos sofisticados. Sob nosso ponto de vista, a adoção do sistema de numeração decimal posicional tornou extremamente simples tais operações.

O sistema de numeração decimal foi concebido pelos indianos e difundido ao redor do mundo pelos árabes. Leonardo de Pisa, conhecido por Fibonacci, foi um dos disseminadores deste sistema pela Europa (por volta de 1200 E.C..). As principais vantagens deste sistema de numeração foram a introdução do zero e o uso de apenas dez símbolos, tornando simples representar qualquer número por maior ou menor que ele seja, e elementar efetuar as operações básicas.

Segundo Cordova (2012), Nicomachus de Gerasa, em Introdução à Aritmética, resumiu a filosofia de Pitágoras (cerca de 500 a.E.C.) como focada nos números e nas suas relações. Nesta época, as operações não eram tão simples, até que o Método Indiano apareceu, atribuído ao matemático italiano Leonardo de Piza, por volta de 1202, com a publicação do seu livro Liber Abaci. Mas foi apenas em 1450, com a invenção da imprensa, que o uso se tornou generalizado e no século XV os indo arábicos já eram o sistema padrão na Europa, transformando a aritmética naquilo em que hoje conhecemos. Ainda de acordo com Cordova (2012), esta nova aritmética foi considerada muito mais simples que a aritmética grega, seja na estrutura mais simples do sistema numérico, seja na adoção do sistema posicional, ou seja no uso do símbolo do zero.

Vale ressaltar que os sistemas numéricos dividem-se essencialmente em três frentes: sistema de numeração aditivo, sistema de numeração híbrido e sistema de numeração posicional.

O primeiro é o Sistema de Numeração Aditivo. Para obtermos um numeral, representando uma quantidade, basta acumularmos os símbolos disponíveis até completar o número desejado. A ordem dos símbolos em sua maioria não importa. Podemos colocar um símbolo acima ou abaixo um do outro, à direita ou à esquerda do outro. Exemplos deste tipo de sistema de numeração são o romano (a ordem dos símbolos tem conotação operativa de adição ou subtração); o grego; e o egípcio.

O segundo é o Sistema de Numeração Híbrido, que mistura as operações de adição e multiplicação, em que a ordem da escrita é essencialmente importante. Um exemplo deste tipo de sistema é o chinês clássico.

O terceiro é o Sistema de Numeração Posicional. Este pode ser considerado o sistema mais eficiente e mais desenvolvido pelas civilizações antigas. Neste sistema a posição dos símbolos indica a potência da base em que ele corresponde. Somente três civilizações implementaram plenamente este sistema: os babilônios, os hindus e os maias. As duas últimas civilizações citadas inovaram usando um símbolo que representa o zero.

Apresentamos a seguir como os sistemas de numeração antigos se organizavam e quando foram empregados e citamos as diferenças e semelhanças destes sistemas com o nosso sistema de numeração decimal indo arábico.

No decorrer desse breve histórico a ser tratado da seção 2.1.1 a 2.1.9, não vamos nos ater com muita profundidade aos métodos de operação de cada povo em sua época, tratando apenas nos métodos de multiplicação egípcio, por usarem potências de 2 como auxílio ao cálculo, e aos métodos árabe e chinês, que são parecidos e nos dão uma ideia de transformações de ordem ao realizar a operação de multiplicação. Para quem quiser se aprofundar nos métodos de cálculo dos Sumérios, Babilônios e Gregos, consultar Roque (2012). Sobre os maias, o que se tem visto mais na literatura seriam suas aplicações em seu sistema numérico de base 20, e suas descobertas nos ciclos astronômicos.

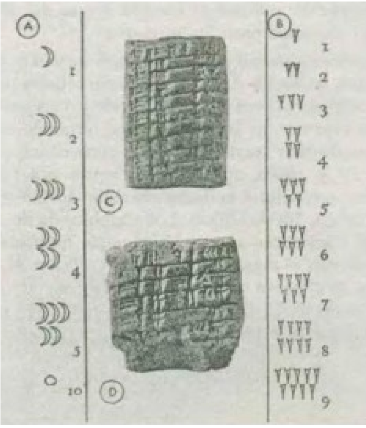
2.1.1 Sistema de Numeração Mediterrânea – Sumérios e Babilônios

Segundo Cordova (2012), por volta de 4000 a.E.C. no sudeste da Mesopotâmia se instalaram os sumérios, sendo Ur a sua capital. Posteriormente, no ano de 2500 a.E.C., os sumérios foram dominados pelos acádios, um povo semita cuja capital era Acad, governados neste período por Sargon (ou Sargão). Consequentemente, a cultura suméria fundiu-se com a cultura acade. Mais tarde, a partir de 2270 a.E.C., este império caiu sob o domínio dos babilônios, governado pelo rei Hammurabi, fazendo da Babilônia sua capital. Durante seu reinado floresceu-se um período de altíssimo nível cultural.

Ainda de acordo com Cordova (2012), os babilônios foram os primeiros a contribuirem para o avanço da matemática e a aritmética alcançou seu maior nível de desenvolvimento. Outras referências literárias dessa civilização se encontram nos restos arqueológicos da tábua de Senkereh, chamados assim por conta do lugar onde foram descobertas, às margens do rio Eufrates, em 1854. Em outros restos arqueológicos de Nufar, existiam tábuas de multiplicação gravadas com caracteres cuneiformes de números inteiros, dispostos em colunas com valores superiores a 180.000.

Os primeiros símbolos escritos destas culturas, segundo Cordova (2012), representavam os números com marcas em forma de cunha, de acordo com sua escritura cuneiforme, Figura 2. Os babilônios tinham um método de contar um tanto diferente. Seu sistema numérico era de base sessenta (60).

Figura 2 - Números com caracteres cuneiformes



Fonte: Cordova, 2012.

2.1.2 Civilização Egípcia - Sistema de Numeração Hieroglífica Egípcia

Segundo Cordova (2012), o faraó Menés unificou os reinos desde o ano 2500 a.E.C., fundando a primeira dinastia. Os egípcios criaram a mais antiga escritura que se conhece, a escrita hieroglífica, desenvolvida sobre a base de desenhos que representam, de alguma maneira, a ideia de número ou ideia que se queria representar. Os documentos mais importantes que sobreviveram são dois papiros bastante extensos. Um é o papiro de Rhind e o outro de Moscú, ambos datam de 1700 a.E.C. e seus conteúdos abordam problemas matemáticos e suas soluções.

Esta cultura desenvolveu um sistema de contagem muito original de base dez (10), contando por dezenas. A unidade era representada pelo símbolo / e a dezena pelo símbolo ∩. Cada símbolo poderia repetir-se até nove vezes e o número representado se encontrava somando os valores de cada um dos hieroglíficos ou símbolos utilizados. Para representar outros números, colocavam-se estes símbolos um ao lado do outro formando as combinações adequadas.

O princípio de numeração egípcia era composto de sete símbolos simples e era acessível a qualquer pessoa, que poderia interpretar e realizar contas, independente se soubesse ou não ler ou escrever. Apesar de toda esta simplicidade e acessibilidade, os egípcios não utilizavam o conceito do valor posicional. Isto acena para possíveis falhas na escrita e na interpretação, gerando muitas vezes duplo sentido. As Figuras 3 e 4 ilustram os símbolos hieróglifos.

Figura 3 - Símbolos numéricos hieróglifos

1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
Un trazo	Un arco	Un rollo	Una flor	Un dedo	Un pez	Un hombre

Fonte: Cordova, 2012.

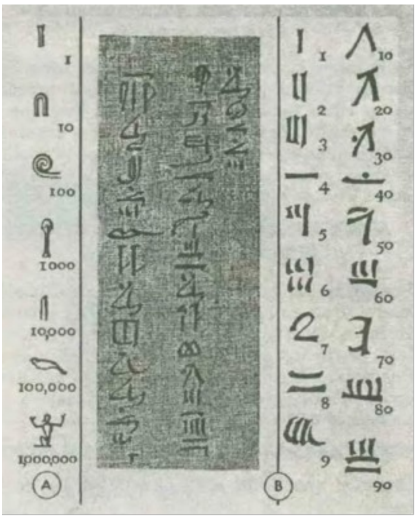
Figura 4 - Hieróglifos que equivalem respectivamente a 1, 10, 100, 1.000,10.000, 100.000 e 1.000.000

Fonte: Soldatelli, 2016.

O império egípcio utilizou a matemática na administração estatal ao calcular os impostos tributados sobre seus súditos, na construção de templos, no comércio calculando volumes de grãos, nas áreas cultivadas dos campos e em suas monumentais pirâmides funerárias. A Figura 4 mostra os símbolos de alguns números naturais em escritas hieroglífica (A) e hierática (B). A escrita hieroglífica era bastante utilizada para impressão de mensagens em templos e túmulos. Já a escrita hierática tinha o formato cursivo e era utilizado para fins comerciais, e tinha um formato mais simplificado das escritas hieroglíficas. Existia um outro sistema de escrita, utilizado para escritos de menor importância, a escrita demótica.

O sistema de símbolos egípcios que compunham a escrita hieroglífica foi um mistério para o mundo durante muito tempo, até que no século XIX, quando Napoleão Bonaparte invadiu o Egito, e esse tipo de escrita começou a ser melhor conhecido e estudado. Uma equipe de cientistas franceses catalogou várias peças e fragmentos cravejados com a, até então misteriosa, escrita egípcia. Um dos belos achados que podemos citar é a famosa “Pedra de Roseta”, uma lápide negra de basalto, na qual haviam inscrições, além de hieroglíficas e demótica, também em grego, a qual, somente em 1821, foi desvendada pelo jovem pesquisador Jean François Champollion, em que a palavra “Ptolomeu” foi traduzida. Essa descoberta fez com que vários outros documentos também fossem traduzidos, revelando ainda mais traços marcantes desta antiga civilização.

Figura 5 - Sistema de Numeração Egípcia, hieroglífica (A) e hierática (B)



Fonte: Cordova, 2012.

Método de multiplicação egípcia

Segundo Cordova (2012), o nome *multiplicação,* na etimologia de sua palavra na língua latina, *multiplicare*, revela o método utilizado pelos egípcios para realizarem esta operação. *Multi* significa vários, enquanto *plicare* significa dobrar. Daí *multiplicar* tem o sentido de dobrar várias vezes.

Os egípcios usavam um conceito de que qualquer número inteiro podia ser escrito como uma soma finita de potências de 2. Isso nada mais é do que transformar um número decimal, na base 10, para a base binária. Exemplificamos este fato através da multiplicação do número 123 por 115. Montamos a Tabela 1, na qual começamos à esquerda com 1 e à direita por 123, e vamos dobrando o número obtido, a fim de que o valor final não ultrapasse 115. É importante relatar que os egípcios não conheciam a propriedade comutativa da multiplicação. Porém, obteríamos o mesmo resultado caso fizéssemos a tabela com o 115.

Tabela 1 - Multiplicação Egípcia

Fator	**Número**
1	123
2	246
4	492
8	984
16	1 968
32	3 936
64	7 872

Fonte: O autor, 2020

Observe que $115 = 64 + 32 + 16 + 2 + 1$ e utilizando a tabela acima como suporte, temos que: $123 \times 115 = 7872 + 3936 + 1968 + 246 + 123 = 14145$.

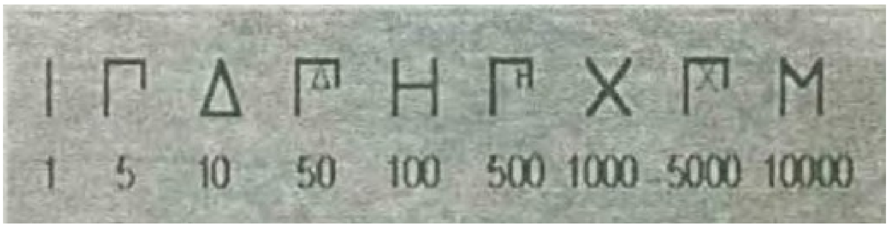
2.1.3 Civilização Grega

O auge da civilização grega no Mediterrâneo surgiu através do estreito contato com povos do Norte da África e da Ásia menor, e serviu como veículo de transmissão para as culturas ocidentais. Segundo Roque (2012, p.49):

> A história tradicional nos conta que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto, que teria vivido nos séculos VII e VI a.E.C. e sido influenciado pelos mesopotâmicos e egípcios. Diz-se que um de seus feitos teria sido, justamente, o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito, a partir da semelhança entre, por um lado, a relação desta altura com sua sombra e, por outro, a relação de sua própria altura com sua própria sombra. A Matemática pitagórica, datada da primeira metade do século V a.E.C., teria feito a transição entre as épocas de Tales e Euclides.

O primeiro sistema de numeração grego se chamou Ático e foi desenvolvido a partir de 600 a.E.C., era de caráter aditivo na base dez. Para representar a unidade e os números até 4, usavam traços verticais repetitivos, para o 5, 10, 100 e 1 000. Sua representação era a letra correspondente a inicial de cada símbolo, 5 (pente), 10 (deka), 100 (hekta) e 1 000 (khiloi). Os símbolos 50, 500 e 5 000 eram obtidos pela justaposição dos símbolos de 10, 100 ou 1 000 ao símbolo do 5. A Figura 6 exemplifica a essência deste sistema de numeração.

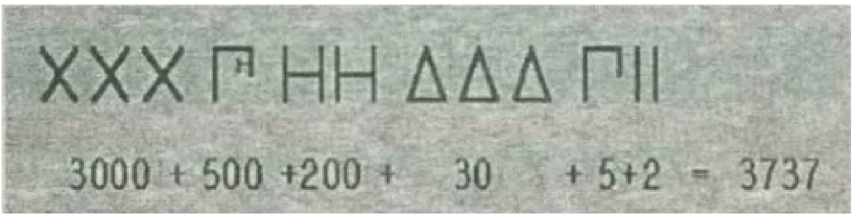
Figura 6 - Sistema de Numeração grega ática



Fonte: Cordova, 2012.

Segundo Cordova (2012), o número 3737, representado pelo sistema ático de numeração, pode ser observado a partir da Figura 7.

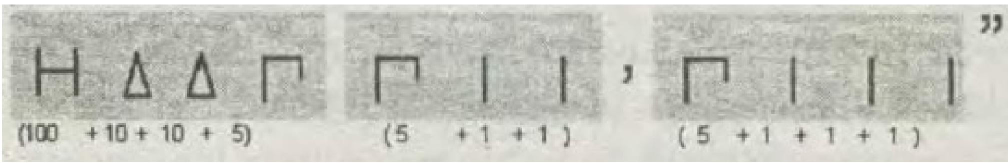
Figura 7 - Representação do número 3737 no sistema grego de numeração (ático)



Fonte: Cordova, 2012.

Segundo Cordova (2012), o sistema de numeração grego trabalhou, também, com números fracionários. Estes símbolos eram representados na parte superior direita (como um expoente) com uma aspa para o numerador e duas aspas para o denominador, sendo os símbolos dispostos seguidamente. Tomemos como exemplo o número $125,875$. Este número pode ser representado como um número misto dado por $125\frac{7}{8}$, ver Figura 8.

Figura 8 - Representação do número 125,875 no sistema grego de numeração (ático)



Fonte: Cordova, 2012.

Segundo Cordova (2012), o sistema Jônico ou Alexandrino, ilustrado pela Figura 9, foi mais um sistema de numeração grego que empregava 27 símbolos, sendo ele aditivo e de base dez. Esse sistema, segundo Oliveira (2008, p.10), começou a entrar em uso por volta do ano 200 a.E.C., embora Atenas preservasse seu sistema ático por mais um século.

Figura 9 - Sistema de numeração grega Jônica

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ο
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ϱ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	Τ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Fonte: Cordova, 2012.

Segundo Cordova (2012), para escrever os algarismos neste sistema de numeração, os números pareciam palavras e estas pseudo-palavras tinham um valor numérico. Este sistema de numeração literal era muito pouco flexível, tornando-se demasiadamente complexo, principalmente para cálculos matemáticos. Acredita-se que isto possa ter inviabilizado o desenvolvimento e o progresso da matemática nesta época para esta civilização.

2.1.4 Civilização Romana

Segundo Cordova (2012),os romanos utilizaram símbolos simples combinados com algumas letras, para construir um sistema que era de fácil compreensão e utilização. O sistema de numeração romano não utiliza o princípio do valor relativo. O valor dos símbolos sempre é o mesmo, sem que influa o lugar que ocupam.

Os símbolos literais empregados em seu sistema numérico eram compostos por sete letras, $(I - V - X - L - C - D - M)$. Para os três primeiros números, de 1 a 3, eram usados traços verticais que se assemelhavam a um dedo (dígitos). Para o cinco, usavam um símbolo que parece haver sido o começo do desenho de uma mão, representado por V. Para o dez, usavam a combinação de dois V invertidos que, com o passar do tempo, se transformou no símbolo X. O cinquenta era associado ao L, o cem era associado ao símbolo C, o quinhentos era associado ao D e o mil era associado à letra M.

A numeração romana tinha algumas regras. Nunca se usava mais de três símbolos iguais juntos. Começava-se pelo algarismo de maior valor e ia se somando.Exemplificando, se eles quisessem representar o número 627, sabemos que 627 = 500 + 100 + 10 + 10 + 5 +1 + 1, representando assim, como $DCXXVII$. Se o de menor valor vier antes, corresponde a subtraí-lo ao de maior valor. Por exemplo, eles representavam o quatro como uma unidade a menos que o cinco e para isso, colocavam um traço vertical (que representa o número 1) à esquerda do cinco, indicado por IV. Para o número nove usavam a mesma ideia, como é uma unidade a menos que dez, seu símbolo era IX, ideia semelhante para o noventa, que era dez unidades a menos que o cem, colocando assim o símbolo XC. De maneira análoga, temos o XL representando o quarenta.

Além disso, utilizavam ainda um traço horizontal colocado acima de uma letra ou símbolo, para indicar quantos milhares possui tal símbolo. Quando utilizavam dois traços, indicava quantos milhões representa aquele símbolo.

O número 3973 em algarismos romanos era obtido da seguinte maneira:

$$3973 = 3 \times 1000 + (1000 - 100) + (50 + 10 + 10) + (1 + 1 + 1) = MMMCMLXXIII$$

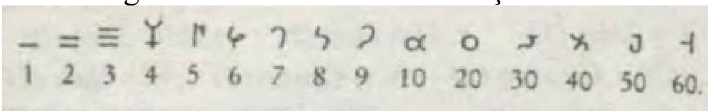
Os números romanos eram considerados bastante eficientes e utilizados na época, e permaneceram em uso durante quase dois mil anos, por eles terem sido o maior exército do mundo e serem os grandes invasores. A contribuição dos romanos para a matemática estava limitada a algumas noções de Agrimensura, surgidas da necessidade de medir e fitar fronteiras do seu vasto império. Atualmente, a numeração romana é amplamente usada na notação dos séculos, usada muitas vezes em capítulos de livros e, especialmente, em inscrições históricas.

2.1.5 Civilização Hindu

Os hindus dominaram por completo a arte de contar. Em seu poema épico de Mahabarata se cita o número 24×10^{40}, que representa o total de divindades existentes. Os hindus desenvolveram pelo ano 570 a.E.C. um prático sistema de notação numérica ao utilizar o princípio posicional dos símbolos, além de suas operações matemáticas.

A importância deste método reside no quão significativa é a posição do dígito ou do símbolo numérico. A partir deste sistema é possível escrever qualquer número utilizando apenas dez símbolos, ou seja, é um sistema decimal de numeração. Os hindus notoriamente eram formidáveis matemáticos: inventaram (ou descobriram) o símbolo zero (0), denominando-o de sunya (vazio). Os símbolos usados pelos hindus, exibidos pela Figura 10, se converteram nos símbolos utilizados até os dias de hoje.

Figura 10 - Sistema de numeração hindu

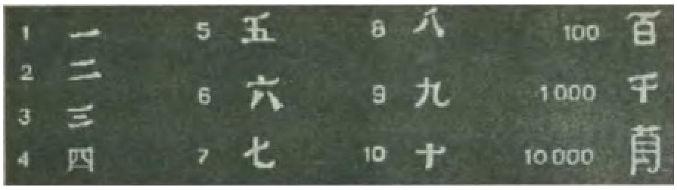


Fonte: Cordova, 2012.

2.1.6 Civilização Chinesa

O povo chinês também desenvolveu seu próprio sistema de numeração por volta de 1500 a.E.C.. Era um sistema híbrido que combinava o sistema aditivo com o multiplicativo na base 10, e levava em conta a ordem da escrita dos símbolos, na vertical (de baixo para cima) ou horizontal (da esquerda para a direita). Empregavam uma série de treze ideogramas, mostrados na Figura 11, desde a dezena, centena, milhar e dezena de milhar, utilizando combinações entre si até obter a cifra desejada.

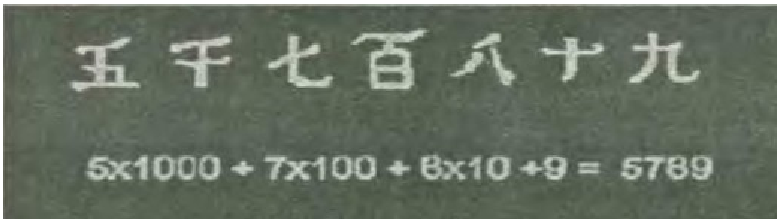
Figura 11 - Sistema de numeração chinês.



Fonte: Cordova, 2012.

Usando como referência a Figura 11, é possível observar na Figura 12 a utilização do sistema de numeração chinês para representação do número 5 769.

Figura 12 - Representação do número 5769 no sistema de numeração chinês



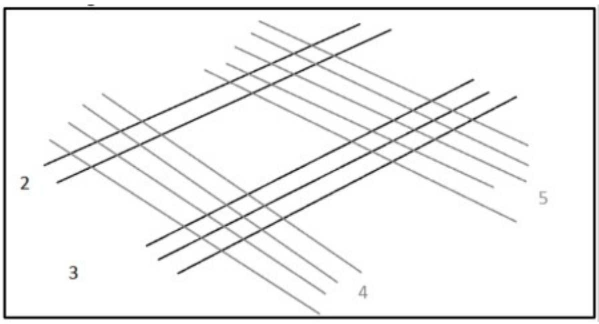
Fonte: Cordova, 2012.

Método de multiplicação chinês

Segundo Soldatelli (2016, p.4) “ Para multiplicar, os chineses usavam varetas de bambu, dispostas em losango, representando o multiplicador e o multiplicando”.

Exemplo abaixo, retirado de Soldatelli (2016), para o cálculo de 23×45 através do sistema de numeração chinês, dado pelo Figura 13.

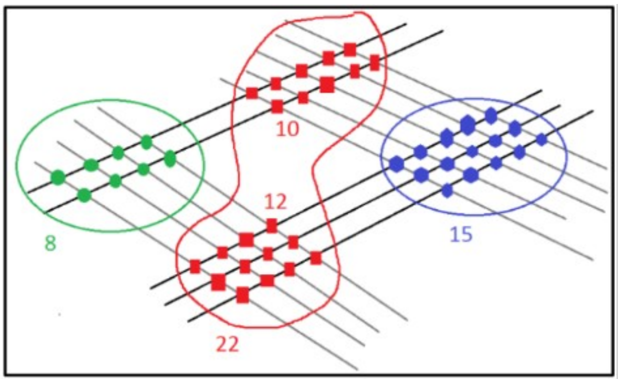
Figura 13 - A quantidade de varetas representa os algarismos dos fatores 23 e 45



Fonte: Soldatelli, 2016.

Contaremos a quantidade de pontos de interseção das varetas, começando pela direita, no centro e, logo após, à esquerda. Somamos as quantidades de pontos em cada região (direita, centro e esquerda). Caso ultrapasse 9 unidades em cada região, usamos 10 unidades em cada ordem, passamos 1 unidade para a ordem imediatamente superior. Nesse caso, a primeira a região da extrema direita, caminhando ao centro até a última ordem à extrema esquerda. Observe a Figura 13, explicitando o que foi feito na multiplicação exemplificada acima.

Figura 14 - Contagem das interseções do método chinês



Fonte: Soldatelli, 2016.

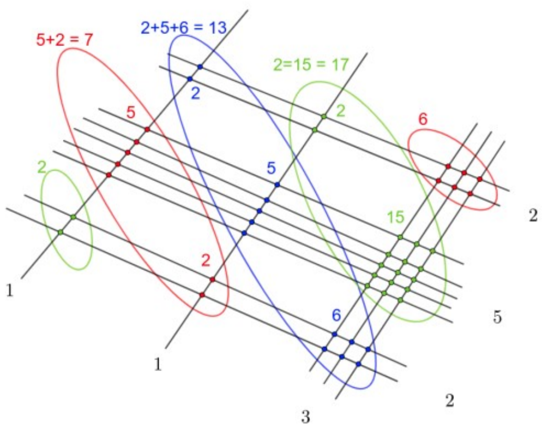
Observe que temos 15 unidades de primeira ordem, 22 unidades de segunda ordem e 8 unidades de terceira ordem. Como não devemos ter mais de 9 unidades em cada ordem:

- De 15 unidades de primeira ordem, tiramos 10, sobrando 5 unidades. Essas 10 unidades irão para a segunda ordem como 1 unidade, somando-se às 22 unidades de segunda ordem;
- Das 22 unidades de segunda ordem, mais 1 unidade que veio da primeira ordem, temos 23 unidades de segunda ordem. Tiramos 20 unidades, sobrando 3 unidades e as 20 que tiramos se transformam em 2 unidades de terceira ordem juntando-se às 8 unidades de terceira ordem;
- Das 8 unidades de terceira ordem, mais 2 unidades que vieram da segunda ordem, temos no total, 10 unidades. Tiramos as 10 unidades em excesso, ficando 0 unidade de terceira e 1 unidade de quarta ordem.

Resumindo, temos 5 unidades de primeira ordem, 3 unidades de segunda ordem, 0 unidade de terceira ordem e 1 unidade de quarta ordem. Ou seja, o número 1035 é o resultado da multiplicação 23×45.

Agora usaremos este método para realizar a multiplicação entre os números 113 e 252. Como no exemplo acima, vamos separar os algarismos de cada número que representará a quantidade de varetas a serem utilizadas. Marcamos as interseções entre elas, dividindo-as em regiões, como mostra a Figura 15.

Figura 15 - Representação da multiplicação de 113 por 252



Fonte: O autor, 2020.

Temos 6 unidades de primeira ordem, 17 unidades de segunda ordem, 13 unidades de terceira ordem, 7 unidades de quarta ordem e 2 de quinta ordem. Temos assim:

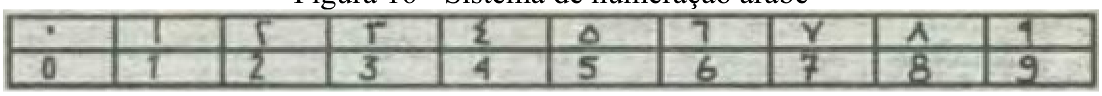
- 6 unidades de primeira ordem a não serem alteradas;
- 17 unidades de segunda ordem que viram 7 unidades, passando 1 unidade para a terceira que já possui 13 unidades;
- Juntando com as 13 que já estavam na terceira ordem, temos 14 unidades, ficando 4 unidades de quarta ordem, passando 1 unidade para a quarta ordem;
- A quarta ordem já com 8 unidades, juntando com 1 que veio da terceira, temos 9 unidades, não passando assim unidades alguma para a quinta ordem;
- Temos 2 unidades de quinta ordem.

