COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática

Alexandre Ferreira Gomes

O JOGO LIGHTS OUT EM GRAFOS CAMINHOS, CICLOS E SÓLIDOS DE PLATÃO

Rio de Janeiro
2026

Alexandre Ferreira Gomes

O JOGO LIGHTS OUT EM GRAFOS CAMINHOS, CICLOS E SÓLIDOS DE PLATÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos
Coorientador: Prof. Dr. José Wilson Coura Pinto

Rio de Janeiro
2026

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

G633 Gomes, Alexandre Ferreira
O jogo lights out em grafos caminhos, ciclos e sólidos de Platão / Alexandre Ferreira Gomes. – Rio de Janeiro, 2026.

113 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Diego de Souza Nicodemos
Coorientador: José Wilson Coura Pinto

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Jogos educativos. 3. Aprendizagem. 4.Educação básica. 5. Ensino fundamental. I. Nicodemos, Diego de Souza. II. Pinto, José Wilson Coura. III. Colégio Pedro II. IV. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5026

Alexandre Ferreira Gomes

O JOGO LIGHTS OUT EM GRAFOS CAMINHOS, CICLOS E SÓLIDOS DE PLATÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

_____
Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos (Orientador)
Colégio Pedro II

_____
Prof. Dr. José Wilson Coura Pinto (Coorientador)
FAETERJ

_____
Prof. Dr. João Domingos
Colégio Pedro II

_____
Prof. Dr. Artur Antônio Melo de Lira Brandt
FAETERJ
Programa de Pós-Graduação no Ensino de Ciências e Saúde - Afya Unigranrio

Rio de Janeiro
2026

AGRADECIMENTOS

Quero registrar meu sincero agradecimento aos meus orientadores, Diego Nicodemos e José Wilson, por toda a paciência, dedicação e confiança ao longo desta caminhada. Nos momentos mais difíceis, quando tudo parecia estar perdido, o apoio, as orientações e, principalmente, o incentivo de vocês foram fundamentais para que eu não desistisse, continuasse seguindo em frente e chegasse até aqui.

Agradeço também aos meus amigos de turma, que compartilharam comigo os desafios, as dúvidas, as conquistas e tantos momentos importantes ao longo do mestrado. A amizade, o companheirismo, as conversas e até mesmo os momentos de descontração tornaram essa trajetória muito mais leve e especial.

A família é um dos grandes alicerces da vida, e não tenho dúvidas de que chegar até aqui também é resultado de tudo o que recebi daqueles que sempre estiveram ao meu lado. Aos meus pais, Elisete e Luiz, e aos meus irmãos, Fernanda, Leonardo e Luísa, deixo minha mais profunda gratidão. Vocês ajudaram a moldar meu caráter, estiveram presentes em minha caminhada e me ensinaram a acreditar que, mesmo diante das dificuldades, sempre é possível seguir em frente.

Por fim, quero agradecer de maneira muito especial à minha esposa, Nayla, minha maior incentivadora para que eu ingressasse no mestrado. Dividir a vida com você ao longo de tantos anos é um dos maiores privilégios que eu poderia ter. Obrigado por acreditar em mim, por estar ao meu lado nos momentos de alegria e, principalmente, naqueles em que eu mesmo tive dificuldades para acreditar que conseguiria. Esta conquista também é sua.

Chegar ao fim deste caminho é uma conquista que carrega um pouco de cada pessoa que esteve ao meu lado durante essa jornada. Nenhuma trajetória é construída completamente sozinha, e tenho a felicidade de saber que encontrei pessoas que tornaram a minha possível.

A todos vocês, meu mais sincero obrigado.

Chegar até aqui não significa que o caminho foi fácil, mas que valeu a pena continuar.

Alexandre Ferreira Gomes

RESUMO

GOMES, Alexandre Ferreira. ***O jogo Lights Out em grafos caminhos, ciclos e sólidos de Platão***. 2026. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, 2026.

Esta dissertação estuda o *Lights Out*, um jogo em que o acionamento de um vértice modifica o seu próprio estado e o estado dos vértices adjacentes a ele. Na versão investigada, cada vértice passa por três estados — 0, 1 e 2, representados respectivamente pelas cores vermelho, amarelo e verde — e o desafio é transformar uma configuração inicialmente toda vermelha em uma configuração toda verde, procurando utilizar o menor número possível de acionamentos. O trabalho analisa como as adjacências entre os vértices interferem na possibilidade de resolver o jogo e nas estratégias necessárias. Para isso, são estudados grafos caminho, grafos ciclo e os grafos dos cinco sólidos de Platão. Nos caminhos e nos ciclos, também são analisadas extensões da transformação considerada para jogos com k estados; entre os sólidos de Platão, a generalização para k estados é obtida para o tetraedro, o hexaedro e o icosaedro, enquanto o octaedro e o dodecaedro permanecem investigados teoricamente na variante de três estados. Como produto educacional e eixo de articulação entre a investigação matemática e sua exploração na Educação Básica, foi desenvolvido um jogo digital interativo que reúne os grafos estudados. Para os grafos caminho e ciclo, o ambiente permite escolher o número de vértices e a quantidade de estados sem limite máximo predefinido, respeitadas as condições mínimas de cada família. Para os sólidos de Platão, o produto disponibiliza as versões com dois e três estados. Neste produto, o estudante pode experimentar estratégias, acionar vértices, acompanhar as mudanças de cores, contar movimentos, desfazer jogadas, reiniciar partidas e utilizar dicas. O recurso foi concebido para possibilitar atividades de resolução de problemas, reconhecimento de padrões, raciocínio lógico, elaboração de estratégias e investigação matemática em diferentes etapas da Educação Básica. Dessa forma, o produto educacional não aparece apenas como complemento da pesquisa: ele representa, em um ambiente interativo, as estruturas e os problemas investigados ao longo da dissertação.

Palavras-chave: Lights Out; teoria de grafos; aritmética modular; produto educacional; ensino de matemática.

ABSTRACT

GOMES, Alexandre Ferreira. ***The Lights Out Game on Path Graphs, Cycle Graphs and Platonic Solids***. 2026. Master's Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, 2026.

This dissertation studies *Lights Out*, a game in which activating a vertex changes its own state as well as the states of the vertices adjacent to it. In the version investigated, each vertex cycles through three states — 0, 1, and 2, represented, respectively, by the colors red, yellow, and green — and the challenge is to transform an initially all-red configuration into an all-green configuration while using the smallest possible number of activations. The study analyzes how adjacency relations among vertices affect the solvability of the game and the strategies required to solve it. To this end, path graphs, cycle graphs, and the graphs of the five Platonic solids are investigated. For paths and cycles, extensions of the transformation under consideration to games with k states are also analyzed; among the Platonic solids, the tetrahedron, hexahedron, and icosahedron are generalized to k states, while the octahedron and dodecahedron remain restricted to the three-state mathematical analysis. As an educational product and as a means of connecting the mathematical investigation with its exploration in Basic Education, an interactive digital game was developed incorporating the graphs studied in this dissertation. For path and cycle graphs, the environment allows users to choose both the number of vertices and the number of states without a predefined maximum limit, subject to the minimum conditions of each graph family. For the Platonic solids, the product provides two-state and three-state versions. Within the environment, students can experiment with strategies, activate vertices, observe color changes, count moves, undo actions, restart games, and use hints. The resource was designed to support activities involving problem solving, pattern recognition, logical reasoning, strategy development, and mathematical investigation at different stages of Basic Education. Thus, the educational product is not merely a complement to the research; it represents, within an interactive environment, the structures and problems investigated throughout the dissertation.

Keywords: Lights Out; graph theory; modular arithmetic; educational product; mathematics education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do Problema das Sete Pontes de Königsberg estudado por Euler……..20
Figura 2 – Exemplar eletrônico do jogo Lights Out……..21
Figura 3 – Grafo simples contendo cinco vértices e seis arestas……..31
Figura 4 – Equivalência entre o tabuleiro 3×3 do jogo Lights Out e o grafo associado (|V|=9, |E|=12)..... 31
Figura 5 – Representação do grau dos vértices em um grafo simples.……... 32
Figura 6 – Grafo caminho P_7…….. 33
Figura 7 – Grafo ciclo C_8…… 34
Figura 8 – Exemplo de configuração solucionável no caminho P_3…….. 44
Figura 9 – Exemplo de configuração sem solução no ciclo C_4…….. 44
Figura 10 – Representação do grafo caminho P_9……... 47
Figura 11 – Resolução do caminho P_3 com dois acionamentos……....49
Figura 12 – Resolução do caminho P_5 com quatro acionamentos.…….. 50
Figura 13 – Resolução do caminho P_7 com seis acionamentos……..……..51
Figura 14 – Resolução do ciclo C_3 com dois acionamentos……..……62
Figura 15 – Resolução do ciclo C_6 com quatro acionamentos…..……62
Figura 16 – Resolução do ciclo C_9 com seis acionamentos……..……63
Figura 17 – Grafo do tetraedro……..……..73
Figura 18 – Sequência de acionamentos do tetraedro……74
Figura 19 – Grafo do octaedro……... 75
Figura 20 – Sequência de acionamentos do octaedro……..……...78
Figura 21 – Grafo do hexaedro……79
Figura 22 – Sequência de acionamentos do hexaedro……...81
Figura 23 – Grafo do icosaedro……..……82
Figura 24 – Sequência de acionamentos do icosaedro…….. 84
Figura 25 – Grafo do dodecaedro……..……85
Figura 26 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 1…… 90
Figura 27 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 2 ……..91
Figura 28 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 3 ……..92
Figura 29 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 4 ……93
Figura 30 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 5 ……..94
Figura 31 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 6 ……95
Figura 32 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 7 ……..96
Figura 33 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 8 ……97
Figura 34 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 9 ……..98
Figura 35 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 10…….. 99
Figura 36 – Visão geral da interface da versão atual do produto educacional …….107
Figura 37 – Comandos de navegação e área de solução ……109

Figura 38 – Exemplo de exploração de um grafo caminho ……..110
Figura 39 – Exemplo de exploração de um grafo ciclo ……110

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Sólidos de Platão e o tipo de regularidade ……35
Tabela 2 – Número mínimo de acionamentos em grafos caminho……48
Tabela 3 – Número mínimo de acionamentos em ciclos com quantidade de vértices múltipla de três……...60
Tabela 4 – Características dos grafos dos sólidos de Platão……72
Tabela 5 – Síntese dos números mínimos nos grafos dos sólidos de Platão …….99

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Crescimento do número mínimo de acionamentos em grafos caminho..48

LISTA DE SÍMBOLOS

A – matriz de adjacência do grafo
a – vetor de acionamentos
a_i – número de acionamentos do vértice v_i
C_n – grafo ciclo com n vértices
d – grau comum dos vértices de um grafo d-regular
$d(v)$ – grau do vértice v
$E(G)$ – conjunto de arestas do grafo G
f – vetor da configuração final
$G = (V, E)$ – grafo com conjunto de vértices V e conjunto de arestas E
I_n – matriz identidade de ordem n
i – vetor da configuração inicial
k – número de estados do jogo
m – inteiro positivo usado na escrita $n = 3m$
$m_k(G)$ – número mínimo de acionamentos no grafo G com k estados
n – número de vértices do grafo
N – matriz do jogo, definida por $N = A + I_n$
$N(v)$ – vizinhança aberta do vértice v
$N[v]$ – vizinhança fechada do vértice v
P_n – grafo caminho com n vértices
u – vetor-coluna cujas coordenadas são todas iguais a 1
$V(G)$ – conjunto de vértices do grafo G
$w(a)$ – peso do vetor de acionamentos a
$\mathbb{Z}_k$ – anel das classes de restos módulo k
$\mathbb{Z}_k^n$ – conjunto dos vetores com n coordenadas pertencentes a $\mathbb{Z}_k$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO……16
2 REFERENCIAIS TEÓRICOS……..20
2.1 O jogo Lights Out: origem, evolução e contexto matemático ……24
2.2 A Matemática por trás do Lights Out ……26
2.3 Teoria de Grafos ……27
2.4 Aritmética Modular ……35
2.5 Álgebra Linear……36
3 MODELAGEM MATEMÁTICA DO LIGHTS OUT……..…….39
3.1 Definição do jogo sobre um grafo ……..41
3.2 Vetores de estado ……41
3.3 Vetor de acionamentos……42
3.4 Sistema linear associado ao jogo……...42
3.5 Existência de solução, unicidade e número mínimo de acionamentos……43
4 O JOGO LIGHTS OUT EM GRAFOS CAMINHO……..…47
4.1 Observações obtidas pela resolução manual ……..48
4.2 Recorrência e periodicidade……51
4.3 Número mínimo de acionamentos para três estados ……53
4.4 Generalização para k estados ……54
4.5 Sistema associado ao caminho……..56
5 O JOGO LIGHTS OUT EM GRAFOS CICLO……..…59
5.1 Configuração do problema para três estados ……..59
5.2 Resultados obtidos manualmente ……..60
5.3 Classificação dos ciclos no jogo de três estados……60
5.4 Exemplos de soluções ……61
5.5 Ciclos com número de vértices não múltiplos de três……63
5.6 O ciclo C_4 com k estados ……64
5.7 Generalização para k estados nos ciclos C_{3m} ……..66
5.8 Classificação geral para k estados nos ciclos C_n……67
6 O JOGO LIGHTS OUT NOS GRAFOS DOS SÓLIDOS DE PLATÃO……72
6.1 Características dos grafos……...72
6.2 O tetraedro ……73
6.3 O octaedro……..75
6.4 O hexaedro……79
6.5 O icosaedro……82
6.6 O dodecaedro ……85
6.7 Análise comparativa dos resultados ……..99
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS……...102
REFERÊNCIAS……...105
APÊNDICE A – MANUAL DE USO DO PRODUTO EDUCACIONAL LIGHTS OUT EM GRAFOS……107

A.1 Apresentação do produto educacional……107
A.2 Como navegar pelo jogo……...108
A.3 Exploração por família de grafos ……109
A.3.1 Caminhos……109
A.3.2 Ciclos……...110
A.3.3 Sólidos de Platão……...111
A.4 Possibilidades de articulação com a BNCC ……...111
A.5 Sugestão de sequência didática ……..112
A.6 Orientações ao professor ……..113
A.7 Acesso e código-fonte……113

1 INTRODUÇÃO

O jogo *Lights Out*, inicialmente conhecido como um jogo eletrônico, apresenta uma estrutura matemática que permite relacionar problemas recreativos a conceitos de Teoria de Grafos, Álgebra Linear e Aritmética Modular. Em sua forma clássica, o jogo é composto por elementos que alternam entre dois estados (apagados/desligados e acesos/ligados) quando um botão é acionado. Ao representar esses elementos por vértices e as relações de influência ou adjacências por arestas, a dinâmica deixa de depender da disposição visual do tabuleiro e passa a ser descrita pela estrutura combinatória de um grafo.

Esta dissertação investiga uma variante na qual cada vértice assume três estados, representados pelas cores vermelho, amarelo e verde. O acionamento de um vértice altera o seu próprio estado e os estados dos vértices adjacentes, sempre de forma cíclica (vermelho → amarelo → verde → vermelho …). Parte-se da configuração inicial em que todos os vértices estão vermelhos e busca-se a configuração em que todos os vértices tenham a cor verde, com especial atenção à existência de solução e à quantidade mínima de acionamentos.

O objetivo geral deste trabalho é investigar o jogo Lights Out de três estados nos grafos selecionados, determinando, nos casos estudados, a existência de soluções e o número mínimo de acionamentos. Para alcançar esse objetivo, estabelecem-se os seguintes objetivos específicos:

• analisar o jogo em grafos caminho, identificar padrões de acionamento e examinar a extensão da transformação considerada para k estados;

• investigar as condições de solução e o número mínimo de acionamentos em grafos ciclo, incluindo a correspondente extensão da transformação uniforme para k estados;

• determinar e justificar estratégias mínimas para os grafos dos cinco sólidos de Platão na variante de três estados e generalizar para k estados os casos do tetraedro, do hexaedro e do icosaedro;

• desenvolver um jogo digital interativo, concebido como produto educacional e como eixo de articulação entre a investigação matemática e sua exploração na Educação Básica.

O produto educacional desenvolvido reúne, em um único ambiente, os grafos caminho, os grafos ciclo e os grafos dos cinco sólidos de Platão. O estudante pode

acionar diretamente os vértices, acompanhar as mudanças de estado, contar movimentos, desfazer jogadas, reiniciar partidas, solicitar dicas e consultar uma solução possível. Nos caminhos P_n e nos ciclos C_n, o ambiente permite escolher o tamanho do grafo sem limite máximo predefinido, respeitando-se $n \geq 2$ para P_n e $n \geq 3$ para C_n, e também selecionar qualquer quantidade inteira de estados $k \geq 2$, sem limite máximo predefinido. Para os sólidos de Platão, o produto disponibiliza as versões com dois e três estados. Essa flexibilidade computacional não amplia, por si só, o alcance dos resultados teóricos da dissertação: as generalizações matemáticas para k estados apresentadas neste trabalho abrangem os caminhos, os ciclos, o tetraedro, o hexaedro e o icosaedro; o octaedro e o dodecaedro são investigados matematicamente apenas em três estados.

A apresentação formal do produto educacional, com objetivos, instruções de uso, orientações ao professor e possibilidades de articulação pedagógica, encontra-se no Apêndice A.

A presença do jogo digital ao longo do trabalho busca aproximar a experimentação e a formalização. Antes de propor uma demonstração, o estudante pode testar estratégias, observar o efeito de diferentes acionamentos, comparar tentativas e formular conjecturas. Questões como qual vértice acionar, que consequências uma escolha produz, se duas estratégias conduzem ao mesmo resultado e se uma solução encontrada utiliza o menor número possível de movimentos transformam a jogabilidade em uma oportunidade de investigação. Nesse sentido, o produto não funciona apenas como ilustração dos resultados: ele oferece um ambiente no qual parte dos problemas estudados na dissertação pode ser experimentada diretamente.

Essa perspectiva dialoga com Salgueiro Júnior (2025, p. 16–18), que propõe a utilização do *Lights Out* na Educação Básica com diferentes níveis de aprofundamento e destaca possibilidades de exploração visual, combinatória e geométrica. A presente dissertação retoma essa perspectiva no contexto da variante de três estados e do produto educacional desenvolvido. A aproximação com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) não pretende apresentar o *Lights Out* ou a Teoria de Grafos como conteúdos obrigatórios, mas indicar habilidades que podem ser mobilizadas por atividades construídas a partir do jogo.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o produto pode ser explorado predominantemente de forma visual e experimental, sem exigir a apresentação formal do conceito de grafo. A observação das mudanças produzidas pelos acionamentos, o registro de tentativas, a comparação de possibilidades e o contato com representações planas e espaciais podem dialogar com as habilidades EF04MA08, EF04MA17 e EF05MA09, presentes na BNCC e que estão relacionadas a problemas simples de contagem, estratégias pessoais de registro e relações entre representações de sólidos (Brasil, 2018, p. 291, 293, 295).

Nos anos finais do Ensino Fundamental, a exploração pode avançar para a identificação de vértices, arestas, vizinhanças e padrões de acionamento, bem como para a comparação entre os sólidos e suas representações por grafos. Nesse contexto, as habilidades EF06MA17 e EF07MA04 oferecem possibilidades de articulação com a quantificação e a relação entre vértices, faces e arestas e com registros envolvendo números inteiros (Brasil, 2018, p. 303, 307). A aritmética modular não precisa ser formalizada nessa etapa: os estados 0, 1 e 2 podem ser utilizados inicialmente apenas como uma codificação das três cores, permitindo que regularidades sejam percebidas por meio da experiência com o jogo.

No Ensino Médio, o mesmo ambiente pode sustentar discussões mais aprofundadas sobre contagem de possibilidades, comparação de estratégias, existência de solução, busca de soluções mínimas e formulação de conjecturas. A habilidade EM13MAT310, relacionada à resolução e à elaboração de problemas de contagem mediante diferentes estratégias, constitui uma possibilidade de aproximação curricular (Brasil, 2018, p. 537). Conforme o nível de aprofundamento proposto pelo professor, a experimentação pode ainda servir como ponto de partida para justificativas mais formais sobre por que determinadas configurações são solucionáveis e por que certas estratégias são mínimas.

As conjecturas obtidas experimentalmente neste trabalho são analisadas por recorrências, contagens de incrementos, propriedades de vizinhança e sistemas de congruências. O percurso adotado procura manter a relação entre a observação do jogo, a formulação de padrões e a demonstração matemática dos resultados.

O texto está organizado em sete capítulos. O Capítulo 2 reúne o referencial teórico e os conceitos de Teoria de Grafos necessários às discussões posteriores. O Capítulo 3 apresenta a modelagem algébrica do *Lights Out* e distingue questões de existência, unicidade e minimalidade. Os Capítulos 4 e 5 estudam, respectivamente,

os grafos caminho e os grafos ciclo, incluindo, nessas duas famílias, as extensões para k estados da transformação considerada. O Capítulo 6 analisa a variante de três estados nos cinco grafos dos sólidos de Platão e, nos casos do tetraedro, do hexaedro e do icosaedro, estende os resultados para k estados; o octaedro e o dodecaedro permanecem restritos ao caso de três estados. Os grafos estudados nesses capítulos integram o jogo digital desenvolvido como produto educacional, permitindo relacionar os resultados teóricos à experimentação no ambiente interativo. Por fim, o Capítulo 7 sintetiza os resultados, registra as limitações do estudo e discute possibilidades de utilização do produto na Educação Básica.

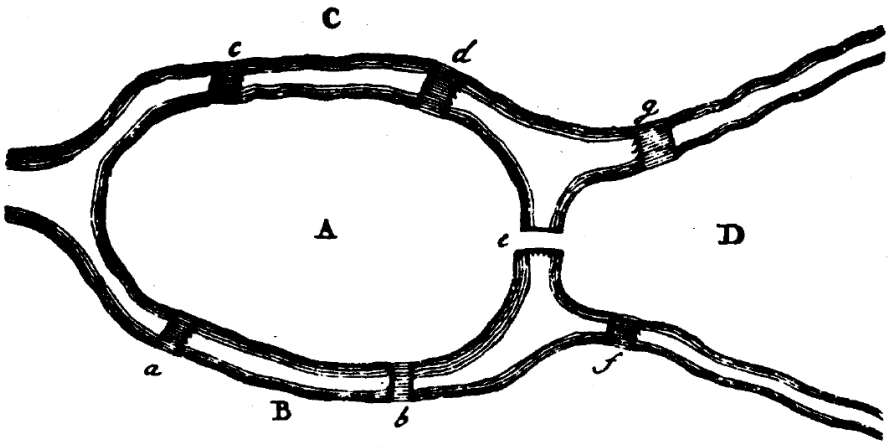
Acredita-se que a relevância do trabalho reside, assim, na articulação entre duas dimensões complementares. De um lado, o jogo dá origem a problemas matemáticos precisos sobre solubilidade, estratégias e minimalidade; de outro, os resultados e as estruturas investigadas retornam a um ambiente digital acessível à experimentação. O produto educacional ocupa, portanto, uma posição central na dissertação: ele representa de forma interativa os grafos estudados e permite que observação, tomada de decisão, reconhecimento de padrões, formulação de conjecturas e argumentação matemática sejam explorados antes ou em conjunto com a formalização teórica.