Temos então 2 unidades de primeira ordem, 7 unidades de segunda, 4 unidades de terceira, 8 unidades de quarta e 2 unidades de quinta. Obtemos, assim, como resultado $28\ 476$, da multiplicação 113×252.

2.1.7 Civilização Árabe

Segundo Cordova (2012), a civilização árabe manteve contatos com as culturas hindu, grega do Império Bizantino e egípcia, das quais adquiriram vasto conhecimento, através de traduções das grandes obras de Euclides, Ptolomeu, Arquimedes, Aristóteles, Diofanto, entre outros, para o idioma árabe. O sistema numérico atual não foi inventado pelos árabes, e sim pelos hindus. Eles coletaram esse grande conhecimento e o introduziram na Europa. Ao zero, eles chamaram de céfer, que no idioma árabe significa vazio, como vamos observar na Figura 16.

Figura 16 - Sistema de numeração árabe



Fonte: Cordova, 2012.

Este novo sistema de numeração foi chegando lentamente ao ocidente, substituindo o sistema de numeração romano. Ainda que o primeiro manuscrito europeu que utilizou os numerais árabes date do ano 976 E.C., só por volta de 1500 E.C. a aritmética explicou o sistema de numeração arábico com todos os seus detalhes.

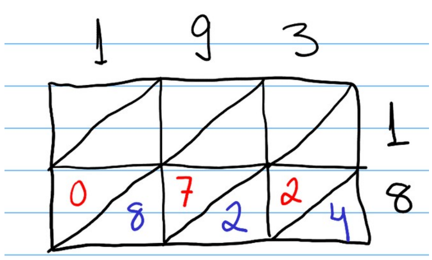
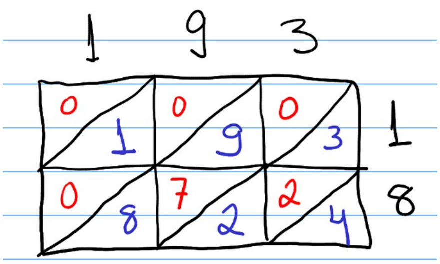
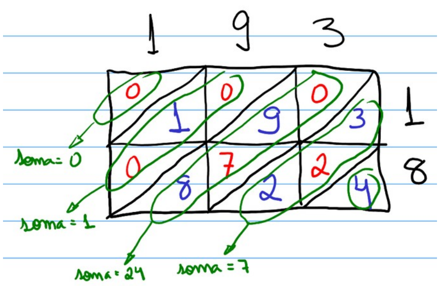
Método de multiplicação árabe

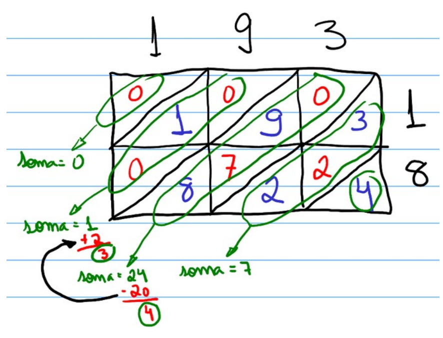
Segundo Soldatelli (2016, p.3),

> Também conhecido como Gelosia (em francês “jalousie”, que significa persiana), este método é muito antigo e especula-se que tenha surgido na Índia, uma vez que aparece em muitos registros daquela região. Da Índia, sua trajetória seguiu por trabalhos árabes, persas e chineses. Através dos árabes seguiu para a Europa Ocidental.

Um domínio prévio da tabuada é exigido neste método, ao contrário do método egípcio, que exigia apenas o uso da tabuada do 2 e domínio das contas de adição. Discutimos na Tabela 2 a multiplicação entre os números 193 e 18.

Tabela 2 - Método árabe de multiplicação entre 193 e 18

	Multiplicamos o algarismo das unidades do número 18 (o 8 colocado em coluna) pelos algarismos de 193. Dividimos, na diagonal, cada célula inferior, pondo na parte inferior o algarismo das unidades e na parte superior as dezenas.
	Repetimos o procedimento anterior para o algarismo das dezenas do número 18.
	Somamos os resultados obtidos, nas diagonais, de cima para baixo, da direita para a esquerda.

	Se o resultado de uma dessas somas ultrapassar a barreira das unidades, então passamos o excesso para a soma da ordem imediatamente superior (lembre-se que a cada 10 unidades de uma ordem, tem mais 1 unidade de ordem imediatamente superior).

Fonte: O autor, 2020.

Temos, então, como resultado 03474. Ou seja, $193 \times 18 = 3474$.

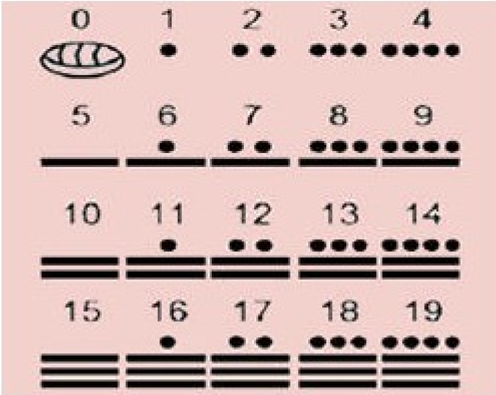
2.1.8 Civilização Maia

Segundo Cordova (2012), os Maias desenvolveram-se na América Central, praticando o comércio e utilizando observações solares como auxílio na prática da agricultura. Segundo Ifrah (1995, p.613),

> De todas as culturas pré-colombianas da América Central, a Civilização Maia é, certamente, a mais célebre. E a influência que ela exerceu sobre as outras – notadamente a asteca – foi comparável à dos gregos sobre os romanos durante a Antiguidade.

Ainda segundo Cordova (2012), dispunham de um sistema numérico bastante avançado para época, cerca de 400 a.E.C. a 300 a.E.C.. Os maias tinham duas formas de representar os números. Em uma delas, utilizavam figuras de cabeças de divindades para a elaboração de seus calendários. Essa divisão (em dias, meses, anos ou até períodos longos), segundo Ifrah (1995, p.644), era concebida como "fardos", em que eram transportados sobre as costas desses divinos guardiões do templo. Na outra, usavam a combinação de apenas três símbolos. Esse última, lembrava o sistema de numeração romano. Porém, ainda assim, era mais evoluído. Já empregavam o zero em seu sistema de numeração posicional de base vinte ou vigesimal, usando a base cinco como base auxiliar. Na Figura 17, temos as representações dos números naturais de 1 a 19, na escrita maia.

Figura 17 - Sistema de numeração maia

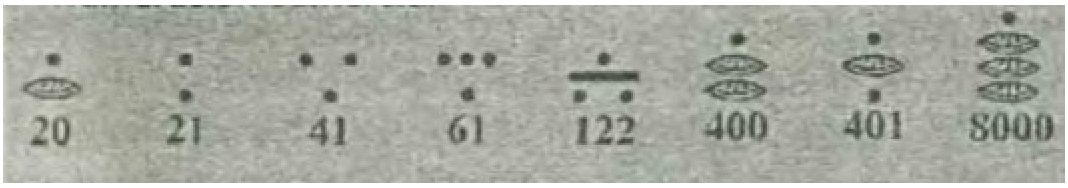


Fonte: Mundo Educação. Disponível em: [O Sistema de Numeração Maia](). Acesso em 16 de julho de 2020.

Os números de um a dezenove eram representados por meio de pontos ou barras consecutivas horizontais. O número um era representado por um ponto (ou seixo), e se repetia até o número quatro, que era representado por quatro pontos. O número cinco era uma barra horizontal (vareta ou bastão) e, a partir daí, acrescentavam-se pontos acima para representar o seis, o sete, até o nove. As barras poderiam se repetir até três vezes, chegando no quinze, colocando pontos até o dezenove. Esse sistema era interpretado de baixo para cima.

O zero era representado por um olho ou uma concha meio fechada (algumas representações possuíam um ponto dentro da concha e outras não). Para os números superiores a dezenove, aplicavam o sistema posicional dos símbolos, verticalmente, com progressões de vinte em vinte, de baixo para cima $\left(20^0, 20^1, 20^2, \ldots\right)$. Reproduzimos na Figura 18 alguns exemplos de aplicação deste sistema. Vale ressaltar que os maias não utilizavam estas representações para observações astronômicas ou em medidas de tempo.

Figura 18 - Alguns números representados na numeração comercial maia



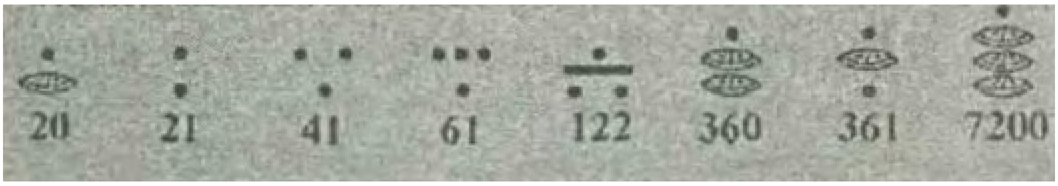
Fonte: Cordova, 2012.

Repare que, pelo exemplo da Figura 18, temos o $20 = 0 \times 20^0 + 1 \times 20^1$. Por isso, sua representação da concha na primeira linha e um único ponto na segunda linha. A mesma ideia para o $21 = 1 \times 20^0 + 1 \times 20^1$, o $41 = 1 \times 20^0 + 2 \times 20^1$ e o $61 = 1 \times 20^0 + 3 \times 20^1$. O número $122 = 2 \times 20^0 + 6 \times 20^1$, por isso temos dois ponto na primeira linha e o símbolo do

6 (bastão, que representa o cinco, com ponto acima) na segunda linha. De maneira análoga, chegamos aos resultados de 400, 401 e 8 000.

Segundo Cordova (2012), para registros de tempo e observações astronômicas, existia uma variação a partir da terceira posição: não utilizavam 20^2, mas substituíam por 18×20. Na quarta posição tínhamos 18×20^2 ao invés do 20^3, na quinta 18×20^3 ao invés do 20^4, e assim por diante. Vamos observar na Figura 19 a representação da numeração astronômica maia.

Figura 19 - Alguns números representados na numeração astronômica maia



Fonte: Cordova, 2012.

Observamos a partir da Figura 19 que a representação astronômica do 360 é a mesma do 400, isso pelo fato de que a partir da terceira posição, temos a mudança relatada mais acima, com o fator 18 aparecendo. Temos que $360 = 0 \times 20^0 + 0 \times 20^1 + 1 \times (18 \cdot 20)$, por isso temos a concha aparecendo, na primeira e segunda linhas, e um único ponto na terceira linha, confundindo-se com a representação do 400. Repare que isso se repete para o número $361 = 1 \times 20^0 + 0 \times 20^1 + 1 \times (18 \cdot 20)$ e também da mesma maneira com o número $7200 = 0 \times 20^0 + 0 \times 20^1 + 0 \times (18 \cdot 20) + 1 \times (18 \cdot 20^2)$.

2.1.9 A Base Binária e a Computação

A execução de um programa de computador obedece instruções e algoritmos precisos em uma sequência lógica complexa, em que cada caractere utiliza apenas um dos dois símbolos, 0 ou 1. Devemos entender como o computador entende as entradas (ou saídas) e como as processa, gerando a informação.

O computador é uma máquina que depende de eletricidade e possui diversos componentes eletrônicos para funcionar. Todas as letras, números pontuação, instruções e consulta em banco de dados, são entendidos como números por essas máquinas.

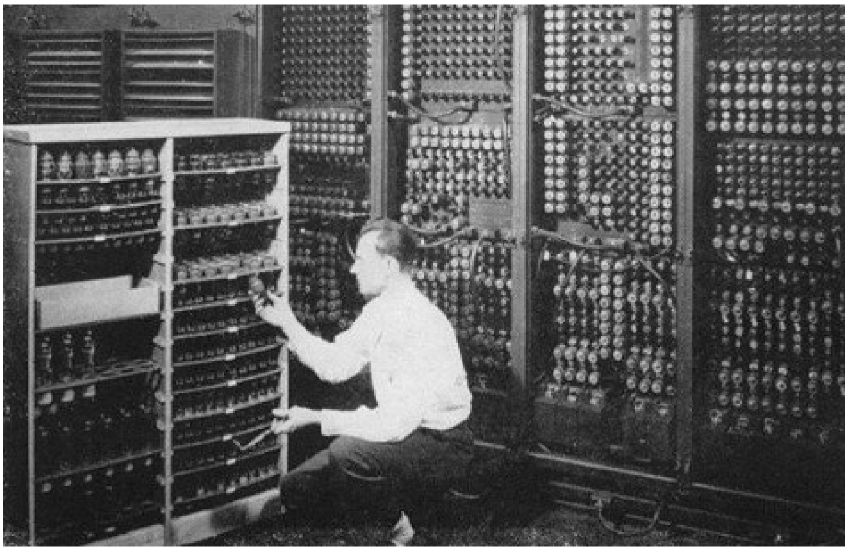
De acordo com Cunha (2017), existem dois tipos de impulsos elétricos possíveis em um computador. Um deles seria a de ausência de impulso elétrico e outro o que indica a presença desse impulso. O número zero (0) indica a ausência desse impulso, enquanto que o número um (1) indica a presença. Ou seja, em um computador, os dados são representados por meio de zeros e uns, e essa representação é chamada de binário, que é considerada a base do sistema digital do mundo da informação que conhecemos hoje.

Por isso, para quem estuda informática, é importante entender o sistema binário e outros sistemas de numeração. Isso porque, segundo Cunha (2017), para um computador, tudo que entra ou sai são simplesmente números 0 ou 1, e nesse sistema binário, um dígito binário (0 ou 1), é chamado de bit, que é a menor unidade de informação de um computador.

Se temos, por exemplo, um arquivo de texto, um vídeo, uma imagem ou até mesmo um aplicativo (ou um programa), temos uma série de bits armazenados no dispositivo. Existe, portanto, uma maneira de codificar as coisas de nosso interesse, para o sistema de numeração binária, de modo que o computador consiga identificar essas coisas.

Na década de 40 os computadores eram bem diferentes do que são atualmente, fato ilustrado pela Figura 20. Os computadores eram imensos e tinham muito menos recursos e capacidade de armazenamento, se comparados aos atuais *desktops, tablets* ou *smartphones*.

Figura 20 - ENIAC, primeiro computador de uso geral, 1945



Fonte: Canal Tech. Disponível em: Como Funciona o Sistema Binário. Acesso em 16 de julho de 2020.

Como uma máquina deste tipo funcionava, fazia cálculos e executava programas? Simplesmente ela respondia cada etapa lógica utilizando uma das duas respostas: “sim” (1) ou “não” (0).

Nesta época, programar um computador não era uma tarefa tão simples como é hoje, em que escrevemos uma linha de código e aguardamos a compilação do programa. Era necessário verificar se cada cabo estava convenientemente conectado, para que, ao final de todo o processo, a combinação de cabos ligados e desligados correspondesse à instrução ou ao algoritmo imputado pelo usuário.

Embora atualmente o uso do computador seja relativamente simples, ele ainda opera da mesma maneira em seu nível mais interno possível, isto é, a máquina opera com o processador funcionando através de instruções binárias. Cabe ao sistema operacional traduzir para a linguagem binária tudo o que fazemos e executar precisamente o que lhe é atribuído.

Como relatamos mais acima, chamamos a informação binária de um computador de binary digit ou *bit* (0 ou 1), denominada de unidade binária. Alguns múltiplos do bit são representados na Tabela 3.

Tabela 3 - Unidade binária e seus múltiplos

1 *bit* = 1 unidade binária (0 ou 1)
1 *byte* = 8 *bits*
1 *kilobyte* = 1 024 *bytes*
1 *megabyte* = 1 024 *kilobytes*
1 *gigabyte* = 1 024 *megabytes*

Fonte: O autor, 2020.

Atualmente 1 *gigabyte* (1 GB) pode parecer pouco para um *notebook* ou computador caseiro. Contudo, não levamos em conta que este número equivaleria a oito bilhões de lâmpadas ligadas ou desligadas em um computador de 1940. Computadores com esta capacidade de memória e processamento eram, nesta época, inimagináveis.

3 MULTIPLICANDO COM O AUXÍLIO DAS MÃOS

Neste capítulo, motivados pelas multiplicações retratadas no Capítulo 2, investigamos algoritmos que fornecem as tabuadas de multiplicação entre dois números naturais, utilizando como ponto de partida a tabuada de multiplicação por nove usando os dedos das mãos.

Estruturamos o capítulo de modo a tornar a leitura mais dinâmica e agradável aos leitores, introduzindo questões que visam justificar a validade de cada algoritmo proposto. Desta maneira, conduzimos o leitor a concluir conjuntamente conosco a legitimidade de cada técnica utilizada.

O leitor mais atento pode pensar que a técnica que propomos é uma mera redução a tabuada de multiplicação por nove. No entanto, acreditamos que todo o procedimento conectado a este algoritmo torna-se relevante ao ensino da Matemática Básica.

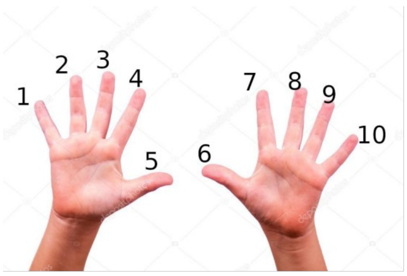
3.1 Tabuada do Nove Através das Mãos

Este algoritmo consiste em usar as mãos para encontrar o resultado da multiplicação de 1 até 10 pelo 9. Este algoritmo será, nesta dissertação, chamado de t*abuada do nove utilizando as mãos* ou simplesmente *tabuada do nove*.

Descrevemos a tabuada do nove a seguir:

- viramos as duas mãos abertas (palmas ou costas, tanto faz), como na Figura 21, e tomamos um dedo. Este dedo será chamado de *"dedo referência"*;
- a quantidade de dedos antes do "dedo de referência" à esquerda do observador, representa o algarismo das dezenas;
- a quantidade de dedos depois do "dedo referência" à direita do observador representa o algarismo das unidades simples.

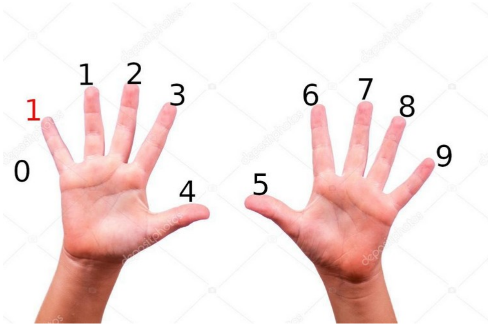
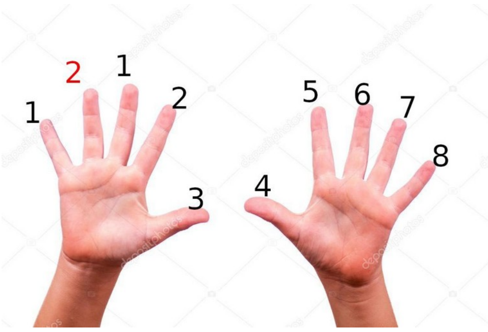
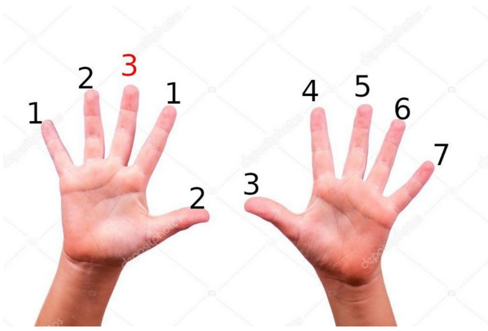
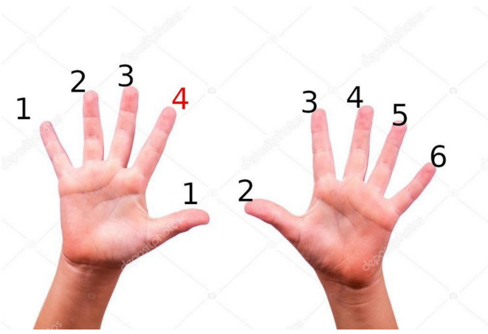
Figura 21 - Dedos rotulados com os números naturais de 1 a 10

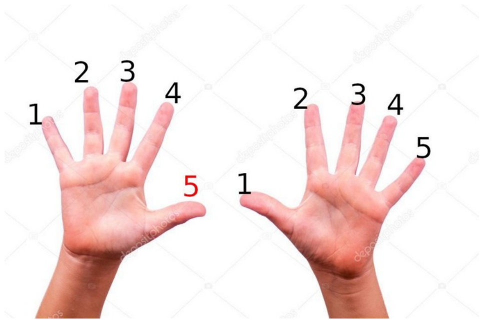
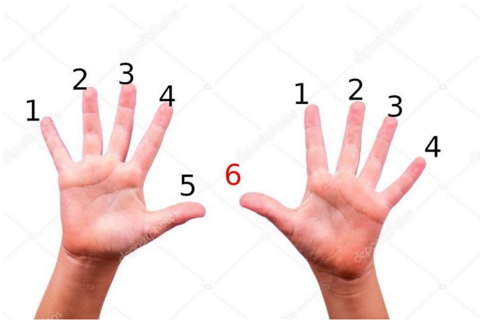
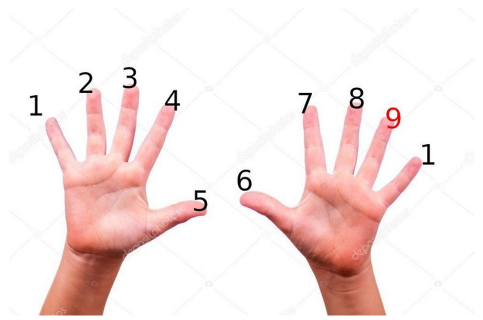


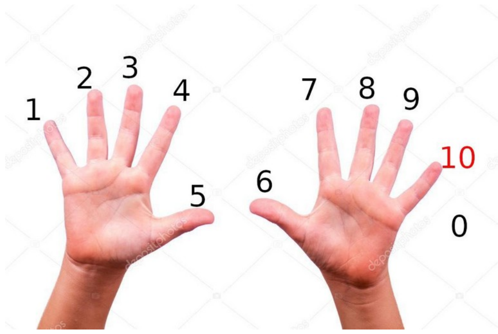
Fonte: DepositPhotos. Disponível em: depositphotos.com . Acesso em 03 de abril de 2020.

Exibimos através da Tabela 4 os dez resultados da tabuada do nove.

Tabela 4 - Tabuada do 9 usando as duas mãos

Dedos rotulados	**Explanação do procedimento**
	Ao fazer 9×1, abaixamos o primeiro dedo (em vermelho $=$ “dedo referência”). À esquerda do “dedo referência” temos 0 dezenas e à direita temos 9 unidades, dando como resultado 9.
	Ao fazer 9×2, abaixamos o segundo dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 1 dezena e à direita temos 8 unidades, dando como resultado 18.
	Ao fazer 9×3, abaixamos o terceiro dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 2 dezenas e à direita temos 7 unidades, dando como resultado 27.
	Ao fazer 9×4, abaixamos o quarto dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 3 dezenas e à direita temos 6 unidades, dando como resultado 36.

	Ao fazer 9×5, abaixamos o quinto dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 4 dezenas e à direita temos 5 unidades, dando como resultado 45.
	Ao fazer 9×6, abaixamos o sexto dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 5 dezenas e à direita temos 4 unidades, dando como resultado 54.
	Ao fazer 9×7, abaixamos o sétimo dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 6 dezenas e à direita temos 3 unidades, dando como resultado 63.
	Ao fazer 9×8, abaixamos o oitavo dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 7 dezenas e à direita temos 2 unidades, dando como resultado 72.
	Ao fazer 9×9, abaixamos o nono dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 8 dezenas e à direita temos 1 unidade, dando como resultado 81.



Ao fazer 9×10, abaixamos o décimo dedo (em vermelho).
À esquerda do “dedo referência” temos 9 dezenas e à direita temos 0 unidades, dando como resultado 90.

Fonte: O autor, 2020.

Repare que separamos dez objetos, excluímos 1 e separamos o restante em dois grupos. O primeiro situa-se à esquerda, que é o grupo das dezenas. À direita temos o grupo das unidades.

Por que este algoritmo funciona? O que a base decimal tem a ver com o uso desta tabuada? isto pode ocorrer com outras bases de numeração? Quais relações matemáticas podemos extrair a partir daí?

Viabilizamos uma explicação algébrica para validade da Tabuada do Nove no Capítulo 5, Seção 5.3.3, em que generalizamos este tabuada através das mãos para outras bases.

3.2 Tabuada dos Naturais Menores que Nove Através das Mãos

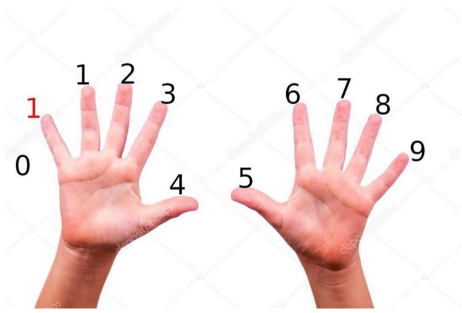
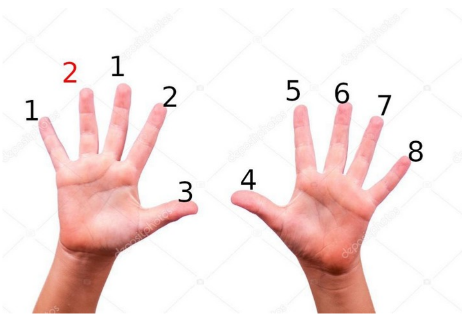
A partir da tabuada do nove é possível efetuar a multiplicação de 7 por 6. Ao efetuarmos 9×6 utilizamos o algoritmo das mãos e obtemos 54 (cinco unidades à esquerda e 4 à direita do “dedo referência”), veja a Figura 21. Repare que de 7 para 9, faltam duas unidades. Então multiplicamos 2 por 6, cujo resultado é 12, retiramos 12 de 54, e finalmente obtemos o resultado 42 procurado. Em suma, temos que $7 \times 6 = (9 \times 6) - (9 - 7) \times 6$.