2 REFERENCIAIS TEÓRICOS

A Matemática é uma ciência construída a partir da observação de padrões, da formulação de conjecturas e da demonstração rigorosa de resultados. Ao longo de sua história, problemas aparentemente simples deram origem a importantes teorias, modificando profundamente a maneira como diferentes fenômenos passaram a ser compreendidos. Em diversos momentos, situações inicialmente apresentadas como desafios recreativos revelaram estruturas matemáticas suficientemente ricas para impulsionar o desenvolvimento de novos ramos da ciência.

O problema das pontes de Königsberg, ilustrado na Figura 1, será contextualizado historicamente na Seção 2.3, onde se discute sua relação com a origem da Teoria de Grafos.

Figura 1 – Representação do Problema das Sete Pontes de Königsberg estudado por Euler



Fonte: Euler (1741), adaptado de Wikimedia Commons.

A mesma passagem do desenho para a estrutura de conexões ocorre no *Lights Out*. O tabuleiro pode ser substituído por um grafo no qual cada botão é representado por um vértice e cada relação de influência é representada por uma aresta. Assim, a forma visual do desenho deixa de ser o elemento principal, e as adjacências passam a determinar a dinâmica do jogo.

A ideia de representar sistemas por meio de vértices e arestas mostrou-se extremamente poderosa. Com o passar dos anos, problemas provenientes de áreas como Engenharia, Computação, Física, Química, Biologia, Economia e Ciências

Sociais passaram a ser modelados utilizando grafos. Redes de computadores, circuitos elétricos, sistemas de transporte, redes sociais, estruturas moleculares e algoritmos de busca constituem apenas alguns exemplos de aplicações mais atuais da Teoria de Grafos (Bondy; Murty, 1976).

A Matemática Recreativa também fornece exemplos de problemas que, embora inicialmente apresentados como desafios ou passatempos, podem revelar estruturas matemáticas relevantes. Nesta dissertação, o jogo *Lights Out* é tratado justamente nessa perspectiva: parte-se de um jogo de regras simples para investigar questões de Teoria de Grafos.

Esse contexto histórico evidencia que a fronteira entre Matemática Recreativa e Matemática de Pesquisa é muito mais tênue do que normalmente se imagina. Problemas inicialmente concebidos como simples passatempos frequentemente tornam-se objetos de investigação científica, revelando propriedades estruturais de grande interesse matemático. O jogo *Lights Out* constitui um exemplo desse fenômeno.

O jogo *Lights Out*, ou simplesmente o *Lights Out,* foi comercializado pela Tiger Electronics em 1995 como um brinquedo eletrônico com vinte e cinco botões luminosos dispostos em uma malha 5×5, como ilustrado pela Figura 2. Pressionar um botão altera o seu próprio estado e o estado dos vizinhos ortogonais existentes. Essas características da edição clássica são descritas por Berman, Borer e Hungerbühler (2021, p. 238), e Anderson e Feil (1998, p. 300).

Figura 2 – Exemplar eletrônico do jogo *Lights Out*



Fonte: Suruga-Ya (s.d.)

No artigo Anderson e Feil (1998, p. 300–301) demonstram que a resolução do *Lights Out* tradicional pode ser formulada como um problema de Álgebra Linear sobre $\mathbb{Z}_2$. Os autores utilizam vetores binários para representar as configurações do tabuleiro e as estratégias de jogo, estabelecendo a condição de vitória por meio de um sistema matricial.

Já Berman, Borer e Hungerbühler (2021, p. 238–239) ampliam essa perspectiva para grafos simples arbitrários: cada vértice desempenha simultaneamente o papel de luz e de interruptor, e a dinâmica é codificada por uma matriz construída a partir da adjacência do grafo. No mesmo artigo, os autores apresentam uma versão com mais de dois estados, formulada em $\mathbb{Z}_k$ (Berman; Borer; Hungerbühler, 2021, p. 246).

Na revisão bibliográfica realizada para esta dissertação, observou-se que a versão binária aparece com maior frequência, enquanto as variantes com três ou mais estados ocupam espaço mais restrito. A Seção 4.4 de Berman, Borer e Hungerbühler (2021, p. 246–247), constitui uma referência direta para a formulação do jogo com estados em $\mathbb{Z}_k$. Entretanto, essa não é a única referência anterior sobre versões modulares do problema.

Gravier, Mhalla e Tannier (2003, p. 291–303) estudam um jogo de dominação modular em grafos, que constitui um antecedente conceitual para formulações do tipo *Lights Out* com aritmética modular. Posteriormente, Giffen e Parker (2013, p. 273–288) generalizam explicitamente o *Lights Out* para $\mathbb{Z}_k$ e analisam caminhos, ciclos e grafos bipartidos completos. Em particular, os Teoremas 4.3 e 4.4 e o Corolário 4.5 deste artigo (Giffen; Parker, 2013, p. 279–282) caracterizam configurações solucionáveis e determinam quando os ciclos são solucionáveis para qualquer configuração inicial.

Essa linha de investigação possui antecedentes anteriores à formulação moderna do *Lights Out*. Sutner (1990), ao estudar o σ-game e autômatos celulares em grafos, desenvolve uma das bases algébricas que posteriormente foram relacionadas ao problema. Em uma direção multiestado mais próxima da adotada nesta dissertação, Zhang e Wang (2019) formulam o Strong-All-Colors Problem sob a regra σ+, em aritmética modular, e obtêm soluções para diferentes classes de grafos, incluindo caminhos e ciclos. Esses antecedentes situam a presente pesquisa em uma linha já consolidada, enquanto o recorte aqui adotado se concentra na

transformação uniforme de 0 para k - 1 e, especialmente, na determinação explícita do número mínimo de acionamentos.

Dessa forma, esta dissertação não apresenta como inédita a classificação geral da solubilidade dos ciclos sobre $\mathbb{Z}_k$. O foco específico adotado no Capítulo 5 é a passagem da configuração uniforme 0, ou seja, com todos os vértices no estado 0, para a configuração uniforme $k - 1$. Para três estados, obtém-se uma classificação completa dessa transformação em C_n. Para k estados, os casos C_4 e C_{3m}, são inicialmente tratados de forma concreta e, em seguida, a análise é reunida em uma classificação da transformação uniforme para C_n, com determinação do número mínimo de acionamentos nos casos solucionáveis.

Nos trabalhos consultados, foram localizadas análises da solubilidade, da recorrência dos acionamentos e da quantidade de configurações solucionáveis em caminhos e ciclos sobre $\mathbb{Z}_k$. Entretanto, não foram localizadas fórmulas explícitas para o número mínimo de acionamentos necessário para transformar a configuração uniforme 0 na configuração uniforme $k - 1$ em P_n e em C_n, nos mesmos termos adotados nesta dissertação. Por esse motivo, os resultados de minimalidade apresentados nos Capítulos 4 e 5 são tratados como desenvolvimentos específicos deste trabalho, sem atribuir ineditismo absoluto além da literatura consultada.

No PROFMAT do Colégio Pedro II, em sua dissertação de mestrado, Salgueiro Júnior (2025) investigou o *Lights Out* clássico nos poliedros de Platão, representando as faces dos sólidos pelos vértices de seus grafos duais e determinando soluções ótimas para os cinco casos. Parte dessa pesquisa também foi divulgada no artigo de Salgueiro Júnior et al. (2025). O autor indicou, como possibilidade de continuidade, o estudo de variantes com três ou mais estados.

Ao final de sua dissertação, Salgueiro Júnior (2025, p. 70–71) indicou como perspectiva futura a investigação do *Lights Out* com três ou mais estados. A presente dissertação desenvolve justamente essa direção, estabelecendo uma continuidade de pesquisa no PROFMAT do Colégio Pedro II. Os dois trabalhos foram orientados pelo Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos, mas adotam problemas distintos: o estudo anterior considera a versão binária e as faces dos poliedros, enquanto esta pesquisa analisa a versão de três estados nos grafos associados aos vértices dos sólidos de Platão.

Essas estruturas foram escolhidas por apresentarem uma organização bastante controlada de suas vizinhanças. Nos caminhos, embora o grafo não seja regular, existem apenas dois tipos de vértices: os das extremidades, de grau 1, e os internos, de grau 2. Nos ciclos, todos os vértices possuem grau 2, de modo que esses grafos são 2-regulares, enquanto os grafos associados aos sólidos de Platão também são regulares, com grau determinado pela estrutura de cada sólido. Essa previsibilidade favorece a identificação de padrões no *Lights Out* e, ao mesmo tempo, facilita sua exploração em sala de aula, pois permite aos estudantes compreender visualmente as relações de vizinhança e acompanhar os efeitos produzidos por cada acionamento.

2.1 O jogo *Lights Out*: origem, evolução e contexto matemático

As características apresentadas pelo jogo *Lights Out* despertaram o interesse da comunidade científica. Enquanto muitos jogos recreativos dependem predominantemente de estratégia ou sorte, o *Lights Out* apresenta uma estrutura determinística. Cada acionamento produz sempre a mesma transformação sobre o tabuleiro, permitindo descrever matematicamente toda a evolução do sistema. Essa propriedade torna possível substituir a experimentação baseada em tentativa e erro por métodos rigorosos de análise.

Nos primeiros anos após seu lançamento, diversos pesquisadores passaram a investigar o jogo sob diferentes perspectivas. Inicialmente, o interesse concentrou-se em responder questões fundamentais, tais como:

- toda configuração inicial possui solução?
- quando essa solução é única?
- como determinar uma sequência de acionamentos que resolva o problema?
- é possível encontrar automaticamente uma solução utilizando algoritmos?

Estas perguntas conduziram naturalmente à construção de uma modelagem matemática para o jogo. Um dos trabalhos pioneiros nessa direção é o artigo de Anderson e Feil (1998). Os autores representam cada configuração por um vetor binário, cada estratégia por outro vetor e obtêm a equação matricial que relaciona estratégia e configuração.

A principal consequência dessa abordagem consiste em transformar um problema aparentemente recreativo em um problema clássico de Álgebra Linear. Em

vez de procurar por tentativa e erro uma sequência de movimentos, basta determinar se determinado sistema linear admite solução e, em caso afirmativo, calcular um vetor solução.

A caracterização de configurações solucionáveis por meio do espaço coluna e a obtenção de estratégias por eliminação de Gauss–Jordan aparecem de forma explícita no artigo de Anderson e Feil (1998, p. 301–302). Portanto, quando esta dissertação utilizar sistemas lineares para descrever o jogo clássico, naturalmente essa procedência bibliográfica deve ser reconhecida.

A literatura posterior ampliou a modelagem para diferentes tabuleiros, regras de vizinhança e variantes do jogo. Berman, Borer e Hungerbühler (2021, p. 238) apresentam uma síntese dessa trajetória e, nas páginas seguintes, desenvolvem uma formulação do *Lights Out* em grafos simples.

A formulação do *Lights Out* em grafos simples adotada nesta dissertação segue Berman, Borer e Hungerbühler (2021, p. 238–239): a dinâmica é determinada pelas relações de adjacência e pela matriz que registra o efeito de cada acionamento. Essa modelagem será formalizada no Capítulo 3.

Entretanto, apesar do crescimento observado na literatura ao longo das últimas décadas, verifica-se que a maior parte das pesquisas continua concentrada na versão binária do jogo.

Na versão clássica, cada luz é codificada por um elemento de $\mathbb{Z}_2$, e todos os cálculos são realizados módulo 2, conforme Anderson e Feil (1998, p. 300). Na variante com k estados, Berman, Borer e Hungerbühler (2021, p. 246) substituem $\mathbb{Z}_2$ por $\mathbb{Z}_k$ e fazem cada acionamento incrementar, módulo k, o vértice pressionado e os seus vizinhos.

Questões relacionadas à existência de solução, à minimização do número de acionamentos e à caracterização das configurações solucionáveis passam a exigir novas ferramentas matemáticas, tornando o problema significativamente mais complexo. É justamente nesse contexto que se insere a presente pesquisa.

Ao considerar uma versão do *Lights Out* em que cada vértice pode assumir três estados — representados pelas cores vermelho, amarelo e verde —, esta dissertação procura compreender como a alteração da estrutura algébrica influencia a dinâmica do jogo.

A abordagem desta dissertação utiliza essa modelagem conhecida como ponto de partida, mas desloca o foco para resultados específicos sobre caminhos, ciclos e grafos dos sólidos de Platão.

2.2 A Matemática por trás do *Lights Out*

Ao longo da história da Matemática, diferentes problemas contribuíram para aproximar áreas que, à primeira vista, pareciam completamente independentes. Frequentemente, um mesmo problema pode ser analisado sob diferentes perspectivas, permitindo que conceitos provenientes de distintos ramos da Matemática sejam utilizados de forma complementar. O estudo do jogo *Lights Out* constitui um exemplo bastante representativo dessa situação.

Embora tenha sido concebido originalmente como um brinquedo eletrônico, o *Lights Out* apresenta uma estrutura matemática rica, cuja compreensão exige a integração de diferentes ferramentas teóricas. À primeira vista, o jogador apenas pressiona botões procurando apagar todas as luzes do tabuleiro. Entretanto, sob uma perspectiva matemática, cada acionamento corresponde a uma transformação sobre o estado do sistema, podendo ser descrito por meio de objetos algébricos e combinatórios.

Essa mudança de perspectiva constitui um dos aspectos mais interessantes do problema. Em vez de analisar apenas uma sequência de movimentos, busca-se compreender quais estruturas matemáticas governam o comportamento do jogo. Dessa forma, questões inicialmente formuladas em linguagem recreativa passam a ser tratadas por meio de definições, proposições, teoremas e demonstrações. Nesse contexto, três áreas da Matemática desempenham papel fundamental: a Teoria de Grafos, a Álgebra Linear e a Aritmética Modular.

A Teoria de Grafos fornece a linguagem utilizada para representar o tabuleiro do jogo. Em vez de considerar botões distribuídos sobre uma superfície plana, interpreta-se cada botão como um vértice e cada relação de influência entre dois botões como uma aresta. Essa interpretação permite generalizar o jogo para qualquer grafo finito, independentemente de sua forma geométrica.

A Álgebra Linear, por sua vez, permite descrever matematicamente a evolução do jogo. Cada configuração do tabuleiro pode ser representada por um vetor, enquanto cada acionamento corresponde a uma transformação linear aplicada

sobre esse vetor. Consequentemente, resolver o *Lights Out* equivale, em muitos casos, a resolver um sistema linear associado ao grafo considerado.

Nesta dissertação, o caso principal é $k = 3$, com os estados 0, 1 e 2 representados pelas cores vermelho, amarelo e verde.

Essas três áreas não aparecem de forma isolada. Pelo contrário, elas interagem continuamente durante toda a pesquisa. Observa-se que o jogo *Lights Out* constitui o problema central da pesquisa, enquanto a Teoria de Grafos, a Álgebra Linear e a Aritmética Modular representam as ferramentas matemáticas utilizadas para sua investigação. Quando se deseja compreender quais vértices são afetados por determinado acionamento, recorre-se à Teoria de Grafos. Por outro lado, quando se procura descrever matematicamente a evolução do estado do jogo, utiliza-se a Álgebra Linear. Finalmente, quando se pretende representar as mudanças de estado produzidas por cada acionamento, emprega-se a Aritmética Modular.

Assim, compreender o *Lights Out* significa compreender como essas três áreas se relacionam. Ao longo deste capítulo, cada uma delas será apresentada separadamente. Entretanto, sempre que possível, serão estabelecidas conexões com o problema investigado nesta dissertação, procurando evidenciar como esses conceitos serão utilizados nos capítulos seguintes.

Antes de iniciar esse estudo, contudo, é conveniente discutir brevemente a origem e o desenvolvimento da Teoria de Grafos, uma vez que essa área constitui a linguagem utilizada para representar matematicamente o tabuleiro do jogo.

2.3 Teoria de Grafos

A Teoria de Grafos é atualmente um dos ramos mais importantes da Matemática Discreta, desempenhando papel fundamental em áreas como Ciência da Computação, Engenharia, Pesquisa Operacional, Física, Biologia, Química e Ciências Sociais. Entretanto, sua origem remonta a um problema aparentemente simples, cuja solução modificou profundamente a forma como diversos fenômenos passaram a ser estudados.

A origem histórica da Teoria de Grafos é tradicionalmente associada ao estudo das pontes de Königsberg. O artigo *Solutio problematis ad geometriam situs*

pertinentis, de Leonhard Euler, foi escrito em 1735 e publicado em 1741 (Euler, 1741, p. 128–140).

A cidade de Königsberg, então pertencente ao Reino da Prússia e atualmente denominada Kaliningrado, localizava-se às margens do rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas entre si e às margens por sete pontes. A população local costumava discutir se seria possível realizar um percurso atravessando cada uma dessas pontes exatamente uma única vez.

À primeira vista, o problema parecia pertencer à Geometria, uma vez que envolvia ruas, rios e pontes. Contudo, Euler percebeu que as distâncias percorridas, o formato das margens e a posição das pontes eram irrelevantes para sua resolução. O único aspecto realmente importante consistia em determinar quais regiões estavam conectadas entre si.

Essa mudança de perspectiva representou uma ruptura com a tradição geométrica da época. Em vez de estudar medidas, ângulos ou comprimentos, Euler concentrou sua análise apenas nas relações de conexão existentes entre os elementos do problema. Cada região da cidade foi representada por um ponto e cada ponte por uma linha ligando dois desses pontos, conforme o artigo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (Euler, 1741, p. 128–140). Nascia, assim, uma nova forma de representação matemática baseada exclusivamente nas relações de adjacência.

Embora Euler não utilizasse a terminologia moderna de grafos, sua análise concentra-se nas relações de conexão. Essa característica antecipa a perspectiva adotada na Teoria de Grafos, em que a estrutura é descrita pelos vértices e pelas relações de adjacência entre eles. A formulação utilizada nesta dissertação segue Bondy e Murty (1976).

A Figura 1 apresenta uma representação clássica do Problema das Sete Pontes de Königsberg, cuja solução proposta por Euler, no artigo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, baseou-se em um raciocínio extremamente elegante. Ele demonstrou que cada vez que um viajante entra em uma região por uma ponte, necessariamente deve sair por outra, exceto, eventualmente, no ponto inicial e no ponto final do percurso. Dessa observação concluiu que, para existir um percurso atravessando cada ponte exatamente uma vez, o número de regiões ligadas por quantidade ímpar de pontes deveria ser, no máximo, duas (Euler, 1741, p. 128–140).

Entretanto, na configuração existente em Königsberg, as quatro regiões apresentavam grau ímpar. Consequentemente, tal percurso era impossível. Embora simples, essa demonstração inaugurou uma nova maneira de pensar problemas matemáticos. Pela primeira vez, um problema foi resolvido utilizando apenas a estrutura das conexões entre os objetos, sem recorrer às ferramentas tradicionais da Geometria Euclidiana.

O artigo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, de Euler, tornou-se uma referência histórica da área porque substituiu informações métricas por relações de conexão e formulou condições relacionadas ao número de pontes incidentes em cada região (Euler, 1741, p. 128–140).

Após os trabalhos de Euler, o desenvolvimento da Teoria de Grafos permaneceu relativamente limitado durante parte do século XVIII e o início do século XIX. Ao longo do século XIX, porém, problemas provenientes de outras áreas passaram a contribuir para sua expansão. Entre os exemplos históricos encontram-se os estudos de Kirchhoff sobre circuitos elétricos e os trabalhos de Cayley relacionados à representação de estruturas químicas (Bondy; Murty, 1976).

No século XX, o desenvolvimento da Matemática Discreta e da Computação ampliou consideravelmente o campo de aplicações da Teoria de Grafos, que passou a ser utilizada na modelagem de redes, em problemas de otimização e no desenvolvimento de algoritmos (Bondy; Murty, 1976).

A força de abstração da Teoria de Grafos decorre do fato de que a mesma estrutura pode representar sistemas de naturezas distintas. Uma vez especificados os vértices e as arestas, diferentes desenhos podem representar o mesmo grafo sem alterar as relações de adjacência. Essa perspectiva é compatível com a linguagem de Bondy e Murty (1976).

Por essa razão, cidades e estradas, computadores e conexões, pessoas e relações ou botões e influências podem ser analisados por uma linguagem comum, desde que se indique claramente o que será representado pelos vértices e pelas arestas.

Quando o texto apresenta uma interpretação específica para o *Lights Out* — por exemplo, botão como vértice e influência como aresta —, essa interpretação tem como fonte direta Berman, Borer e Hungerbühler (2021, p. 239 e 246).

Essa interpretação representa uma das ideias centrais desta dissertação e será utilizada continuamente nos capítulos seguintes.

A compreensão da modelagem matemática desenvolvida nos capítulos seguintes exige a apresentação de alguns conceitos fundamentais da Teoria de Grafos. Embora essas definições sejam clássicas, elas desempenham papel central nesta pesquisa, pois toda a dinâmica do jogo *Lights Out* será descrita utilizando a linguagem dos grafos.

As definições e notações de Teoria de Grafos apresentadas nesta seção seguem Bondy e Murty (1976).

De maneira intuitiva, um grafo pode ser entendido como uma estrutura matemática utilizada para representar objetos e as relações existentes entre eles. Essa ideia simples permite modelar uma enorme variedade de problemas, independentemente da natureza dos objetos envolvidos.

Seguindo Bondy e Murty (1976), um grafo $G = (V(G), E(G))$ consiste de um conjunto não vazio $V(G)$ de vértices e de um conjunto $E(G)$, vazio ou não, de arestas, sendo cada aresta um par não ordenado de vértices.

Neste trabalho, utiliza-se a seguinte definição: um grafo simples e finito é um par $G = (V, E)$ em que:

- *V* é um conjunto finito e não vazio denominado conjunto de vértices;
- *E* é um conjunto de pares não ordenados de vértices distintos denominado conjunto de arestas.

Dois vértices são adjacentes, ou vizinhos, quando constituem os extremos de uma mesma aresta.

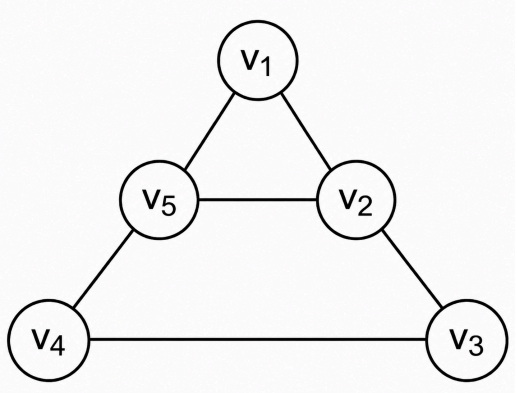
Para um conjunto finito X, a notação $|X|$ indica sua cardinalidade, isto é, o número de elementos de X.