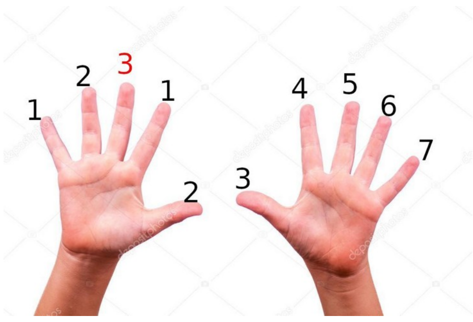
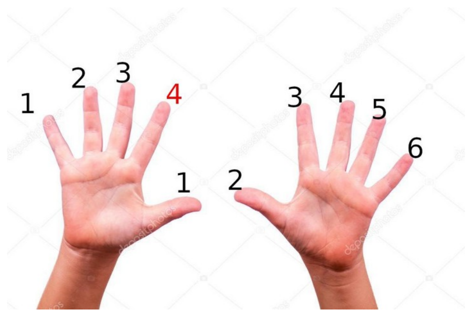
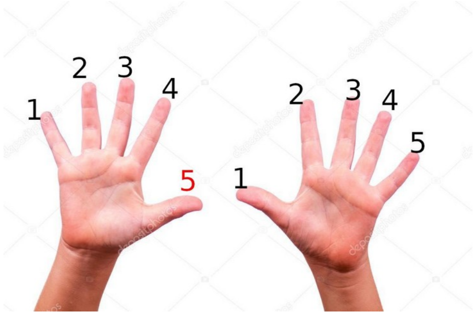
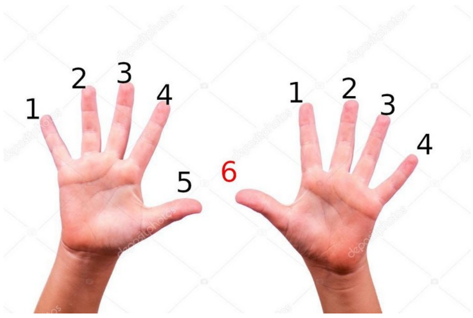
A simples ideia por trás deste procedimento é a de compensação, isto é, descontamos da multiplicação entre um destes números e o nove o produto entre este número e o quanto falta para o outro chegar a nove. Parece um procedimento confuso. No entanto, a expressão a seguir resume precisamente o procedimento descrito: $a \times b = (a \times 9) - (9 - b) \times a$. Vale destacar que este método serve para qualquer “tabuada” em que a multiplicação é de números naturais entre 1 e 9, pois, usamos as propriedades comutativa, distributiva e associativa da multiplicação, além da ideia de descontar o que falta para o nove.

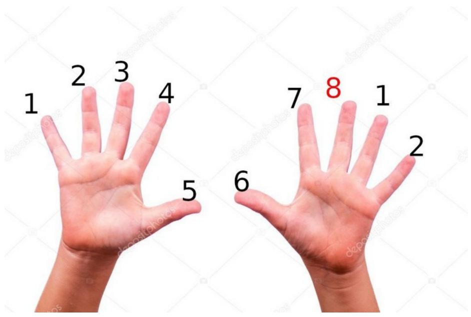
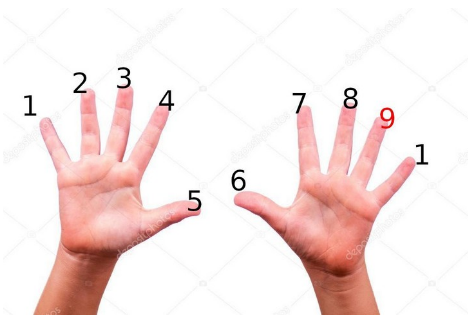
Obviamente, o mais vantajoso, a fim de evitar contas em demasia, é fazer a complementação com 9, utilizando o maior dos dois números. Entretanto, a escolha pode ser inteiramente arbitrária, não afetando o resultado da multiplicação. Isto quer dizer que ao fazermos 6 vezes 7, podíamos observar que para complementar 9 a partir do 6, faltavam 3 unidades. Então, pela tabuada do 9 disponível na Figura 21, na multiplicação 9×7 encontramos 63. Em seguida, multiplicamos 3 por 7, chegando em 21, e retiramos 21 de 63, obtendo 42.

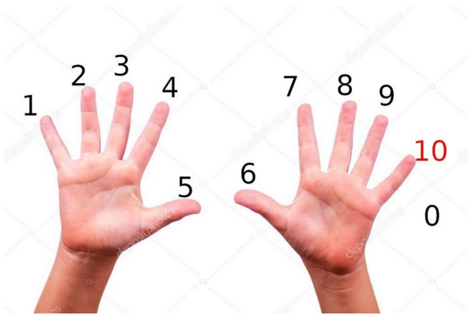
A Tabela 5 viabiliza o algoritmo da multiplicação por 8 através dos dedos das mãos, a partir da tabuada do 9. Observe que o complemento de 8 em relação a 9 é 1 (pois 9 – 8 = 1). Então, este será o que chamamos de *fator multiplicativo* para a tabuada do oito.

Tabela 5 - Tabuada do 8 usando as duas mãos

Dedos rotulados	**Explanação do procedimento**
	**8 $\times$ 1:** baixamos o “dedo referência”. Restam zero dedos à esquerda do dedo referência. Portanto, temos zero dezenas no resultado desta conta. Para determinar as unidades vamos baixar uma quantidade de dedos à direita do dedo referência correspondente ao produto entre o fator multiplicativo desta conta e o número que está multiplicando o 8, isto é, baixamos $1 \times 1 = 1$ dedo à direita do dedo referência. Portanto, restam 8 dedos que indicam a quantia correspondente às unidades nesta conta. Finalmente, $8 \times 1 = 08$.
	**8 $\times$ 2:** baixamos o “dedo referência” correspondente ao número 2 que está multiplicando o 8. Resta 1 dedo à esquerda do dedo referência. Portanto, temos 1 dezena no resultado desta conta. Para determinar as unidades vamos baixar uma quantidade de dedos à direita do dedo referência correspondente ao produto entre o fator multiplicativo desta conta e o número que está multiplicando o 8, isto é, baixamos $1 \times 2 = 2$ dedos à direita do dedo referência. Portanto, restam 6 dedos que indicam a quantia correspondente às unidades nesta conta. Finalmente, $8 \times 2 = 16$.

	**8 × 3:** baixamos o “dedo referência” correspondente ao número 3. Restam 2 dedos à esquerda do dedo referência. Portanto, temos 2 dezenas no resultado desta conta. Para determinar as unidades vamos baixar 1 × 3 = 3 dedos à direita do dedo referência, restando 4 dedos que indicam a quantia correspondente às unidades nesta conta. Finalmente, 8 × 3 = 24.
	**8 × 4:** baixamos o “dedo referência” correspondente ao número 4. Restam 3 dedos à esquerda do dedo referência. Portanto, temos 3 dezenas no resultado desta conta. Para determinar as unidades vamos baixar 1 × 4 = 4 dedos à direita do dedo referência, restando 2 dedos que indicam a quantia correspondente às unidades nesta conta. Finalmente, 8 × 4 = 32.
	**8 × 5:** baixamos o “dedo referência” correspondente ao número 5. Restam 4 dedos à esquerda do dedo referência. Portanto, temos 4 dezenas no resultado desta conta. Para determinar as unidades vamos baixar 1 × 5 = 5 dedos à direita do dedo referência, restando 0 dedos que indicam a quantia correspondente às unidades nesta conta. Finalmente, 8 × 5 = 40.
	**8 × 6:** baixamos o “dedo referência” correspondente ao número 6. Restam 5 dedos à esquerda do dedo referência. Portanto, temos 5 dezenas (ou 50 unidades) no resultado desta conta. Em seguida, baixamos 1 × 6 = 6 dedos à direita do dedo referência. Observe, no entanto, que há apenas 4 dedos à direita do dedo referência. Isto nos fará tomar 2 unidades das 50 unidades obtidas na etapa anterior. Em suma, baixamos os 4 dedos restantes à direita do dedo referência e descontamos 2 unidades das 5 dezenas, resultando assim em 48. Abreviadamente, temos que, 8 × 6 = 5 dezenas – 2 unidades = 48.

	**8 × 7:** baixamos o “dedo referência” correspondente ao número 7. Restam 6 dedos à esquerda do dedo referência. Portanto, temos 6 dezenas (ou 60 unidades) no resultado desta conta. Em seguida, baixamos 1 × 7 = 7 dedos à direita do dedo referência. Observe, no entanto, que há apenas 3 dedos à direita do dedo referência. Isto nos fará tomar 4 unidades das 60 unidades obtidas na etapa anterior. Em suma, baixamos os 3 dedos restantes à direita do dedo referência e descontamos 4 unidades das 6 dezenas, resultando assim em 56. Abreviadamente, temos que, 8 × 7 = 6 dezenas – 4 unidades = 56.
	**8 × 8:** baixamos o “dedo referência” correspondente ao número 8. Restam 7 dedos à esquerda do dedo referência. Portanto, temos 7 dezenas (ou 70 unidades) no resultado desta conta. Em seguida, baixamos 1 × 8 = 8 dedos à direita do dedo referência. Observe, no entanto, que há apenas 2 dedos à direita do dedo referência. Isto nos fará tomar 6 unidades das 70 unidades obtidas na etapa anterior. Em suma, baixamos os 2 dedos restantes à direita do dedo referência e descontamos 6 unidades das 7 dezenas, resultando assim em 64. Abreviadamente, temos que, 8 × 8 = 7 dezenas – 6 unidades = 64.
	**8 x 9:** baixamos o “dedo referência” correspondente ao número 9. Restam 8 dedos à esquerda do dedo referência. Portanto, temos 8 dezenas (ou 80 unidades) no resultado desta conta. Em seguida, baixamos 1 × 9 = 9 dedos à direita do dedo referência. Observe, no entanto, que há apenas 1 dedo à direita do dedo referência. Isto nos fará tomar 8 unidades das 80 unidades obtidas na etapa anterior. Em suma, baixamos 1 dedo restante à direita do dedo referência e descontamos 8 unidades das 8 dezenas, resultando assim em 72. Abreviadamente, temos que, 8 × 9 = 8 dezenas – 8 unidades = 72.

	**8 × 10:** baixamos o "dedo referência" correspondente ao número 10. Restam 9 dedos à esquerda do dedo referência. Portanto, temos 9 dezenas (ou 90 unidades) no resultado desta conta. Em seguida, baixamos 1 × 10 = 10 dedos à direita do dedo referência. Observe, no entanto, que não há dedos à direita do dedo referência. Isto nos fará tomar 10 unidades das 90 unidades obtidas na etapa anterior. Em suma, apenas descontamos 10 unidades das 9 dezenas, resultando assim em 80. Abreviadamente, temos que, 8 × 10 = 9 dezenas – 10 unidades = 80.

Fonte: O autor, 2020.

Vamos explicar matematicamente porque este algoritmo através das mãos funciona. A priori, devemos determinar o *fator multiplicativo* presente na multiplicação por 8. Neste caso, o fator multiplicativo é igual a 9 – 8 = 1.

8 x 1:

Temos o seguinte,

$8 \times 1 = (9 - 1) \times 1 = [9 - (9 - 8)] \times 1 = (9 \times 1) - (1 \times 1) = 08$. Observe que baixamos o dedo 1 (dedo referência), pois, usamos, a priori, o mesmo procedimento da tabuado do 9. Em seguida, descontamos 1 x 1 unidade da etapa anterior. Vale observar que este cômputo final é obtido a partir da conta 9 – 8 (*fator multiplicativo*) multiplicado por 1.

8 × 2:

Temos o seguinte,

$8 \times 2 = (9 - 1) \times 2 = [9 - (9 - 8)] \times 2 = (9 \times 2) - (1 \times 2) = 16$. Observe que baixamos o dedo 2 (dedo referência), pois, usamos, a priori, o mesmo procedimento da tabuado do 9. Em seguida, descontamos $1 \times 2 = 2$ unidades da etapa anterior. Vale observar que este cômputo final é obtido a partir da conta 9 – 8 (*fator multiplicativo*) multiplicado por 2.

8 × 3:

Temos o seguinte,

$8 \times 3 = (9 - 1) \times 3 = [9 - (9 - 8)] \times 3 = (9 \times 3) - (1 \times 3) = 24$. Observe que baixamos o dedo 3 (dedo referência), pois, usamos, a priori, o mesmo procedimento da tabuada do 9. Em seguida, descontamos $1 \times 3 = 3$ unidades da etapa anterior. Vale observar que este cômputo final é obtido a partir da conta 9 – 8 (*fator multiplicativo*) multiplicado por 3

8 $\times$ 4:

Temos o seguinte,

$8 \times 4 = (9 - 1) \times 4 = [9 - (9 - 8)] \times 4 = (9 \times 4) - (1 \times 4) = 32$. Observe que baixamos o dedo 4 (dedo referência), pois, usamos, a priori, o mesmo procedimento da tabuada do 9. Em seguida, descontamos $1 \times 4 = 4$ unidades da etapa anterior. Vale observar que este cômputo final é obtido a partir da conta 9 – 8 (*fator multiplicativo*) multiplicado por 4.

8 $\times$ 5:

Temos o seguinte,

$8 \times 5 = (9 - 1) \times 5 = [9 - (9 - 8)] \times 5 = (9 \times 5) - (1 \times 5) = 40$. Observe que baixamos o dedo 5 (dedo referência), pois, usamos, a priori, o mesmo procedimento da tabuada do 9. Em seguida, descontamos $1 \times 5 = 5$ unidades da etapa anterior. Vale observar que este cômputo final é obtido a partir da conta 9 – 8 (*fator multiplicativo*) multiplicado por 5.

8 $\times$ 6:

Temos o seguinte,

$8 \times 6 = (9 - 1) \times 6 = [9 - (9 - 8)] \times 6 = (9 \times 6) - (1 \times 6) = 48$. Observe que baixamos o dedo 6 (dedo referência), pois, usamos, a priori, o mesmo procedimento da tabuado do 9. Em seguida, descontamos $1 \times 6 = 6$ unidades da etapa anterior. Vale observar que este cômputo final é obtido a partir da conta 9 – 8 (*fator multiplicativo*) multiplicado por 6.

8 $\times$ 7:

Temos o seguinte,

$8 \times 7 = (9 - 1) \times 7 = [9 - (9 - 8)] \times 7 = (9 \times 7) - (1 \times 7) = 56$. Observe que baixamos o dedo 7 (dedo referência), pois, usamos, a priori, o mesmo procedimento da tabuado do 9. Em seguida, descontamos $1 \times 7 = 7$ unidades da etapa anterior. Vale observar que este cômputo final é obtido a partir da conta 9 – 8 (*fator multiplicativo*) multiplicado por 7.

8 x 8:

Temos o seguinte,

$8 \times 8 = (9 - 1) \times 8 = [9 - (9 - 8)] \times 8 = (9 \times 8) - (1 \times 8) = 64$. Observe que baixamos o dedo

8 (dedo referência), pois, usamos, a priori, o mesmo procedimento da tabuado do 9. Em seguida, descontamos 1 x 8 = 8 unidades da etapa anterior. Vale observar que este cômputo final é obtido a partir da conta 9 – 8 (*fator multiplicativo*) multiplicado por 8.

8 x 9:

Temos o seguinte,

$8 \times 9 = (9-1) \times 9 = [9-(9-8)] \times 9 = (9 \times 9) - (1 \times 9) = 72$. Observe que baixamos o dedo 9 (dedo referência), pois, usamos, a priori, o mesmo procedimento da tabuado do 9. Em seguida, descontamos $1 \times 9 = 9$ unidades da etapa anterior. Vale observar que este cômputo final é obtido a partir da conta 9 – 8 (*fator multiplicativo*) multiplicado por 9.

8 x 10:

Temos o seguinte, $8 \times 10 = (9-1) \times 10 = [9-(9-8)] \times 10 = (9 \times 10) - (1 \times 10) = 80$. Observe que baixamos o dedo 2 (dedo referência), pois, usamos, a priori, o mesmo procedimento da tabuado do 9. Em seguida, descontamos $1 \times 10 = 10$ unidades da etapa anterior. Vale observar que este cômputo final é obtido a partir da conta 9 – 8 (*fator multiplicativo*) multiplicado por 10.

Generalizadamente, para a multiplicação de m por n números naturais, tais que $0 < m < 9$ e $0 < n < 9$, temos o seguinte: $m \times n = [9-(9-m)] \times n = (9 \times n) - (9-m) \times n$. Observe que baixamos o dedo n (dedo referência), pois, ao fazer a conta $(9 \times n)$ usamos, a priori, o mesmo procedimento da tabuada do 9. Em seguida, descontamos $(9-m) \times n$ unidades da etapa anterior. Vale observar que este cômputo final é obtido a partir da conta $(9-m)$ (*fator multiplicativo*) multiplicado por n.

Muito embora estamos promovendo a multiplicação entre naturais através das mãos, algo que acreditamos ser de extrema valia para o processo de ensino e aprendizagem, temos a consciência de que, em alguns casos, este método torna as contas um pouco mais demoradas e fastidiosas.

Entretanto, é oportuno destacar que o intuito deste capítulo é apresentar um tipo de atividade que possibilite uma compreensão mais ampla da operação de multiplicação dos números naturais, baseada na tabuada do nove. Se conseguirmos aplicar estas ideias em um ambiente de ensino, acreditamos que estaríamos convergindo para o que é defendido por Curi (2011), Soldatelli (2016) e Rocha (2019), que é pensar em problemas menos triviais, que de fato possibilitem o conhecimento das tabuadas e das operações nos sistemas decimais e não decimais.

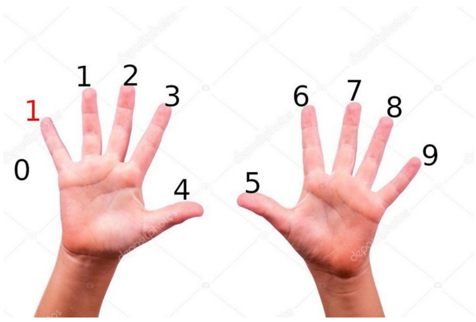
3.3 Tabuada dos Naturais Maiores que Nove Através das Mãos

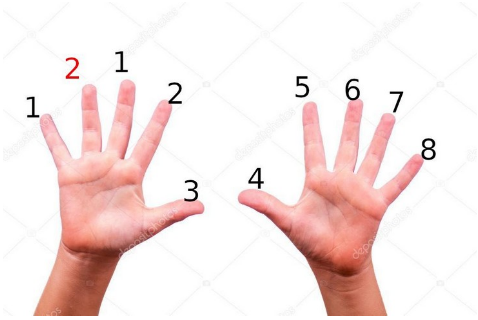
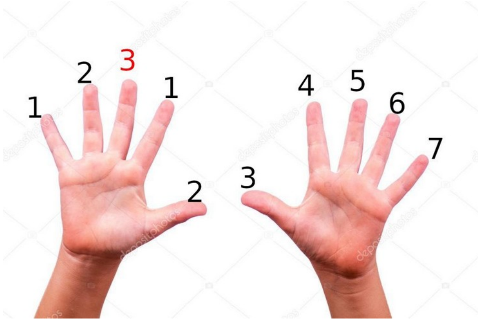
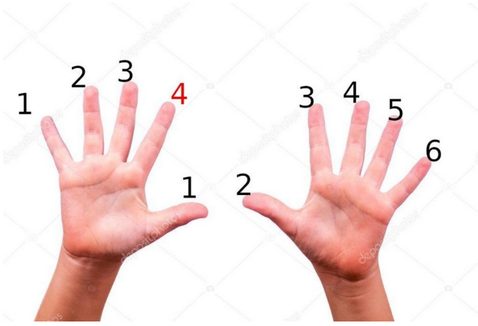
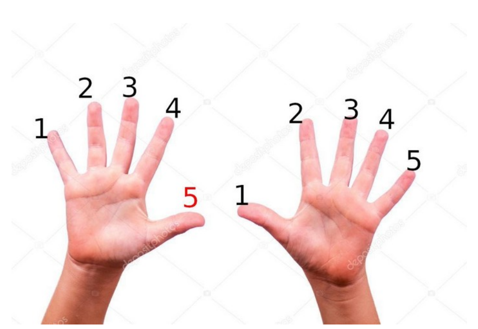
É igualmente possível, a partir da tabuada do nove com as mãos, efetuar a multiplicação entre dois números quando um deles é maior do que nove. Por exemplo, 13 $\times$ 6. Repare que ao fazer 9 x 6 podemos utilizar a tabuada do nove, disponível na Figura 21, e encontrar como resultado 54 (cinco unidades à esquerda e 4 à direita do “dedo referência”). Note que o 13 ultrapassa 9 em 4 unidades, então multiplicamos 4 por 6 encontrando 24 unidades que ainda devem ser consideradas nesta conta. Então adicionamos 24 a 54 = 9 $\times$ 6 e obtemos o resultado 78 = 9 $\times$ 6 + (13 – 9) $\times$ 6.

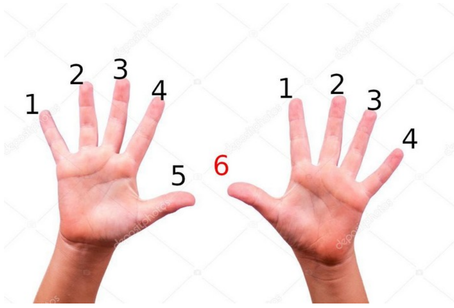
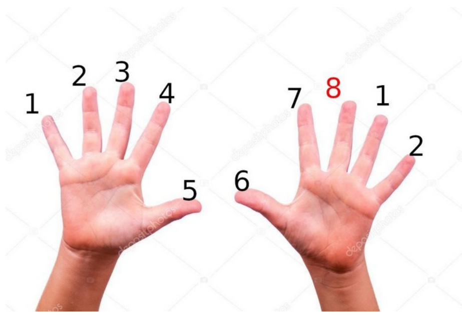
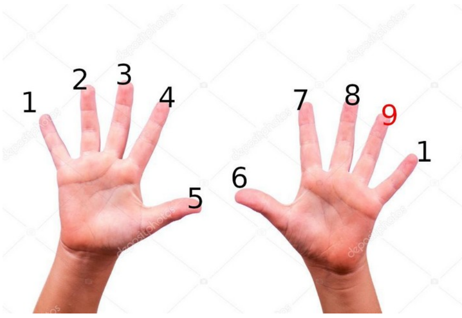
A verificação da validade deste algoritmo é estritamente baseada na propriedade distributiva da multiplicação, isto é, se desejamos acessar o resultado de $a \times b$, e digamos que $a > 9$, então fazemos $b \times 9 + (a - 9) \times b$. Observe que, neste caso, estamos considerando $b < 9$. Desta forma, seria possível obter a expressão $(a - 9) \times b$ através do método descrito na Seção 3.2.

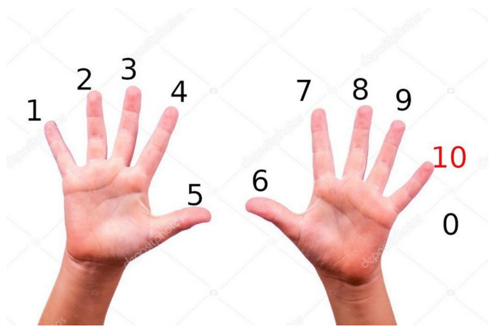
Descrevemos a seguir o procedimento para a multiplicação por 11, Tabela 6. Observe que neste caso o *fator multiplicativo* é igual a 2, e é obtido pela diferença entre 11 e 9.

Tabela 6 - Tabuada do 11 usando as duas mãos

Dedos rotulados	**Explanação do procedimento**
	**11 $\times$ 1:** baixamos o “dedo referência”. Restam zero dedos à esquerda do dedo referência. Portanto, temos zero dezenas no resultado desta conta. Para determinar as unidades vamos acrescentar à quantidade de dedos à direita do dedo referência, o correspondente ao produto entre o fator multiplicativo desta conta e o número que está multiplicando o 11, isto é, acrescentamos 2 $\times$ 1 = 2 unidades às encontradas em 9 $\times$ 1. Portanto, temos 9 + 2 unidades = 11 unidades. Finalmente, 11 $\times$ 1 = 11.

	**11 $\times$ 2:** baixamos o “dedo referência”. Resta 1 dezena à esquerda do dedo referência e 8 unidades à direita. Para determinar as unidades a acrescentar à quantidade encontrada, usamos o produto entre o fator multiplicativo desta conta e o número que está multiplicando o 11, isto é, acrescentamos 2 $\times$ 2 = 4 unidades encontradas em 9 $\times$ 2. Portanto, temos 18 + 4 unidades = 22 unidades. Finalmente, 11 $\times$ 2 = 22.
	**11 $\times$ 3:** baixamos o “dedo referência”. Restam 2 dezenas à esquerda do dedo referência e 7 unidades à direita, resultando em 27. Para determinar as unidades a acrescentar à quantidade encontrada, usamos o produto entre o fator multiplicativo desta conta e o número que está multiplicando o 11, isto é, acrescentamos 2 $\times$ 3 = 6 unidades encontradas em 9 $\times$ 3. Portanto, temos 27 + 6 unidades = 33 unidades. Finalmente, 11 $\times$ 3 = 33.
	**11 $\times$ 4:** baixamos o “dedo referência”. Restam 3 dezenas à esquerda do dedo referência e 6 unidades à direita, resultando em 36. Para determinar as unidades a acrescentar à quantidade encontrada, usamos o produto entre o fator multiplicativo desta conta e o número que está multiplicando o 11, isto é, acrescentamos 2 $\times$ 4 = 8 unidades encontradas em 9 $\times$ 4. Portanto, temos 36 + 8 unidades = 44 unidades. Finalmente, 11 $\times$ 4 = 44.
	**11 $\times$ 5:** baixamos o “dedo referência”. Restam 4 dezenas à esquerda do dedo referência e 5 unidades à direita, resultando em 45. Para determinar as unidades a acrescentar à quantidade encontrada, usamos o produto entre o fator multiplicativo desta conta e o número que está multiplicando o 11, isto é, acrescentamos 2 $\times$ 5 = 10 unidades encontradas em 9 $\times$ 5. Portanto, temos 45 + 10 unidades = 55 unidades. Finalmente, 11 $\times$ 5 = 55.

	**11 × 6:** baixamos o “dedo referência”. Restam 5 dezenas à esquerda do dedo referência e 4 unidades à direita, resultando em 54. Para determinar as unidades a acrescentar à quantidade encontrada, usamos o produto entre o fator multiplicativo desta conta e o número que está multiplicando o 11, isto é, acrescentamos 2 × 6 = 12 unidades encontradas em 9 × 6. Portanto, temos 54 + 12 unidades = 66 unidades. Finalmente, 11 × 6 = 66.
	**11 × 7:** baixamos o “dedo referência”. Restam 6 dezenas à esquerda do dedo referência e 3 unidades à direita, resultando em 63. Para determinar as unidades a acrescentar à quantidade encontrada, usamos o produto entre o fator multiplicativo desta conta e o número que está multiplicando o 11, isto é, acrescentamos 2 × 7 = 14 unidades encontradas em 9 × 7. Portanto, temos 63 + 14 unidades = 77 unidades. Finalmente, 11 × 7 = 77.
	**11 × 8:** baixamos o “dedo referência”. Restam 7 dezenas à esquerda do dedo referência e 2 unidades à direita, resultando em 72. Para determinar as unidades a acrescentar à quantidade encontrada, usamos o produto entre o fator multiplicativo desta conta e o número que está multiplicando o 11, isto é, acrescentamos 2 × 8 = 16 unidades encontradas em 9 × 8. Portanto, temos 72 + 16 unidades = 88 unidades. Finalmente, 11 × 8 = 88.
	**11 × 9:** baixamos o “dedo referência”. Restam 8 dezenas à esquerda do dedo referência e 1 unidades à direita, resultando em 81. Para determinar as unidades a acrescentar à quantidade encontrada, usamos o produto entre o fator multiplicativo desta conta e o número que está multiplicando o 11, isto é, acrescentamos 2 × 9 = 18 unidades encontradas em 9 × 9. Portanto, temos 81 + 18 unidades + 99 unidades. Finalmente, 11 × 9 = 99.



11 $\times$ 10: baixamos o “dedo referência”. Restam 9 dezenas à esquerda do dedo referência e 0 unidades à direita, resultando em 90. Para determinar as unidades a acrescentar à quantidade encontrada, usamos o produto entre o fator multiplicativo desta conta e o número que está multiplicando o 11, isto é, acrescentamos 2 $\times$ 10 = 20 unidades encontradas em 9 $\times$ 10. Portanto, temos 90 + 20 unidades = 110 unidades.
Finalmente, 11 $\times$ 10 = 110.

Fonte: O autor, 2020.

Generalizadamente, para a multiplicação entre m e n números naturais tais que $m > 10$ e $1 \leq n \leq 10$, temos o seguinte: $m \times n = [9 + (m - 9)] \times n = (9 \times n) + (m - 9) \times n$. Observe que baixamos o dedo n (dedo referência), pois, ao fazer a conta $(9 \times n)$ usamos, a priori, o mesmo procedimento da tabuada do 9. Em seguida, acrescentamos $(m - 9) \times n$ unidades na etapa anterior. Vale observar que este cômputo final é obtido a partir da conta $(m - 9)$ (*fator multiplicativo*) multiplicado por n.

Na seção 5.3.3, desenvolvemos um método de multiplicação usando as mãos em bases de numeração menores que a decimal. Mostramos que a tabuada de multiplicação de $\beta - 1$ na base β sempre funciona. Vamos a priori fazer uma breve revisão de polinômios e de bases de numeração para em seguida estender o método de multiplicação proposto até então.

4 HORNER-RUFFINI PARA POLINÔMIOS

Neste capítulo, abordamos conceitos de função polinomial que serão de grande importância para o desenvolvimento do Método de Horner-Ruffini para Polinômios. Todas as variáveis e todos os coeficientes considerados daqui por diante pertencem ao conjunto dos números reais, embora as fontes de consulta como Iezzi (2013), Morgado (2015) e Muniz Neto (2012) tratem de funções polinomiais no domínio complexo. Adaptaremos nosso texto para função polinomial de domínio real. Isto é mais que o suficiente para alicerçar os conceitos e as propriedades de bases de numeração.

De acordo com Morgado (2015), uma função polinomial $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função polinomial real, de variável real, quando existirem números reais $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ tais que:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 + a_0$$

Ao nos referirmos a função polinomial $P(x)$, vamos por vezes no texto representá-lo por polinômio P ou mesmo $P(x)$, como observado por Morgado (2015).

Os números $a_n,\ a_{n-1}, ..., a_1,\ a_0$ são chamamos de *coeficientes do polinômio* P, enquanto as parcelas $a_n x^n,\ a_{n-1}x^{n-1},\ ..., a_1 x,\ a_0$ são chamadas de *termos do polinômio* P. Observe que se $P_1(x) = 3x^4 + 7x^3 + x - 5$ é um polinômio, então seus coeficientes são $a_4 = 3,\ a_3 = 7,\ a_2 = 0,\ a_1 = 1\ e\ a_0 = -5.$

O *grau* do polinômio $P(x)$, representado por $\partial P(x)$, é um número natural k dado por:

$$\partial P(x) = k \Leftrightarrow \begin{cases} a_k \neq 0; \\ a_i = 0; \forall i > k. \end{cases}$$

Se o grau de um polinômio $P(x)$ é k, então o coeficiente a_k é chamado de *coeficiente dominante do polinômio* e o termo $a_k x^k$ de *termo líder do polinômio*. O grau do polinômio P_1 dado no exemplo acima é igual a $\partial P_1(x) = 4$, seu coeficiente dominante é $a_4 = 3$ e seu termo líder é $3x^4$.

O *valor numérico* do polinômio $P(x)$ é o valor da imagem obtida quando substituímos x por um número real a de seu domínio real. Quando determinamos o valor numérico $P(a)$ de um polinômio $P(x)$ encontrando um número que é a imagem de a pelo polinômio $P(x)$. Pelo exemplo anterior:

$$P(-1) = 3\cdot(-1)^4 + 7\cdot(-1)^3 + (-1) - 5 = 3 - 7 - 1 - 5 = -10.$$

Ou seja, a imagem de -1 pelo polinômio $P(x)$ é igual a -10.

Uma *raiz* de um polinômio $P(x)$ é o valor numérico de x para o qual $P(x) = 0$. Observe que o polinômio $P_1(x)$ é um polinômio do quarto grau. Portanto, o cômputo de suas

4 raízes não é algo trivial. Computacionalmente utilizando o software WolframAlpha[3], conseguimos obter $x \approx -2,4943$ e $x \approx 0,7689$ raízes reais aproximadas para $P_1(x)$. Se tomarmos $P_2(x) = x^2 - 9$, então suas raízes[4] são iguais a $x = -3$ e $x = 3$.

Dizemos que um *polinômio identicamente nulo*, quando $P(x) = 0$, para todo valor real de x, ou seja, quando seus coeficientes $a_n = a_{n-1} = ... = a_1 = a_0 = 0$, para todo n natural. Convém observar que o grau do polinômio nulo é indefinido.

Dois polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são *idênticos* (ou *iguais*) se assumem *valores numéricos* iguais para todo x real. O Teorema 4.1 é um teorema clássico e fornece uma caracterização para polinômios idênticos.

Teorema 4.1

Dois polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$, de mesmo grau, são idênticos se e somente se possuem seus coeficientes ordenadamente iguais. Explicitamente temos:

$$\begin{cases} P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ \\ P_2(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \end{cases}$$

$P_1(x) \equiv P_2(x) \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Demonstração:

$$P_1(x) = P_2(x) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i x^i - b_i x^i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) x^i = 0 \Leftrightarrow (a_i - b_i) x^i = 0 \Leftrightarrow a_i - b_i = 0 \Leftrightarrow a_i = b_i. \qquad \square$$

Assim como nos conjuntos numéricos, as quatro operações fundamentais entre polinômios são a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão.

4.1 Adição de Polinômios

Sejam $P_1(x)$ e $P_2(x)$ dois polinômios. Temos que:

3 Disponível em: WolframAlpha. Acesso em 25 de novembro de 2020.

4 Segundo Morgado (2015, p.219), todo polinômio complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa. Esse é o *Teorema Fundamental da Álgebra*. Um outro Teorema, consultado da mesma fonte é: Todo polinômio complexo $P(x)$ de grau n pode ser fatorado de forma única, a menos da ordem dos fatores, da forma $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$, em que a é um número complexo e x_1, x_2, … , x_n são raízes complexas de $P(x)$ (possivelmente repetidas).

$$P_1(x) + P_2(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i) x^i,$$

onde $k \leq máx\,\{m,\ n\}$.

Convém ressaltar que, ao adicionarmos dois polinômios de graus distintos, completamos com coeficiente zero, o polinômio de menor grau, de modo a ajustar no momento de executar a operação.

Isto posto, para $P_1(x) = -2x^3 - 7x + 9$ e $P_2(x) = 6x^5 + 7x^4 + 5x^3 - 9x^2 + 13x$ temos o seguinte:

$P_1(x) + P_2(x) = (0+6)x^5 + (0+7)x^4 + (-2+5)x^3 + (0-9)x^2 + (-7+13)x + (9+0)$

$P_1(x) + P_2(x) = 6x^5 + 7x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 6x + 9$

4.1.1 Propriedades da Adição de Polinômios

A seguir, listamos as principais propriedades oriundas da adição de polinômios e das propriedades da adição de números reais.

i. Associatividade: $[P_1(x) + P_2(x)] + P_3(x) = P_1(x) + [P_2(x) + P_3(x)]$;
ii. Comutatividade: $P_1(x) + P_2(x) = P_2(x) + P_1(x)$;
iii. O Elemento Neutro da Adição é o Polinômio Identicamente Nulo;
iv. Elementos Simétricos (ou polinômios simétricos): $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são simétricos quando o resultado da adição entre eles for igual o polinômio nulo, ou seja, $P_1(x) + P_2(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

4.2 Subtração de Polinômios

Podemos definir a subtração da seguinte maneira:

$$P_1(x) - P_2(x) = P_1(x) + [-P_2(x)]$$

Ou seja, subtrair $P_1(x)$ de $P_2(x)$ simplesmente é fazer a adição de $P_1(x)$ com o simétrico de $P_2(x)$. As propriedades listadas na Seção 4.1 referentes à Adição de Polinômios são herdadas para a Subtração de Polinômios, exceto a comutatividade.

4.3 Multiplicação de Polinômios

Segundo Iezzi (2013), dados os polinômios:

$$\begin{cases} P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \\ \\ P_2(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0 \end{cases}$$

O produto $P_1(x) \times P_2(x)$ é o polinômio:

$P_3(x) = P_1(x) \times P_2(x)$

$P_3(x) = a_n b_m x^{m+n} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)x^{m+n-1} + ... + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + a_0 b_0$

Temos assim $P_3(x) = c_{m+n}x^{m+n} + c_{m+n-1}x^{m+n-1} + ... + c_1 x + c_0$, onde cada termo $c_k,\ 0 \leq k \leq m+n$, do polinômio $P_3(x)$ pode ser escrito como:

$$c_k = a_k \cdot b_0 + a_{k-1} \cdot b_1 + ... + a_1 \cdot b_{k-1} + a_0 \cdot b_k = \sum_{i=0}^{k} a_{k-i} \cdot b_i$$

A operação consiste em nada mais do que realizar a distributividade entre os termos dos polinômios. Repare que cada elemento $a_i x^i$ do polinômio $P_1(x)$ multiplica o elemento $b_j x^j$ do polinômio $P_2(x)$ para originar o termo $(a_i \cdot b_j)^{i+j}$. Após efetuar todas as operações de multiplicação possíveis, somamos os resultados a fim de obter o polinômio produto $P_3(x)$. A seguir, realizamos a multiplicação entre $P_1(x)$ e $P_2(x)$, dados $P_1(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3$ e $P_2(x) = x^2 - 6$.

- *1º modo:*

Aplicamos a distributiva e, em seguida, efetuamos a adição dos termos semelhantes.

$P_1(x) \cdot P_2(x) = (-2x^3 + 5x^2 - 3) \cdot (x^2 - 6) = -2x^5 + 12x^3 + 5x^4 - 30x^2 - 3x^2 + 18$

$P_1(x) \cdot P_2(x) = -2x^5 + 5x^4 + 12x^3 - 33x^2 + 18$.

- *2º modo:*

Este modo é inspirado no algoritmo da multiplicação para números naturais.

Tabela 7 - Multiplicação do polinômio $-2x^3 + 5x^2 - 3$ por $x^2 - 6$ (2º modo)

			$-2x^3$	$+5x^2$	-3
		$\times$		x^2	-6
			$+12x^3$	$-30x^2$	$+18$
$+$	$-2x^5$	$+5x^4$		$-3x^2$	
	$-2x^5$	$+5x^4$	$+12x^3$	$-33x^2$	$+18$

Fonte: O autor, 2020.

Obtemos o polinômio produto $P_1(x) \cdot P_2(x) = -2x^5 + 5x^4 + 12x^3 - 33x^2 + 18$.

- *3º modo:*

Colocamos em uma tabela de dupla entrada os coeficientes a_i do polinômio $P_1(x)$ e os coeficientes b_j do polinômio $P_2(x)$, respectivamente, na linha e na coluna após ter sido ordenado e completo. Em seguida, calculamos todos os produtos $a_i \cdot b_j$ possíveis e somamos cada diagonal como indicado abaixo:

Tabela 8 - Multiplicação do polinômio $-2x^3 + 5x^2 - 3$ por $x^2 - 6$ (3º modo)

	-2	$+5$	0	-3
1	-2	$+5$	0	-3
0	0	0	0	0
-6	$+12$	-30	0	$+18$

Fonte: O autor, 2020.

- Na diagonal verde temos o coeficiente de grau 5, ou seja, $c_5 = -2$;
- Na diagonal amarela temos os coeficientes de grau 4, e somando, obtemos $c_4 = 0 + 5 = 5$;
- Na diagonal azul temos os coeficientes de grau 3, e somando, obtemos $c_3 = +12 + 0 + 0 = 12$;
- Na diagonal vermelha temos os coeficientes de grau 2, e somando, obtemos $c_2 = -30 + 0 - 3 = -33$;
- Na diagonal branca temos os coeficientes de grau 1, e somando, obtemos $c_1 = 0 + 0 = 0$;
- Na diagonal magenta temos o termo independente, obtendo $c_0 = 18$.

Finalmente, temos o polinômio $P_3(x) = -2x^5 + 5x^4 + 12x^3 - 33x^2 + 18$.

4.3.1 Propriedades da Multiplicação

A seguir, listamos as principais propriedades provenientes da multiplicação de polinômios.

i. Associatividade: $[P_1(x) \cdot P_2(x)] \cdot P_3(x) = P_1(x) \cdot [P_2(x) \cdot P_3(x)]$;

ii. Comutatividade: $P_1(x) \cdot P_2(x) = P_2(x) \cdot P_1(x)$;

iii. O Elemento Neutro é dado por $P(x) = 1$;

iv. Distributividade: $P_1(x) \cdot (P_2(x) + P_3(x)) = P_1(x) \cdot P_2(x) + P_1(x) \cdot P_3(x)$;

v. Se $P_1(x)$ e $P_2(x)$ possuem graus respectivamente iguais a ∂_1 e ∂_2, então o grau de $P_1(x) \cdot P_2(x)$ é dado pela soma $\partial_1 + \partial_2$.

4.4 Divisão de Polinômios

A seguir, segundo Neto (2012), temos o seguinte análogo da divisão de inteiros, denominado o *algoritmo da divisão para polinômios.*

Dados dois polinômios $P(x)$ e $D(x)$, sendo $D(x)$ um polinômio não-nulo, existem dois únicos polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, tais que:

$$\begin{cases} P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ \\ R(x) = 0 \ ou \ 0 \leq \partial R(x) < \partial D(x) \end{cases}$$

Denotamos $P(x)$ de dividendo, $D(x)$ de divisor, $Q(x)$ de quociente e $R(x)$ de resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$. Quando $R(x) = 0$ (polinômio identicamente nulo) dizemos que a divisão entre $P(x)$ e $D(x)$ é uma divisão exata.

Segundo Morgado (2006, p.205), é uma maneira alternativa de olharmos o problema de um ponto de vista mais geral, que nos leva a um processo algorítmico de divisão de polinômios, através do qual podemos obter $Q(x)$ ou demonstrar que $P(x)$ não é divisível por $D(x)$, sendo esse processo análogo ao que ocorre com os números inteiros.

Ao dividirmos o polinômio $P(x) = 5x^4 - 6x + 7$ por $D(x) = x$, encontramos $Q(x) = 5x^3 - 6$ como quociente e resto $R(x) = 7$, ou seja, $5x^4 - 6x + 7 = x \cdot (5x^3 - 6) + 7$. Repare que $\partial R(x) = 0 < \partial D(x) = 1$.

Efetuando a divisão entre $P(x) = 6x^5 + 5x^2 - 7x - 3$ e $D(x) = x^2 + 5$, obtemos $Q(x) = 6x^3 - 30x + 5$ como quociente $R(x) = 143x - 22$ e como resto, ou seja, $6x^5 + 5x^2 - 7x + 3 = (x^2 + 5) \times (6x^3 - 30x + 5) + 143x - 22$. Repare que $\partial R(x) = 1 < \partial D(x) = 2$.

A seguir apresentamos alguns métodos para realizar a divisão entre polinômios.

4.4.1 Método de Descartes

Este método é conhecido como *método dos coeficientes a determinar.* Primeiro devemos determinar o grau do quociente da divisão. Este cálculo é obtido fazendo, $\partial Q(x) = \partial P(x) - \partial D(x)$. Em seguida, colocamos incógnitas nos coeficientes desconhecidos de $Q(x)$ e de $R(x)$, levando em conta o fato de que $0 \leq \partial R(x) < \partial D(x)$.

Como não sabemos o grau do resto da divisão, colocaremos para seu o seu grau $\partial D(x) = 1$, e a partir da igualdade $P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$ efetuamos os cálculos. Para isto, devemos resolver um sistema linear e encontrar os coeficientes desconhecidos dos polinômios $Q(x)$ e $R(x)$.

Vamos a um exemplo. Desejamos dividir o polinômio $P(x) = 5x^4 - 4x^3 + 6x + 8$ por $D(x) = 5x^3 - 4x^2 + 8x + 9$. A priori, calculamos o grau do polinômio $Q(x)$, $\partial Q(x) = 4 - 3 = 1$.

O grau do resto $R(x)$ respeita a relação $0 \leq \partial R(x) \leq 2$ (pois $\partial D(x) = 3$). Colocando as incógnitas devidas, temos $Q(x) = ax + b$ e $R(x) = cx^2 + dx + e$. Usando o algoritmo da divisão, temos:

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$
$$5x^4 - 4x^3 + 6x + 8 = (5x^3 - 4x^2 + 8x + 9) \times (ax + b) + cx^2 + dx + e$$
$$5x^4 - 4x^3 + 6x + 8 = 5ax^4 - 4ax^3 + 9ax + 5bx^3 - 4bx^2 + 8bx + 9b + cx^2 + dx + e$$
$$5x^4 - 4x^3 + 6x + 8 = 5ax^4 + (-4a + 5b)x^3 + (8a - 4b + c)x^2 + (9a + 8b + d)x + 9b + e$$

Igualando os devidos coeficientes, basta resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5a = 5 \\ -4a + 5b = -4 \\ 8a - 4b + c = 0 \\ 9a + 8b + d = 6 \\ 9b + e = 8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -8 \\ d = -3 \\ e = 8 \end{cases}$$

Desta forma, temos $Q(x) = x$ e $R(x) = -8x - 3x + 8$.

4.4.2 Método da Chave

A ideia deste método é semelhante àquela usada para efetuar a divisão entre números naturais, que consiste em subtrações sucessivas, começando de classes maiores, em que o dividendo é maior ou igual ao divisor. Para a divisão do polinômio $P(x) = 4x^5 + 2x^3 + 4x - 12$ pelo polinômio $D(x) = x^2 + 4$, temos o seguinte:

$$P(x) = 4x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 4x - 12 \text{ e } D(x) = x^2 + 0x + 4.$$

Tabela 9 - Divisão pelo método da chave

$4x^5$	$+0x^4$	$+2x^3$	$+0x^2$	$+4x$	-12	x^2	$+\ 0x$	$+\ 4$	
$-4x^5$	$-0x^4$	$-16x^3$	$\downarrow$			$4x^3$	$+\ 0x^2$	$-\ 14x$	$+\ 0$
$\varnothing$	$0x^4$	$-14x^3$	$0x^2$						
	$-0x^4$	$-0x^3$	$-0x^2$	$\downarrow$					
	$\varnothing$	$-14x^3$	$0x^2$	$+4x$					
		$+14x^3$	$+0x^2$	$+56x$	$\downarrow$				
		$\varnothing$	$0x^2$	$+60x$	-12				
			$-0x^2$	$-0x$	-0				
			$\varnothing$	$60x$	-12				

Fonte: O autor, 2020.

Observe que este processo só é encerrado quando o grau do resto é estritamente menor que o grau do divisor. Concluímos que o quociente e resto desta divisão são $Q(x) = 4x^3 - 14x$ e $R(x) = 60x - 12$.

4.5 Algoritmo de Briot-Ruffini

Nesta seção, abordamos a divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio do 1º grau dado por $D(x) = ax - k$. Na primeira parte, mostramos o algoritmo de Briot-Ruffini, essencial para este trabalho, executado quando o coeficiente $a = 1$. Na segunda parte, adaptamos o algoritmo de Briot-Ruffini para o caso de $a \notin \{0; 1\}$, através de um método simples de evidenciação.

4.5.1 Algoritmo de Briot-Ruffini - Divisão por um binômio do 1º grau ($a = 1$)

Este algoritmo, também chamado de Dispositivo de Briot-Ruffini, além de ser um método prático e dinâmico, é amplamente utilizado para resolução de equações polinomiais. O Dispositivo de Briot-Ruffini, por se tratar de um algoritmo, pode ser descrito através de uma sequência de etapas que são apresentadas a seguir e ilustradas na Tabela 7. O objetivo é determinar o quociente e o resto da divisão entre um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ por um binômio do 1º grau do tipo $D(x) = x - k$, obtendo os polinômios quociente e resto, respectivamente dados por $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$ e $R(x) = r$.

- *1ª Etapa.* Faça $x - k = 0 \longrightarrow x = k$, para determinar o divisor;
- *2ª Etapa.* Coloque os coeficientes completos do dividendo $P(x)$ (em ordem decrescente de grau e sem as variáveis), ver linha 2 da Tabela 7;
- *3ª Etapa. A*dmita $b_{n-1} = a_n$ e efetue as seguintes operações:

i. $b_{n-2} = k \cdot a_n + a_{n-1}$;

ii. $b_{(n-i)-1} = k \cdot b_{n-i} + a_{n-i}$, onde $1 \leq i \leq n$ e $n \in \mathbb{N}$;

iii. $r = k \cdot b_0 + a_0$, onde $r = R(x)$ é o resto da divisão de $P(x)$ por $x - k$.

Tabela 10 - Algoritmo de Briot-Ruffini

		i=1	**i=2**	**...**	**i=n-1**	**i=0**
k	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
	$b_{n-1} = a_n$	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_0	**r**

Fonte: O autor, 2020.

Quando $r = 0$ temos uma divisão exata. Observe que o grau de $Q(x)$ é $n - 1$ e, caso a divisão não seja exata, o grau de $R(x)$ é zero.

Aplicamos o Dispositivo de Briot-Ruffini para determinar a divisão do polinômio $P(x) = 3x^4 - 2x + 1$ por $D(x) = x + 3$:

1ª Etapa:

$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$;

2ª Etapa:

Completando os coeficientes do dividendo: $P(x) = 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 1$;

3ª Etapa:

Efetuando as operações:

$b_3 = a_4 = 3$

$b_2 = -3 \times 3 + 0 = -9$

$b_1 = -3 \times (-9) + 0 = 27$

$b_0 = -3 \times (27) + (-2) = -83$

$r = -3 \times (-83) + 1 = 250$

Tabela 11 - Divisão do polinômio $P(x) = 3x^4 - 2x + 1$ por $D(x) = x + 3$.

-3	3	0	0	-2	1
	$b_3 = 3$	$b_2 = -9$	$b_1 = 27$	$b_0 = -83$	**r=250**

Fonte: O autor, 2020.

Obtemos $Q(x) = 3x^3 - 9x^2 + 27x - 83$ e $R(x) = 250$.

4.5.2 Divisão por um binômio do 1º grau ($a \notin \{0,\ 1\}$)

Ao dividirmos um polinômio $P(x)$ por $D(x) = ax + k$, com $a \notin \{0, 1\}$, usamos um procedimento que, de certa maneira, pode ser entendido como uma adaptação do Dispositivo de Briot-Ruffini. O objetivo é determinar $Q(x)$ e $R(x) = r$ de tal maneira que, $P(x) = (ax - k) \cdot Q(x) + r$.

Colocamos o fator a em evidência em $ax - k$, obtendo $P(x) = a(x - \frac{k}{a}) \cdot Q(x) + r$. Em seguida, fazemos $P(x) = (x - \frac{k}{a}) \cdot [a \cdot Q(x)] + r$ e atribuímos $a \cdot Q(x) = Q'(x)$. Finalmente, obtemos: $P(x) = (x - \frac{k}{a}) \cdot Q'(x) + r \Rightarrow P(x) = D'(x) \cdot Q'(x) + r$.

Em outras palavras, ao dividir o polinômio $P(x)$ por $D(x) = ax - k$, basta dividirmos por $D'(x) = x - \frac{k}{a}$ achando $Q'(x)$ como quociente. O resultado será $Q(x) = \frac{Q'(x)}{a}$ e o resto da divisão não se altera.

Ao efetuar a divisão do polinômio $P(x) = 3x^4 - 2x + 1$ por $D(x) = 2x + 6$, completamos os coeficientes do dividendo $P(x) = 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 1$, colocamos o fator 2 em evidência no divisor $D(x) = 2(x + 3)$, obtendo $D'(x) = (x + 3)$. Em seguida, aplicamos o algoritmo de Briot-Ruffini para efetuar a divisão. Acompanhe o processo na Tabela 12.

Tabela 12 - Divisão do polinômio $P(x) = 3x^4 - 2x + 1$ por $D(x) = 2x + 6$.

-3	3	0	0	-2	1
	$b_3 = 3$	$b_2 = -9$	$b_1 = 27$	$b_0 = -83$	**r=250**

Fonte: O autor, 2020.

Chegamos em $Q'(x) = 3x^3 - 9x^2 + 27x - 83$ e $r = 250$. Para acessarmos $Q(x)$ dividimos $Q'(x)$ por 2, obtendo $Q(x) = 1,5x^3 - 4,5x^2 + 13,5x - 41,5$, lembrando que o resto da divisão não se altera.

4.6 Método de Horner-Ruffini para Polinômios

O *Método de Horner-Ruffini para Polinômios* consiste em transformar um polinômio $P(x)$ em um um polinômio $P_1(x + k)$. Para isto definimos, na Seção 4.6.1, o conceito de Transformação Aditiva que assegura que esta mudança de variável gera um novo polinômio com as mesmas características do polinômio inicial, mantendo as mesmas raízes e o mesmo gráfico.

4.6.1 Transformação Aditiva

Para maiores detalhes referentes aos assuntos abordados nesta seção, o leitor é convidado a consultar Iezzi (2013). De acordo com Iezzi (2013), *transformação* de uma equação algébrica é toda operação em que se obtém uma nova equação cujas raízes estejam relacionadas com as raízes da equação inicial através de uma determinada lei de formação.

A *transformação aditiva* é uma transformação cuja operação de é do tipo $y = x + a$, onde a é um número real. Portanto, se $P_1(x)$ é uma equação polinomial, então $P_1(x) = P_1(y - a) = P_2(y) = 0$. Isto nos diz que as raízes da equação polinomial $P_2(y) = 0$ serão as mesmas de $P_1(x) = 0$ acrescidos de a (em relação à variável y).