Para um vértice $v \in V(G)$, define-se a vizinhança aberta por $N(v) = \{u \in V(G): u \sim v\}$. A vizinhança fechada é $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. No *Lights Out*, o acionamento de v altera exatamente os vértices de $N[v]$.

Ao longo desta dissertação serão considerados exclusivamente grafos simples. Um laço é uma aresta cujas duas extremidades coincidem, isto é, uma aresta que liga um vértice a ele mesmo. Duas ou mais arestas distintas que possuem o mesmo par de extremidades são denominadas arestas paralelas. Dessa forma, um grafo simples é um grafo que não possui laços nem arestas paralelas. Sendo suficiente para representar todas as estruturas analisadas neste trabalho. A Figura 3 ilustra um grafo contendo cinco vértices e seis arestas. Note que a posição

dos vértices na Figura 3 não possui significado matemático. O mesmo grafo poderia ser desenhado de inúmeras outras maneiras sem alterar suas adjacências.

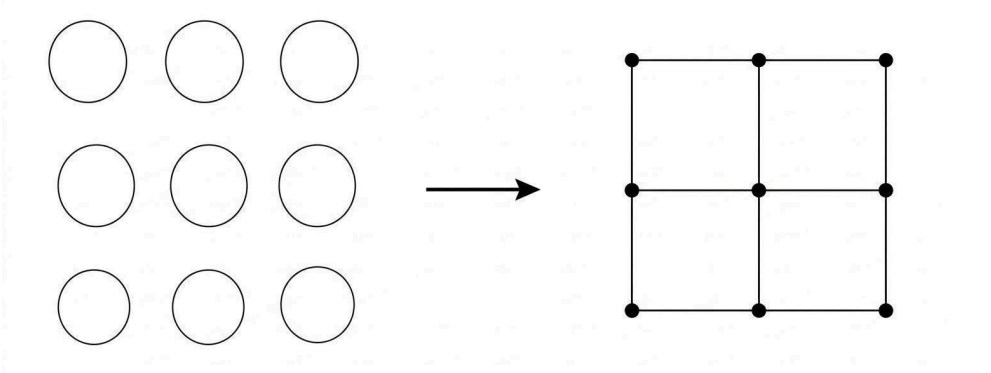
Figura 3 – Grafo simples contendo cinco vértices e seis arestas



Fonte: O autor, 2026.

A Figura 4 apresenta a passagem de um tabuleiro 3×3 para o grafo correspondente. Cada botão é representado por um vértice e cada relação de vizinhança é representada por uma aresta.

Figura 4 – Equivalência entre o tabuleiro 3×3 do jogo *Lights Out* e o grafo associado (| V | = 9, | E | = 12)



Tabuleiro 3×3 do jogo Lights Out Representação do grafo correspondente

Fonte: O autor, 2026.

Outro conceito fundamental para esta pesquisa é o grau de um vértice. O grau $d(v)$ de um vértice v é o número de arestas incidentes nesse vértice. Em grafos

simples, esse valor coincide com o número de vizinhos do vértice. A Figura 5 exibe um grafo cujos vértices têm graus 1, 2 ou 3.

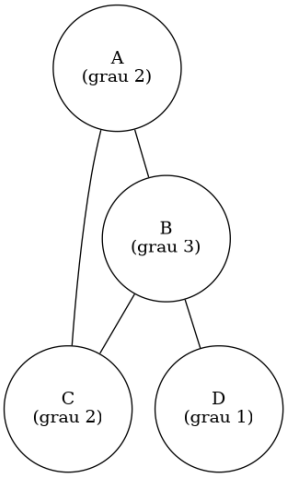
Neste trabalho, o grau de um vértice será representado por $d(v)$.

No *Lights Out*, essa informação determina quantos vértices são diretamente afetados quando v é acionado: o próprio vértice e os seus $d(v)$ vizinhos.

No contexto do *Lights Out*, essa propriedade assume interpretação bastante natural. Quanto maior o grau de um vértice, maior será a quantidade de vértices potencialmente afetados quando ele for acionado. Consequentemente, a estrutura dos graus do grafo influencia diretamente a dinâmica do jogo.

Por exemplo, em um grafo caminho existem vértices de grau 1 e de grau 2. Já em um ciclo todos os vértices possuem grau 2. Nos sólidos de Platão, cada família apresenta um grau característico associado à sua regularidade. Essas diferenças serão exploradas detalhadamente nos capítulos dedicados ao estudo de cada família de grafos.

Figura 5 – Representação do grau dos vértices em um grafo simples



Fonte: O autor, 2026.

Um grafo caminho é um grafo cujos vértices devem ser dispostos em uma sequência linear de modo que dois vértices são adjacentes se, e somente se, aparecem consecutivamente nessa sequência. No caminho utilizado nesta dissertação, os vértices internos possuem dois vizinhos e as extremidades possuem um.

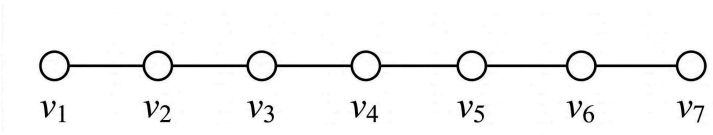
Um caminho com $n \geq 1$ vértices é denotado por P_n. Seus vértices podem ser ordenados como $v_1, v_2, \ldots, v_n$, de modo que para $n \geq 2$, suas arestas ligam exatamente cada par de vértices consecutivos. Formalmente, $P_n = (V, E)$, com $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $E = \{\{v_i, v_{i+1}\}: 1 \leq i < n\}$.

Essa definição também contempla o caso $n = 1$: nesse caso, P_1 possui um único vértice v_1 e nenhuma aresta, isto é, $E = \emptyset$. Para $n \geq 2$, os vértices v_1 e v_n têm grau 1 e são extremidades do caminho, enquanto, para $n \geq 3$, os vértices $v_2, \ldots, v_{n-1}$ têm grau 2. Em particular, o único vértice de P_1 tem grau 0.

Essa estrutura determina diretamente a dinâmica do jogo sobre P_n: para $n \geq 2$, o acionamento de uma extremidade afeta dois vértices, enquanto o acionamento de um vértice interno afeta três. No caso particular de P_1, o acionamento do único vértice afeta apenas ele próprio.

Por esse motivo, a posição do vértice no caminho é relevante para a propagação dos estados. A Figura 6 ilustra a organização de um grafo caminho.

Figura 6 – Grafo caminho P_7



Fonte: O autor, 2026.

Os grafos caminho desempenham papel central nesta dissertação, pois constituem a primeira família de grafos investigada sob a perspectiva do *Lights Out* em três estados. A simplicidade de sua estrutura permite compreender diversos fenômenos que posteriormente serão observados em famílias mais complexas.

Além disso, muitos dos resultados obtidos para caminhos servirão como base para a formulação de conjecturas e demonstrações envolvendo outras classes de grafos.

A essência da definição de um grafo *ciclo* pode ser entendida pela adição de uma aresta entre as extremidades de um grafo caminho, com pelo menos três

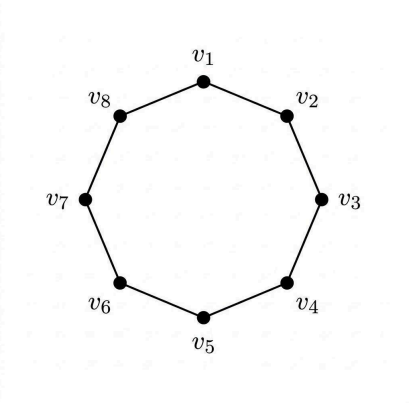
vértices. Para um ciclo com n vértices, utiliza-se a notação C_n. Consequentemente, todos os vértices de um ciclo possuem grau 2.

Formalmente, $V(C_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$e $E(C_n) = \{\{v_i, v_{i+1}\}: 1 \leq i < n\} \cup \{\{v_n, v_1\}\}$.

Consequentemente, $d(v_i) = 2$, para todo i.

A ausência de extremidades torna o ciclo uma estrutura regular e modifica a dinâmica do jogo em relação aos caminhos. A Figura 7 ilustra um grafo ciclo com oito vértices.

Figura 7 – Grafo ciclo C_8



Fonte: O autor, 2026.

Embora a diferença entre caminhos e ciclos consista apenas na presença de uma única aresta adicional, essa modificação altera significativamente diversas propriedades estruturais do grafo.

No contexto desta dissertação, essa diferença mostra-se particularmente relevante. Como será demonstrado no Capítulo 5, a ligação entre os vértices extremos modifica a propagação dos estados ao longo do grafo e influencia diretamente o conjunto de soluções do jogo.

Dessa forma, a comparação entre caminhos e ciclos constitui uma das principais etapas da investigação desenvolvida neste trabalho.

Um grafo é d-*regular* quando todos os seus vértices possuem o mesmo grau d (Bondy; Murty, 1976). Formalmente, $d(v) = d, \text{para todo } v \in V$.

Os grafos regulares são importantes neste trabalho porque os grafos associados aos sólidos de Platão apresentam esse tipo de uniformidade.

A regularidade, entretanto, não determina sozinha o comportamento do *Lights Out*. Como será visto no Capítulo 6, grafos com o mesmo grau podem exigir quantidades muito diferentes de acionamentos. A Tabela 1 evidencia o grau dos grafos dos cinco sólidos de Platão.

Tabela 1 – Sólidos de Platão e o tipo de regularidade

Sólido de Platão	Tipo de Regularidade
Tetraedro	3-regular
Hexaedro	3-regular
Octaedro	4-regular
Dodecaedro	3-regular
Icosaedro	5-regular

Fonte: O autor, 2026.

As propriedades referentes a essas estruturas serão investigadas no Capítulo 6.

Seja $G = (V, E)$, com $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. A matriz de adjacência de G é a matriz $A = (a_{ij})$ de ordem n, definida por $a_{ij} = 1$ quando $v_i \sim v_j$ e por $a_{ij} = 0$ quando $v_i \nsim v_j$. Aqui, $v_i \sim v_j$ significa que os vértices v_i e v_j são adjacentes, enquanto $v_i \nsim v_j$ significa que não são adjacentes. Como os grafos considerados são simples, nenhum vértice é adjacente a si mesmo e, portanto $a_{ii} = 0$ para todo i, assim, a diagonal principal de A é nula.

2.4 Aritmética Modular

Para $k \geq 2$, denota-se por $\mathbb{Z}_k$ o conjunto das classes de restos módulo k, representadas por $0, 1, \ldots, k - 1$, com as operações realizadas módulo k. Quando k é primo, $\mathbb{Z}_k$ é um corpo; quando k é composto, $\mathbb{Z}_k$ é um anel com divisores de zero. Por isso, no caso geral, emprega-se nesta dissertação a linguagem de congruências sobre $\mathbb{Z}_k$.

Para $n \geq 1$, $\mathbb{Z}_k^n$ denota o conjunto dos vetores com n coordenadas pertencentes a $\mathbb{Z}_k$. Nesta notação, k representa o número de estados possíveis em cada vértice e n representa o número de vértices do grafo. Somar 1 a uma coordenada corresponde a avançar um estado; ao atingir k, retorna-se a 0. No caso

principal $k = 3$, os valores 0, 1 e 2 representam, respectivamente, as cores vermelha, amarela e verde.

Para $x, y \in \mathbb{Z}$ e $k \geq 2$, escreve-se $x \equiv y \, (mod \, k)$ se, e somente se, k divide $x - y$.

Proposição 2.1

Dados $b, c \in \mathbb{Z}$ e $k \geq 2$, a congruência $cx \equiv b \, (mod \, k)$ possui solução $x \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $MDC(c, k) | b$. Em particular, quando $MDC(c, k) = 1$, a solução é única módulo k.

Esse resultado será utilizado posteriormente nas classificações de solubilidade dos ciclos.

2.5 Álgebra Linear

A Álgebra Linear fornece a linguagem de vetores e matrizes utilizada para organizar simultaneamente os estados dos vértices e os efeitos dos acionamentos. Neste capítulo, esses objetos são apresentados apenas como ferramentas; sua aplicação específica ao *Lights Out* será desenvolvida no Capítulo 3.

Um vetor de dimensão n sobre $\mathbb{Z}_k$ é uma sequência ordenada de n elementos de $\mathbb{Z}_k$. Assim, um vetor $x \in \mathbb{Z}_k^n$ possui n coordenadas, cada uma pertencente a $\mathbb{Z}_k$. Essa representação permite reunir, em um único objeto, informações associadas aos n vértices de um grafo. A soma de vetores e a multiplicação de um vetor por um elemento de $\mathbb{Z}_k$ são realizadas coordenada a coordenada, sempre considerando a aritmética módulo k.

$$x = \left(x_1, \, x_2, \, \ldots, \, x_n\right)^T \in \mathbb{Z}_k^n$$

O sobrescrito T indica a transposição; assim, uma sequência escrita horizontalmente passa a ser interpretada como vetor-coluna.

Uma matriz com m linhas e n colunas, com entradas em $\mathbb{Z}_k$, é um arranjo retangular de elementos de $\mathbb{Z}_k$. Neste trabalho, terão especial importância as matrizes quadradas de ordem n, pois elas permitem registrar relações entre os n vértices de um grafo.

A matriz identidade de ordem n, denotada por I_n, é a matriz quadrada de ordem n que possui entrada 1 na diagonal principal e 0 nas demais posições.

Se M é uma matriz de ordem n e $x \in \mathbb{Z}_k^n$, o produto Mx também pertence a $\mathbb{Z}_k^n$. Sua i-ésima coordenada é obtida multiplicando os elementos da i-ésima linha de M pelas coordenadas correspondentes de x e somando os resultados em $\mathbb{Z}_k$. Desse modo, uma única multiplicação matricial pode representar simultaneamente n relações entre as coordenadas de um vetor.

Um sistema de congruências lineares pode, portanto, ser escrito de forma matricial como $Mx \equiv b\ (mod\ k)$, em que M é a matriz dos coeficientes, x é o vetor das incógnitas e b é o vetor dos termos independentes. Resolver o sistema significa determinar os vetores $x \in \mathbb{Z}_k^n$ que satisfazem simultaneamente todas as congruências. Dependendo de M, de b e do módulo k, o sistema pode não possuir solução, possuir uma única solução ou admitir mais de uma solução.

$$Mx \equiv b\ \ (mod\ k)$$

Quando k é primo, $\mathbb{Z}_k$ é um corpo e podem ser utilizadas diretamente as ferramentas usuais da Álgebra Linear sobre corpos. Quando k é composto, nem todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo; por essa razão, alguns argumentos que utilizam divisão ou inversão de matrizes exigem cuidado adicional. Nesta dissertação, sempre que o módulo não for primo, as equações serão tratadas como sistemas de congruências sobre $\mathbb{Z}_k$.

Proposição 2.2

Se G é um grafo d-regular, A é sua matriz de adjacência e $u = (1, 1, ..., 1)^T$ é o vetor-coluna de uns, então $Au = du$.

De fato, cada linha de A possui exatamente d entradas iguais a 1; logo, cada coordenada de Au é igual a d.

Esses conceitos serão aplicados no Capítulo 3. Ali, os vetores passarão a representar configurações e acionamentos do jogo, e uma matriz construída a partir do grafo registrará o efeito simultâneo desses acionamentos. Dessa forma, o

presente capítulo fornece as ferramentas algébricas gerais, enquanto o capítulo seguinte estabelece sua interpretação específica no jogo.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA DO *LIGHTS OUT*

A modelagem matemática permite substituir a busca por tentativa e erro por um sistema de equações definido a partir da estrutura do grafo. Este capítulo adota a notação de Berman, Borer e Hungerbühler (2021): para um grafo G com n vértices, a matriz do jogo é denotada por N e definida por:

$$N = A + I_n.$$

Nessa expressão, A é a matriz de adjacência do grafo, I_n é a matriz identidade de ordem n e N é a matriz que registra o efeito dos acionamentos.

Em particular, a coluna j de N descreve os vértices afetados quando o vértice v_j é acionado.

Para a versão do *Lights Out* com k estados, a configuração inicial é representada por i, a configuração final por f e o vetor de acionamentos por a. A condição para transformar a configuração inicial na configuração final é apresentada por Berman, Borer e Hungerbühler (2021, p. 246):

$$f \equiv i + Na \ (mod\ k).$$

Essa equação afirma que a configuração final é obtida somando à configuração inicial o efeito total dos acionamentos. De forma equivalente, pode-se escrever:

$$Na \equiv f - i\ (mod\ k).$$

Um exemplo para o uso da equação será apresentado abaixo:

Seja P_3 um grafo associado ao caminho com três vértices.

$$N = A + I_3.$$

Utilizando a definição de matriz de adjacência apresentada no Capítulo 2, construímos para o caminho P_3 a matriz A a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = A + I_3$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

N é a matriz do jogo do caminho P_3 e indica quais vértices são alterados por cada acionamento.

Pela matriz N, podemos ver que:

- Acionar o v_1, altera v_1 e v_2.
- Acionar v_2, altera v_1, v_2 e v_3.
- Acionar v_3, altera v_2 e v_3.

O vetor a indica quantos acionamentos diretos são realizados em cada vértice, que é o que queremos encontrar, enquanto, $f - i(mod\,3)$ indica a quantidade de incrementos, módulo 3 que cada vértice deve receber.

Como f é a configuração final que queremos (todos os vértices verdes) e i é a configuração inicial que temos (todos os vértices vermelhos), então:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f - i = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \pmod 3$$

$$Na \equiv f - i(mod\,3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \pmod 3$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \equiv 2 \\ a_1 + a_2 + a_3 \equiv 2 \\ a_2 + a_3 \equiv 2 \end{cases} \pmod 3$$

Isolando a_1 e a_3 teremos:

$$a_1 \equiv 2 - a_2 \text{ (mod 3) e } a_3 \equiv 2 - a_2 \text{ (mod 3).}$$

Substituindo a_1 e a_3 na equação do meio:

$$2 - a_2 + a_2 + 2 - a_2 \equiv 2 \text{ (mod 3)}$$

$$- a_2 \equiv - 2 \text{ (mod 3)}$$

$$a_2 \equiv 2 \text{ (mod 3).}$$

Com isso, $a_1 = a_3 \equiv 0\ (mod\ 3)$.

Logo, uma solução possível é acionar o v_2 duas vezes.

3.1 Definição do jogo sobre um grafo

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e finito, com $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. No *Lights Out* com k estados, o estado de cada vértice pertence a $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Ao acionar o vértice v_i, acrescenta-se uma unidade, módulo k, ao estado de v_i e ao estado de cada um de seus vizinhos.

Como a soma é realizada módulo k, k acionamentos no mesmo vértice produzem efeito nulo. Assim, para buscar um mínimo, basta substituir qualquer quantidade de acionamentos por seu representante em $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Esse fato decorre diretamente da regra modular descrita no artigo de Berman, Borer e Hungerbühler (2021, p. 246).

3.2 Vetores de estado

Seguindo a representação vetorial da versão do *Lights Out* com k estados apresentada no artigo de Berman, Borer e Hungerbühler (2021, p. 246), uma configuração do jogo é representada por um vetor coluna

$$s = \left(s_1, s_2, \ldots, s_n\right)^T \in Z_k^n,$$

em que s_i indica o estado do vértice v_i. A configuração inicial será denotada por i e a configuração desejada por f.

Uma configuração é denominada uniforme quando todos os vértices do grafo se encontram no mesmo estado. Na representação por cores utilizada neste trabalho, isso significa que todos os vértices apresentam a mesma cor.

Na versão de três estados estudada nesta dissertação, as cores vermelho, amarelo e verde são representadas, respectivamente, por 0, 1 e 2. Assim, a configuração uniforme vermelha é o vetor nulo. Definindo $u = (1, 1, \ldots, 1)^T$, a configuração uniforme verde é $f = 2u = (2, 2, \ldots, 2)^T$.

3.3 Vetor de acionamentos

Seja $a = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)^T \in Z_k^n$, o vetor de acionamentos, em que a_i indica quantas vezes o vértice v_i é acionado, considerado módulo k. O efeito total é Na.

Proposição 3.1

Seja G um grafo simples e finito com n vértices e considere o *Lights Out* com $k \geq 2$ estados. Para um vetor de acionamentos $a \in \mathbb{Z}_k^n$, a configuração final produzida depende apenas de a e não da ordem em que os acionamentos são realizados.

Demonstração

Cada acionamento corresponde à adição de uma coluna de N ao vetor de estado. Como a adição em $\mathbb{Z}_k^n$ é comutativa, o resultado depende apenas da quantidade de vezes que cada vértice é acionado e não da ordem dos acionamentos.

3.4 Sistema linear associado ao jogo

Depois da execução do vetor de acionamentos a, a configuração final obtida é

$$f \equiv i + Na \ (mod\ k).$$

Portanto, transformar i em f equivale a resolver o sistema

$$Na \equiv f - i\ (mod\ k).$$

No problema principal desta dissertação, a configuração inicial é o vetor nulo (inicialmente todos os vértices têm a cor vermelha). Denotando por $u = (1, 1,..., 1)^T$ o vetor de todos os **uns**, a configuração final uniforme verde é $2u$. Assim, para três estados, obtém-se $Na \equiv 2u \ (mod\ 3)$.

3.5 Existência de solução, unicidade e número mínimo de acionamentos

O que significa uma configuração solucionável? Dizer que uma configuração possui solução significa afirmar que existe pelo menos uma escolha de acionamentos capaz de transformar a configuração inicial na configuração desejada. Essa escolha é representada por um vetor de acionamentos a que satisfaz a equação do jogo.

$$Na \equiv f - i \ (mod\ k).$$

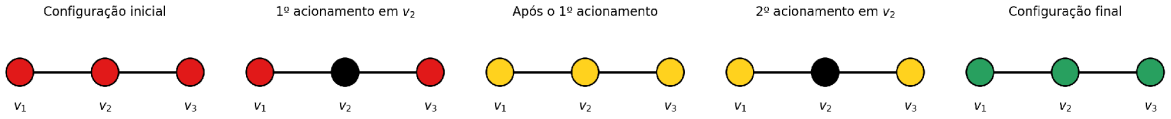
A partir dessa equação, surgem três perguntas distintas. A primeira é saber se existe algum vetor a que realize a transformação desejada. A segunda é verificar se esse vetor é único. A terceira, quando há uma ou mais soluções, é determinar qual delas utiliza a menor quantidade total de acionamentos.

Essas perguntas não devem ser confundidas. Um jogo pode não possuir solução; pode possuir uma única solução; ou pode possuir várias soluções, entre as quais se procura aquela que exige menos acionamentos.