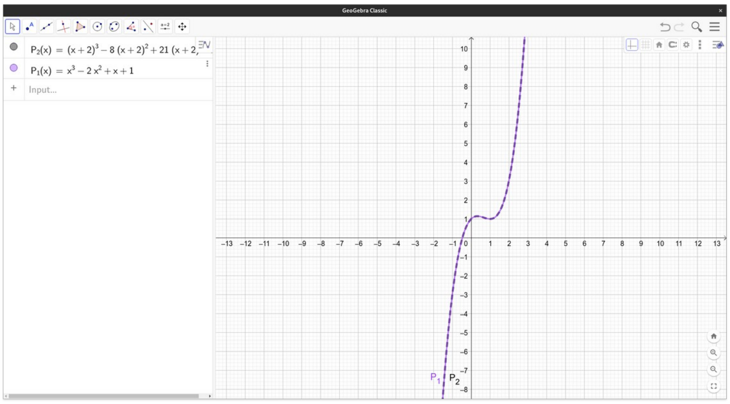
É importante o leitor ter o cuidado de não confundir transformação aditiva do polinômio $P(x)$ em $P_2(x + a)$ com translação horizontal do mesmo polinômio $P(x)$. Repare ainda que a transformação aditiva nada mais é do que escrever o mesmo polinômio em uma "linguagem diferente" a partir de uma translação horizontal de um outro polinômio $P_2(x)$ transladado em $-a$ unidades, enquanto que, na translação horizontal, mudamos sim o polinômio $P(x)$, pois, teremos um "deslocamento horizontal" do gráfico de $P(x)$ quando comparado ao gráfico de $P(x + a)$ em "a unidades".

Em outras palavra, a diferença seria a seguinte:

- Transformação Aditiva transcreve um polinômio $P_1(x)$ como $P_2(x + a)$, onde a é um número real e $P_1(x) = P_2(x + a)$, sendo $P_1(x)$ uma translação horizontal de um outro polinômio $P_2(x)$ para todo x real;
- Na *Translação Horizontal* temos um polinômio $P(x)$ com gráfico *G₁* e um polinômio $P(x + a)$ com gráfico G_2 onde o gráfico G_2 é o gráfico de G_1 deslocado de "a unidades" para a direita ou para esquerda no sistema cartesiano $\mathbb{R}^2$.

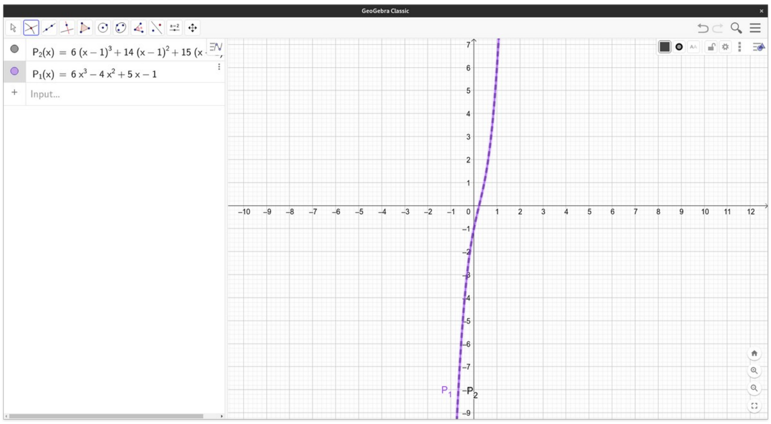
Os Gráficos 1 e 2, fornecem exemplos de *Transformações Aditivas*. Em ambos os casos, as transformações não alteram a estrutura do polinômio inicial, preservando, por exemplo, raízes e gráficos.

Gráfico 1 - Transformação Aditiva do polinômio $P_1(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ para $P_2(x + 2) = (x + 2)^3 - 8(x + 2)^2 + 21(x + 2) - 17$



Fonte: O autor, 2020

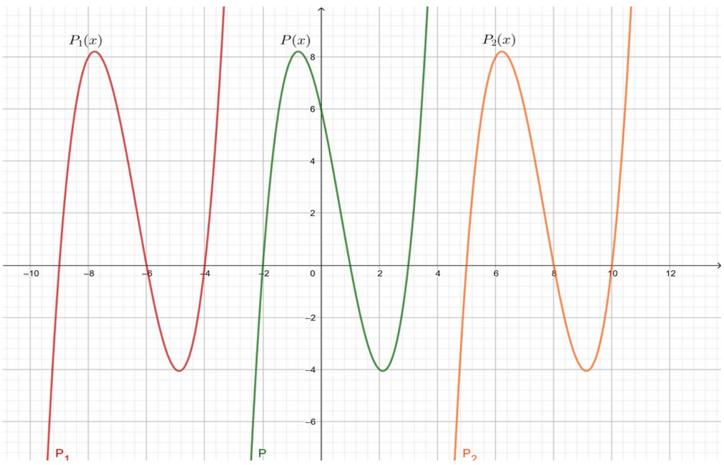
Gráfico 2 - Transformação Aditiva do polinômio $P_1(x) = 6x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ para $P_2(x-1) = 6(x-1)^3 + 14(x-1)^2 + 15(x-1) + 6$.



Fonte: O autor, 2020.

Formalmente falando, dada uma função real $f(x)$, dizemos que uma outra função $g(x) = f(x+m)$ é uma translação horizontal de $f(x)$ de $-m$ unidades, sendo m uma constante real. Na Figura 30, mostramos os gráficos de três funções polinomiais $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, $P_1(x) = P(x+7) = (x+7)^3 - 2(x+7)^2 - 5(x+7) + 6$ e $P_2(x) = P(x-7) = (x-7)^3 - 2(x-7)^2 - 5(x-7) + 6$. Convém observar que os três polinômios citados não são idênticos, assim como seus gráficos são distintos.

Gráfico 3 - Translação Horizontal do polinômio $P(x)$



Fonte: O autor, 2020.

O Teorema 4.2, nos mostra uma maneira de obtermos a transformação aditiva a partir dos restos obtidos das sucessivas divisões do polinômio original, dado pela transformação aditiva.

Teorema 4.2 [Iezzi, 2013]

Seja $P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ uma equação polinomial. A transformação aditiva de $P_1(x)$ é dada por:

$$P_2(x+a) = R_n(x+a)^n + R_{n-1}(x+a)^{n-1} + ... + R_1(x+a) + R_0 = 0,$$

em que $R_0, R_1, ..., R_n$ são os restos da divisão de $P_1(x)$ e sucessivos quocientes, por $x + a$.

Demonstração:

Temos que provar que as funções polinomiais $P_1(x)$ e $P_2(x+a)$ são idênticas, porque o objetivo é escrever o mesmo polinômio em uma base diferente. Este procedimento, na maioria das vezes, ajuda no cálculo de raízes de polinômios mais facilmente.

Iezzi (2013) divide a demonstração em etapas.

A etapa 1 consiste em dividir o polinômio $P_1(x)$ por $x + a$, obtendo quociente $Q_0(x)$, de grau $n - 1$, e resto R_0 (constante), de modo que $P_1(x) = (x+a) \cdot Q_0(x) + R_0$.

A etapa 2 efetua a divisão do polinômio $Q_0(x)$ por $x + a$, satisfazendo $Q_0(x) = (x+a) \cdot Q_1(x) + R_1$, sendo $Q_1(x)$, de grau $n - 2$, o quociente desta divisão e R_1 (constante) o resto.

A etapa 3, análoga às anteriores, nos fornece a identidade $Q_1(x) = (x+a) \cdot Q_2(x) + R_2$, sendo $Q_2(x)$, de grau $n - 3$, o quociente desta divisão e R_2 (constante) o resto.

Quando substituímos as etapas 2 e 3 na etapa 1, temos:

$P_1(x) = (x+a) \cdot Q_0(x) + R_0$ (Etapa 1)

$P_1(x) = (x+a) \cdot [(x+a) \cdot Q_1(x) + R_1] + R_0$ (Etapa 2 substituída na etapa 1)

$P_1(x) = (x+a) \cdot \{(x+a) \cdot [(x+a) \cdot Q_2(x) + R_2] + R_1\} + R_0$ (Etapas 2 e 3 substituídas na etapa 1)

Efetuando a distributividade e agrupando os termos semelhantes, chegamos em :

$$P_1(x) = (x+a)^3 \cdot Q_2(x) + (x+a)^2 \cdot R_2 + (x+a) \cdot R_1 + R_0.$$

Observe que as etapas 1, 2 e 3 contribuíram com a aparição dos restos R_0, R_1 e R_2, respectivamente, na expansão do polinômio $P_1(x)$.

Efetuamos este processo de modo a exaurir o grau do quociente, ou seja, realizamos este processo até dividirmos Q_{n-2} (de grau 1) por $x + a$, obtendo quociente Q_{n-1} (de grau 0), e resto R_{n-1} (constante), escrevendo $Q_{n-2}(x) = (x+a) \cdot Q_{n-1} + R_{n-1}$.

Substituindo todas estas n etapas em $P_1(x)$ temos:

$$P_1(x) = Q_{n-1} \cdot (x+a)^n + R_{n-1} \cdot (x+a)^{n-1} + ... + R_1 \cdot (x+a) + R_0.$$

Além disso, a divisão de $Q_{n-1}(x)$ por $x+a$ nos dará quociente zero e resto R_n, portanto, $Q_{n-1} = R_n$. Retornando em $P_1(x)$ de posse desta informação, escrevemos:

$$P_1(x) = R_n \cdot (x+a)^n + R_{n-1} \cdot (x+a)^{n-1} + ... + R_1 \cdot (x+a) + R_0.$$

$\square$.

4.6.2 Método de Horner-Ruffini para Polinômios

A essência do *Método de Horner-Ruffini para Polinômios* é a de determinar um polinômio a partir da *transformação aditiva* de um outro polinomio inicialmente dado. Vamos adaptar este dispositivo para, mais tarde, na Seção 5.4, obter um método de mudança de base para números naturais. Convém observar que as variáveis presentes no *Método de Horner-Ruffini* Para Polinômios, equivalem às variáveis que compõem as bases no *Método de Horner-Ruffini para Mudanças de Bases*.

Seja $P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ uma função polinomial. Como visto na Seção 4.6.1, podemos escrever $P_1(x)$ na base $(x-k)$ como um polinômio $P_2(x-k) = P_1(x)$, sendo $k \in \mathbb{R}$.

Esta transformação é feita pela divisão sucessiva do polinômio $P_1(x)$ por $x-k$, onde os coeficientes de $P_2(x-k) = R_n(x-k)^n + R_{n-1}(x-k)^{n-1} + ... + R_1(x-k) + R_0$ são ordenadamente os restos da divisão desta divisão e $R_n = a_n$, para todo n natural.

Usamos o algoritmo de Briot-Ruffini para efetuar as divisões do polinômio $P_1(x)$ e de seus sucessivos quocientes. Neste Dispositivo de Horner-Ruffini, cada coeficiente $a_{n-i}^{(j)}$ é colocado em $(n+1)$ colunas (indicadas pelo sub-índice i) e $(n+2)$ linhas (indicadas pelo super índice j), onde $0 \leq j \leq n+1$ e $0 \leq i \leq n$.

Tabela 13 - Dispositivo prático de Horner-Ruffini para polinômios

		i=0	**i=1**	**i=2**	**...**	**i=n-1**	**i=n**
j=0	**k**	$a_n^{(0)} = a_n$	$a_{n-1}^{(0)} = a_{n-1}$	$a_{n-2}^{(0)} = a_{n-2}$	...	$a_1^{(0)} = a_1$	$a_0^{(0)} = a_0$
j=1	**k**	$a_n^{(1)} = a_n$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	...	$a_1^{(1)}$	$a_0^{(1)}$
j=2	**k**	$a_n^{(2)} = a_n$	$a_{n-1}^{(2)}$	$a_{n-2}^{(2)}$	...	$a_1^{(2)}$	
j=3	**k**	$a_n^{(3)} = a_n$	$a_{n-1}^{(3)}$	$a_{n-2}^{(3)}$	...		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
j=n-1	**k**	$a_n^{(n-1)} = a_n$	$a_{n-1}^{(n-1)}$	$a_{n-2}^{(n-1)}$			
j=n	**k**	$a_n^{(n)} = a_n$	$a_{n-1}^{(n)}$				
j=n+1	**k**	$a_n^{(n+1)} = a_n$					

Fonte: O autor, 2020.

Levando em conta que $a_n^{(n+1)} = a_n^{(j)} = a_n$, para cada valor de j, efetuamos a seguinte operação:

$$a_{n-i}^{(j)} = k \cdot a_n + a_{n-1}^{(j-1)}, \text{ onde } 1 \leq i \leq n-j,\ 1 \leq j \leq n, \text{ onde } n \in \mathbb{N}.$$

Temos então que $R_{n-i} = a_{n-i}^{(n-i+1)}$, para $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq i \leq n$. Obtemos, $P_2(x-k) = R_n(x-k)^n + R_{n-1}(x-k)^{n-1} + ... + R_1(x-k) + R_0$.

Vamos a um exemplo. Dado o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, desejamos determinar a sua transformação aditiva a partir de $y = x + 2$. A ideia é usar o dispositivo de Horner-Ruffini para polinômios, de modo a efetuar as divisões sucessivas de $P(x)$ por $(x+2)$. Neste caso, temos $a_3 = 1, a_2 = -3, a_1 = 2$ e $a_0 = 1$.

Tabela 14 - Aplicação do método de Horner-Ruffini no polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ em relação a $y = x + 2$

		i=0	i=1	i=2	i=3
j=0	**-2**	**1**	**-3**	**2**	**1**
j=1	**-2**	$a_3^{(1)} = 1$	$a_2^{(1)} = -5$	$a_1^{(1)}$=12	$\mathbf{a_0^{(1)} = -23}$
j=2	**-2**	$a_3^{(2)} = 1$	$a_2^{(2)} = -7$	$\mathbf{a_1^{(2)} = 26}$	
j=3	**-2**	$a_3^{(3)} = 1$	$\mathbf{a_2^{(3)} = -9}$		
j=4	**-2**	$\mathbf{a_3^{(4)} = 1}$			

Fonte: O autor, 2020.

- Operações na 1ª linha $(j = 1)$:
  $a_3^{(1)} = 1;$
  $a_2^{(1)} = -2 \times (1) + (-3) = -5;$
  $a_1^{(1)} = -2 \times (-5) + (2) = 12;$
  $a_0^{(1)} = -2 \times (12) + 1 = -23$, ou seja, $R_0 = -23$.
- Operações na 2ª linha $(j = 2)$:
  $a_3^{(2)} = 1;$
  $a_2^{(2)} = -2 \times (1) + (-5) = -7;$
  $a_1^{(2)} = -2 \times (-7) + (12) = 26$, ou seja, $R_1 = 26$.
- Operações na 3ª linha $(j = 3)$:
  $a_3^{(3)} = 1;$
  $a_2^{(3)} = -2 \times (1) + (-7) = -9$, ou seja, $R_2 = -9$.
- Operações na 4ª linha $(j = 4)$:
  $a_3^{(4)} = 1$, ou seja, $R_3 = 1$

Finalmente, obtemos $P_2(x + 2) = (x + 2)^3 - 9(x + 2)^2 + 26(x + 2) - 23$.

5 HORNER-RUFFINI PARA MUDANÇAS DE BASES

Neste capítulo, apresentamos um algoritmo de mudança de bases de numeração inspirado no *Método de Horner-Ruffini Para Polinômios*. Denominamos este algoritmo de *Método de Horner-Ruffini Para Mudanças de Bases.*

Discutimos ao final deste capítulo as vantagens e desvantagens deste método e revisitamos alguns conceitos, propriedades e aplicações de mudanças de bases de numeração.

5.1 Bases de Numeração – Definições

De maneira similar a maioria dos alfabetos adotados no mundo, expressamos os números através de símbolos e de uma linguagem específica. Estes símbolos são chamados de *algarismos* e são representados por 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Estes dez símbolos são utilizados para escrever qualquer número que se queira representar e estão presentes o tempo todo em nosso dia a dia, seja para expressar certa quantia em dinheiro, a idade das pessoas ou a distância entre duas metrópoles.

Segundo Lacerda (2014), chamamos de *Numeração* a arte de representar os números e a dividimos em numeração *falada* (nomeia os números) e numeração *escrita* (o que representa eles através dos símbolos).

Aos princípios, leis e artifícios para representarmos os números, chamamos de *sistema de numeração.* Para escrever os números precisamos de símbolos e a quantidade de símbolos necessários para representar todos os números naturais é chamada de *base de numeração*.

Apesar de usarmos bastante a numeração decimal[5] na vida cotidiana, convém ressaltar que outras bases de numeração são ou já foram amplamente utilizadas por diversos povos, como visto na Seção 2.1. Atualmente, utilizamos o princípio posicional, em que a posição do algarismo (ou símbolo), ao se escrever o número, muda completamente o valor que ele representa. Por exemplo, ao utilizarmos os três símbolos 1, 2 e 5, podemos escrever seis números com três algarismos distintos, que representam quantidades totalmente diferentes: 125, 152, 215, 251, 512 e 521.

5 Na base decimal, o uso do subíndice para indicá-la é facultativo.

5.1.1 Princípio da Base de Numeração

Todo sistema posicional de numeração tem uma *base* que é um número natural maior que a unidade. Isto é, a base de todo sistema posicional é um número $\beta \in \mathbb{N}$, satisfazendo $\beta \geq 2$. A base indica de quanto em quanto é necessário se agrupar uma ordem[6] de modo a obter unidades de ordem imediatamente superior. Semanticamente falando, usar uma base corresponde a separar uma certa quantidade em grupos e categorizar os subgrupos em locais que chamamos de ordens.

Vamos tomar como exemplo a quantidade exposta na Tabela 15. A unidade é representada pelo símbolo ♦.

Tabela 15 - Símbolos representando 36 unidades

♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦

Fonte: O autor, 2020.

Em nosso sistema decimal, a quantidade presente na Tabela 12 é representada pelo numeral 36. Todavia, como escrevemos esta quantidade nas bases 5 ou 12, por exemplo?

Para responder esta questão, usamos a ideia da divisão em grupos. Vamos empregar os símbolos ⊖, ⊕, X̄, X̲, ⧖, Λ, V, E, ∃, Ꝁ, ⋉ e Ï e criar a título de exemplo, um sistema de numeração fictício com 13 símbolos, sendo 12 deles para representar as quantidades de unidades de ♦, e a ausência de unidades será indicada pelo símbolo o. A ideia pode ser acompanhada pela Tabela 16.

6 A *Ordem* é a posição que um algarismo ocupa ao representarmos um número.

Tabela 16 - Valores correspondentes dos símbolos ⊖, ⊕, X̄, X̲, X̲̄, Λ, V, E, ∃, K̄, K̲ e Ṫ

Símbolo e Unidades		**Símbolo e Unidades**	
⊖	♦ (1)	V	♦♦♦♦♦♦♦ (7)
⊕	♦♦ (2)	E	♦♦♦♦♦♦♦♦ (8)
X̄	♦♦♦ (3)	∃	♦♦♦♦♦♦♦♦♦ (9)
X̲	♦♦♦♦ (4)	K̄	♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦ (10)
X̲̄	♦♦♦♦♦ (5)	K̲	♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦ (11)
Λ	♦♦♦♦♦♦ (6)	Ṫ	♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦ (12)

Fonte: O autor, 2020.

Poderíamos adotar símbolos para as quantidades de ♦ que quiséssemos. Como decidimos parar no Ṫ e contando com o temos um total de 13 símbolos. Estamos usando intrinsecamente um sistema de base tri-decimal como principal.

Primeiro vamos escrever esta quantidade na base 5: dividindo a quantidade da Tabela 15 de 5 em 5, temos como resultado a distribuição presente na Tabela 17.

Tabela 17 - Quantidade solicitada dividida de 5 em 5

♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦

Fonte: O autor, 2020.

A quantidade dada é dividida em 7 grupos de 5, sobrando 1 unidade. Destes 7 grupos de 5, podemos formar 1 grupo de 5 grupos de 5 unidades, sobrando 2 grupos de 5. Vamos utilizar o princípio posicional, que assegura, neste caso, que sete unidades de uma ordem qualquer, nos dará exatamente 1 unidade na ordem imediatamente superior à esquerda. Teremos 1 unidade de primeira ordem, 2 unidades de segunda ordem e 1 unidade de terceira ordem, representada pela nossa base tri-decimal de ⊖⊕⊖.

Todo o processo foi baseado na operação de divisão e pode ser resumido pela Tabela 18.

Tabela 18 - Conversão para a base 5

36	5	
1	7	5
	2	1

Fonte: O autor, 2020.

A partir daí, temos $36 = (121)_5$ (leia “um dois um base cinco”)[7] ou pelo nosso sistema tri-decimal ⊖⊕⊖.

Para obter a quantidade solicitada na base 12, usamos a mesma lógica posicional e os símbolos criados e rotulados do sistema (auxiliar) tri-decimal. A quantidade exibida na Tabela 15 agrupada de 12 em 12 é destacada na Tabela 19.

Tabela 19 - Quantidade solicitada dividida de 12 em 12

♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦
♦	♦	♦	♦	♦	♦

Fonte: O autor, 2020.

Pelo sistema posicional, doze unidades de uma ordem qualquer nos fornecerá exatamente 1 unidade na ordem imediatamente superior à esquerda. Ao dividirmos a

7 Em outras bases de numeração, a leitura dos números é feita de algarismo em algarismo, da esquerda para a direita.

quantidade de bolinhas por 12, observe que teremos 3 unidades de segunda ordem, sobrando nada para a primeira ordem. O numeral obtido na base 12 representado pelo nosso sistema tri-decimal é dado por Xo.

A operação pensada neste processo também é a da divisão. Em suma temos o seguinte:

Tabela 20 - Conversão para a base 12

36	12
0	3

Fonte: O autor, 2020.

A partir daí, temos $36 = (30)_{12}$ (leia "três zero base 12"), ou usando nossos símbolos da base tri-decimal, chegamos em Xo.

Podemos usar quaisquer símbolos para representar algarismos. Porém, vamos aqui nos ater aos símbolos indo arábicos para representar de zero até nove e as letras do alfabeto A, B, C, D, e assim por diante, para representar "os algarismos" que valem respectivamente 10, 11, 12, 13 e assim por diante. Veja a Tabela 21. Para maiores informações o leitor é convidado a consultar Lacerda (2014).

Tabela 21 - Símbolos usados em cada base de numeração

Base	**Nome**	**Símbolos**
2	Binário	$0; 1$
3	Ternário	$0; 1; 2$
5	Quinário	$0; 1; 2; 3; 4$
8	Octogonal	$0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$
10	Decimal	$0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$
11	Unodecimal	$0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A$
12	Duodecimal	$0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A; B$

16	Hexadecimal	$0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A; B; C; D; E; F$

Fonte: O autor, 2020.

Por conveniência, usamos os símbolos indo arábicos para representar os algarismos de 0 a 9, e, caso a base de numeração ultrapasse 10, usamos as letras maiúsculas do nosso alfabeto convencional, ou seja:

Tabela 22 - Símbolos dos algarismos

Quantidade	**Algarismo**	**Quantidade**	**Algarismo**
Zero	0	Nove	9
Um	1	Dez	A
Dois	2	Onze	B
Três	3	Doze	C
Quatro	4	Treze	D
Cinco	5	Quatorze	E
Seis	6	Quinze	F
Sete	7	Dezesseis	G
Oito	8	Dezessete	H

Fonte: O autor, 2020.

Observando a sequência de símbolos em cada base, podemos fazer, de maneira ordenada, determinadas combinações entre eles, a fim de dar uma sequência lógica da ordenação dos números. Observe a Tabela 23.

Tabela 23 - Exemplos de representações de alguns números nas bases 2, 5, 7 e 10

Número	**Numeral na base 2**	**Numeral na base 5**	**Numeral na base 7**	**Numeral na base 10**
zero	0	0	0	0
hum	1	1	1	1
dois	10	2	2	2
três	11	3	3	3
quatro	100	4	4	4

cinco	101	10	5	5
seis	110	11	6	6
sete	111	12	10	7

Fonte: O autor, 2020.

5.1.2 Ordens e Classes

A *ordem* é a posição que um algarismo ocupa ao representarmos um número. No sistema posicional de numeração os números são divididos em ordens da direita para a esquerda (primeira ordem, segunda ordem, terceira ordem, etc).

Genericamente, seja o número $N = \overline{xyz\ kwt\ uva\ bcd}$ (convencionalmente colocamos um traço acima dos algarismos, caso estes sejam variáveis). Repare que este número possui 12 ordens, Tabela 24.

Tabela 24 - Exemplo de um numeral genérico com 12 ordens

x	y	z	k	w	t	u	v	a	b	c	d
12ª	11ª	10ª	9ª	8ª	7ª	6ª	5ª	4ª	3ª	2ª	1ª

Fonte: O autor, 2020.

O agrupamento de ordens é chamado de *classe*. Usualmente, no sistema de numeração decimal, agrupamos de três em três. No entanto, nada impede agruparmos de 2 em 2, ou 4 em 4, dependendo da usabilidade. Contamos as classes, também, da direita para a esquerda e, no caso do sistema decimal de numeração, a primeira classe é chamada de *unidades simples,* a segunda é chamada de *unidades de milhares,* a terceira de *milhões*, a quarta de *bilhões,* a quinta de *trilhões* e assim por diante.

A Tabela 25 ilustra as classes do número genérico $N_1 = \overline{xyz\ kwt\ uva\ bcd}$. Note que N_1 foi separado em classes de 3 algarismos, da direita para a esquerda, tendo 4 classes completas.

Tabela 25 - Número N_1 dividido em classes de 3 em 3 algarismos

xyz	kwt	uva	bcd
4ª classe	3ª classe	2ª classe	1ª classe

Fonte: O autor, 2020.

Na Tabela 26, exibimos as classes do número genérico $N_2 = \overline{ka\ bcv\ abd}$. Observe que N_2 possui 3 classes sendo 1 incompleta e as outras duas completas.

Tabela 26 - Número N_2 dividido em classes de 3 em 3 algarismos

ka	bcv	abd
3ª classe	2ª classe	1ª classe

Fonte: O autor, 2020.

Em cada classe do sistema de numeração decimal, temos as subdivisões *unidade, dezena e centena* da classe referida. Considerando o número 96 123 486 235, ele possui 11 ordens e 4 classes, sendo 1 incompleta e 3 completas. Relativo à primeira classe, os algarismos 5, 3 e 2 são, respectivamente, unidade, dezena e centena.

5.1.3 Princípio Fundamental do Sistema Posicional de Numeração

Usamos na Seção 5.1.1 a ideia central dos sistemas posicionais. Formalmente falando, dada uma base de numeração $\beta \in \mathbb{N}$, com $\beta \notin \{0, 1\}$, a cada β unidades de uma ordem qualquer, teremos exatamente 1 unidade de ordem imediatamente superior. Qualquer algarismo escrito imediatamente à esquerda do outro, corresponde, em unidades de ordem, a β vezes a unidade de ordem deste outro.