Exemplo de existência de solução no caminho P_3:

Considere o caminho P_3, formado pelos vértices v_1, v_2 e v_3. Parte-se da configuração uniforme vermelha, representada pelo estado 0, e busca-se a configuração uniforme verde, representada pelo estado 2. Ao acionar o vértice central v_2, os três vértices recebem um incremento, pois v_2 é adjacente a v_1 e v_3. Depois do primeiro acionamento, todos ficam amarelos. Um segundo acionamento em v_2 acrescenta mais uma unidade a cada estado, levando os três vértices ao verde. A Figura 8 apresenta uma sequência de acionamentos que resolve o jogo

Figura 8 – Exemplo de configuração solucionável no caminho P_3



Fonte: O autor, 2026.

A estratégia apresentada é descrita pelo vetor $a = (0, 2, 0)^T$.

A primeira coordenada indica que v_1 não é acionado diretamente, a segunda indica dois acionamentos diretos em v_2 e a terceira indica que v_3 não é acionado diretamente também. Como este vetor produz a configuração final desejada, ele comprova que o problema possui solução.

Além disso, o sistema associado a P_3 determina necessariamente $a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 0$ em $\mathbb{Z}_3$. Portanto, nesse exemplo, a solução também é única.

Vejamos um exemplo de inexistência de solução no ciclo C_4:

Considere agora o ciclo C_4 com três estados, novamente partindo da configuração uniforme vermelha e buscando a configuração uniforme verde. Cada acionamento afeta exatamente três vértices: o vértice acionado e os seus dois vizinhos. A Figura 9 antecipa um caso sem solução. A demonstração de que a transformação uniforme de 0 para 2 não é solucionável em C_4, bem como a análise para k estados, será apresentada no Capítulo 5.

Figura 9 – Exemplo de configuração sem solução no ciclo C_4



Fonte: O autor, 2026.

Outra discussão que emerge deste estudo é referente à unicidade das soluções. É importante observar que a existência de solução não implica que ela seja única. No caminho P_3, a estratégia $a = (0,2,0)^T$ é a única solução em $\mathbb{Z}_3^3$. Entretanto, no ciclo C_3, cada vértice é vizinho dos outros dois; por isso, acionar duas vezes qualquer um dos três vértices resolve o jogo.

$(2,0,0)^T$, $(0,2,0)^T$ e $(0,0,2)^T$.

Nesse caso, há três vetores de acionamentos distintos que produzem a mesma configuração final. Portanto, antes de discutir o número mínimo de acionamentos, é necessário saber se o conjunto de soluções está vazio, possui um único elemento ou possui vários elementos.

Para comparar soluções segundo o número de acionamentos físicos, define-se a seguir o peso do vetor de acionamentos.

Se $a = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)^T \in \mathbb{Z}_k^n$, cada coordenada a_i é representada pelo seu único representante inteiro no conjunto $\{0,\ 1,\ \ldots,\ k\ -\ 1\}$. O peso de a, denotado por $w(a)$, é a soma desses representantes e corresponde ao número total de acionamentos diretos realizados pela estratégia.

$$w(a) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Assim, $w(a)$ conta acionamentos diretos nos vértices, ele não conta separadamente os incrementos que cada vértice recebe em consequência dos acionamentos de seus vizinhos.

No exemplo do caminho P_3, temos $w(0,2,0) = 0 + 2 + 0 = 2$.

Assim, o vetor $a = (0,2,0)^T$ descreve uma estratégia com dois acionamentos físicos. Quando a transformação considerada possui mais de uma solução, o número mínimo de acionamentos é obtido escolhendo a solução de menor peso.

$$m_k(G) = min\{\, w(a) : Na \equiv f\ -\ i\ (mod\ k)\,\}.$$

Como nesta dissertação a configuração inicial e a configuração objetivo são fixadas em cada problema, utiliza-se a notação $m_k(G)$. Essa notação será empregada apenas quando a transformação for solucionável. Se não existe vetor de acionamentos que satisfaça a equação do jogo, como ocorre em C_4 com três estados, não há um número mínimo de acionamentos a ser calculado.

Nos capítulos seguintes, essas ideias serão aprofundadas. O Capítulo 4 determinará soluções e mínimos para os grafos caminho, enquanto o Capítulo 5 analisará os ciclos, incluindo casos solucionáveis e casos em que a equação do jogo não possui solução.

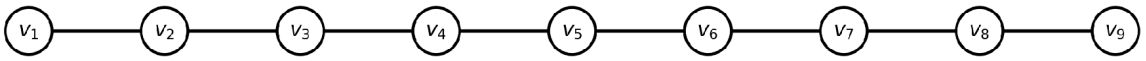
4 O JOGO *LIGHTS OUT* EM GRAFOS CAMINHO

Os grafos caminho constituem a primeira família analisada. Sua estrutura linear permite transformar o sistema matricial em uma recorrência simples e, a partir dela, determinar rigorosamente o número mínimo de acionamentos.

Inicialmente considera-se o jogo com três estados, partindo da configuração uniforme vermelha e buscando a configuração uniforme verde. Ao final do capítulo, o resultado é generalizado para k estados.

A generalização do *Lights Out* para $\mathbb{Z}_k$ em grafos caminho já aparece em Giffen e Parker (2013, p. 279), que analisam condições de solubilidade e obtêm relações recorrentes para os acionamentos. Assim, a utilização de k estados e a estrutura recorrente não são apresentadas aqui como inéditas. O objetivo específico deste capítulo é aplicar essa estrutura à passagem da configuração uniforme 0 para a configuração uniforme $k - 1$ e determinar, para essa transformação, o número mínimo de acionamentos. A Figura 10 apresenta o caminho P_9.

Figura 10 – Representação do grafo caminho P_9



Fonte: O autor, 2026.

A seguir, apresenta-se o sistema associado ao grafo caminho. Seja $a_i \in \{0, 1, 2\}$ o número de vezes que v_i é acionado. Para que todos os vértices passem do estado 0 para o estado 2, as equações do sistema são

$$a_1 + a_2 \equiv 2 \ (mod\ 3)$$
$$a_{i-1} + a_i + a_{i+1} \equiv 2 \ (mod\ 3), \qquad 2 \leq i \leq n - 1,$$
$$a_{n-1} + a_n \equiv 2 \ (mod\ 3).$$

Essas equações descrevem, respectivamente, o primeiro vértice, os vértices internos e o último vértice do caminho.

4.1 Observações obtidas pela resolução manual

Antes da demonstração geral, foram resolvidos manualmente caminhos com diferentes números de vértices. Os primeiros valores encontrados são apresentados na Tabela 2.

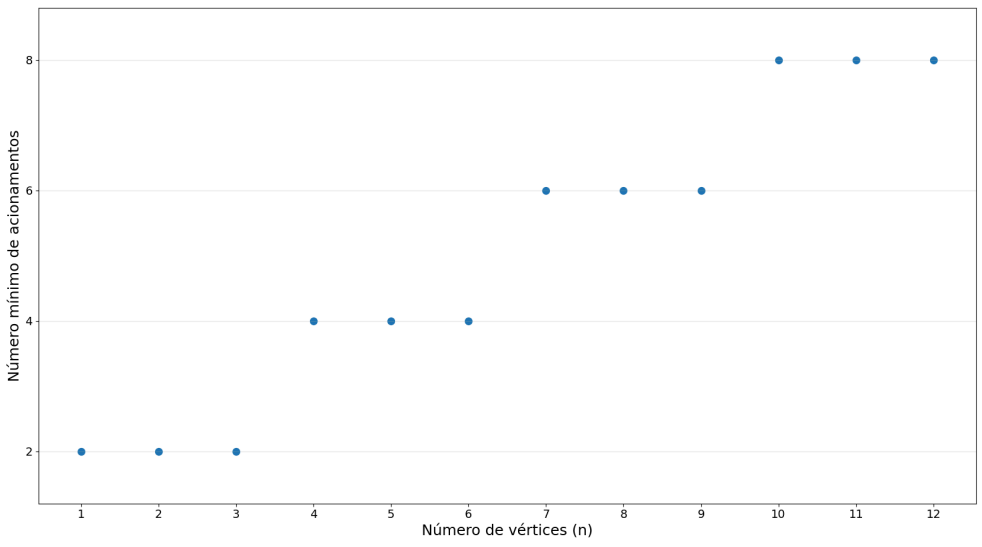
Tabela 2 – Número mínimo de acionamentos em grafos caminho

Caminho	Número mínimo de acionamentos
P_1, P_2, P_3	2
P_4, P_5, P_6	4
P_7, P_8, P_9	6
P_{10}, P_{11}, P_{12}	8

Fonte: O autor, 2026.

O número mínimo permanece constante em blocos de três valores consecutivos de n e aumenta duas unidades no início de cada novo bloco. O Gráfico 1 evidencia esse comportamento.

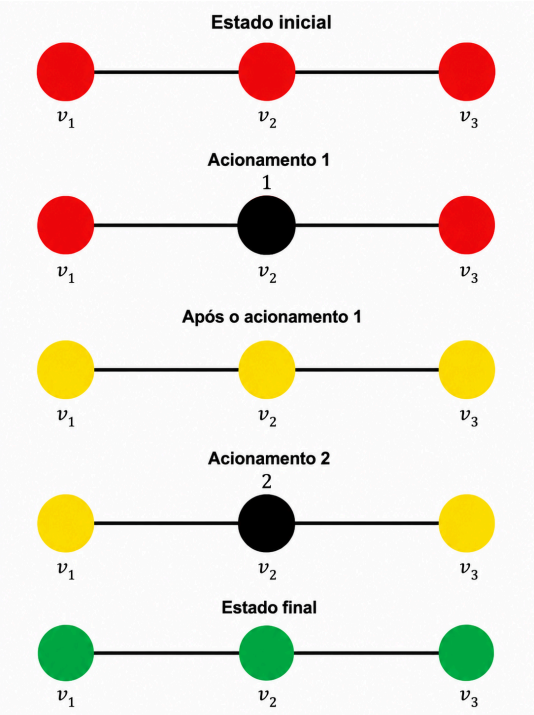
Gráfico 1 – Crescimento do número mínimo de acionamentos em grafos caminho



Fonte: O autor, 2026.

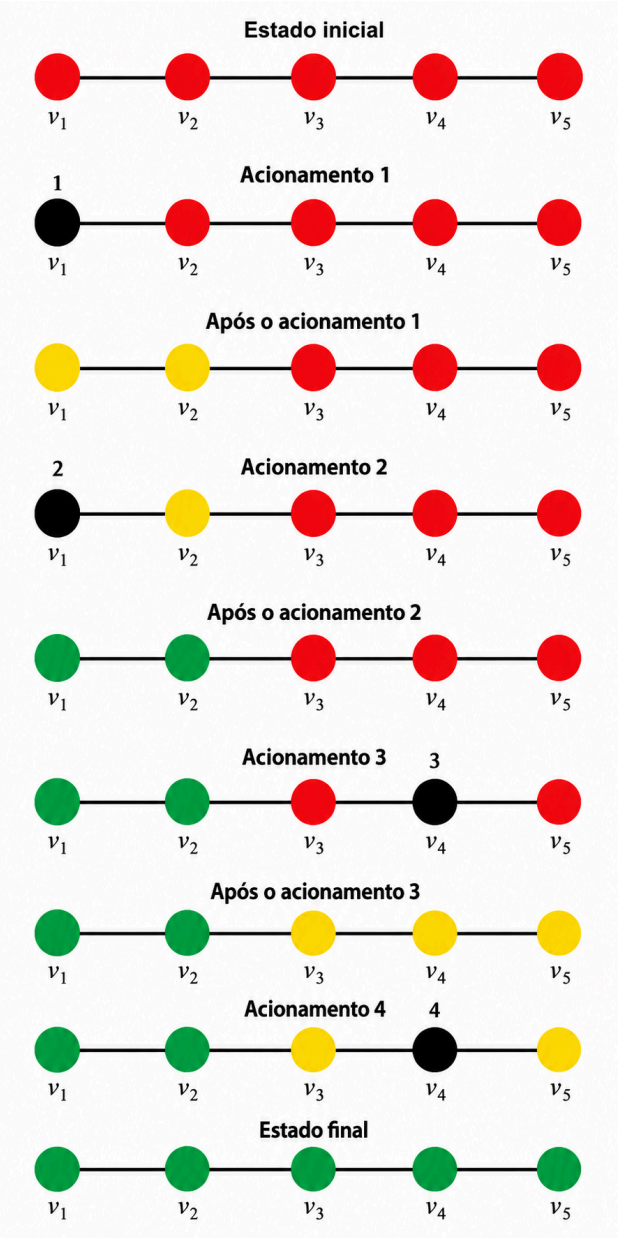
As Figuras 11, 12 e 13 representam algumas dessas resoluções manuais.

Figura 11 – Resolução do caminho P_3 com dois acionamentos



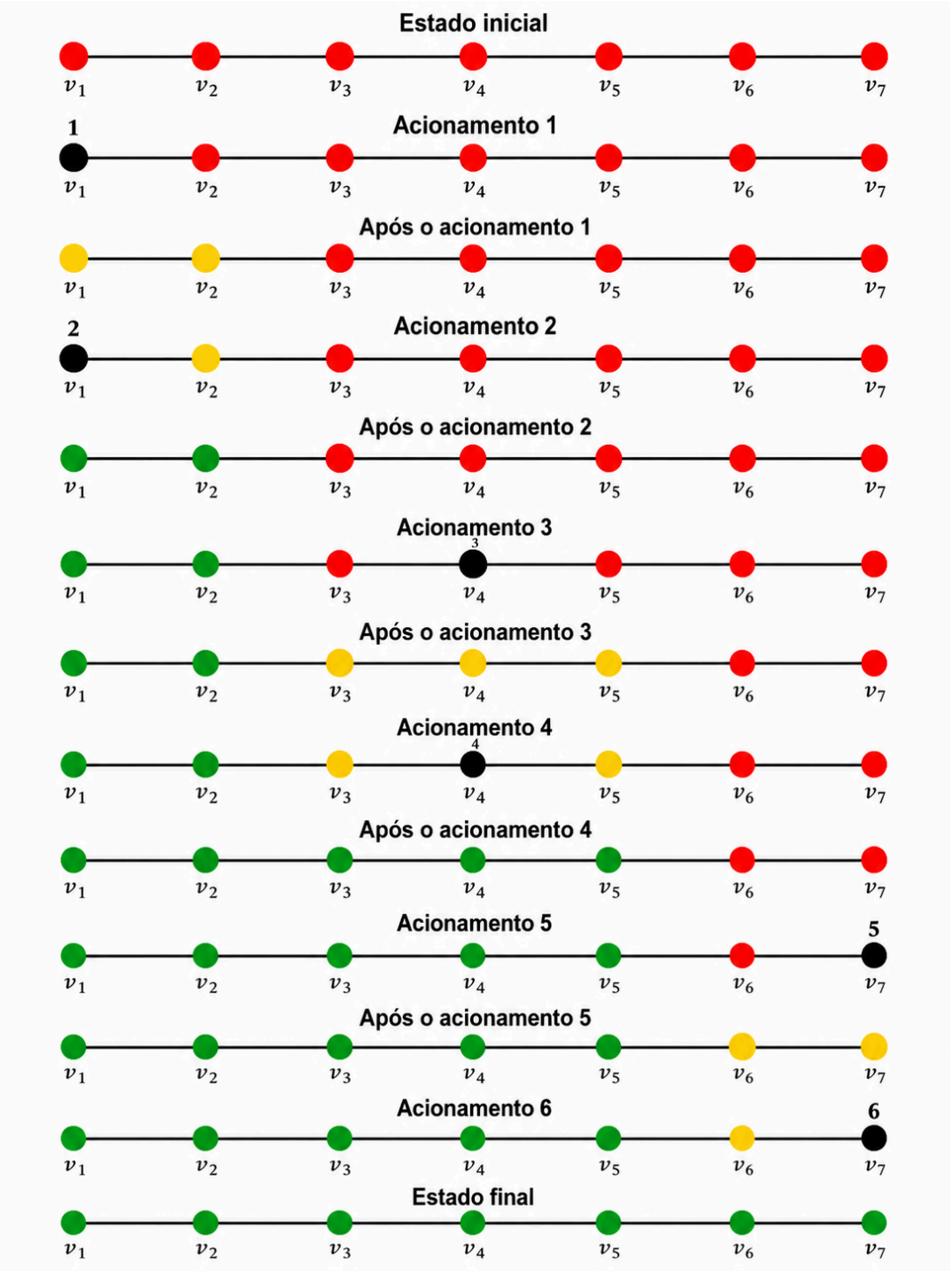
Fonte: O autor, 2026.

Figura 12 – Resolução do caminho P_5 com quatro acionamentos



Fonte: O autor, 2026.

Figura 13 – Resolução do caminho P_7 com seis acionamentos



Fonte: O autor, 2026.

4.2 Recorrência e periodicidade

A recorrência de período três utilizada a seguir é compatível com a análise dos caminhos sobre $\mathbb{Z}_k$ apresentada por Giffen e Parker (2013, p. 279). Ela é

deduzida novamente neste capítulo, com a notação e a configuração uniforme adotadas na dissertação, para que o argumento de minimalidade possa ser acompanhado de forma autônoma.

Lema 4.1

Considere o *Lights Out* de três estados sobre o caminho $P_n = (v_1,..., v_n)$, com $n \geq 2$, partindo da configuração uniforme 0 e buscando a configuração uniforme 2. Se $a = \left(a_1, ..., a_n\right)^T \in \mathbb{Z}_3^n$ é um vetor de acionamentos que produz uma solução, então, para todo vértice interno v_i, isto é, para $2 \leq i \leq n-1$, $a_{i+1} \equiv 2 - a_i - a_{i-1}\ (mod\ 3)$.

Demonstração

Para $2 \leq i \leq n-1$, o estado do vértice v_i é alterado pelos acionamentos realizados em v_{i-1}, v_i e v_{i+1}. Como a configuração inicial é 0 e a configuração final desejada é 2, a equação correspondente a v_i é $a_{i-1} + a_i + a_{i+1} \equiv 2\ (mod\ 3)$.

Isolando a_{i+1}, obtemos $a_{i+1} \equiv 2 - a_i - a_{i-1}\ (mod\ 3)$ como queríamos demonstrar.

Lema 4.2

Considere o *Lights Out* de três estados sobre o caminho P_n, com $n \geq 2$, partindo da configuração uniforme 0 e buscando a configuração uniforme 2. Se $a = \left(a_1, ..., a_n\right)^T \in \mathbb{Z}_3^n$ é uma solução, então suas coordenadas satisfazem o padrão periódico $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ ...) = (t,\ 2 - t,\ 0,\ t,\ 2 - t,\ 0,\ ...)$, com $t \in \mathbb{Z}_3$.

Esse padrão fornece os vetores candidatos a solução. Para que um desses vetores seja efetivamente uma solução de P_n, ainda é necessário que ele satisfaça a equação correspondente ao último vértice do caminho.

Demonstração

Pela equação do primeiro vértice, $a_1 + a_2 \equiv 2\ (mod\ 3)$.

Tomando $a_1 = t$, obtemos $a_2 \equiv 2 - t\ (mod\ 3)$.

Em seguida, $a_4 \equiv 2 - a_3 - a_2 \equiv 2 - 0 - (2 - t) \equiv t \ (mod\ 3)$ e $a_5 \equiv 2 - a_4 - a_3 \equiv 2 - t - 0 \equiv 2 - t \ (mod\ 3)$.

Aplicando novamente a recorrência, $a_6 \equiv 0 \ (mod\ 3)$.

Portanto, o padrão se repete a cada três posições: $a_{i+3} = a_i$, sempre que os índices envolvidos pertencem ao caminho. Assim, todo vetor solução deve ter a forma $(t,\ 2 - t,\ 0,\ t,\ 2 - t,\ 0,\ ...)$.

Entretanto, essa recorrência foi obtida a partir da equação do primeiro vértice e das equações dos vértices internos. Ainda resta verificar a equação do último vértice, $a_{n-1} + a_n \equiv 2 \ (mod\ 3)$.

É essa condição que determinará quais valores de t produzem efetivamente soluções.

4.3 Número mínimo de acionamentos para três estados

Embora a solubilidade e a recorrência dos caminhos sobre $\mathbb{Z}_k$ possuam antecedentes na literatura, não foi localizada, nos trabalhos consultados, uma fórmula explícita equivalente à apresentada a seguir para o número mínimo de acionamentos na passagem uniforme de 0 para 2. O teorema, portanto, concentra-se nessa questão de minimalidade.

Teorema 4.1

Seja P_n o caminho com $n \geq 1$ vértices, onde n é um número natural. No Lights Out de três estados, da configuração uniforme 0 para a uniforme 2, denote por $m_3(P_n)$ o menor número total de acionamentos físicos entre todas as soluções. Então $m_3(P_n) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Demonstração

Para $n = 1$, o único vértice precisa ser acionado duas vezes; logo $m_3(P_1) = 2$. Suponha agora $n \geq 2$.

Pelo algoritmo da divisão, existem únicos $q \in \mathbb{Z} \geq 0$ $r \in \{0, 1, 2\}$ tais que $n = 3q + r$.

Analisaremos separadamente os três possíveis valores de r.

Pelo Lema 4.2, toda solução possui o padrão periódico $(t,\ 2\ -\ t,\ 0)$, com $t \in \{0,\ 1,\ 2\}$.

Se $r\ =\ 0$, a extremidade direita fornece $(2\ -\ t) + 0 \equiv 2\ (mod\ 3)$, logo $t \equiv 0$. Há q blocos $(0, 2, 0)$, de peso 2, totalizando $2q$.

Se $r\ =\ 1$, a extremidade direita fornece $0\ +\ t \equiv 2$, logo $t \equiv 2$, logo há q blocos de peso 2 e a coordenada final 2, totalizando $2q\ +\ 2$.

Se $r\ =\ 2$, a condição final é $t\ +\ (2\ -\ t) \equiv 2$ para qualquer t; cada bloco completo tem peso 2 e as duas coordenadas finais também somam 2, totalizando $2q\ +\ 2$.

Essas são todas as soluções, pois a recorrência determina o vetor a partir de t e a equação final determina exatamente os valores admissíveis. Como $\lceil \frac{n}{3} \rceil\ =\ q$ quando $r\ =\ 0$ e $q\ +\ 1$ quando $r\ =\ 1$ ou 2, segue $m_3\left(P_n\right) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Corolário 4.1

Para $q \geq 0,\ m_3\left(P_{3q+1}\right) = m_3\left(P_{3q+2}\right) = m_3\left(P_{3q+3}\right) = 2q\ +\ 2$. Onde P_{3q+j} é o caminho com $3q\ +\ j$ vértices e o índice 3 de m_3 indica o jogo de três estados.

4.4 Generalização para k estados

A formulação do jogo com vários estados e a existência de soluções em caminhos possuem antecedentes na literatura, em particular em Giffen e Parker (2013) e Zhang e Wang (2019). Nesta seção, o foco é distinto: parte-se da configuração uniforme 0, busca-se a configuração uniforme k - 1 e determina-se o número mínimo de acionamentos. Não foi localizada, na literatura consultada, a expressão $m_k\left(P_n\right) = (k\ -\ 1)\lceil \frac{n}{3} \rceil$ apresentada no Teorema 4.2.