No sistema decimal de numeração, todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades de ordem igual a dez vezes as unidades de ordem deste outro. Isto corresponde ao seguinte:

- 10 unidades $\longrightarrow$ 1 dezena;
- 10 dezenas $\longrightarrow$ 1 centena;
- 10 centenas $\longrightarrow$ 1 unidade de milhar;
- 10 unidades de milhar $\longrightarrow$ 1 dezena de milhar;
- E assim por diante.

5.1.4 Forma Polinomial de um Número

Considere o número 96 123 486 235. Este número possui 5 unidades simples, 3 dezenas simples, 2 centenas simples, 6 unidades de milhar, 8 dezenas de milhar, 4 centenas de milhar, 3 unidades de milhão, 2 dezenas de milhão, 1 centena de milhão, 6 unidades de bilhão e 9 dezenas de bilhão. Podemos escrevê-lo da seguinte maneira:

$$96\ 123\ 486\ 235 = 9 \cdot 10^{10} + 6 \cdot 10^{9} + 1 \cdot 10^{8} + 2 \cdot 10^{7} + 3 \cdot 10^{6} + 4 \cdot 10^{5} + 8 \cdot 10^{4} + 6 \cdot 10^{3} + 2 \cdot 10^{2} + 3 \cdot 10^{1} + 5$$

Ao escrevê-lo como uma soma de potências na base 10, o colocamos na chamada *expansão decimal*, na qual todo inteiro pode ser associado a uma soma de termos de uma sequência finita de potências de base 10.

Para qualquer base natural $\beta \geq 2$ é possível usar a mesma ideia e escrever um número $N \in \mathbb{N}$, sob a forma:

$$N = a_n \cdot \beta^n + a_{n-1} \cdot \beta^{n-1} + a_{n-2} \cdot \beta^{n-2} + ... + a_2 \cdot \beta^2 + a_1 \cdot \beta + a_0$$

Sendo $0 \leq a_i \leq \beta$ e $0 \leq i \leq n$, onde $i, n, \beta, a_i \in \mathbb{N}, \beta \notin \{0, 1\}$.

A Propriedade 1 caracteriza as potências de 10 (um zero) escritas em uma base $\beta \geq 2$ arbitrária, enquanto a Propriedade 2 fornece um desenvolvimento para uma sequência de algarismos, todos iguais a $\beta - 1$, escritos na base β. Em ambas as propriedades $n \in \mathbb{N}$.

Propriedade 1

$$(1\,\underbrace{000...0}_{n\ zeros})_\beta = \beta^n$$

Demonstração:

O resultado é imediato após usarmos a forma polinomial do número dado.

Propriedade 2

$$(\underbrace{\overline{\beta-1}\ \overline{\beta-1}...\overline{\beta-1}}_{n\ algarismos\ \beta-1})_\beta = \beta^n - 1$$

Demonstração:

Provaremos por indução finita sobre n.

- Para $n = 1$, temos:

  $(\overline{\beta-1})_\beta = \beta - 1 = \beta^1 - 1$

- Suponha que a propriedade seja válida para $n \in \mathbb{N}$, ou seja:

  $$(\underbrace{\overline{\beta-1}\ \overline{\beta-1}...\overline{\beta-1}}_{n\ algarismos\ \beta-1})_\beta = \beta^n - 1$$

- Para $n + 1$ temos:

  $$(\underbrace{\overline{\beta-1}\ \overline{\beta-1}\ \overline{\beta-1}...\overline{\beta-1}}_{n+1\ algarismos\ \beta-1})_\beta = (\overline{\beta-1}\,\underbrace{00...0}_{n\ zeros})_\beta + (\underbrace{\overline{\beta-1}\ \overline{\beta-1}...\overline{\beta-1}}_{n\ algarismos\ \beta-1})_\beta$$

$$(\underbrace{\overline{\beta-1}\,\overline{\beta-1}\,\overline{\beta-1}...\overline{\beta-1}}_{n+1\ algarismos\ \beta-1})_\beta = \overline{\beta-1}\times(1\underbrace{00...0}_{n\ zeros})_\beta + \underbrace{\beta^n-1}_{hipótese\ de\ indução}$$

Usando a propriedade 1, temos:

$$(\underbrace{\overline{\beta-1}\,\overline{\beta-1}\,\overline{\beta-1}...\overline{\beta-1}}_{n+1\ algarismos\ \beta-1})_\beta = (\beta-1)\times\beta^n+\beta^n-1$$

$$(\underbrace{\overline{\beta-1}\,\overline{\beta-1}\,\overline{\beta-1}...\overline{\beta-1}}_{n+1\ algarismos\ \beta-1})_\beta = \beta^{n+1}-\beta^n+\beta^n-1$$

$$(\underbrace{\overline{\beta-1}\,\overline{\beta-1}\,\overline{\beta-1}...\overline{\beta-1}}_{n+1\ algarismos\ \beta-1})_\beta = \beta^{n+1}-1 \qquad \square$$

5.2 Mudanças Usuais de Bases

Acreditamos que a compreensão ampla e aprofundada da linguagem escrita dos números requer um entendimento sólido acerca de *Mudanças de Bases*. Existem inúmeros métodos de mudança de base. Neste trabalho, discutimos, na Subseção 5.2.1, a Mudança da base 10 para uma base arbitrária, enquanto na Subseção 5.2.2 discutimos a transformação inversa, isto é, de uma base arbitrária para a base 10. Além disso, mostramos, na Subseção 5.2.3, as transformações entre as bases 2 e 2^k muito utilizadas em computação, segundo Cunha, Macedo e Silveira (2017).

5.2.1 Mudança da base 10 para a base β

O método que transforma um número N da base 10 para uma base qualquer é tradicionalmente chamado de *método de divisões sucessivas*. Este método consiste em realizar divisões de N e dos respectivos quocientes sucessivamente por β. Os restos obtidos por estas divisões sucessivas e o último quociente da divisão, compõem o número transformada para a base β, arbitrária.

Considere $N\in\mathbb{N}$ um número na base 10. Se $0\leq N\leq\beta-1$, então já temos N escrito na base β.

Quando $N\geq\beta$, segue, pelo algoritmo da divisão de Euclides[8], que existem q_0 e a_0 números naturais, tais que $N=q_0\times\beta+a_0$, onde $0\leq a_0\leq\beta-1$. Caso também $0\leq q_0\leq\beta-1$, faremos $q_0=a_1$ e teremos $N=a_1\cdot\beta+a_0=(\overline{a_1a_0})_\beta$, ou seja, N está

8 Segundo Domingues (1991, p.33) Para quaisquer a, $b\in\mathbb{N}$, $b\neq 0$, existe um único par de números q e r, de maneira que $a=b\cdot q+r$ $(r<b)$. Os elementos $a,\ b,\ q$ e r são chamados, respectivamente, dividendo, divisor, quociente e resto da divisão de a por b.

escrito na base β cujos algarismos são a_1 e a_0. Caso contrário ($q_0 \geq \beta$), temos mais uma vez, pelo algoritmo da divisão de Euclides, que existem q_1 e a_1 números naturais, tais que $q_0 = q_1 \times \beta + a_1$, onde $0 \leq a_1 \leq \beta - 1$. Se $0 \leq q_1 \leq \beta - 1$, então faremos $q_1 = a_2$ e obtemos:

$$N = q_0 \cdot \beta + a_0 = (q_1 \cdot \beta + a_1) \cdot \beta + a_0$$
$$N = q_1 \cdot \beta^2 + a_1 \cdot \beta + a_0 = a_2 \cdot \beta^2 + a_1 \cdot \beta + a_0$$
$$N = (\overline{a_2 a_1 a_0})_\beta,$$

ou seja, N está escrito na base β cujos algarismos são a_2, a_1 e a_0.

Se mais uma vez o quociente desta divisão $q_1 \geq \beta$, para algum valor de $n \in \mathbb{N}$, teremos um $0 \leq q_{n-1} \leq \beta - 1$, tal que $N = q_{n-1} \times \beta + a_{n-1}$, em que $0 \leq a_{n-1} \leq \beta - 1$. Fazendo $q_{n-1} = a_n$, temos $N = a_n \times \beta^n + a_{n-1} \times \beta^{n-1} + ... + a_1 \times \beta + a_0$, ou seja:

$$N = (\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0})_\beta,$$

em que $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são os algarismos de N na base β.

Este método pode ser resumido no algoritmo simples de divisões sucessivas, ilustrado na Tabela 27. Ao considerar o último quociente ($q_{n-1} = a_n$ em verde) e todos os restos (em azul) das divisões, de cima para baixo até o primeiro resto, temos o número N escrito na base β.

Tabela 27 - Conversão do número na base decimal N para a base β

N	β							
a_0	q_0	β						
	a_1	q_1	β					
		a_2	q_2	β				
			a_3	q_3	...			
				...	...	q_{n-3}	β	
						a_{n-2}	q_{n-2}	β
							a_{n-1}	$q_{n-1} = a_n$

Fonte: O autor, 2020.

Considere transformar os números 920 e 117 que estão na base decimal, para as bases 6 e 2, respectivamente. Na Tabela 28, aplicamos o método divisões sucessivas para obter os números transformados.

Tabela 28 - Conversão dos números 920 e 117 na base decimal para as bases 6 e 2 respectivamente

920	6			117	2					
2	153	6		1	58	2				
	3	25	6		0	29	2			
		1	4			1	14	2		
							0	7	2	
								1	3	2
									1	1

Fonte: O autor, 2020.

Finalmente, temos $920 = (4132)_6$ e $117 = (1110101)_2$.

5.2.2 Mudança da base β para a base 10

Vimos, na Subseção 5.1.4, a forma polinomial de um número $N = (\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0})$ que corresponde a escrevê-lo como a expressão:

$$N = a_n \cdot \beta^n + a_{n-1} \cdot \beta^{n-1} + ... + a_1 \cdot \beta + a_0$$

Isto nos diz que, dado um número em uma base arbitrária, obtê-lo sob a base 10 corresponde a desenvolver a sua forma polinomial sob esta base arbitrária para naturalmente obtermos a sua representação na base 10.

Na prática, se desejamos transformar para a base decimal os números $(4132)_6$ e $(1110101)_2$, obtidos na última subseção, basta desenvolvermos as suas formas polinomiais nas bases 6 e na base 2, respectivamente.

$(4132)_6 = 4 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 2 = 920;$

$(1110101)_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 117$

5.2.3 Mudança entre as bases $\mathbf{2}$ e $\mathbf{2^k}$

Quando escrevemos um número na linguagem binária, usamos por convenção, apenas os algarismos 0 ou 1 As Propriedades 1 e 2 discutidas em $5.1.4$ nos dão a possibilidade de compreender como é possível mudar da base 2 para a base 2^k.

Para passar um binário para a base 2^k, dividimos o número binário em classes de k algarismos, da direita para a esquerda e fazemos, para cada uma das classes, a mudança de base do binário para a base 10, observando que as classes incompletas são completadas com zero.

Vejamos como transformar o binário 11011100100011 para as bases $4, 8$ e 16.

Mudança para a Base 4:

Como adiantamos, separamos o número binário dado em classes de 2 algarismos, pois $4 = 2^2$:

$11\ 01\ 11\ 00\ 10\ 00\ 11$.

Em seguida, transformamos $11, 01, 00$ e 10 da base 2 para a base 10, como fizemos na Subseção 5.2.2, encontrando $(11)_2 = 3, (01)_2 = 1, (00)_2 = 0$ e $(10)_2 = 2$. Finalmente, o número binário 11011100100011 escrito na base 4 corresponde a $(3130203)_4$.

Mudança para a Base 8:

Separamos o binário em classes de 3 algarismos, pois $8 = 2^3$. Desta maneira, obtemos o seguinte:

$011\ 011\ 100\ 100\ 011$.

Agora transformamos 011 e 100 da base 2 para a base 10. Obtemos, $(011)_2 = 3$ e $(100)_2 = 4$, ou seja, o binário 11011100100011 na base 8 equivale a $(33443)_8$.

Mudança para a Base 16:

Separamos o binário em classes de 4 algarismos, pois $16 = 2^4$. Obtemos o seguinte:

$0011\ 0111\ 0010\ 0011$

Transformamos $0011, 0111$ e 0010 da base 2 para a base 10, obtendo $(0011)_2 = 3$, $(0111)_2 = 7$ e $(0010)_2 = 2$, ou seja, o binário 11011100100011 na base 16 equivale a $(3723)_{16}$.

As representações nas bases 2, 4, 8, 16 e na base decimal são dadas, respectivamente, a seguir:

$$(11011100100011)_2 = (3130203)_4 = (33443)_8 = (3723)_{16}.$$

Para efetuarmos a transformação inversa, isto é, para passarmos de uma base 2^k para a base 2, basta transformarmos cada algarismo do número na base 2^k para a base 2, colocando em classes de k algarismos, completando, se necessário, com zero à esquerda.

O objetivo agora é exemplificarmos como transformar os numerais $(A3002)_{16}$, $(705)_8$ e $(1023)_4$ para a base binária.

Mudança de $(A3002)_{16}$ *para a Base Binária:*

Os algarismos $A, 3, 0$ e 2 na base binária são, respectivamente, $(1010)_2$, $(11)_2$, $(0)_2$ e $(10)_2$. Como a base de entrada é $16 = 2^4$, colocamos cada um destes algarismos em classes de 4 algarismos cada (pelo fato do expoente na base 2 ser 4). Se necessário, completamos com zero e retiramos no final do processo os algarismos não significativos.

$(A)_{16} = (1010)_2$

$(3)_{16} = (0011)_2$

$(0)_{16} = (0000)_2$

$(2)_{16} = (0010)_2$

Ou seja, $(A3002)_{16} = (10100011000000000010)_2$.

Mudança de $(705)_8$ *para a Base Binária:*

Os algarismos 7, 0 e 5 na base binária são, respectivamente, iguais a $(111)_2$, $(0)_2$ e $(101)_2$. Como a base dada é $8 = 2^3$,colocamos cada um destes algarismos em classes de 3 algarismos cada (pelo fato do expoente na base 2 ser 3), completamos com zero, caso necessário, e retiramos no final do processo os algarismos não significativos.

$(7)_8 = (111)_2$

$(0)_8 = (000)_2$

$(5)_8 = (101)_2$

Ou seja, $(705)_8 = (111000101)_2$.

Mudança de $(1023)_4$ *para a Base Binária:*

Os algarismos 1, 0, 2 e 3 na base binária são, respectivamente, $(1)_2$, $(0)_2$, $(10)_2$ e $(11)_2$. Como a base anterior é $4 = 2^2$, escrevemos cada um destes algarismos em classes de 2 algarismos cada (pelo fato do expoente na base 2 ser 2). Se necessário, completamos com zero e retiramos no final do processo os algarismos não significativos.

$(1)_4 = (01)_2$

$(0)_4 = (00)_2$

$(2)_4 = (10)_2$

$(3)_4 = (11)_2$

Ou seja, $(1023)_4 = (01001011)_2 = (1001011)_2$.

5.3 Operações Fundamentais entre Bases de Numeração

Abordamos, nesta seção, as quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação a divisão) em bases de numeração arbitrárias. Ao efetuarmos uma operação fundamental em uma base de numeração, é importante termos em mente o Princípio Fundamental do Sistema Posicional de Numeração, discutido na Subseção 5.1.3, que assegura que dada uma base β natural tal que $\beta \geq 2$, temos que 1 unidade de uma ordem qualquer, equivale a exatamente β unidades de ordem imediatamente inferior. Além disso, recomendamos sempre efetuar estas operações entre números sob a mesma base de numeração.

5.3.1 Adição e Subtração

Ao efetuarmos a adição, convém observar que, se estamos trabalhando em uma base β natural, tal que $\beta \geq 2$, em cada ordem devemos ter algarismos de 0 até β–1. Caso ultrapasse, devemos usar o Fundamental do Sistema Posicional de Numeração. Vejamos como operar $(3203)_4 + (2223)_4$, a partir da Tabela 29.

Tabela 29 – A adição $(3203)_4 + (2223)_4$

	3	2	0	3
+	2	2	2	3
	5	4	2	6

Fonte: O autor, 2020.

Como estamos efetuando a adição entre numerais na base 4, o resultado deve ser ajustado ao sistema de numeração na base 4. Nas unidades de primeira ordem, por exemplo, temos 6 unidades. Vamos tirar 4 unidades que virará 1 unidade de segunda ordem, sobrando 2 unidades de primeira ordem. Repetimos este procedimento nas outras ordens do número a fim de obtermos o numeral corretamente escrito na base 4, como ilustrado na Tabela 30.

Tabela 30 - Procedimento de passar a adição da Tabela 29 para a base 3 corretamente

0	$5\ (>3)$	$4\ (>3)$	2	$6\ (>3)$
$+1$	$+1$	-4 (base)	$+1$	-4 (base)
1	$6 \to 6-4=2$	0	3	2

Fonte: O autor, 2020.

Finalmente, temos que $(3203)_4 + (2223)_4 = (12032)_4$.

Para a subtração, devemos ter o mesmo cuidado que tivemos na adição. Reiteramos que se estivermos trabalhando em uma base β natural maior ou igual a 2, em cada ordem devemos ter algarismos de 0 até $\beta - 1$. Se na ordem em que a subtração está sendo efetuada o algarismo do minuendo for menor do que o do subtraendo, devemos tomar emprestado 1 unidade da ordem imediatamente superior, que se transformará em mais β unidades nesta ordem “inferior”, para finalmente prosseguir a subtração normalmente. Caso ocorra situação similar nas demais ordens usamos o mesmo procedimento. Vejamos como efetuar a subtração $(54201)_6 - (15425)_6$, mostrada pela Tabela 31.

Tabela 31 – Subtração $(54201)_6 - (15425)_6$

	$(5-1)=4$	$(4-1+6)=9$	$(2-1+6)=7$	$(0-1+6)=5$	$(1+6)=7$
	$\uparrow 5$	$\uparrow 4$	$\uparrow 2$	$\uparrow 0$	$\uparrow 1$
$-$	1	5	4	2	5
	3	4	3	3	2

Fonte: O autor, 2020.

Repare que os resultados obtidos em cada ordem não excedem o valor da base, portanto, $(54201)_6 - (15425)_6 = (34332)_6$.

5.3.2 Multiplicação e Divisão

É possível efetuar as operação de multiplicação e de divisão entre numerais de uma mesma base ou passando todos os números para a base 10 para em seguida efetuar a multiplicação ou a divisão usual da base decimal, ou podemos usar o Princípio Fundamental do Sistema Posicional de Numeração. Optamos por utilizar o Princípio Fundamental do Sistema Posicional de Numeração, por acharmos que este método generaliza melhor a estrutura de operações fundamentais no Sistema Posicional, não importando assim a base de numeração no qual o número está representado. Para maiores detalhes, o leitor é convidado a consultar Lacerda (2014).

Para realizar a multiplicação pelo Princípio Fundamental do Sistema Posicional de Numeração, usamos um algoritmo similar ao que é utilizado para multiplicar números na base decimal. Propomos obter as multiplicações $(1101)_2 \times (101)_2$ e $(312)_5 \times (24)_5$. A Tabela 32 introduz estes cálculos.

Tabela 32 - Multiplicações $(1101)_2 \times (101)_2$ e $(312)_5 \times (24)_5$

			1	1	0	1				3	1	2
			$\times$	1	0	1				$\times$	2	4
			1	1	0	1				12	4	8
+		0	0	0	0			+	6	2	4	
	1	1	0	1					6	14	8	8
	1	1	1	2	0	1		+1	+3	+1	+1	-5
+1	+1	+1	+1	-2					-5	-15	-5	
	2	2	2	0				1	4	0	4	3
1	0	0	0	0	0	1						

Fonte: O autor, 2020.

Repare que usamos a ideia do Princípio Fundamental do Sistema Posicional de Numeração quando obtemos, nos resultados parciais, algarismos maiores que as bases pretendidas. Finalmente, temos que $(1101)_2 \times (101)_2 = (1000001)_2$ e $(321)_5 \times (24)_5 = (14043)_5$.

Para a divisão, usamos o mesmo algoritmo de divisão de numerais na base 10 (quando o dividendo é maior que o divisor). Desejamos obter as seguintes divisões: $(110110)_2 \div (11)_2$ e $(1022)_5 \div (12)_5$.

Inicialmente, efetuamos a divisão dos dois primeiros algarismos de $(110110)_2$ por $(11)_2$, e na divisão $(1022)_5$ por $(12)_5$, dividimos os primeiros 3 algarismos de $(1022)_5$ por $(12)_5$, como é mostrado na Tabela 33. Isto é justificado porque 11 é a menor "parte" do número $(110110)_2$ que é maior ou igual a $(11)_2$, enquanto 102 é a menor "parte" do número $(1022)_5$ que é maior ou igual a $(12)_5$.

Tabela 33 - Exemplo de divisões nas bases 2 e 5

$(11\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0)_2$	$(11)_2$	$(102\ \ 2)_5$	$(12)_5$
-11	1	-41	3
0		11	

Fonte: O autor, 2020.

Continuamos o algoritmo usando a mesma sequência lógica dos passos da divisão de dois numerais na base 10, obviamente adaptado para a base 2. A Figura 22 exibe as contas restantes.

Figura 22 - Divisões nas bases 2 e 5

$$
\begin{array}{l|l}
(110110)_2 & (11)_2 \\ \hline
-11 & (10010)_2 \\
\ \ 00 & \\
\ \ \ 01 & \\
\ \ \ \ 11 & \\
\ \ \ \ \ 00 & \\
\ \ \ \ \ \ 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
(1022)_5 & (12)_5 \\ \hline
-41 & (34)_5 \\
\ \ 112 & \\
-103 & \\
\ \ \ \ 4 &
\end{array}
$$

Fonte: O autor, 2020.

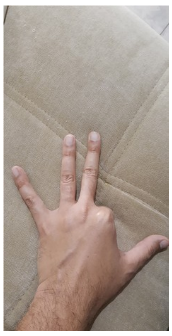
Obtemos como resultado $(110110)_2 \div (11)_2 = (1001)_2$, sendo esta divisão exata e $(1022)_5 \div (12)_5 = (34)_5$, cujo resto é igual a $(4)_5$.

5.3.3 Tabuada de Multiplicação Através das Mãos em Bases Arbitrárias

Propomos, nesta subseção, estender a tabuada de multiplicação por $(9)_{10}$ através das mãos, para a multiplicação por $\beta - 1$ através das mãos, sendo β uma base arbitrária natural maior do que 1.

A fim de familiarizar o leitor com este método, propomos a construção da multiplicação por 4 escrito na base 5. Para isto, basta usarmos 5 dedos da mão, como mostrado na Tabela 34. Ordenamos os dedos da mão esquerda, de modo que o 1º dedo seja o dedo mínimo, o 2º dedo seja o dedo anelar, o 3º dedo seja o dedo do meio, o 4º dedo seja o dedo indicador e o 5º dedo seja o dedo polegar.

Tabela 34 - Tabuada do 4 na base 5

ILUSTRAÇÃO	AÇÃO EXECUTADA
	Ao efetuar 4×1 na base 5, abaixamos o primeiro dedo (dedo mínimo). À esquerda do dedo mínimo não há dedo algum, e à direita dele há quatro dedos. Desta maneira, o resultado desta multiplicação é igual a 04. $$(4)_5 \times (1)_5 = (04)_5 = (4)_5$$
	Ao efetuar 4×2 na base 5, abaixamos o segundo dedo (dedo anelar). À esquerda do anelar há 1 dedo, e à direita dele há 3 dedos. Desta maneira, o resultado desta multiplicação é igual a 13. $$(4)_5 \times (2)_5 = (13)_5$$
	Ao efetuar 4×3 na base 5, abaixamos o terceiro dedo (dedo médio). À esquerda e à direita do dedo médio há 2 dedos. Desta maneira, o resultado desta multiplicação é igual a 22. $$(4)_5 \times (3)_5 = (22)_5$$
	Ao efetuar 4×4 na base 5, abaixamos o quarto dedo (dedo indicador). À esquerda do indicador há 3 dedos, e à direita dele há apenas 1 dedo. Desta maneira, o resultado desta multiplicação é igual a 31. $$(4)_5 \times (4)_5 = (31)_5$$

	Ao efetuar 4×5 na base 5, abaixamos o quinto dedo (dedo polegar). À esquerda do polegar há 4 dedos, e à direita dele não há dedo. Desta maneira, o resultado desta multiplicação é igual a 40. $(4)_5 \times (10)_5 = (40)_5$

Fonte: O autor, 2020.

Finalmente, vamos mostrar que este algoritmo é válido para qualquer base natural $\beta \geq 2$. Observe inicialmente o que ocorre ao multiplicarmos dois números nesta base, de modo que um deles seja $(\beta - 1)$ e o outro um número natural n tal que $1 \leq n \leq \beta$.

- Para $n = 1$:
  $(\beta - 1) \times 1 = \beta - 1 = \left[0(\overline{\beta - 1}\right]_\beta$
- Para $n = 2$:
  $(\beta - 1) \times 2 = 2\beta - 2 = \beta + (\beta - 2) = 1\beta + (\beta - 2) = \left[1(\overline{\beta - 2})\right]_\beta$
- Para $n = 3$:
  $(\beta - 1) \times 3 = 3\beta - 3 = 2\beta + (\beta - 3) = \left[2(\overline{\beta - 3})\right]_\beta$
- Para $n = k$:

$(\beta - 1) \times k = k\beta - k = k\beta - \beta + \beta - k = (k - 1) \cdot \beta + (\beta - k) = \left[(\overline{k - 1})(\overline{\beta - k})\right]_\beta$

- Para $n = \beta - 1$:
  $(\beta - 1) \times (\beta - 1) = \beta^2 - 2\beta + 1 = (\beta - 2) \cdot \beta + 1 = \left[(\overline{\beta - 2})1\right]_\beta$
- Para $n = \beta$:
  $(\beta - 1) \times \beta = \left[(\overline{\beta - 1})0\right]_\beta$

Ou seja, sendo $n \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq n \leq \beta$, escrito na base $\beta \geq 2$, temos:

$$(\beta - 1) \times n = \left[(\overline{n - 1})(\overline{\beta - n})\right]_\beta$$

Isto é o suficiente para assegurarmos a validade do método de multiplicação por $(\beta - 1)_\beta$ através das mãos, sendo uma base arbitrária natural maior do que 1.

5.4 Método de Horner-Ruffini para Mudanças de Base

Discutimos, nesta seção, um algoritmo que transforma diretamente um número natural de uma base b para uma base $b-k$, sem o auxílio da base decimal. A este algoritmo damos o nome de *Método de Horner-Ruffini para Mudanças de Base*, pois, originalmente o Algoritmo de Horner-Ruffini foi concebido para determinar uma função polinomial a partir da *transformação aditiva* de uma função polinomial dada. Por esta razão, a essência do método para mudanças de base é a mesma do método aplicado aos polinômios e discutido na Subseção 4.6.2.