Considere agora os estados $0,\ 1,\ \ldots,\ k\ -\ 1$, com configuração inicial uniforme 0 e configuração objetivo uniforme $k\ -\ 1$. O mesmo argumento fornece uma periodicidade de período três.

Teorema 4.2

Sejam $k \geq 2$ e $n \geq 1$, sendo k e n números naturais. No *Lights Out* com k estados sobre P_n, da configuração uniforme 0 para a uniforme $k-1$, $m_k(P_n)$ denota o menor número de acionamentos físicos. Então $m_k(P_n) = (k-1)\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Demonstração

Para $n = 1$, são necessários e suficientes $k-1$ acionamentos. Para $n \geq 2$, a extremidade esquerda dá $a_2 \equiv k - 1 - a_1$. Nos vértices internos, $a_{i+1} \equiv k - 1 - a_i - a_{i-1} (mod\ k)$. Tomando $t = a_1$, obtemos $a_2 \equiv k - 1 - t$, $a_3 \equiv 0$ e $a_4 \equiv t$; portanto $a_{i+3} \equiv a_i$ e toda solução possui padrão $(t,\ k-1-t,\ 0)$.

Tomando $n = 3q + r$.

Se $r = 0$, a condição final força $t \equiv 0$ e o peso é $q(k-1)$.

Se $r = 1$, força $t \equiv k - 1$ e o peso é $(q+1)(k-1)$.

Se $r = 2$, a condição final vale para todo $t \in \mathbb{Z}_k$ e, usando representantes entre 0 e $k-1$, $t + (k-1-t) = k-1$; o peso é novamente $(q+1)(k-1)$. Como esses são todos os vetores solução, esses pesos são mínimos. Substituindo $\lceil \frac{n}{3} \rceil$, obtemos $m_k(P_n) = (k-1)\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Exemplo 4.1

Para P_8 com três estados, $\lceil \frac{8}{3} \rceil$ é igual a 3. Portanto, $m_3(P_8) = 2 \cdot 3 = 6$.

Exemplo 4.2

Para P_8 com cinco estados, $m_5(P_8) = 4 \cdot 3 = 12$.

Nos grafos caminho, a recorrência associada ao sistema linear determina completamente a forma das soluções. O crescimento em blocos de três não é apenas uma regularidade experimental: ele decorre da periodicidade do vetor de acionamentos. A generalização para k estados mostra que o padrão de distribuição dos acionamentos ao longo dos vértices permanece o mesmo, enquanto o número de estados altera a quantidade de acionamentos necessária.

4.5 Sistema associado ao caminho

Pelo Lema 4.2, verificaremos as soluções de P_3, P_5 e P_7 para 3 estados.

Considerando P_3, seja $V(P_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$, e seja $a_i \in \mathbb{Z}_3$ o número de acionamentos diretos realizados em v_i, considerando módulo 3.

$$(a_1,\ a_2,\ a_3) = (t,\ 2 - t,\ 0).$$

Como t representa a quantidade de acionamentos de v_1, então $t = 0$, $t = 1$ ou $t = 2$.

- Para $t = 0$: $(a_1, a_2, a_3) = (0, 2, 0)$.

Resolve o problema, pois cada vértice recebe, ao todo, dois incrementos de estado decorrentes dos acionamentos realizados nele próprio e em seus vizinhos.

- Para $t = 1$: $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 0)$.

Não resolve o problema, pois o vértice v_3 recebe apenas um incremento, já que $a_2 + a_3 = 1$ e, portanto, não atinge o estado 2.

- Para $t = 2$: $(a_1, a_2, a_3) = (2, 0, 0)$.

Não resolve o problema, pois o vértice v_3 não recebe nenhum incremento, já que $a_2 + a_3 = 0$, e permanece no estado 0.

Assim, a única solução é acionar o vértice v_2 duas vezes.

$$(a_1, a_2, a_3) = (0, 2, 0).$$

Considerando P_5: Temos $V(P_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, e seja $a_i \in \mathbb{Z}_3$ o número de acionamentos diretos realizados em v_i, considerado módulo 3.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (t, 2 - t, 0,\ t,\ 2 - t).$$

Como t representa a quantidade de acionamentos de v_1, então $t = 0$, $t = 1$, ou $t = 2$.

a) Para $t = 0$:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (0, 2, 0,\ 0,\ 2).$$

Resolve o problema, pois, considerando os acionamentos realizados em cada vértice e em seus vizinhos, cada vértice recebe um total congruente a 2 módulo 3 de incrementos de estado.

- Para $t = 1$:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 1, 0, 1, 1).$$

Resolve o problema, pois, considerando os acionamentos realizados em cada vértice e em seus vizinhos, cada vértice recebe um total congruente a 2 módulo 3 de incrementos de estado.

- Para $t = 2$:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2, 0, 0, 2, 0).$$

Resolve o problema, pois, considerando os acionamentos realizados em cada vértice e em seus vizinhos, cada vértice recebe um total congruente a 2 módulo 3 de incrementos de estado.

Logo, há três soluções:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (0, 2, 0, 0, 2),$$
$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 1, 0, 1, 1),$$
$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2, 0, 0, 2, 0).$$

Considerando P_7, seja $V(P_7) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, e seja $a_i \in \mathbb{Z}_3$ o número de acionamentos diretos realizados em v_i, considerado módulo 3.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (t, 2 - t, 0, t, 2 - t, 0, t).$$

Como t representa a quantidade de acionamentos de v_1, então $t = 0, t = 1$ ou $t = 2$.

- Para $t = 0$:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (0, 2, 0, 0, 2, 0, 0).$$

Não resolve o problema, pois o vértice v_7 recebe $a_6 + a_7 = 0$ incrementos e permanece no estado 0.

- Para $t = 1$:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1).$$

Não resolve o problema, pois o vértice v_7 recebe $a_6 + a_7 = 1$ incremento e, portanto, termina no estado 1.

- Para $t = 2$:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (2, 0, 0, 2, 0, 0, 2).$$

Resolve o problema, pois cada vértice recebe, ao todo, dois incrementos de estado decorrentes dos acionamentos realizados nele próprio e em seus vizinhos.

Logo há apenas uma solução:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (2, 0, 0, 2, 0, 0, 2).$$

Os grafos caminho analisados neste capítulo também compõem o jogo digital desenvolvido como produto educacional. No jogo, o estudante pode escolher caminhos com qualquer quantidade de vértices a partir de dois e selecionar qualquer quantidade inteira de estados a partir de dois, sem limite máximo predefinido, além de experimentar diferentes sequências de acionamentos, observar a repetição de padrões e comparar a quantidade de movimentos de sua estratégia com os mínimos demonstrados neste capítulo. A extensão para k estados apresentada matematicamente permanece um resultado específico da família dos caminhos.

5 O JOGO *LIGHTS OUT* EM GRAFOS CICLO

O grafo ciclo C_n, $\text{com } n \geq 3$, é obtido ao adicionar uma aresta entre as extremidades do caminho P_n. Embora essa modificação corresponda à inclusão de uma única aresta, ela altera a estrutura do grafo fazendo com que os vértices que possuíam grau 1, passem a ter grau 2.

Neste capítulo, considera-se a passagem da configuração uniforme vermelha para a configuração uniforme verde nos ciclos C_n. A solubilidade de ciclos no *Lights Out* sobre $\mathbb{Z}_k$ já foi estudada por Giffen e Parker (2013, p. 279–282), que apresentam condições gerais em função de n, de k e de congruências módulo 3.

A abordagem desenvolvida aqui concentra-se na configuração uniforme adotada na dissertação. Para três estados, obtém-se uma classificação completa dos ciclos C_n e determina-se o mínimo nos casos solucionáveis. Para k estados, o ciclo C_4 e a família C_{3m} são apresentados primeiro como casos concretos; ao final do capítulo, esses argumentos são reunidos em uma classificação da transformação uniforme em C_n para qualquer $k \geq 2$.

A demonstração para três estados utiliza a contagem total de incrementos produzidos pelos acionamentos. No caso geral, a comparação entre equações consecutivas mostra que os acionamentos apresentam periodicidade de período três. Essa periodicidade, combinada com a forma como o ciclo se fecha, permite separar os casos em que 3 divide n daqueles em que 3 não divide n e determinar, para a configuração uniforme considerada, tanto a existência de solução quanto o número mínimo de acionamentos.

5.1 Configuração do problema para três estados

No jogo com três estados, cada vértice assume um dos valores 0, 1 e 2. A configuração inicial é $(0, 0, \ldots, 0)$, a configuração objetivo é $(2, 2, \ldots, 2)$, e cada acionamento altera o próprio vértice e os seus dois vizinhos.

Quando forem considerados k estados, os valores possíveis serão $0, 1, \ldots, k-1$, os cálculos serão realizados em Z_k e a configuração objetivo uniforme será $(k-1, k-1, \ldots, k-1)$.

5.2 Resultados obtidos manualmente

Os primeiros ciclos múltiplos de três foram resolvidos manualmente. Os valores encontrados são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Número mínimo de acionamentos em ciclos com quantidade de vértices múltipla de três

Ciclo	Número mínimo de acionamentos
C_3	2
C_6	4
C_9	6
C_{12}	8

Fonte: O autor, 2026.

5.3 Classificação dos ciclos no jogo de três estados

Giffen e Parker (2013, p. 279–282) apresentam uma caracterização mais ampla da solubilidade dos ciclos sobre $\mathbb{Z}_k$. Nesta seção, considera-se apenas a passagem da configuração uniforme 0 para a configuração uniforme 2 no jogo de três estados. A demonstração a seguir utiliza uma contagem direta dos incrementos produzidos pelos acionamentos e fornece, nesse contexto, uma classificação completa dos ciclos C_n.

Teorema 5.1

Seja C_n o ciclo com $n \geq 3$ vértices, onde n é um número natural. No *Lights Out* de três estados, de configuração uniforme 0 para a uniforme 2, existe solução se, e somente se, $3|n$. Se $n = 3m, \text{com}, m \geq 1$, então o número mínimo de acionamentos do ciclo com 3 estados é dado por $m_3(C_n) = 2m = \frac{2n}{3}$.

Demonstração

($\Rightarrow$) Suponha que uma solução use r acionamentos. Se b_i é o número de incrementos recebidos por v_i, então $b_i \equiv 2\ (mod\ 3)$, logo $b_i = 2 + 3q_i$, com $q_i \geq 0$. Seja $B = \sum_{i=1}^{n} b_i$ o número total de incrementos recebidos pelos vértices, contando todos os incrementos produzidos pelos acionamentos. Assim $B = \sum_{i=1}^{n} b_i = 2n + 3\sum_{i=1}^{n} q_i$. Como cada acionamento afeta exatamente três vértices, $B = 3r$. Portanto $2n \equiv 0\ (mod\ 3)$, e, como $MDC(2, 3) = 1$, segue $3|n$.

($\Leftarrow$) Suponha que $3|n$. Então $n = 3m$, para algum $m \geq 1$. Acione duas vezes cada vértice v_1, v_4, v_7, ..., v_{3m-2}. Considerando os índices módulo n, a vizinhança fechada de cada vértice v_{3ij} é $N[v_{3ij+1}] = \{v_{3ij}, v_{3ij+1}, v_{3ij+2}\}$, para $j = 0, 1, \ldots, m-1$, com índices considerando módulo n. Esses m conjuntos são disjuntos e, juntos, contêm os $3m$ vértices de C_n; portanto, particionam $V(C_n)$. Assim cada vértice recebe exatamente dois incrementos. Logo $2m$ acionamentos resolvem o jogo.

Minimalidade. Em qualquer solução, $b_i = 2 + 3q_i \geq 2$ para cada um dos $3m$ vértices. Portanto, os vértices devem receber, no total, pelo menos $3m \cdot 2 = 6m$ incrementos. Como cada acionamento produz exatamente três incrementos, se r é o número de acionamentos, então $3r \geq 6m$, isto é, $r \geq 2m$. A construção anterior atinge exatamente $2m$ acionamentos, e portanto atinge esse limite inferior. Logo $m_3(C_n) = 2m = \frac{2n}{3}$.

5.4 Exemplos de soluções

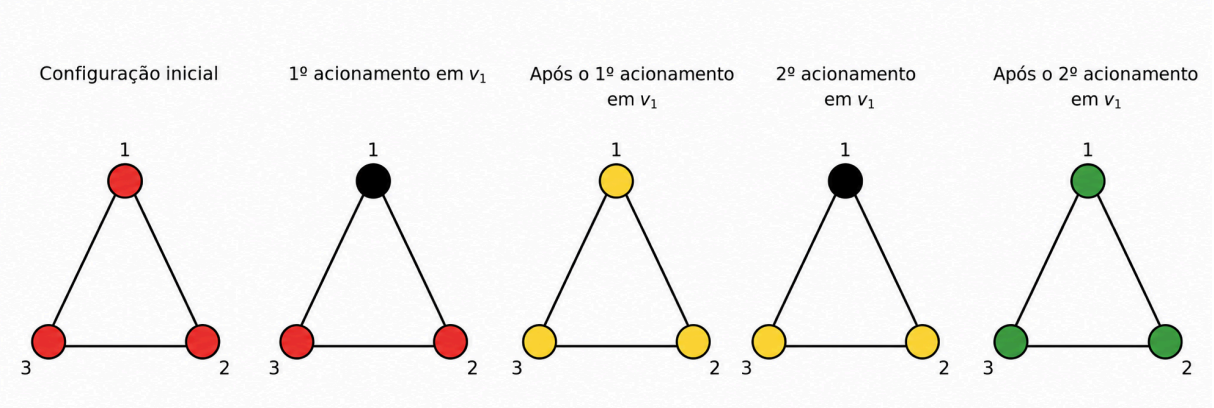
Para C_3, um acionamento afeta todos os três vértices. Dessa forma, dois acionamentos em qualquer vértice transformam a configuração uniforme 0 na configuração uniforme 2.

Para C_6, os vértices v_1 e v_4 são acionados duas vezes cada. As vizinhanças fechadas $N[v_1]$ e $N[v_4]$ são disjuntas e dividem os seis vértices em dois blocos de três.

Para C_9, os vértices v_1, v_4 e v_7 são acionados duas vezes cada. Suas vizinhanças fechadas formam três blocos disjuntos que cobrem todos os vértices. O mesmo padrão estende-se a todo ciclo C_{3m}.

As Figuras 14, 15 e 16 apresentam sequências mínimas para C_3, C_6 e C_9.

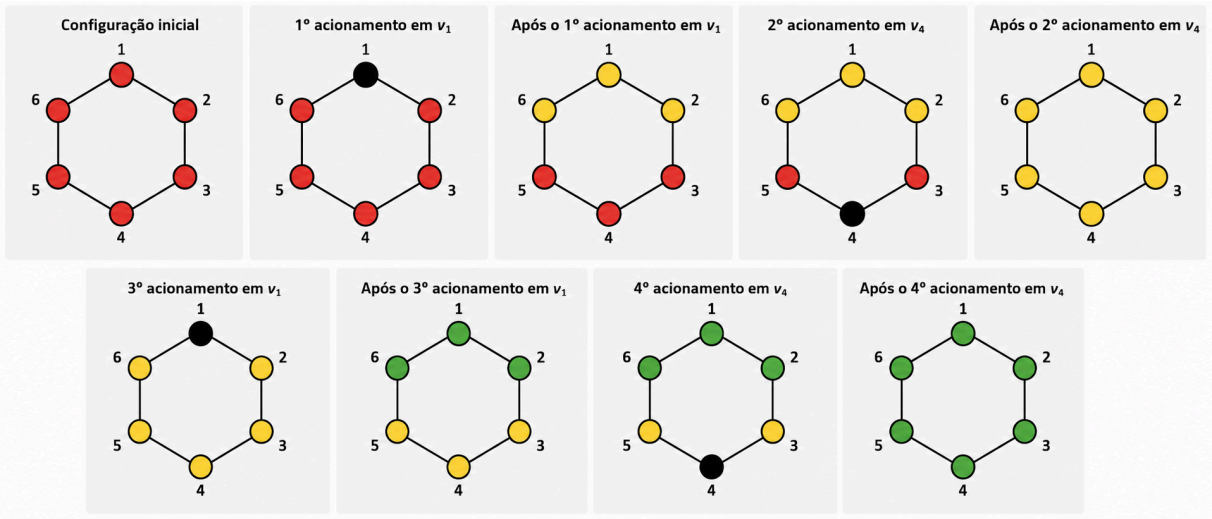
Figura 14 – Resolução do ciclo C_3 com dois acionamentos



Fonte: O autor, 2026.

No ciclo C_3, qualquer vértice pode ser acionado duas vezes, pois sua vizinhança fechada contém os três vértices.

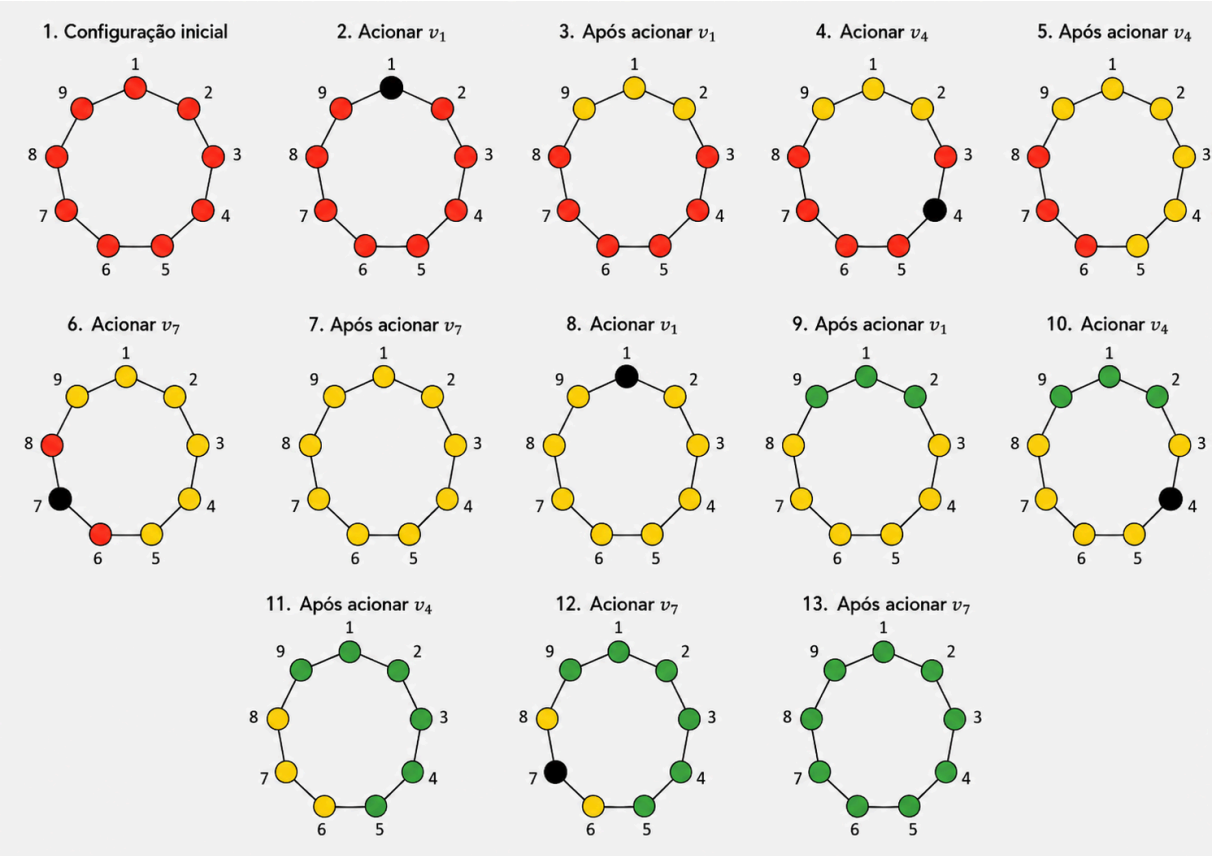
Figura 15 – Resolução do ciclo C_6 com quatro acionamentos



Fonte: O autor, 2026.

Na sequência apresentada, os vértices v_1 e v_4 são acionados duas vezes cada. Suas vizinhanças fechadas dividem os seis vértices do ciclo em dois grupos de três vértices. Pela Proposição 3.1, a ordem dos acionamentos não altera a configuração final.

Figura 16 – Resolução do ciclo C_9 com seis acionamentos



Fonte: O autor, 2026.

Para C_9, os vértices v_1, v_4 e v_7 são acionados duas vezes cada. O mesmo padrão estende-se a todo ciclo C_{3m}.

5.5 Ciclos com número de vértices não múltiplos de três

O Teorema 5.1 mostra que, no jogo de três estados e para a configuração uniforme considerada, os ciclos cuja ordem não é múltipla de três não possuem solução. De fato, se $n \equiv 1\ (mod\ 3)$ ou $n \equiv 2\ (mod\ 3)$, a soma dos incrementos necessários em todos os vértices não é divisível por três, enquanto cada acionamento sempre produz exatamente três incrementos.

Em particular, como 4 não é múltiplo de três, o ciclo C_4 não possui solução no jogo de três estados. A seção seguinte mantém o estudo de C_4 com k estados, no qual a existência de solução passa a depender também do valor de k.

5.6 O ciclo C_4 com k estados

Considere o ciclo C_4 com vértices v_1, v_2, v_3, v_4, nessa ordem. Cada acionamento altera o vértice escolhido e os seus dois vizinhos. Portanto, todo acionamento produz exatamente três incrementos de estado.

A ideia pode ser observada inicialmente em alguns valores de k:

Para $k = 3$, cada vértice precisa terminar no estado 2. Os números congruentes a 2 módulo 3 são $2, 5, 8, 11, \ldots$, e nenhum deles é múltiplo de 3. Logo, não há solução.

Esse caso corresponde à impossibilidade já ilustrada na Figura 9 para o jogo de três estados sobre C_4.

Para $k = 5$, cada vértice precisa receber uma quantidade de incrementos congruente a 4 módulo 5. A sequência $4, 9, 14, 19, \ldots$ contém o múltiplo de 3 igual a 9. Assim, cada vértice pode receber nove incrementos, o que corresponde a três acionamentos em cada vértice e a doze acionamentos no total.

Para $k = 7$, cada vértice precisa receber uma quantidade de incrementos congruente a 6 módulo 7. Como 6 já é múltiplo de 3, cada vértice pode ser acionado duas vezes, totalizando oito acionamentos.

Para $k = 9$, os números congruentes a 8 módulo 9 são $8, 17, 26, 35, \ldots$. Todos deixam resto 2 na divisão por 3, de modo que nenhum deles é múltiplo de 3. Logo, não há solução.

Os exemplos sugerem que a existência de solução depende do número de estados ser ou não divisível por 3. A proposição seguinte formaliza essa observação.

Proposição 5.1

No *Lights Out* com $k \geq 2$ estados sobre C_4, partindo da configuração uniforme 0 e buscando a configuração uniforme $k - 1$, existe solução se, e somente se, $MDC(3, k) = 1$.

Equivalentemente, a configuração é solucionável se, e somente se, 3 não divide k.

Demonstração

Sejam $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_k$ as quantidades de acionamentos dos vértices v_1, v_2, v_3, v_4, respectivamente. Para que todos os vértices terminem no estado $k-1$, deve valer o sistema

$$x_4 + x_1 + x_2 \equiv k - 1 (mod\ k),$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv k - 1 (mod\ k),$$
$$x_2 + x_3 + x_4 \equiv k - 1 (mod\ k),$$
$$x_3 + x_4 + x_1 \equiv k - 1 (mod\ k).$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtém-se $x_4 \equiv x_3 (mod\ k)$.

Subtraindo a terceira equação da segunda, $x_1 \equiv x_4 (mod\ k)$.

Subtraindo a quarta equação da terceira, $x_2 \equiv x_1 (mod\ k)$.

Consequentemente, $x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \equiv x (mod\ k)$, para algum $x \in \mathbb{Z}_k$. Substituindo esse valor em qualquer equação do sistema, o problema reduz-se à congruência $3x \equiv k - 1 (mod\ k)$. Reciprocamente, se x satisfaz a esta congruência, então o vetor (x, x, x, x) satisfaz as quatro equações do sistema.

Uma congruência da forma $3x \equiv k - 1 (mod\ k)$ possui solução se, e somente se, $MDC(3, k)$ divide $k - 1$. Se 3 divide k, então $MDC(3, k) = 3$, mas 3 não divide $k - 1$; nesse caso, não existe solução. Se 3 não divide k, então $MDC(3, k) = 1$, o número 3 é invertível em Z_k e a congruência possui uma única solução módulo k. Portanto, a configuração é solucionável exatamente quando $MDC(3, k) = 1$.

A mesma dedução permite determinar o número mínimo de acionamentos.

Corolário 5.1

Suponha que $3 \nmid k$. A solução em C_4 é constante, $(x, x, x, x)^T$. Se $k \equiv 1 (mod\ 3)$, $m_k(C_4) = \{\frac{4(k-1)}{3}$; se $k \equiv 2 (mod\ 3)$, $m_k(C_4) = \frac{4(2k-1)}{3}$; se $k \equiv 0 (mod\ 3)$, não há solução.

Demonstração

Se $k = 3q + 1$, então $k - 1 = 3q$ e a menor solução da congruência é $x = q = \frac{(k-1)}{3}$. Se $k = 3q + 2$, então $2k - 1 = 6q + 3 = 3(2q + 1)$, de modo que a menor solução é $x = 2q + 1 = \frac{(2k-1)}{3}$. Como os quatro vértices devem ser acionados a mesma quantidade de vezes e a solução em $\mathbb{Z}_k^4$ é única, o total mínimo é $4x$.

No caso específico da dissertação, em que $k = 3$, a proposição confirma que C_4 não possui solução para a passagem da configuração uniforme vermelha à configuração uniforme verde.

5.7 Generalização para k estados nos ciclos C_{3m}

Teorema 5.2

Sejam $k \geq 2$ e $m \geq 1$, onde k e m são números naturais. No *Lights Out* com k estados sobre C_{3m}, partindo da configuração uniforme 0 e buscando a configuração uniforme $k - 1$, o número mínimo de acionamentos é $m_k\left(C_{3m}\right) = m(k - 1)$.

Demonstração

Considere $n = 3m$ e, ao longo desta demonstração, interprete todos os índices dos vértices módulo n.

Acione $k - 1$ vezes cada um dos vértices $v_1, v_4, \ldots, v_{3m-2}$. Suas m vizinhanças fechadas particionam os $3m$ vértices, logo cada vértice recebe exatamente $k - 1$ incrementos. Portanto $m(k - 1)$ acionamentos são suficientes.

Para a minimalidade, se b_i é o número de incrementos recebidos por v_i em uma solução física, então $b_i \equiv k - 1\ (mod\ k)$, logo $b_i = (k - 1) + kq_i \geq k - 1$. Assim são necessárias ao menos $3m(k - 1)$ incrementos no total. Cada acionamento produz três incrementos, de modo que $3r \geq 3m(k - 1)$ e $r \geq m(k - 1)$. A construção atinge esse limite.

Nos ciclos C_{3m}, a partição do conjunto de vértices em vizinhanças fechadas fornece simultaneamente uma construção explícita e um limite inferior, permitindo determinar o número mínimo para três e para k estados.

Os casos analisados nas Seções 5.6 e 5.7 revelam duas situações complementares: quando o número de vértices é múltiplo de três, as vizinhanças fechadas podem particionar o ciclo; quando isso não ocorre, a periodicidade dos acionamentos impõe uma condição adicional ligada ao número de estados. A seção seguinte reúne essas duas ideias em uma classificação única para C_n com k estados.

5.8 Classificação geral para k estados nos ciclos C_n

As seções anteriores trataram separadamente o ciclo C_4 e a família C_{3m}. A periodicidade que aparece no sistema associado permite, porém, descrever em um único resultado a passagem da configuração uniforme 0 para a configuração uniforme $k-1$ em qualquer ciclo C_n, com $n \geq 3$.

Teorema 5.3

Sejam $n \geq 3$ e $k \geq 2$, onde n e k são números naturais. Considere o *Lights Out* com k estados sobre o ciclo C_n, partindo da configuração uniforme 0 e buscando a configuração uniforme $k-1$, existe solução se, e somente se, $3|n$ ou $MDC(3,k) = 1$.

Nos casos solucionáveis, o número mínimo de acionamentos é determinado pelas três situações abaixo.

Se 3 divide n:

$$m_k\left(C_n\right) = \frac{n(k-1)}{3}.$$

Se 3 não divide n e $k \equiv 1\ (mod\ 3)$:

$$m_k\left(C_n\right) = \frac{n(k-1)}{3}.$$

Se 3 não divide n e $k \equiv 2\ (mod\ 3)$:

$$m_k\left(C_n\right) = \frac{n(2k-1)}{3}.$$

Se 3 não divide n e 3 divide k, a transformação não possui solução.

Demonstração

Seja $a = \left(a_1, \ldots, a_n\right)^T \in Z_k^n$ um vetor de acionamentos que produz uma solução, e considere os índices módulo n, isto é, $a_0 = a_n$ e $a_{n+1} = a_1$. Para cada i, a equação correspondente ao vértice v_i é $a_{i-1} + a_i + a_{i+1} \equiv k - 1 \ (mod\ k)$.

A equação correspondente ao vértice seguinte, v_{i+1}, é $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \equiv k - 1 \ (mod\ k)$.

Escrevendo a equação correspondente ao vértice seguinte e subtraindo as duas congruências, os termos comuns se cancelam e obtemos $a_{i+2} \equiv a_{i-1} \ (mod\ k)$, ou, de maneira equivalente, $a_{i+3} \equiv a_i \ (mod\ k)$.

Portanto, todo vetor solução satisfaz uma relação de periodicidade de período três. Essa relação será usada para determinar a condição de existência de solução.
(⇒) Suponha que a transformação possua solução. Se $3|n$, uma das condições do enunciado já está satisfeita. Resta considerar o caso $3\nmid n$. Nesse caso, $MDC(3, n) = 1$.

Fixe um índice, por exemplo 1. Como 3 e n são coprimos, a soma sucessiva de 3 aos índices, considerada módulo n, percorre todos os resíduos módulo n. Em outras palavras, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existe um inteiro s tal que $j \equiv 1 + 3s \ (mod\ n)$.

Aplicando repetidamente a relação $a_{i+3} \equiv a_i \ (mod\ k)$, segue que $a_j \equiv a_1 \ (mod\ k)$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Consequentemente, todas as coordenadas do vetor de acionamentos são iguais a uma mesma classe $x \in Z_k$: $a_1 \equiv a_2 \equiv \cdots \equiv a_n \equiv x \ (mod\ k)$.

Substituindo esse valor em qualquer equação do ciclo, obtemos $3x \equiv k - 1 \ (mod\ k)$.

Uma congruência da forma $cx \equiv b \ (mod\ k)$ possui solução se, e somente se, $MDC(c, k)$ divide b. Assim, a congruência anterior pode possuir solução somente se $MDC(3, k) | (k - 1)$.

Como $MDC(3, k)$ só pode ser 1 ou 3, se $3|k$, então $MDC(3, k) = 3$, mas $3\nmid(k - 1)$. Logo, nesse caso, a congruência não possui solução. Portanto, quando $3\nmid n$, a existência de solução implica $MDC(3, k) = 1$.

Isso prova a necessidade da condição $3|n \quad ou \quad MDC(3, k) = 1$.

($\Leftarrow$) Agora suponha que $3|n$ ou $MDC(3,k)=1$.

Se $3|n$, escreva $n=3m,\ m\geq 1$.

Considere os vértices $v_1, v_4, v_7, \ldots, v_{3m-2}$.

Para $j=0,\ldots,m-1$, considerando os índices módulo n, a vizinhança fechada do vértice v_{3j+1} é $N\left[v_{3j+1}\right]=\{v_{3j}, v_{3j+1}, v_{3j+2}\}$.

Esses m conjuntos são dois a dois disjuntos e, juntos, contêm exatamente os $3m=n$ vértices do ciclo; portanto, particionam $V\left(C_n\right)$. Acione cada um dos vértices $v_1, v_4, \ldots, v_{3m-2}$ exatamente $k-1$ vezes. Cada vértice do ciclo pertence a exatamente uma dessas vizinhanças fechadas e, por isso, recebe exatamente $k-1$ incrementos. Assim, todos os vértices passam do estado 0 para o estado $k-1$, e a transformação possui solução.

Considere agora $3\nmid n$ e $MDC(3,k)=1$. Pelo critério de solubilidade de congruências, existe uma única classe $x\in Z_k$ que satisfaz $3x\equiv k-1\ (mod\ k)$.

Tome o vetor constante $a=(x,x,\ldots,x)^T$.

Em cada vértice v_i, a soma dos acionamentos realizados em v_{i-1}, v_i e v_{i+1} é congruente a $x+x+x=3x\equiv k-1\ (mod\ k)$.

Logo, todas as equações do sistema associado a C_n são satisfeitas, e esse vetor produz a configuração uniforme $k-1$. Portanto, também nesse caso a transformação possui solução. Isso demonstra a recíproca.

Resta justificar a minimalidade nos casos solucionáveis.

Minimalidade quando $3|n$**.** Escreva novamente $n=3m$. Considere uma solução física qualquer e denote por r o número total de acionamentos diretos realizados. Para cada vértice v_i, seja b_i o número total de incrementos recebidos por esse vértice ao longo da estratégia. Como v_i parte do estado 0 e termina no estado $k-1$, temos $b_i\equiv k-1\ (mod\ k)$.

Como b_i é um inteiro não negativo, existe $q_i\geq 0$ tal que $b_i=(k-1)+kq_i$.

Em particular, $b_i\geq k-1$.

Seja $B=\sum_{i=1}^{n} b_i$ o número total de incrementos recebidos por todos os vértices.

Então $B\geq n(k-1)$.

Por outro lado, cada acionamento direto em um ciclo afeta exatamente três vértices: o vértice acionado e seus dois vizinhos. Portanto, cada acionamento produz exatamente três incrementos e, como foram realizados r acionamentos, $B = 3r$.

Consequentemente, $3r \geq n(k-1)$, isto é, $r \geq \frac{n(k-1)}{3} = m(k-1)$.

A construção apresentada na prova da suficiência utiliza exatamente $m(k-1)$ acionamentos. Logo, ela atinge o limite inferior e é mínima. Assim, $m_k(C_n) = \frac{n(k-1)}{3}$, quando $3|n$.

Minimalidade quando $3\nmid n$**.** Nesse caso, já foi demonstrado que toda solução modular possui todas as coordenadas iguais à única classe $x \in \mathbb{Z}_k$ que satisfaz $3x \equiv k-1 \ (mod\ k)$.

Escolha para x o seu representante em $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Em uma solução física qualquer, denote por $c_i \in \mathbb{Z} \geq 0$ o número de acionamentos diretos realizados no vértice v_i. Como a classe de c_i módulo k deve ser igual a x, existe um inteiro $t_i \geq 0$ tal que $c_i = x + kt_i$.

Logo, $c_i \geq x$ para todo i. Se $r = \sum_{i=1}^{n} c_i$ é o número total de acionamentos, então $r \geq nx$.

Por outro lado, a estratégia constante que aciona cada vértice exatamente x vezes é uma solução, como já foi demonstrado na recíproca, e utiliza exatamente nx acionamentos. Portanto, $m_k(C_n) = nx$.

Resta escrever explicitamente o representante x em função de k.

Se $k \equiv 1 \ (mod\ 3)$, tome $k = 3q + 1$. Então $x = q = \frac{k-1}{3}$,

e, portanto, $m_k(C_n) = \frac{n(k-1)}{3}$.

Se $k \equiv 2 \ (mod\ 3)$, tome $k = 3q + 2$. Nesse caso, $x = 2q + 1 = \frac{2k-1}{3}$,

pois $3x = 2k - 1 \equiv k - 1 \ (mod\ k)$.

Logo, $m_k(C_n) = \frac{n(2k-1)}{3}$.

Finalmente, se $3\nmid n$ e $3|k$, a congruência $3x \equiv k-1 \ (mod\ k)$ não possui solução, conforme demonstrado na parte da necessidade. Portanto, a transformação não é solucionável nesse caso. Isso completa a classificação. Como consequência,

o resultado para três estados é recuperado imediatamente. Quando $k = 3$ e $3 \nmid n$, não há solução; quando $3|n$, o mínimo é $m_3(C_n) = \frac{2n}{3}$.

O ciclo C_4 também aparece como caso particular: para três estados não há solução e, para k não múltiplo de três, a existência de solução e o número mínimo de acionamentos são determinados pelas mesmas congruências do Teorema 5.3.

Os ciclos estudados neste capítulo também estão presentes no jogo digital. No ambiente, o estudante pode escolher ciclos com qualquer quantidade de vértices a partir de três e selecionar qualquer quantidade inteira de estados $k \geq 2$, sem limite máximo predefinido. A exploração permite comparar ciclos de diferentes ordens, testar estratégias e observar que algumas configurações podem não possuir solução, favorecendo a formulação de conjecturas antes da justificativa formal. A classificação para k estados obtida nesta seção refere-se à transformação uniforme de 0 para $k - 1$ nos grafos ciclo e não deve ser interpretada como uma classificação de configurações iniciais arbitrárias.

6 O JOGO *LIGHTS OUT* NOS GRAFOS DOS SÓLIDOS DE PLATÃO

Os sólidos de Platão são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares congruentes e cuja configuração local é a mesma em todos os vértices (Dolce; Pompeo, 2015, p. 127).

Os sólidos de Platão fornecem cinco grafos regulares. Essas estruturas permitem investigar como o número de vértices, o grau e a organização global das vizinhanças influenciam o *Lights Out*.

Os sólidos são apresentados em ordem crescente do número de vértices: tetraedro, octaedro, hexaedro, icosaedro e dodecaedro. Em todos os casos, considera-se inicialmente o jogo com três estados, partindo da configuração uniforme vermelha e buscando a configuração uniforme verde. Para o tetraedro, o hexaedro e o icosaedro, os resultados são posteriormente generalizados para k estados; o octaedro e o dodecaedro permanecem analisados apenas no caso de três estados.

Este capítulo dialoga diretamente com a dissertação de Salgueiro Júnior (2025) e com o artigo de Salgueiro Júnior et al. (2025).

Reorganizando os resultados de Salgueiro Júnior (2025, p. 53–56) pelo grafo efetivamente analisado, os mínimos na versão binária são 1 para o tetraedro, 6 para o octaedro, 2 para o hexaedro, 2 para o icosaedro e 6 para o dodecaedro. Na versão de três estados desenvolvida neste capítulo, os mínimos são, respectivamente, 2, 6, 4, 4 e 40. Essa comparação evidencia que a estrutura do grafo não é o único elemento relevante: a quantidade de estados também pode modificar de maneira significativa as estratégias e os números mínimos de acionamentos.

6.1 Características dos grafos

Tabela 4 – Características dos grafos dos sólidos de Platão

Sólido	Vértices	Arestas	Faces	Grau
Tetraedro	4	6	4	3
Octaedro	6	12	8	4
Hexaedro	8	12	6	3
Icosaedro	12	30	20	5
Dodecaedro	20	30	12	3

Fonte: O autor, 2026.

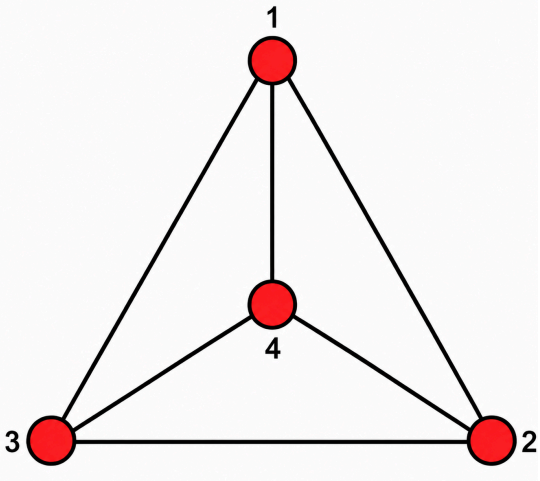
A tabela mostra que o grau e o número de vértices variam consideravelmente. Os resultados a seguir demonstram que nenhum desses parâmetros, isoladamente, determina o número mínimo de acionamentos.

6.2 O tetraedro

Todos os cálculos são realizados módulo 3. Assim, cada vértice precisa ser considerado apenas como acionado 0, 1 ou 2 vezes, pois três acionamentos no mesmo vértice produzem efeito nulo módulo 3.

O grafo do tetraedro possui quatro vértices e cada um deles é adjacente aos outros três. Portanto, ele é isomorfo ao grafo completo K_4, isto é, $T \cong K_4$. Consequentemente, o acionamento de qualquer vértice altera simultaneamente os quatro vértices. A Figura 17 apresenta uma representação desse grafo.

Figura 17 – Grafo do tetraedro



Fonte: O autor, 2026.

Teorema 6.1

Seja T o grafo do tetraedro. No *Lights Out* de três estados, da configuração uniforme 0 para a configuração uniforme 2, o número mínimo de acionamentos físicos é $m_3(T) = 2$.

Demonstração

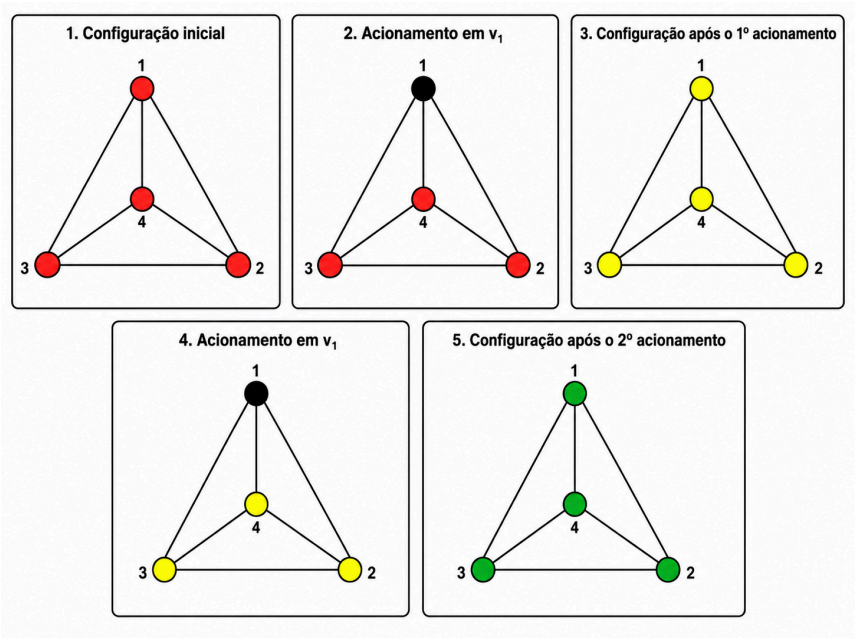
Como $T \cong K_4$, a vizinhança fechada de qualquer vértice v coincide com todo o conjunto de vértices, isto é, $N[v] = V(T)$. Assim, cada acionamento incrementa simultaneamente os quatro vértices.

Partindo da configuração uniforme 0, um único acionamento leva todos os vértices ao estado 1, portanto ainda não alcança a configuração objetivo. Um segundo acionamento, em qualquer vértice, acrescenta mais um incremento a todos os vértices e produz a configuração uniforme 2.

Logo, dois acionamentos são suficientes. Como nenhum acionamento deixa a configuração inalterada e um único acionamento produz a configuração uniforme 1, não é possível resolver o jogo com menos de dois acionamentos. Portanto, dois acionamentos são necessários e suficientes, e $m_3(T) = 2$.

A Figura 18 apresenta a sequência de acionamentos que leva os vértices da configuração uniforme vermelha à configuração uniforme verde.

Figura 18 – Sequência de acionamentos do tetraedro



Fonte: O autor, 2026.

A seguir, o resultado é generalizado para k estados, com $k \geq 2$, considerando a passagem da configuração uniforme 0 para a configuração uniforme $k - 1$.

Corolário 6.1

Seja $k \geq 2$. No *Lights Out* com k estados sobre o grafo do tetraedro T, da configuração uniforme 0 para a configuração uniforme $k - 1$, tem-se $m_k(T) = k - 1$.

Demonstração

Como $N[v] = V(T)$ para todo vértice v, cada acionamento acrescenta uma unidade ao estado de todos os quatro vértices. Assim, após r acionamentos, todos os vértices estão no estado congruente a r módulo k.

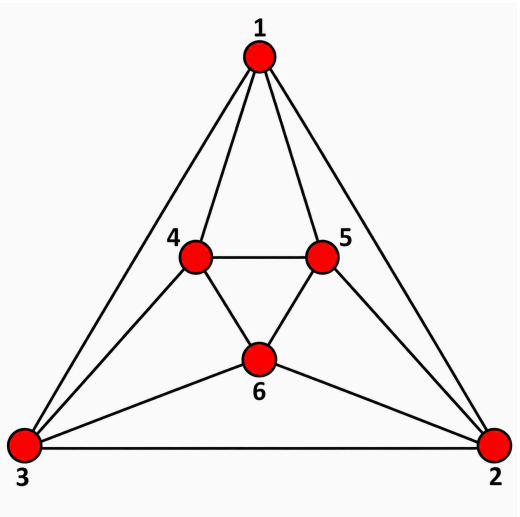
Para alcançar a configuração uniforme $k - 1$, é necessário e suficiente que $r \equiv k - 1 \ (mod\ k)$.