Descrevemos o Método de Horner-Ruffini para Mudanças de Base através de 3 etapas. A etapa 1 se encarrega de determinar o parâmetro de variação entre as base. A etapa 2 é a de obtenção dos algarismos/coeficientes do número na base desejada, enquanto a etapa 3 corresponde a etapa de ajustes destes algarismos/coeficientes. O método é discutido com maiores detalhes a seguir e cada etapa é acompanhada de um exemplo.

Sejam dois números naturais N e $b > 0$, tais que N escrito na base b é dado por:

$$N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0},$$

em que $0 \leq a_i \leq b-1$, $a_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Desejamos transformar $(N)_b$ para $(N')_{b-k}$.

Etapa 1

Determinar o parâmetro de variação entre as bases através da diferença entre as bases (a base em que o número se encontra subtraída da base em que se deseja passar), ou seja, $b-(b-k)=k$.

Exemplo: Transformar o número $(2314)_5$ para a base 7.

Etapa 1.

k=5-7=-2 (parâmetro de variação entre as bases).

Etapa 2

Obter os coeficientes do polinômio na base $b–k$.

Como o parâmetro de variação entre as bases é k, isto nos diz que devemos dividir a forma polinomial do número $(N)_b$ pelo binômio $b-k$, isto é, dividimos o polinômio $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + +a_1 b + a_0$ pelo binômio $b-k$, através do algoritmo de Briot-Ruffini, visto na Subseção 4.5.1.. A Tabela 35 ilustra genericamente o procedimento a ser adotado.

Tabela 35 - Algoritmo de Horner-Ruffini

		$i=0$	$i=1$	$i=2$	...	$i=n-1$	$i=n$
$j=0$	k	$a_n^{(0)}=a_n$	$a_{n-1}^{(0)}=a_{n-1}$	$a_{n-2}^{(0)}=a_{n-2}$	...	$a_1^{(0)}=a_1$	$a_0^{(0)}=a_0$
$j=1$	k	$a_n^{(1)}=a_n$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	...	$a_1^{(1)}$	$a_0^{(1)}$
$j=2$	k	$a_n^{(2)}=a_n$	$a_{n-1}^{(2)}$	$a_{n-2}^{(2)}$	...	$a_1^{(2)}$	
$j=3$	k	$a_n^{(3)}=a_n$	$a_{n-1}^{(3)}$	$a_{n-2}^{(3)}$	...		
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .		
$j=n-1$	k	$a_n^{(n-1)}=a_n$	$a_{n-1}^{(n-1)}$	$a_{n-2}^{(n-1)}$			
$j=n$	k	$a_n^{(n)}=a_n$	$a_{n-1}^{(n-1)}$				
$j=n+1$	k	$a_n^{(n+1)}=a_n$					

Fonte: O autor, 2020.

Como este método é inspirado no Método de Horner-Ruffini para Polinômios, visto na Subseção 4.6.2, cabe ressaltar que sempre teremos $a_n^{(j)}=a_n$. Para obtermos os demais coeficientes destacados de amarelo na Tabela 22, efetuamos as operações:

$$a_{n-i}^{(j)}=k\cdot a_{(n-i)+1}^{(j)}+a_{n-i}^{(j-1)},$$

em que $1\leq i\leq n-j$ com $1\leq j\leq n$ onde $i,j,n\in\mathbb{N}$.

Vamos interpretar o índice i como quantas ordens devemos caminhar para a direita (por isto temos o índice $n-i$), a partir da ordem n, para terminar na ordem zero (isto explica porque $0\leq i\leq n$). Já o índice j indica a linha em que o coeficiente se encontra na operação, até obtermos o termo $a_{n-i}^{(n-i+1)}$, finalizando o processo na coluna i do algoritmo.

Chegamos próximos a forma polinomial do número N escrito na base $b-k$:

$$N=a_n\cdot(b-k)^n+a_{n-1}^{(n)}\cdot(b-k)^{n-1}+...+a_1^{(2)}\cdot(b-k)+a_0^{(1)}$$

Eventualmente algum coeficiente deste desenvolvimento pode ser negativo ou até maior ou igual do que a base $b-k$, o que não é permitido.

Exemplo: Transformar o número $(2314)_5$ para a base 7.

Etapa 1.

$k=5-7=-2$ (parâmetro de variação entre as bases).

Etapa 2.

Como o parâmetro de variação entre as bases é -2, dividimos o polinômio $2b^3 + 3b^2 + 1b + 4$ pelo binômio $b + 2$ usando o algoritmo de Briot Ruffini;

Tabela 36 - Método de Horner aplicado a $2b^3 + 3b^2 + 1b + 4$ por $b + 2$

		$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$j=0$	-2	2	3	1	4
$j=1$	-2	2	$(-2)\times(2)+3=-1$	$(-2)\times(-1)+1=3$	$(-2)\times(3)+4=-2$
$j=2$	-2	2	$(-2)\times(2)-1=-5$	$(-2)\times(-5)+3=13$	
$j=3$	-2	2	$(-2)\times(2)-5=-9$		
$j=4$	-2	2			

Fonte: O autor, 2020.

Temos então, os coeficientes:

$a_3^{(4)} = a_3 = 2$;

$a_2^{(3)} = -9$;

$a_1^{(2)} = 13$;

$a_0^{(1)} = -2$.

Chegamos próximos à forma polinomial do número 2314 escrito na base 7:

$$2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 4 = 2 \cdot (5+2)^3 - 9 \cdot (5+2)^2 + 13 \cdot (5+2) - 2$$

Etapa 3

Ajustar os algarismos/coeficientes do número N escrito na base $b - k$.

Cada elemento $a_{n-i}^{(n-i+1)}$ deve ser um número inteiro tal que $0 \leq a_{n-i}^{(n-i+1)} < (b-k)$. Caso isto não ocorra, ou seja, se $a_{n-i}^{(n-i+1)} \geq (b-k)$ ou $a_{n-i}^{(n-i+1)} < 0$, então usamos o Princípio Fundamental do Sistema Posicional de Numeração (Subseção 5.1.3.), de modo que $a_{n-i}^{(n-i+1)} \geq (b-k)$ ou $a_{n-i}^{(n-i+1)} < 0$ se tornem $0 \leq c_{n-i} < (b-k)$. Outra propriedade importante para esta etapa é enunciada e provada a seguir:

Propriedade 1. Dados x e y números inteiros positivos, se $x \leq y$, então $\exists q \in \mathbb{Z}$ tal que $x \cdot q \leq y \leq (q+1) \cdot x$.

A validade desta propriedade se baseia no algoritmo de Euclides, pois como $x \leq y$, existem q e r inteiros tais que $y = x \cdot q + r$, com $0 \leq r \leq x - 1$. Desta maneira, temos que

$y = x \cdot q + r \leq x \cdot q + x = x \cdot (q+1)$ $\qquad$ $x \cdot q \leq x \cdot q + r = y$

$y = x \cdot q + r \leq x \cdot q + x = x \cdot (q+1)$ e, além disso, $x \cdot q \leq x \cdot q + r = y$, donde concluímos:

$$x \cdot q \leq y \leq (q+1) \cdot x.$$

Temos dois cenários a discutir dentro desta etapa:

Cenário 1. Para o caso em que ocorre $(b-k) \leq a_{n-i}^{(n-i+1)}$, existe, pela Propriedade 1, $d \in \mathbb{N}^*$ *tal que:*

$(b-k) \cdot d \leq a_{n-i}^{(n-i+1)} \leq (b-k) \cdot (b+1) \leftarrow$ subtraindo $(b-k) \cdot d$, temos:

$0 \leq a_{n-i}^{(n-i+1)} - (b-k) \cdot d \leq (b-k) \cdot (d+1) - (b-k) \cdot d$, desenvolvendo chegamos em:

$0 \leq a_{n-i}^{(n-i+1)} - (b-k) \cdot d \leq (b-k)$.

Tomemos $c_{n-i} = a_{n-i}^{(n-i+1)} - (b-k) \cdot d$, obtendo assim $0 \leq c_{n-i} < (b-k)$. Convém ressaltar que o excedente relativo a esta ordem é transferido para alguma ordem inferior ou superior usando o Princípio Fundamental do Sistema Posicional de Numeração;

Cenário 2. Para o caso em que ocorre $a_{n-i}^{(n-i+1)} < 0$, avaliamos os coeficientes das ordens vizinhas e tomamos um número natural d de modo que $0 \leq a_{n-i}^{(n-i+1)} + d < (b-k)$. A priori, se ocorrer de $a_{n-i+1}^{(n-i+2)} \geq (b-k)$, retiramos d' unidades da ordem $(n-i+1)$ (ordem imediatamente superior a $(n-i)$) de modo que $0 \leq a_{n-i}^{(n-i+1)} + d' \cdot (b-k) < (b-k)$. Desta maneira, como $0 < d' \leq b-k$, fazemos $d = d' \cdot (b-k)$, concluindo que:

$0 \leq c_{n-i} = a_{n-i+1}^{(n-i+2)} - d' < (b-k)$

e

$0 \leq c_{n-i} = a_{n-i}^{(n-i+1)} + d' \cdot (b-k) = a_{n-i}^{(n-i+1)} + d < (b-k)$.

Se $a_{n-i+1}^{(n-i+2)} \leq 0$ e $a_{n-i}^{(n-i+1)} \geq (b-k)$, então retiramos d' unidades da ordem $(n-i)$ (imediatamente inferior a $n-i+1$). Após este processo, temos $0 \leq c_{n-i} = a_{n-i}^{(n-i+1)} - d' < (b-k)$, sendo $d' = d \cdot (b-k)$ um múltiplo de $(b-k)$. Resta verificar se $0 \leq c_{n-i} = a_{n-i}^{(n-i+1)} + d < (b-k)$. Caso isto não ocorra recorremos a ordens superiores ou inferiores e reiniciamos o procedimento dado pelo Cenário 2.

Se simultaneamente ocorrer das ordens imediatamente superior e inferior a $(n-i)$ serem menores ou iguais do que zero, então reiniciamos a busca para ordens imediatamente vizinhas à ordem $(n-i+1)$ ou à ordem $(n-i-1)$ para aplicar procedimentos análogos aos descritos pelo Cenário 2. Esta busca pode ser reiniciada para ordens cada vez mais distantes da ordem $(n-i)$ até que encontremos alguma ordem superior a $(n-i+1)$ contendo coeficiente maior do que zero ou alguma ordem inferior contendo coeficiente maior ou igual do que $(b-k)$. Após todo este processo, podemos ter um aumento na quantidade de coeficientes ou uma redução. Chamemos essa quantidade de $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n$ ou $m < n$ e assim, determinamos $(N')_{b-k}$ descrito na forma polinomial por:

$$c_m \cdot (b-k)^m + c_{m-1} \cdot (b-k)^{m-1} + ... + c_1 \cdot (b-k) + c_0$$

de modo que $0 \leq c_{m-i} < (b-k)$.

Exemplo: Transformar o número $(2314)_5$ para a base 7.

Etapa 1.

$k = 5 - 7 = -2$ (parâmetro de variação entre as bases).

Etapa 2.

$(2314)_5 = 2 \cdot 7^3 - 9 \cdot 7^2 + 13 \cdot 7 - 2$

Etapa 3.

Como queremos escrever 2314 na base 7 é necessário que os coeficientes do desenvolvimento acima sejam inteiros não negativos e menores do que 7. Observe que temos três coeficientes que não satisfazem a relação $0 \leq a_{n-i}^{(n-i+1)} < 7$.

São eles $a_2^{(3)} = -9$, $a_1^{(2)} = 13$ e $a_0^{(1)} = -2$. Manipulando $2 \cdot 7^3 - 9 \cdot 7^2 + 13 \cdot 7 - 2$ conforme discutido na descrição da etapa 3, temos o seguinte:

$2 \cdot 7^3 - 9 \cdot 7^2 + 13 \cdot 7 - 2 = 2 \cdot 7 \cdot 7^2 - 9 \cdot 7^2 + 12 \cdot 7 + 1 \cdot 7 - 2$

$2 \cdot 7^3 - 9 \cdot 7^2 + 13 \cdot 7 - 2 = (14 - 9) \cdot 7^2 + (1 \cdot 7 + 5) \cdot 7 + 5$

$2 \cdot 7^3 - 9 \cdot 7^2 + 13 \cdot 7 - 2 = 5 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 5$

$2 \cdot 7^3 - 9 \cdot 7^2 + 13 \cdot 7 - 2 = 6 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 5$

Ou seja, $(2314)_5 = (655)_7$.

Repare que na etapa 3 do exemplo acima, inicialmente ajustamos o coeficiente $a_0^{(1)} = -2$ (por ser negativo) e $a_1^{(2)} = 13 \geq 7$ (Cenário 1). Ao mesmo tempo, ajustamos o coeficiente $a_2^{(3)} = -9$, tomando 2 unidades da ordem imediatamente acima (ordem 4). Por último, ajustamos o coeficiente de $a_1^{(2)} = 12 \geq 7$ (Cenário 1), transferindo para $a_2^{(3)} = 5$ exatamente 1 unidade. Obviamente, a prioridade dos ajustes é algo pessoal e subjetivo. Possivelmente, poupamos trabalho ou tempo optando por ajustar um coeficiente antes de outro. No entanto, cabe ressaltar que a escolha arbitrária na disposição dos ajustes dos algarismos/coeficientes não altera o resultado final do número transformado.

A seguir fornecemos outro exemplo de aplicação do Método de Horner-Ruffini para Mudanças de Base:

Exemplo: Transformar o número $(50124)_6$ para a base 8 .

Etapa 1.

$k = 6 - 8 = -2$. (parâmetro de variação entre as bases);

Etapa 2.

$(50124)_6 = 5 \cdot 8^4 - 40 \cdot 8^3 + 121 \cdot 8^2 - 162 \cdot 8^1 + 84;$

Etapa 3.

Como queremos escrever 50124 na base 8, é necessário que os coeficientes do desenvolvimento acima sejam inteiros não negativos e menores do que 8. Observe que temos quatro coeficientes que não satisfazem a relação $0 \leq a_{n-i}^{(n-i+1)} < 8$.

São eles $a_3^{(4)} = -40$, $a_2^{(3)} = 121$, $a_1^{(2)} = -162$ e $a_0^{(1)} = 84$. Manipulando $5 \cdot 8^4 - 40 \cdot 8^3 + 121 \cdot 8^2 - 162 \cdot 8^1 + 84$ conforme discutido na descrição da etapa 3, temos o seguinte:

$5 \cdot 8^4 - 40 \cdot 8^3 + 121 \cdot 8^2 - 162 \cdot 8^1 + 84 =$

$5 \cdot 8 \cdot 8^3 - 40 \cdot 8^3 + (15 \cdot 8 + 1) \cdot 8^2 + (-21 \cdot 8 + 6) \cdot 8 + 10 \cdot 8 + 4 =$

$15 \cdot 8^3 + 8^2 - 21 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 10 \cdot 8 + 4 =$

$(1 \cdot 8 + 7) \cdot 8^3 - 20 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^2 + 4 =$

$1 \cdot 8^4 + 7 \cdot 8^3 + (-3 \cdot 8 + 6) \cdot 8^2 + 4 =$

$1 \cdot 8^4 + (7 - 3) \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 + 4 =$

$1 \cdot 8^4 + 4 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 + 4 = (14604)_8.$

Finalmente, podemos escrever que $(50124)_6 = (14604)_8$.

Gostaríamos de ressaltar que viabilizamos nessa dissertação, um método alternativo de transformação de um número natural de uma base b para uma base $b - k$. Observe que a sua aplicação requer uma compreensão aprofundada do Princípio Fundamental do Sistema Posicional de Numeração, além das propriedades operatórias, como distributividade, comutatividade e associatividade. Este método apesar de integrar conceitos de polinômios e numeração, dando assim uma possibilidade ao aluno de entender melhor alguns conceitos dos dois assuntos, é um método pouquíssimo familiar no meio escolar. Acreditamos que é possível explorá-lo como grande favorecedor do processo de ensino e aprendizagem de sistemas de numeração.

6 ATIVIDADES PROPOSTAS

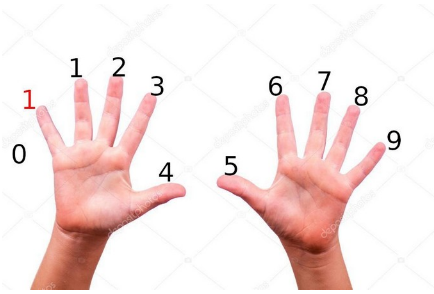
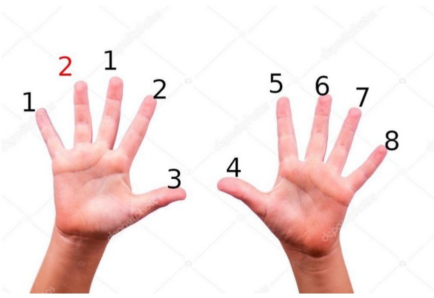
As atividades a seguir foram pensadas cuidadosamente e elaboradas para o uso da Tabuada de Multiplicação Através das Mãos, e o uso do Método de Horner-Rufini para Mudanças de Base. Para isto, sugerimos para cada atividade o quantitativo de 2 tempos de aula com 45 minutos cada, dividindo os alunos em duplas ou trios, onde cada grupo poderá consultar seu material. O material sugerido para o desenvolvimento destas atividades é essencialmente lápis e papel.

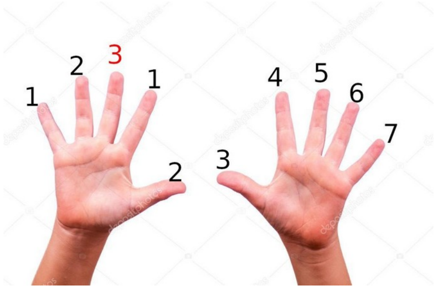
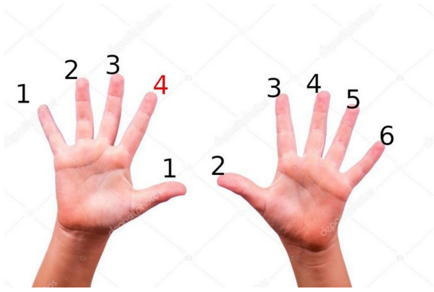
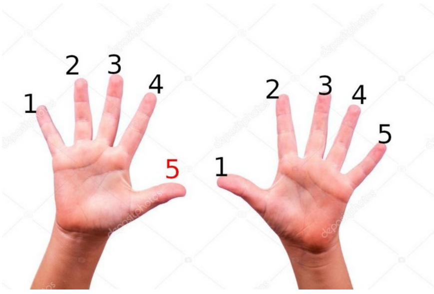
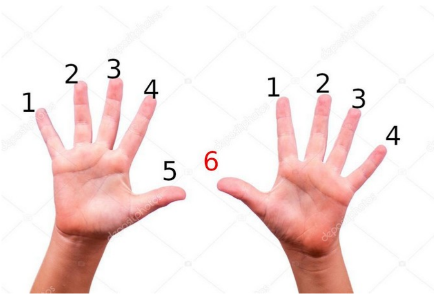
Cabe reiterarmos que a capacidade dos alunos de compreender as diferenças e semelhanças entre os sistemas decimal e não decimal já era previsto nas habilidades e competências da Base Nacional Comum Curricular. Sendo assim, as atividades aqui propostas corroboram para um estudo mais aprofundado, dinâmico e qualitativo sobre diversos sistemas de numeração e de suas bases.

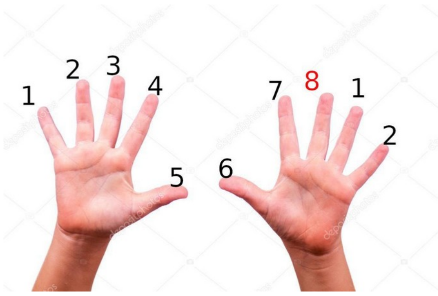
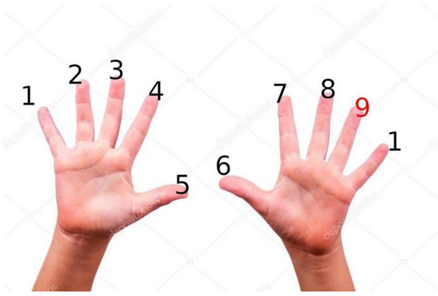
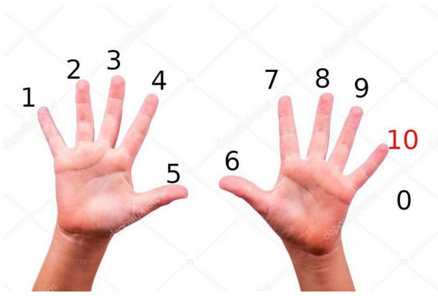
6.1 Atividade 1

Descreva o algoritmo da multiplicação por 6 na base 10 através das mãos.

Tabela 37 - Atividade 1

Dedos rotulados	**Explanação do procedimento**
	
	

1 2 3 1 2 3 4 5 6 7	
1 2 3 4 1 2 3 4 5 6	
1 2 3 4 5 1 2 3 4 5	
1 2 3 4 5 6 1 2 3 4	
1 2 3 4 5 6 7 1 2 3	

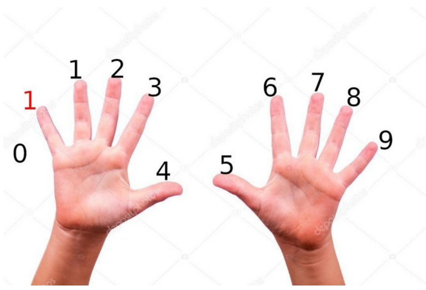
	
	
	

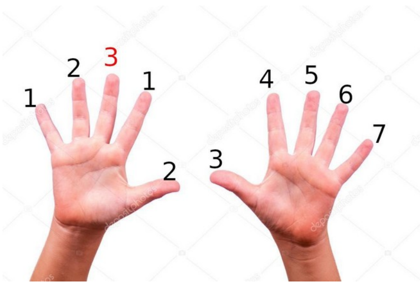
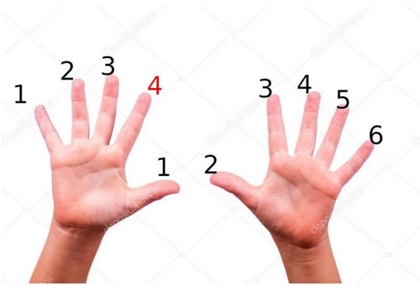
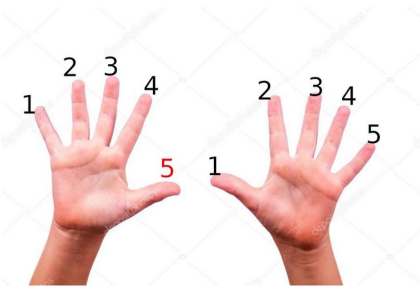
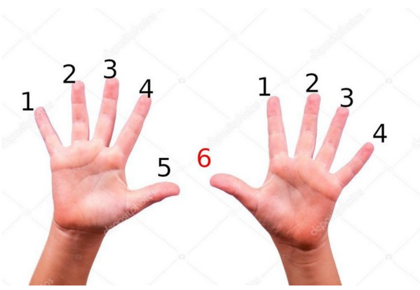
Fonte: O autor, 2020.

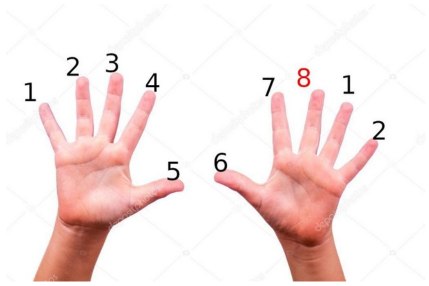
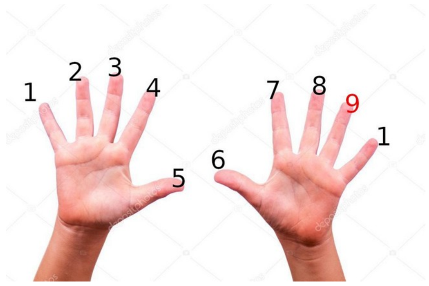
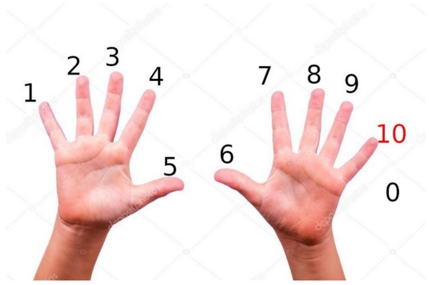
6.2 Atividade 2

Descreva o algoritmo da multiplicação por 13 na base 10 através das mãos.

Tabela 38 - Atividade 2

Dedos rotulados	Explanação do procedimento
	

 1 2 1 2 3 4 5 6 7 8	
 1 2 3 1 2 3 4 5 6 7	
 1 2 3 4 1 2 3 4 5 6	
 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5	
 1 2 3 4 5 6 1 2 3 4	

<table>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: O autor, 2020.

6.3 Atividade 3.

Montar as tabuadas de multiplicação por 6 na base 7, e de multiplicação por 20 na base 21.

6.4 Atividade 4.

(Hefez , 1997) Considere 36 na base 10, em que base será representado por $(51)_x$?

6.5 Atividade 5.

Dado o número escrito como $(7803)_5$, ajuste-o na base 5 utilizando a ideia do Princípio Fundamental do Sistema Posicional de Numeração. Faça o mesmo para o número $N = 6 \cdot 4^4 - 3 \cdot 4^3 + 5 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 + 15$, reescrevendo-o na base 4, segundo o mesmo princípio.

6.6 Atividade 6.

Escreva o número $(3305)_6$ na base 9 usando o método usual de mudança de base e o método de Horner-Ruffini para mudanças de base. Confronte os dois desenvolvimentos quanto ao grau de complexidade e a eficiência de cada método.

6.7 Atividade 7.

Efetue as mudanças de base dadas, usando o método de Horner-Ruffini para mudanças de base.

a) $(12345)_6$ para a base 8;
b) $(2B4567A)_{12}$ para a base 7;
c) $(231)_9$ para a base 2.

6.8 Atividade 8.

Transforme o número $(645)_7$ para a base 8, preferencialmente usando o Método de Horner-Ruffini. Em seguida, efetue a multiplicação do resultado obtido por $(17)_8$.

7 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

O objetivo deste trabalho era o de enfatizar a necessidade de um estudo sólido e aprofundado sobre os Sistemas de Numeração no Ensino Básico. Acreditamos que a maior relevância deste trabalho reside em propor objetos de estudos atípicos para conceitos já enraizados em nossos currículos, porém, que continuam sendo temas obscuros e tratados superficialmente através de regras e desprovidos de semântica.

Discutimos a tabuada de multiplicação por nove, na base decimal, feita através das mãos e a generalizamos para outros números e outras bases. Isto acena para o fato de que a multiplicação entre números naturais pode ser efetivamente compreendida como a operação de adição potencializada. Quando a base for maior do que 10, o método continua valendo. Um exemplo da tabuada de multiplicação por 11 na base 12 é dado pela Tabela 39.