O menor inteiro não negativo que satisfaz essa congruência é $k - 1$. Portanto, $k - 1$ acionamentos são necessários e suficientes, e $m_k(T) = k - 1$.

6.3 O octaedro

O octaedro possui seis vértices e é 4-regular. Cada vértice possui exatamente um vértice oposto, que é o único não afetado quando o primeiro é acionado. A sua representação pode ser observada na Figura 19.

Figura 19 – Grafo do octaedro



Fonte: O autor, 2026.

Teorema 6.2

Seja O o grafo do octaedro. No *Lights Out* de três estados, da configuração uniforme 0 para a uniforme 2, a única solução em $\mathbb{Z}_3{}^6$ é $a = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, e, consequentemente, $m_3(O) = 6$.

Demonstração

Numere os vértices por $v_1, \ldots, v_6$. Defina a aplicação $\sigma : \{1, \ldots, 6\} \to \{1, \ldots, 6\}$ de modo que, para cada $i \in \{1, \ldots, 6\}$, o vértice $v_\{\sigma(i)\}$ seja o único vértice oposto a v_i. Como o oposto do oposto é o próprio vértice, vale $\sigma(\sigma(i)) = i$ para todo $i \in \{1, \ldots, 6\}$; portanto, σ é uma involução e, em particular, uma permutação dos seis índices. Seja $x_i \in \mathbb{Z}_3$ o número de acionamentos diretos de v_i considerado módulo 3, e defina $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \in \mathbb{Z}_3$.

O vértice v_i é afetado pelos acionamentos realizados nele próprio e em seus quatro vizinhos; entre os seis vértices, apenas os acionamentos em $v_{\sigma(i)}$ não o afetam. Portanto, o número de incrementos recebidos por v_i é congruente a $S - x_{\sigma(i)}$ módulo 3. Para que v_i termine no estado 2, deve valer $S - x_{\sigma(i)} \equiv 2 \ (mod\ 3)$, ou, equivalentemente, $x_{\sigma(i)} \equiv S - 2 \ (mod\ 3)$.

Como σ é uma permutação dos seis índices, quando i percorre $\{1, \ldots, 6\}$, o índice $\sigma(i)$ também percorre $\{1, \ldots, 6\}$. A congruência anterior mostra, então, que todas as coordenadas x_j são iguais a $S - 2$. Denotando esse valor comum por t, temos $x_1 = x_2 = \cdots = x_6 = t \ em\ \mathbb{Z}_3$.

Logo, $S = 6t \equiv 0 \ (mod\ 3)$.

Substituindo em $t \equiv S - 2 \ (mod\ 3)$ obtemos $t \equiv -2 \equiv 1 \ (mod\ 3)$.

Portanto, a única solução modular é $x = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$. Essa solução realmente funciona: acionando cada vértice uma vez, cada vértice recebe cinco incrementos, um proveniente do seu próprio acionamento e quatro provenientes de seus vizinhos; como $5 \equiv 2 \ (mod\ 3)$, todos terminam no estado 2.

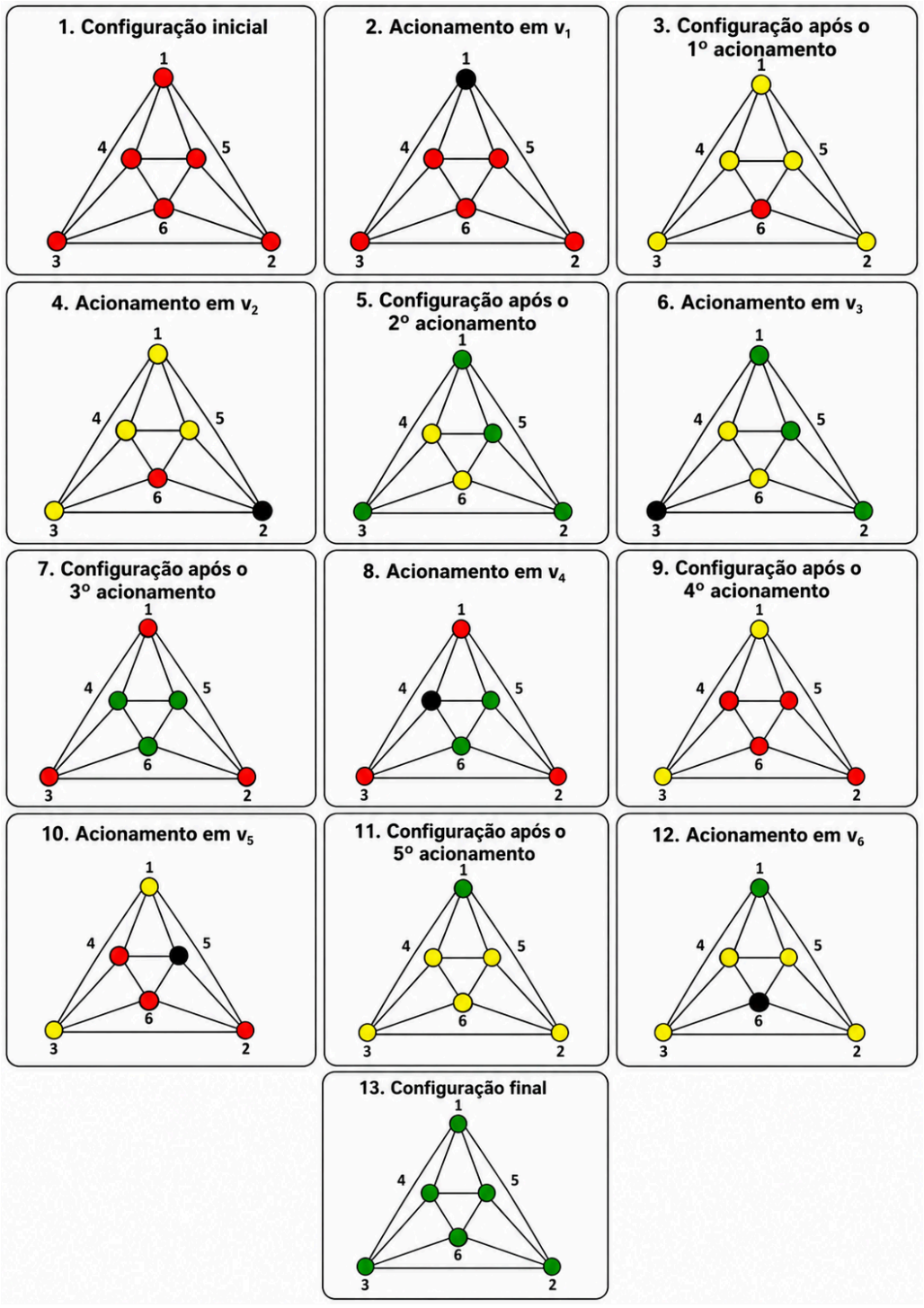
Resta justificar a minimalidade física. Seja s_i a quantidade não negativa de acionamentos diretos realizados em v_i por qualquer solução física e seja $r = \sum_{i=1}^{6} s_i$ o número total de acionamentos físicos dessa solução. Como a solução módulo 3 é

única e sua i-ésima coordenada é $x_i = 1$, os acionamentos físicos devem satisfazer $s_i \equiv x_i \equiv 1 \pmod 3$. Logo, para cada $i \in \{1, ..., 6\}$, existe um inteiro $q_i \geq 0$ tal que $s_i = 1 + 3q_i \geq 1$.

Somando para os seis vértices, obtemos $r = \sum_{i=1}^{6} s_i \geq 6$. Portanto, qualquer solução física utiliza pelo menos seis acionamentos. A solução exibida utiliza exatamente seis. Logo, $m_3(O) = 6$.

A Figura 20 apresenta a sequência de acionamentos que leva os vértices da configuração uniforme vermelha à configuração uniforme verde.

Figura 20 – Sequência de acionamentos do octaedro

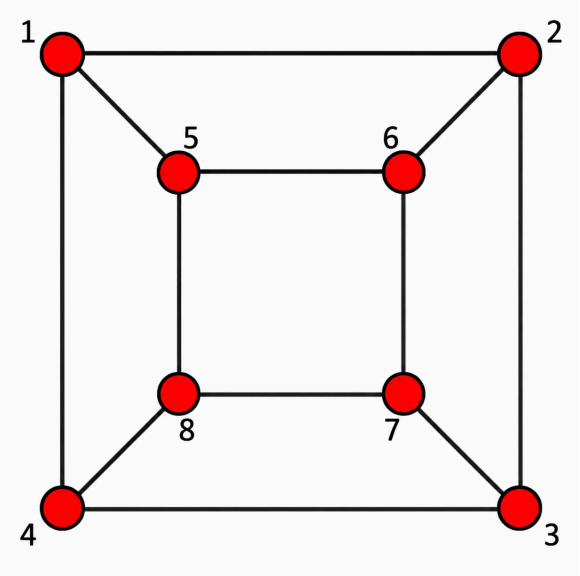


Fonte: O autor, 2026.

6.4 O hexaedro

O grafo do hexaedro possui oito vértices e é 3-regular. Para cada par de vértices opostos, suas vizinhanças fechadas são disjuntas e, juntas, contêm todos os oito vértices. A sua representação pode ser observada na Figura 21.

Figura 21 – Grafo do hexaedro



Fonte: O autor, 2026.

Teorema 6.3

Seja H o grafo do hexaedro. No *Lights Out* de três estados, da configuração uniforme 0 para a uniforme 2, tem-se $m_3(H) = 4$.

Demonstração

A demonstração será dividida em duas partes. Primeiro construiremos uma solução com quatro acionamentos. Depois mostraremos que nenhuma solução pode utilizar menos do que quatro.

Primeira parte: construção de uma solução.

O hexaedro possui oito vértices, e cada vértice possui três vizinhos. Assim, o acionamento de um vértice altera exatamente quatro vértices: o próprio vértice e seus três vizinhos.

Escolha dois vértices opostos do hexaedro, denotados por v e w. As vizinhanças fechadas $N[v]$ e $N[w]$ possuem quatro elementos cada, não têm vértices em comum e, juntas, contêm os oito vértices do hexaedro:

$N[v]$ e $N[w]$ são disjuntas e, juntas, formam $V(H)$.

Acione o vértice v duas vezes. Todos os quatro vértices de $N[v]$ recebem dois incrementos e passam do estado 0 ao estado 2. Em seguida, acione o vértice w duas vezes. Os quatro vértices de $N[w]$ também recebem dois incrementos e chegam ao estado 2.

Como as duas vizinhanças fechadas são disjuntas e cobrem o grafo inteiro, todos os oito vértices terminam verdes. Portanto, quatro acionamentos são suficientes.

Segunda parte: prova da minimalidade.

Seja r o número total de acionamentos efetivamente realizados, contando repetições. Cada acionamento afeta quatro vértices e, portanto, acrescenta quatro unidades à soma de todos os estados.

Depois de r acionamentos, a soma total dos incrementos é congruente a $4r$ módulo 3. Na configuração objetivo, os oito vértices estão no estado 2, de modo que a soma dos estados é $8 \cdot 2 = 16 \equiv 1\ (mod\ 3)$.

Consequentemente, toda solução deve satisfazer $4r \equiv 16\ (mod\ 3)$.

Como $4 \equiv 1\ (mod\ 3)$, essa congruência se reduz a $r \equiv 1\ (mod\ 3)$.

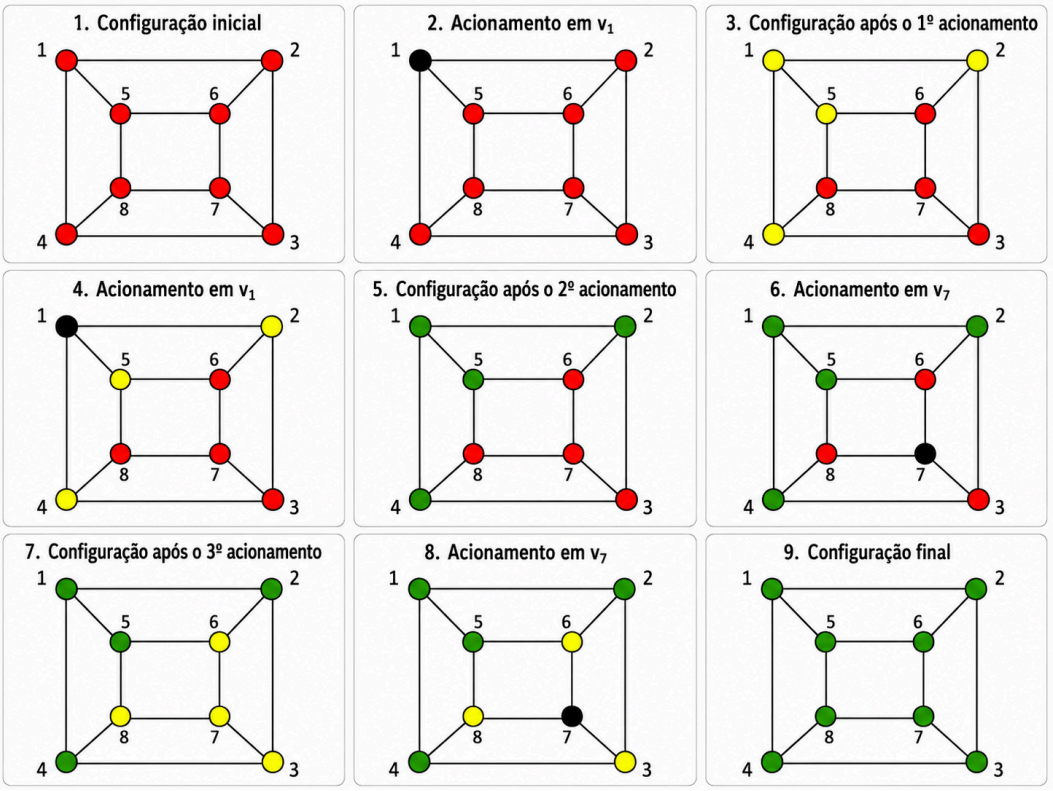
Os primeiros inteiros não negativos congruentes a 1 módulo 3 são 1, 4, 7, ... Entre os valores menores do que quatro, a única possibilidade seria $r = 1$.

Entretanto, um único acionamento altera somente quatro dos oito vértices. Os outros quatro permaneceriam no estado 0, de modo que um acionamento não pode resolver o jogo. Assim, são necessários pelo menos quatro acionamentos.

Como a construção da primeira parte utiliza exatamente quatro acionamentos, essa quantidade é mínima. Logo, $m_3(H) = 4$.

A Figura 22 apresenta a sequência de acionamentos que leva os vértices da configuração uniforme vermelha à configuração uniforme verde.

Figura 22 – Sequência de acionamentos do hexaedro



Fonte: O autor, 2026.

A mesma partição por vizinhanças fechadas permite generalizar o resultado para k estados, com $k \geq 2$.

Corolário 6.2

Seja $k \geq 2$. No *Lights Out* com k estados sobre o hexaedro H, da configuração uniforme 0 para a uniforme $k - 1$, tem-se $m_k(H) = 2(k - 1)$.

Demonstração

Escolha vértices opostos v e w. Como demonstrado no Teorema 6.3, $N[v]$ e $N[w]$ particionam $V(H)$. Acionando cada um de v e w exatamente $k - 1$ vezes, cada vértice recebe exatamente $k - 1$ incrementos e atinge o estado objetivo. Portanto, $2(k - 1)$ acionamentos são suficientes.

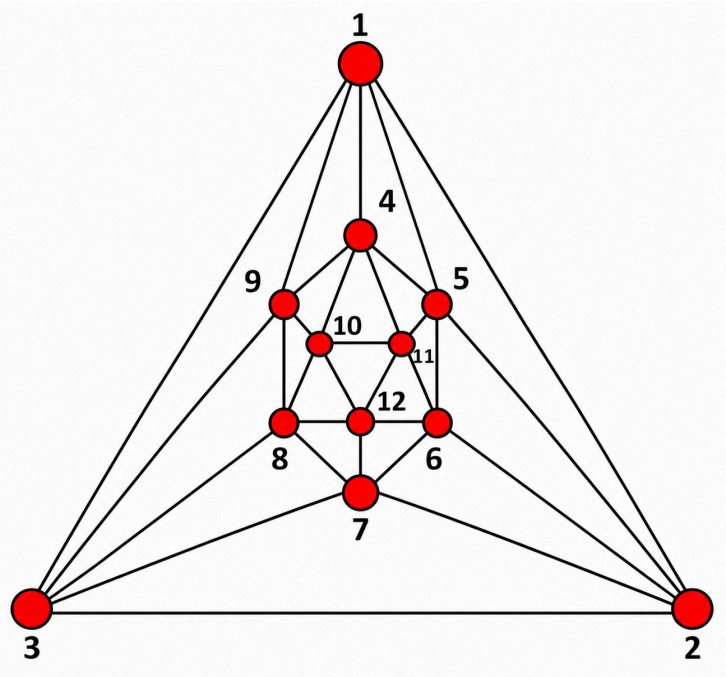
Para a minimalidade, seja b_i o número de incrementos recebidos por v_i em uma solução física. Para terminar no estado $k - 1$, deve valer $b_i \equiv k - 1 \ (mod\ k)$. Como $b_i \geq 0$, existe um inteiro $q_i \geq 0$ tal que $b_i = (k - 1) + kq_i \geq k - 1$.

Assim, os oito vértices exigem pelo menos $8(k-1)$ incrementos no total. Como cada acionamento produz exatamente quatro incrementos, se r é o número de acionamentos, então $4r \geq 8(k-1)$, e, portanto, $r \geq 2(k-1)$. A construção atinge esse limite; logo, $m_k(H) = 2(k-1)$.

6.5 O icosaedro

O icosaedro possui doze vértices e é 5-regular. Cada vértice possui um único vértice oposto. As vizinhanças fechadas de um par de vértices opostos são disjuntas, possuem seis vértices cada e particionam o conjunto de vértices. A sua representação pode ser observada na Figura 23.

Figura 23 – Grafo do icosaedro



Fonte: O autor, 2026.

Teorema 6.4

Seja I o grafo do icosaedro. No *Lights Out* de três estados, da configuração uniforme 0 para a uniforme 2, tem-se $m_3(I) = 4$.

Demonstração

A prova também será feita em duas etapas: primeiro será construída uma solução com quatro acionamentos; em seguida, será demonstrado que três acionamentos ou menos não podem ser suficientes.

Primeira etapa: construção de uma solução.

O icosaedro possui doze vértices, e cada vértice possui cinco vizinhos. Logo, o acionamento de um vértice afeta seis vértices: o próprio vértice e os seus cinco vizinhos.

Escolha dois vértices opostos v e w. No grafo do icosaedro, vértices opostos estão à distância três. Por isso, não existe vértice pertencente simultaneamente a $N[v]$ e $N[w]$; caso existisse, haveria um caminho de comprimento no máximo dois entre v e w.

Cada uma das vizinhanças fechadas $N[v]$ e $N[w]$ possui seis vértices. Como elas são disjuntas e o icosaedro possui doze vértices, as duas vizinhanças formam uma partição do conjunto de vértices: $N[v]$ e $N[w]$ são disjuntas e, juntas, formam $V(I)$.

Acionando v duas vezes, todos os seis vértices de $N[v]$ recebem dois incrementos. Acionando w duas vezes, os seis vértices de $N[w]$ também recebem dois incrementos. Assim, todos os doze vértices chegam ao estado 2. Portanto, quatro acionamentos são suficientes.

Segunda etapa: prova da minimalidade.

Suponha, por contradição, que o jogo pudesse ser resolvido com no máximo três acionamentos. Como cada acionamento afeta seis vértices, o número total de alterações, seria, no máximo, $3 \cdot 6 = 18$.

Com no máximo três acionamentos, cada vértice pode ser afetado 0, 1, 2 ou 3 vezes. Entre esses valores, o único congruente a 2 módulo 3 é o número 2. Portanto, para terminar no estado 2, cada um dos doze vértices teria de ser afetado exatamente duas vezes.

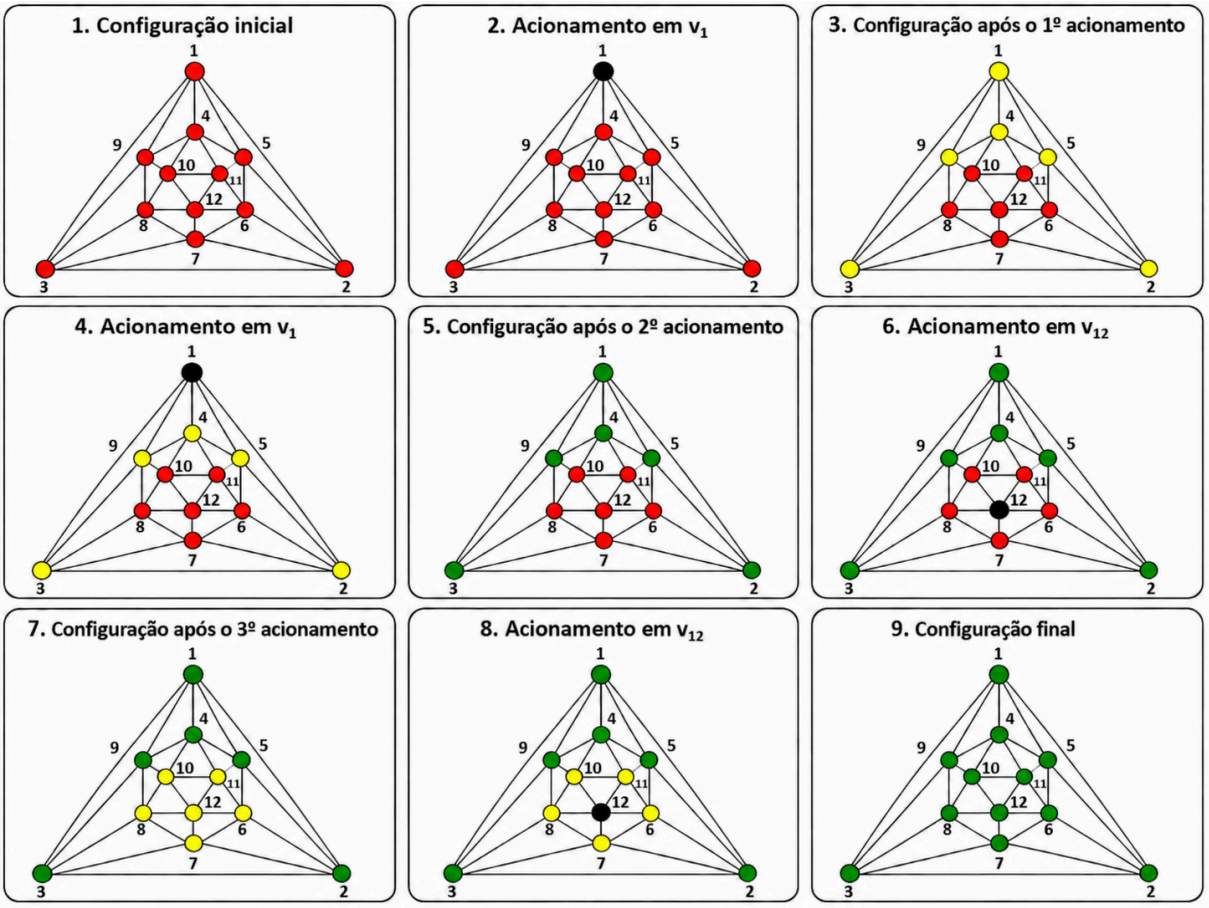
Isso exigiria um total de $12 \cdot 2 = 24$ alterações.