Tabela 39 - Tabuada do 11 na base 12

$B \times 1 = B$
$B \times 2 = 1A$
$B \times 3 = 29$
$B \times 4 = 38$
$B \times 5 = 47$
$B \times 6 = 56$
$B \times 7 = 65$
$B \times 8 = 74$
$B \times 9 = 83$
$B \times A = 92$
$B \times B = A1$
$B \times 10_{12} = B0$

Fonte: O autor, 2020.

Relacionamos polinômios com sistemas de numeração. Vimos um abundante número de propriedades que ambos os conceitos têm em comum. Isto acena para a importância do ensino dos dois tópicos no Ensino Básico, mostrando a conexão entre assuntos que, aparentemente, tendem a ser abordados como objetos completamente distantes. Ao falarmos das Transformações Aditivas e do Método de Horner-Ruffini para Polinômios, estas ideias se encaixam e se completam. A partir delas, apresentamos um método de mudanças de base, chamado por nós de Método de Horner-Ruffini para Mudanças de Base.

Algumas reflexões surgiram em torno destes assuntos. A primeira pergunta é: Será que existe uma maneira de representar quantidades, sem usar o sistema posicional, no qual estamos muito acostumados e que, ao invés de usarmos uma forma polinomial, não usaríamos uma forma exponencial ou na forma de outra função qualquer? Conjecturamos que uma boa resposta para esta reflexão seria pela comodidade de representar os coeficientes do polinômio de forma ordenada, sendo que o sistema de numeração adotado é posicional, facilitando identificar os coeficientes do polinômio como os algarismos do numeral que o representa em uma base arbitrária.

Futuramente, gostaríamos de nos debruçarmos mais profundamente sobre esta questão, isto é, a de encontrar uma forma distinta de representar um número natural em forma de uma função distinta da polinomial, exibindo quais as vantagens e as desvantagens deste tipo de representação. Lembrando, também, que os sistemas não posicionais podem ter alguma representatividade diferente, abrindo, assim, possibilidades de uso de outras funções não polinomiais.

Gostaríamos, também, de seguir pesquisando se existe alguma possibilidade de adaptação da *Transformação Multiplicativa*[9], explicando brevemente o seu significado em algum método de mudança de base. Será que existe alguma relação entre as mudanças de base binária para quaternária, octal, hexadecimal ou generalizando para 2^n?

Confesso que fazer esse trabalho foi bastante desafiador. Porém, muito prazeroso. Conversando com meu orientador e com meu amigo Emanuel em um almoço, falei sobre o método de Horner-Ruffini para mudanças de base, e me deram muita força para continuar minha pesquisa e transformá-la em uma dissertação de mestrado. No decorrer do trabalho, também descobri muitas outras coisas referentes às operações e até a história dos números, que me fascinaram bastante.

9 Segundo Iezzi (2013), Transformação Multiplicativa é toda transformação da forma $y = k.x$, onde k é um número real não nulo. Se uma equação polinomial $P(x) = 0$, transformamos a mesma em $P(y/k) = P_1(y) = 0$, onde as raízes de $P_1(y) = 0$ são as raízes de $P(x) = 0$ multiplicadas por k.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum (BNCC):** Ensino Fundamental e Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais :** matemática. Brasília : MEC/SEF, 1997.

CASTRO, V. O. de. **A Construção do Conceito de Sistema de Numeração Decimal Durante a Alfabetização Matemática:** Uma Proposta de Intervenção de Ensino, 2016, 223 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, 2016.

CORDOVA, Lila; CABRERA, Karin; CABRERA, Khaterin; CAJA, Elizabeth; CALERO, Jesus. **Aritmética 2012: La Enciclopedia:** Nivel Preuniversitario. Perú: Editora Rubiños, 2012.

CUNHA, Guilherme Bernardino da; MACEDO, Ricardo Tombesi; SILVEIRA, Sidnei Renato. **Informática Básica.** Santa Maria, RS: Universidade de Santa Maria, 2017.

CURI, Edda. Sistema de Numeração Decimal: uso cotidiano e aprendizagens escolares. *In:* XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011, Recife. **Anais** […]. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2011.

DOMINGUES, Hygino H.. **Fundamentos de Aritmética.** Atual Editora, São Paulo, 1991.

FOMÍN, S.V. **Lecciones Populares de Matemáticas.** Sistemas de numeración. Moscú: MIR-Moscú, 1975.

HEFEZ, Abramo. **Curso de Álgebra Volume 1**, Coleção Matemática Universitária. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1997.

IEZZI, Gelson - **Fundamentos de Matemática Elementar.** Volume 6: Complexos, Polinômios e Equações. Atual Editora, São Paulo, 2013.

IFRAH, Georges. **História Universal dos Algarismos:** A Inteligência dos Homens Contada pelos Números e pelo Cálculo.Tomo 1, 2ª impressão. Tradução: MUÑOZ, Alberto; KATINSKY, Ana Beatriz. Editora Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1995.

LACERDA, José Carlos Admo. - **Praticando a Aritmética** 8ª Edição. Dissonnarte Editora, Rio de Janeiro, 2014.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. - **A Matemática do Ensino Médio.** Volume 3. Coleção do Professor de Matemática; Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar.** Volume 6, Polinômios. Coleção do Professor de Matemática; Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

OLIVEIRA, Daniela Santos. **Números e Sistema de Numeração.** 2008. 53 f. Monografia (Pós-Graduação) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de Lorena, Lorena, SP, 2008.

ROCHA, K. F.. **Bases Numéricas Não Usuais:** Um breve estudo. 2019. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, MS, 2019.

SILVA, R. G.. **Sistema de Numeração:** Das Talhas Numéricas aos Primórdios da Computação Artificial.147 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora: Instituto de Ciências Exatas, Juiz de Fora, MG, 2016.

SOLDATELLI, Ângela. Etnomatemática: A Multiplicação ao Redor do Mundo. **SCIENTIA CUM INDUSTRIA**, Universidade de Caxias do Sul, Rio Grande do Sul, v.4, n.4, p. 219-222, 2016.

THIBES, Victoria. **Como funciona o sistema binário?** Canal Tech. [2020] Disponível em: <https://canaltech.com.br/produtos/como-funciona-o-sistema-binario/ >. Acesso em: 16 de julho de 2020.

MARCIANO, Elainy. **Quatro métodos diferentes para aprender a tabuada do 9.** Escola Educação. 2020. Disponível em: <https://escolaeducacao.com.br/aprendendo-a-tabuada-de-multiplicacao-do-9/>. Acesso em 27 de março 2020.

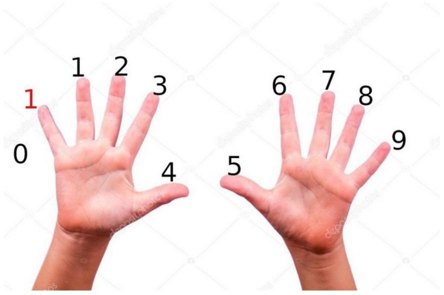
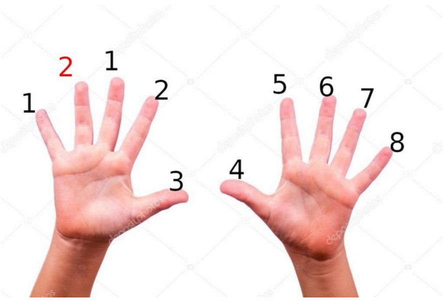
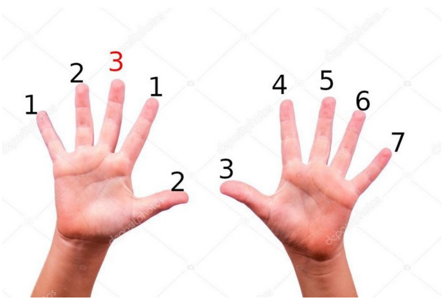
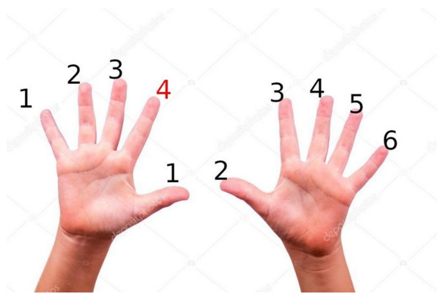
SILVA, Marcos Noé Pedro da. **O Sistema de Numeração Maia** .Mundo Educação [2020]. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/o-sistema-numeracao-maia.htm>. Acesso em 16 de julho de 2020.

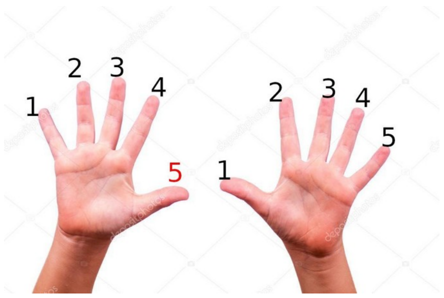
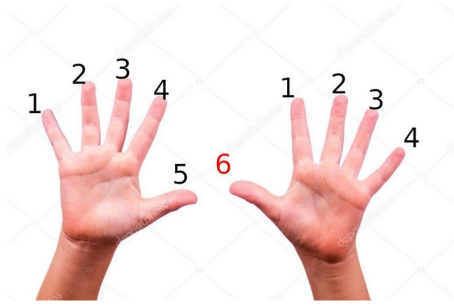
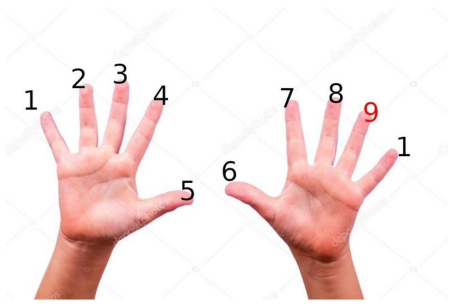
SOUZA, Rainer Gonçalves. **Escrita Egípcia.** Brasil Escola. [2020]. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/historiag/escrita-egipcia.htm>. Acesso em 11 de novembro de 2020.

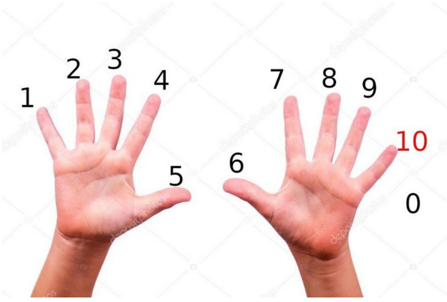
APÊNDICE A – SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1

O complemento de 6 em relação ao 9 é 3. Daí:

Tabela 40 - Solução da atividade 1

Dedos rotulados	Explanação do procedimento
	**6 vezes 1** Ao fazer 9×1, abaixamos o primeiro dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 0 dezenas e à direita temos 9 unidades, dando como resultado 9. Faremos então $9 - (3 \times 1) = 6$.
	**6 vezes 2** Ao fazer 9×2, abaixamos o segundo dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 1 dezena e à direita temos 8 unidades, dando como resultado 18. Faremos então $18 - (3 \times 2) = 12$.
	**6 vezes 3** Ao fazer 9×3, abaixamos o terceiro dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 2 dezenas e à direita temos 7 unidades, dando como resultado 27. Faremos então $27 - (3 \times 3) = 18$.
	**6 vezes 4** Ao fazer 9×4, abaixamos o quarto dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 3 dezenas e à direita temos 6 unidades, dando como resultado 36. Faremos então $36 - (3 \times 4) = 24$.

<table>
<tr><td></td><td>6 vezes 5
Ao fazer 9×5, abaixamos o quinto dedo (em vermelho).
À esquerda do “dedo referência” temos 4 dezenas e à direita temos 5 unidades, dando como resultado 45. Faremos então $45 - (3 \times 5) = 30$.</td></tr>
<tr><td></td><td>6 vezes 6
Ao fazer 9×6, abaixamos o sexto dedo (em vermelho).
À esquerda do “dedo referência” temos 5 dezenas e à direita temos 4 unidades, dando como resultado 54. Faremos então $54 - (3 \times 6) = 36$.</td></tr>
<tr><td></td><td>6 vezes 7
Ao fazer 9×7, abaixamos o sétimo dedo (em vermelho).
À esquerda do “dedo referência” temos 6 dezenas e à direita temos 3 unidades, dando como resultado 63. Faremos então $63 - (3 \times 7) = 42$.</td></tr>
<tr><td></td><td>6 vezes 8
Ao fazer 9×8, abaixamos o oitavo dedo (em vermelho).
À esquerda do “dedo referência” temos 7 dezenas e à direita temos 2 unidades, dando como resultado 72. Faremos então $72 - (3 \times 8) = 48$.</td></tr>
<tr><td></td><td>6 vezes 9
Ao fazer 9×9, abaixamos o nono dedo (em vermelho).
À esquerda do “dedo referência” temos 8 dezenas e à direita temos 1 unidade, dando como resultado 81. Faremos então $81 - (3 \times 9) = 54$.</td></tr>
</table>

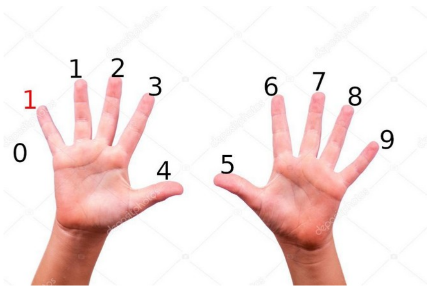
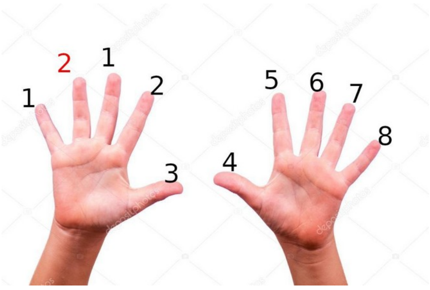
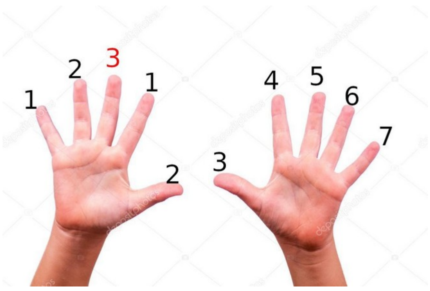
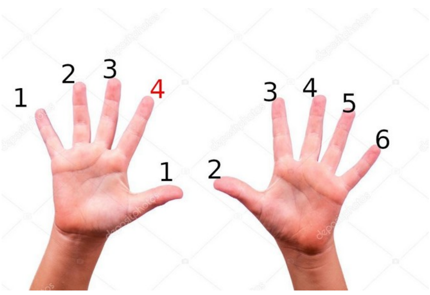
	**6 vezes 10** Ao fazer 9×10, abaixamos o décimo dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 9 dezenas e à direita temos 0 unidades, dando como resultado 90. Faremos então $90 - (3 \times 10) = 60$.

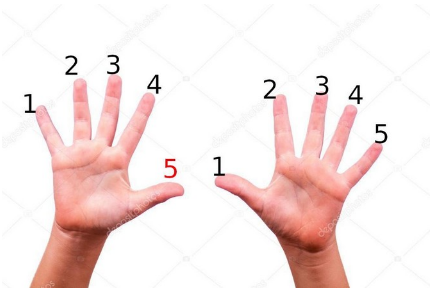
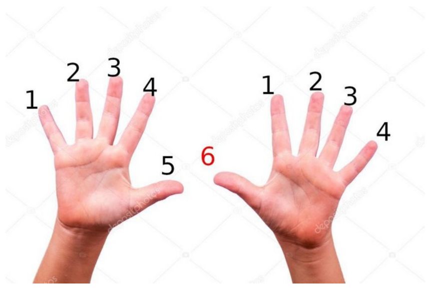
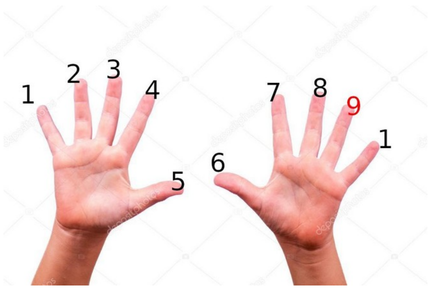
Fonte: O autor, 2020.

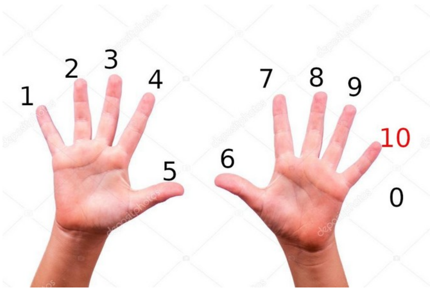
APÊNDICE B – SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2

O complemento de 13 em relação ao 9 é – 4. Daí:

Tabela 41 - Solução da atividade 2

Dedos rotulados	Explanação do procedimento
	**13 vezes 1** Ao fazer 9×1, abaixamos o primeiro dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 0 dezenas e à direita temos 9 unidades, dando como resultado 9. Faremos então $9 - (-4 \times 1) = 13$.
	**13 vezes 2** Ao fazer 9×2, abaixamos o segundo dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 1 dezena e à direita temos 8 unidades, dando como resultado 18. Faremos então $18 - (-4 \times 2) = 26$.
	**13 vezes 3** Ao fazer 9×3, abaixamos o terceiro dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 2 dezenas e à direita temos 7 unidades, dando como resultado 27. Faremos então $27 - (-4 \times 3) = 39$.
	**13 vezes 4** Ao fazer 9×4, abaixamos o quarto dedo (em vermelho). À esquerda do “dedo referência” temos 3 dezenas e à direita temos 6 unidades, dando como resultado 36. Faremos então $36 - (-4 \times 4) = 52$.

 	**13 vezes 5** Ao fazer 9×5, abaixamos o quinto dedo (em vermelho). À esquerda do "dedo referência" temos 4 dezenas e à direita temos 5 unidades, dando como resultado 45. Faremos então $45 - (-4 \times 5) = 65$.
 	**13 vezes 6** Ao fazer 9×6, abaixamos o sexto dedo (em vermelho). À esquerda do "dedo referência" temos 5 dezenas e à direita temos 4 unidades, dando como resultado 54. Faremos então $54 - (-4 \times 6) = 78$.
 	**13 vezes 7** Ao fazer 9×7, abaixamos o sétimo dedo (em vermelho). À esquerda do "dedo referência" temos 6 dezenas e à direita temos 3 unidades, dando como resultado 63. Faremos então $63 - (-4 \times 7) = 91$.
 	**13 vezes 8** Ao fazer 9×8, abaixamos o oitavo dedo (em vermelho). À esquerda do "dedo referência" temos 7 dezenas e à direita temos 2 unidades, dando como resultado 72. Faremos então $72 - (-4 \times 8) = 104$.
 	**13 vezes 9** Ao fazer 9×9, abaixamos o nono dedo (em vermelho). À esquerda do "dedo referência" temos 8 dezenas e à direita temos 1 unidade, dando como resultado 81. Faremos então $81 - (-4 \times 9) = 117$.

	**13 vezes 10** Ao fazer 9 $\times$ 10, abaixamos o décimo dedo (em vermelho). À esquerda do "dedo referência" temos 9 dezenas e à direita temos 0 unidades, dando como resultado 90. Faremos então $90 - (-4 \times 10) = 130$.

Fonte: O autor, 2020.

APÊNDICE C – SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 3

Repare que a lógica de usar a tabuada de multiplicação com auxílio das mãos, do número natural $b-1$ em uma base $b \geq 2$, está no seguinte:

$(b-1)_b \times k = (\overline{k-1})(\overline{b-k})$ onde k é um número natural $1 \leq k \leq b$. Lembrando que $b = 10_b$, quando escrevemos na base b. Convém observar também que a soma dos algarismos, nesse caso, sempre será $b-1$. Abaixo temos a tabuada de 6 na base de numeração 7.

Tabela 42 - Tabuada do 6 na base 7.

$6 \times 1 = 06$
$6 \times 2 = 15$
$6 \times 3 = 24$
$6 \times 4 = 33$
$6 \times 5 = 42$
$6 \times 6 = 51$
$6 \times 10_7 = 60$

Fonte: O autor, 2020

Abaixo temos a tabuada de 20 na (base 21)[10]:

Tabela 43 - Tabuada do 20 na base 21.

$K \times 1 = 0K = K$		$K \times 8 = 7D$		$K \times F = E6$
$K \times 2 = 1J$		$K \times 9 = 8C$		$K \times G = F5$
$K \times 3 = 2I$		$K \times A = 9B$		$K \times H = G4$
$K \times 4 = 3H$		$K \times B = AA$		$K \times I = H3$
$K \times 5 = 4G$		$K \times C = B9$		$K \times J = I2$
$K \times 6 = 5F$		$K \times D = C8$		$K \times K = J1$
$K \times 7 = 6E$		$K \times E = D7$		$K \times 10_{21} = K0$

Fonte: O autor, 2020

10 Na base 21, temos os símbolos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K iguais a respectivamente 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 que estão na base decimal e 21 na base decimal, equivale a 10_{21}.

APÊNDICE D – SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 4

$(51)_x = 5x + 1 = 36$
$5x = 35$
$x = 7$

Ou seja, a base de numeração procurada é a base 7.

APÊNDICE E – SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 5

Primeira parte:

$(7803)_5 = 7 \cdot 5^3 + 8 \cdot 5^2 + 3$

$(7803)_5 = (2+5) \cdot 5^3 + (3+5) \cdot 5^2 + 3$

$(7803)_5 = 2 \cdot 5^3 + 5^4 + 3 \cdot 5^2 + 5^3 + 3$

Ajustando os coeficientes, temos:

$(7803)_5 = 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 = (13303)_5.$

Segunda parte:

$N = 6 \cdot 4^4 - 3 \cdot 4^3 + 5 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 + 15 = (2+4) \cdot 4^4 - 3 \cdot 4^3 + (1+4) \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 + 15$

$(2+4) \cdot 4^4 - 3 \cdot 4^3 + (1+4) \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 + 15 = 4^5 + 2 \cdot 4^4 - 3 \cdot 4^3 + 4^2 + 4^3 - 9 \cdot 4 + 15$

Ajustando devidamente os coeficientes, encontramos:

$4^5 + 1 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 3 = (111323)_4$

APÊNDICE F – SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 6

1º modo: Método Usual

Primeiramente, vamos passar $(3305)_6$ para a base decimal, e depois vamos passar da base decimal para a base 9.

$(3305)_6 = 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6 + 5 = 761$

Vamos passar agora o número 761 que está na base decimal, para a base 9, usando o método de divisões sucessivas.

Tabela 44 - Solução da atividade 8 no método usual

761	9		
5	84	9	
	3	9	9
		0	1

Fonte: O autor, 2020.

Ou seja, $(3305)_6 = (1035)_9$.

2º modo: Algoritmo de Horner-Ruffini para mudança de base.

O parâmetro de mudança é $k = 6 - 9 = -3$.

Aplicando o algoritmo, temos:

Tabela 45 - Solução da atividade 8 usando o algoritmo de Horner-Ruffini.

-3	3	3	0	5
-3	3	-6	18	-49
-3	3	-15	63	
-3	3	-24		
-3	3			

Fonte: O autor, 2020.

Temos daí, $(3305)_6 = 3 \cdot 9^3 - 24 \cdot 9^2 + 63 \cdot 9 - 49$

Ajustando devidamente os coeficientes, temos:

$(3305)_6 = 9^3 + 3 \cdot 9 + 5 = (1035)_9$.

APÊNDICE G – SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 7

Solução da letra a:

$k = 6 - 8 = -2$ e aplicando o Algoritmo de Horner-Ruffini, temos:

Tabela 46 - Solução da atividade 7 letra a

-2	1	2	3	4	5
-2	1	0	3	-2	9
-2	1	-2	7	-16	
-2	1	-4	15		
-2	1	-6			
-2	1				

Fonte: O autor, 2020.

Ou seja, $(12345)_6 = 1 \cdot 8^4 - 6 \cdot 8^3 + 15 \cdot 8^2 - 16 \cdot 8 + 9$

Ajustando devidamente os coeficientes, temos:

$(12345)_6 = 3 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 8^1 + 1 = (3511)_8$.

Solução da letra b:

$k = 12 - 7 = 5$

Aplicando o Algoritmo de Horner-Ruffini, temos:

Tabela 47 - Solução da atividade 7 letra b

5	2	$B = 11$	4	5	6	7	A=10
5	2	21	109	550	2756	13787	68945
5	2	31	264	1870	12106	74317	
5	2	41	469	4215	33181		
5	2	51	724	7835			
5	2	61	1029				
5	2	71					
5	2						

Fonte: O autor, 2020.

$(2B4567A)_{12} = 68945 + 74317 \cdot 7 + 33181 \cdot 7^2 + 7835 \cdot 7^3 + 1029 \cdot 7^4 + 71 \cdot 7^5 + 2 \cdot 7^6$

Ajustando devidamente os coeficientes, encontramos:

$(2B4567A)_{12} = 1 \cdot 7^8 + 3 \cdot 7^7 + 4 \cdot 7^6 + 5 \cdot 7^5 + 4 \cdot 7^4 + 5 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 2$

E finalmente teremos $(2B4567A)_{12} = (134545552)_7$.

Solução da letra c:

$k = 9 - 2 = 7$

Aplicando o Algoritmo de Horner-Ruffini, temos:

Tabela 48 - Solução da atividade 7 letra c

7	2	3	1
7	2	17	120
7	2	31	
7	2		

Fonte: O autor, 2020.

$(231)_9 = 2 \cdot 2^2 + 31 \cdot 2^1 + 120$

Ajustando devidamente os coeficientes, temos:

$(231)_9 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2$

E finalmente obtemos $(231)_9 = (10111110)_2$.

APÊNDICE H – SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 8

$k = 7 - 8 = -1$

Aplicando o Algoritmo de Horner-Ruffini, temos:

Tabela 49 - Solução da atividade 8

-1	6	4	5
-1	6	-2	7
-1	6	-8	
-1	6		

Fonte: O autor, 2020.

Temos então que $(645)_7 = 6 \cdot 8^2 - 8 \cdot 8^1 + 7 = 5 \cdot 8^2 + 7 = (507)_8$

A seguir faremos a multiplicação proposta pelo problema que é $(507)_8 \times (17)_8$.

Primeiramente, vamos multiplicar $(507)_8 \times (7)_8$ usando a tabuada nas mãos para efetuar a multiplicação na base 8, logo em seguida multiplicaremos $(507)_8 \times (10)_8$, cujo resultado é $(5070)_8$, para depois em seguida adicionar os dois resultados.

Efetuando $(507)_8 \times (7)_8$ temos:

$7 \times 7 = 61$ (fica 1 unidade e vão 6 unidades para a ordem superior).

$7 \times 0 = 0$ (+ 6 unidades da ordem anterior), temos 0 + 6 = 6.

$7 \times 5 = 43$

Obtemos, então, que $(507)_8 \times (7)_8 = (4361)_8$

Assim, $(507)_8 \times (17)_8 = (507)_8 \times (7)_8 + (507)_8 \times (10)_8 = (4361)_8 + (5070)_8$

Usando o Princípio Fundamental do Sistema Posicional de Numeração, temos que: $(507)_8 \times (17)_8 = (11451)_8$.