Contudo, três acionamentos produzem no máximo dezoito alterações. Como $18 < 24$, chegamos a uma contradição.

Logo, nenhuma solução utiliza três acionamentos ou menos. Como já construímos uma solução com quatro acionamentos, concluímos que $m_3(I) = 4$.

A Figura 24 demonstra a sequência de acionamentos para levar os vértices da cor vermelha à cor verde.

Figura 24 – Sequência de acionamentos do icosaedro



Fonte: O autor, 2026.

A partição do icosaedro por duas vizinhanças fechadas também fornece a generalização para k estados.

Corolário 6.3

Seja $k \geq 2$. No *Lights Out* com k estados sobre o icosaedro I, da configuração uniforme 0 para a uniforme $k - 1$, tem-se $m_k(I) = 2(k - 1)$.

Demonstração

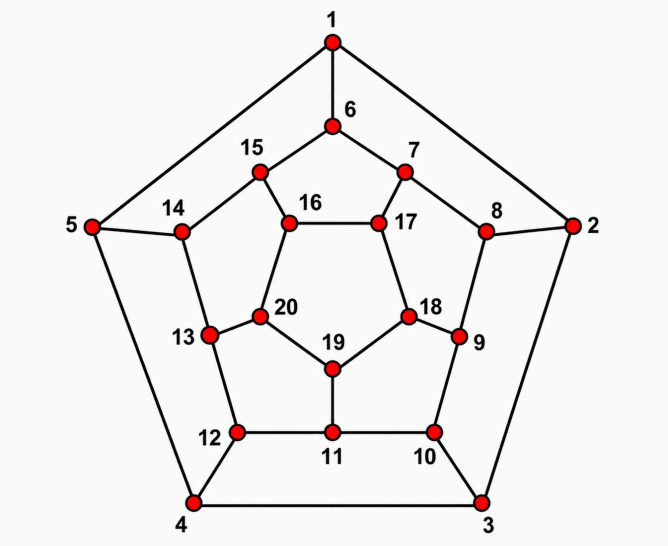
Escolha dois vértices opostos v e w. As vizinhanças fechadas $N[v]$ e $N[w]$ são disjuntas, possuem seis vértices cada e particionam os doze vértices do icosaedro. Acionando v exatamente $k-1$ vezes e w exatamente $k-1$ vezes, cada vértice recebe exatamente $k-1$ incrementos e chega ao estado objetivo. Assim, $2(k-1)$ acionamentos são suficientes.

Para provar a minimalidade, cada um dos doze vértices precisa receber pelo menos $k-1$ incrementos, de modo que qualquer solução deve produzir pelo menos $12(k-1)$ incrementos. Como cada acionamento afeta seis vértices, o número de acionamentos é pelo menos $\frac{12(k-1)}{6} = 2(k-1)$. A estratégia construída atinge exatamente esse valor e é, portanto, mínima.

6.6 O dodecaedro

O dodecaedro possui vinte vértices e é 3-regular. Apesar de ter o mesmo grau do hexaedro, sua matriz do jogo apresenta comportamento completamente diferente. A sua representação pode ser observada na Figura 25.

Figura 25 – Grafo do dodecaedro



Fonte: O autor, 2026.

Na etapa exploratória do cálculo do dodecaedro, foi utilizado o ChatGPT (OpenAI) como ferramenta de apoio. Foi fornecida à ferramenta a lista de adjacências correspondente à numeração da Figura 25, e não uma matriz pronta.

Em conteúdo, a solicitação foi: construir a matriz de adjacência A_D, formar a matriz do jogo $N_D = I_{20} + A_D$, calcular seu determinante e verificar a estratégia $2u$.

Os resultados numéricos foram posteriormente reproduzidos em Python com a biblioteca SymPy e conferidos matematicamente pela relação entre o determinante de $I_{20} + A_D$ e o polinômio característico de A_D, conforme demonstrado no lema a seguir.

Lema 6.1

Seja A_D a matriz de adjacência do grafo do dodecaedro e I_{20} a matriz identidade de ordem 20. Defina a matriz do jogo por $N_D = I_{20} + A_D$.

A matriz N_D é invertível sobre $\mathbb{Z}_3$.

Demonstração

Considere o polinômio característico da matriz de adjacência, definido por $p_A(x) = det(xI_{20} - A_D)$.

A partir do espectro do grafo do dodecaedro registrado por Saldanha e Tomei (1992, p. 406–407), esse polinômio pode ser escrito na forma $p_A(x) = x^4(x-3)(x-1)^5(x+2)^4(x^2-5)^3$.

A relação com o determinante da matriz do jogo é obtida avaliando o polinômio em $x = -1$. De fato, $p_A(-1) = det(-I_{20} - A_D) = det(-(I_{20} + A_D))$.

Como a matriz tem ordem 20 e 20 é par, multiplicar toda a matriz por -1 multiplica o determinante por $(-1)^{20} = 1$. Portanto, $p_A(-1) = det(I_{20} + A_D) = det(N_D)$.

Substituindo $x = -1$ na fatoração acima, $det(N_D) = (-1)^4(4)(-2)^5(1)^4(-4)^3 = -8192$.

Reduzindo módulo 3, obtemos $det(N_D) \equiv -8192 \equiv 1 \ (mod\ 3)$.

Como $1 \neq 0$ em $\mathbb{Z}_3$, o determinante de N_D é não nulo nesse corpo. Logo, N_D é invertível sobre $\mathbb{Z}_3$. A redução de Gauss–Jordan realizada em Python/SymPy

forneceu, de forma independente, vinte pivôs e a matriz identidade de ordem 20, confirmando o resultado.

Teorema 6.5

Seja D o grafo do dodecaedro, A_D sua matriz de adjacência, I_{20} a matriz identidade de ordem 20, $N_D = I_{20} + A_D$ a matriz do jogo e $u = (1, \ldots, 1)^T$ em $\mathbb{Z}_3^{20}$. No *Lights Out* de três estados, da configuração uniforme 0 para a uniforme 2, o sistema $N_D a \equiv 2u \pmod 3$ possui em $\mathbb{Z}_3^{20}$ a única solução $a = 2u$.

Consequentemente, $m_3(D) = 40$.

Demonstração

Seja D o grafo do dodecaedro. Para o dodecaedro, $N = I_{20} + A$.

A matriz I_{20} registra o efeito de um acionamento sobre o próprio vértice. A matriz A registra o efeito do mesmo acionamento sobre os vértices vizinhos. Dessa forma, N reúne, em uma única matriz, os dois efeitos que ocorrem simultaneamente em cada jogada. Essa modelagem é a empregada na literatura sobre o *Lights Out* em grafos.

No jogo de três estados, representamos vermelho por 0, amarelo por 1 e verde por 2. A configuração inicial é uniforme e vermelha, enquanto a configuração final desejada é uniforme e verde. Portanto, $i = 0 \ e \ f = 2u$, em que u é o vetor-coluna formado por vinte coordenadas iguais a 1:

$$u = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{Z}_3^{20}$$

Se a é o vetor de acionamentos, então a equação geral do jogo é $f \equiv i + Na \pmod 3$. Como $i = 0 \ e \ f = 2u$, a forma equivalente que precisamos resolver é $Na \equiv 2u \pmod 3$.

Considere o vetor de acionamentos $a = 2u = (2, 2, \ldots, 2)^T$.

Esse vetor representa uma estratégia muito simples: cada um dos vinte vértices é acionado exatamente duas vezes. Antes de escrever a conta matricial, podemos compreender o efeito dessa estratégia observando um único vértice.

Tomemos, por exemplo, o vértice v_1. Na numeração adotada para o dodecaedro, seus três vizinhos são v_2, v_5 e v_6. Como todos os vértices são acionados duas vezes, v_1 recebe:

• duas alterações causadas pelos dois acionamentos realizados no próprio v_1;

• duas alterações causadas pelos dois acionamentos de v_2;

• duas alterações causadas pelos dois acionamentos de v_5;

• duas alterações causadas pelos dois acionamentos de v_6.

Portanto, o vértice v_1 recebe, ao todo, $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ alterações.

Como o jogo possui três estados, contamos as alterações módulo 3. As seis primeiras alterações correspondem a duas voltas completas pelo ciclo das cores e não modificam o estado final. Sobram duas alterações:

$$8 = 6 + 2 \text{ e, portanto, } 8 \equiv 2 \ (mod\ 3).$$

Assim, v_1 passa do estado 0 para o estado 2. O mesmo raciocínio vale para qualquer outro vértice, pois o dodecaedro é 3-regular: todos os seus vértices possuem exatamente três vizinhos. Logo, ao acionar todos os vértices duas vezes, cada vértice recebe duas alterações próprias e mais seis alterações provenientes de seus três vizinhos.

$$2 + 3 \cdot 2 = 8 \equiv 2 \ (mod\ 3).$$

A igualdade matricial utilizada na demonstração apenas registra, de forma compacta, a contagem feita acima. Primeiro, analisemos o produto Au. Cada coordenada desse produto é a soma das coordenadas de u correspondentes aos vizinhos do vértice considerado. Como cada vértice possui exatamente três vizinhos e todas as coordenadas de u são iguais a 1, cada coordenada de Au é igual a 3. Portanto, $Au = 3u$.

Agora aplicamos a matriz do jogo ao vetor $2u$. Em vez de realizar todas as etapas em uma única linha, fazemos a distribuição passo a passo:

$$\begin{aligned} & N(2u) \\ &= (I_{20} + A)(2u) \\ &= I_{20}(2u) + A(2u) \\ &= 2u + 2Au \end{aligned}$$

$$= 2u + 2(3u)$$
$$= 2u + 6u$$

Concluímos, portanto, que $N(2u) \equiv 2u\ (mod\ 3)$.

Isso mostra que $a = 2u$ resolve o sistema do jogo. Em termos concretos, acionar cada um dos vinte vértices duas vezes transforma a configuração uniforme vermelha na configuração uniforme verde. A quantidade total de acionamentos dessa estratégia é $20 \cdot 2 = 40$.

Até este ponto, demonstramos apenas que quarenta acionamentos são suficientes. Ainda é necessário provar que nenhuma estratégia com menos de quarenta acionamentos pode resolver o jogo.

Pelo Lema 6.1, a matriz N é invertível sobre $\mathbb{Z}_3$. Portanto, o sistema $Na \equiv 2u\ (mod\ 3)$ possui uma única solução em $\mathbb{Z}_3^{20}$.

$$Na \equiv 2u\ (mod\ 3).$$

Como já mostramos que $a = 2u$ é uma solução, essa é necessariamente a única solução módulo 3.

Agora passamos da solução algébrica módulo 3 para uma sequência física de acionamentos. Seja c_i a quantidade de vezes que o vértice v_i é acionado em uma estratégia qualquer que resolva o jogo. Como a única solução módulo 3 tem todas as coordenadas iguais a 2, devemos ter $c_i \equiv 2\ (mod\ 3)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, 20$.

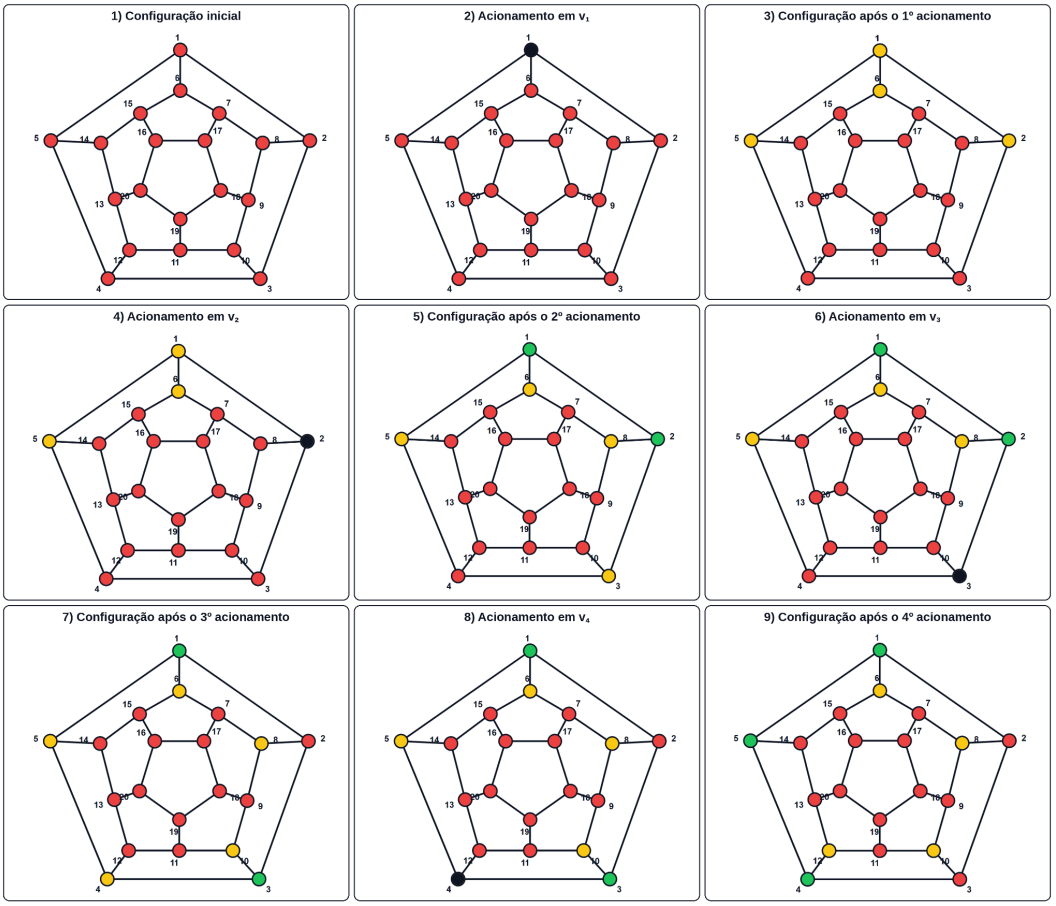
Essa congruência significa que cada número c_i pode ser escrito na forma $c_i = 2 + 3q_i$, em que q_i é um inteiro não negativo. Os valores possíveis para a quantidade de acionamentos em cada vértice são, portanto, 2, 5, 8, 11, e assim por diante. Em particular, nenhum vértice pode ser acionado menos de duas vezes em uma solução física.

Como o dodecaedro possui vinte vértices e cada um precisa ser acionado pelo menos duas vezes, qualquer solução utiliza no mínimo $20 \cdot 2 = 40$ acionamentos.

A estratégia construída anteriormente utiliza exatamente quarenta acionamentos. Portanto, esse limite inferior é atingido e concluímos que $m_3(D) = 40$.

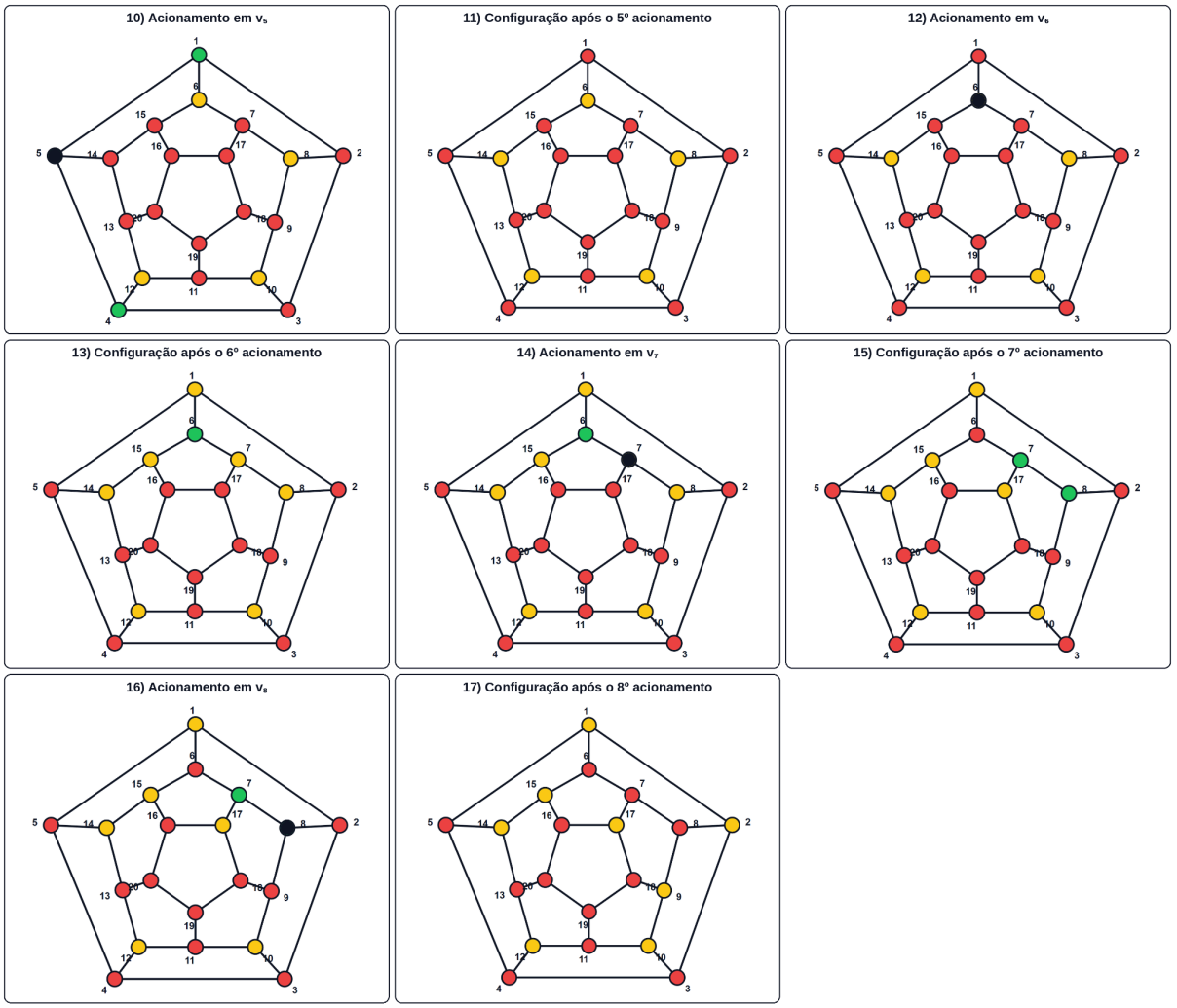
Observamos nas Figuras 26 a 35 a sequência de acionamentos, passo a passo, para a realização da solução mínima de quarenta acionamentos.

Figura 26 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 1



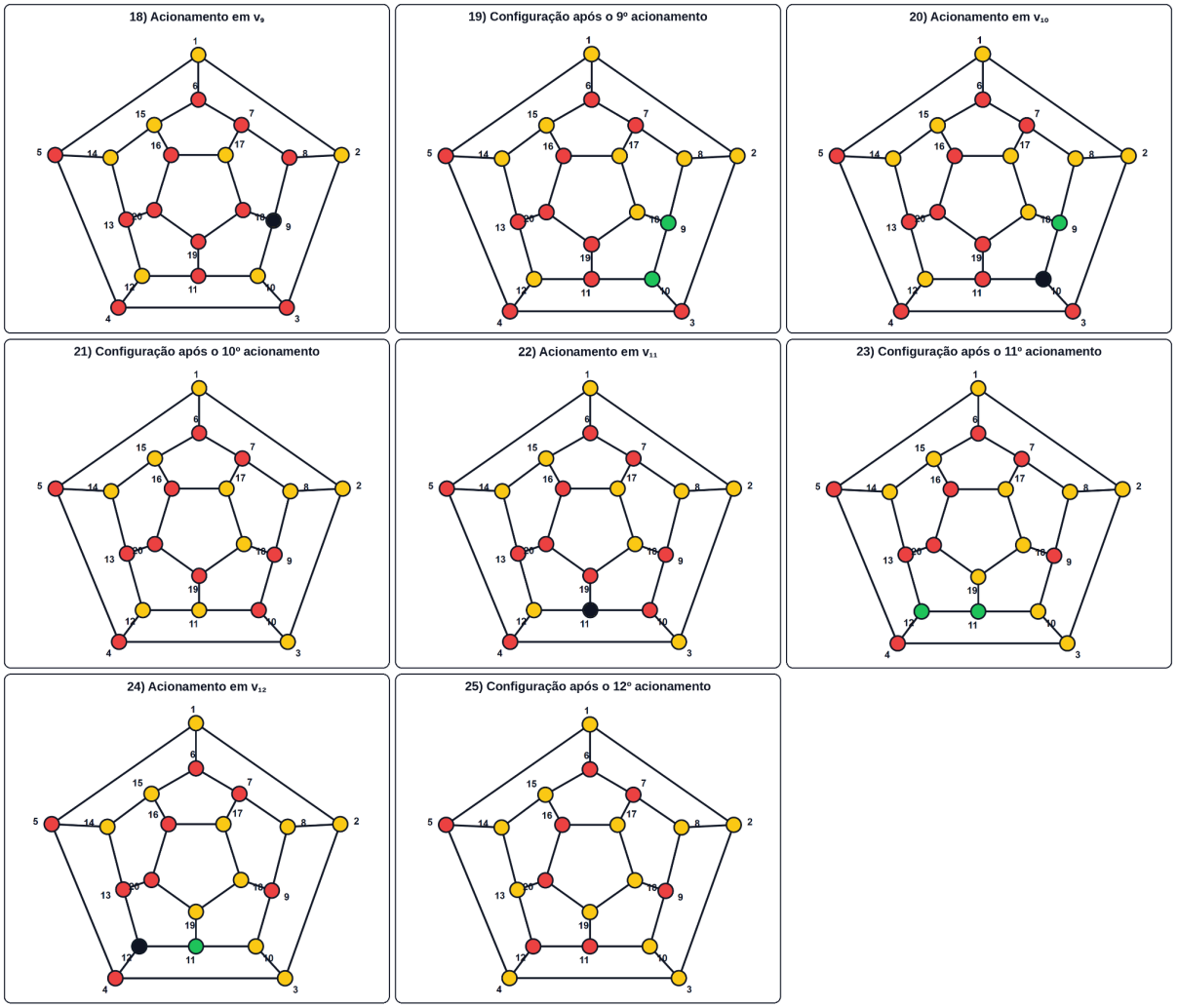
Fonte: O autor, 2026.

Figura 27 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 2



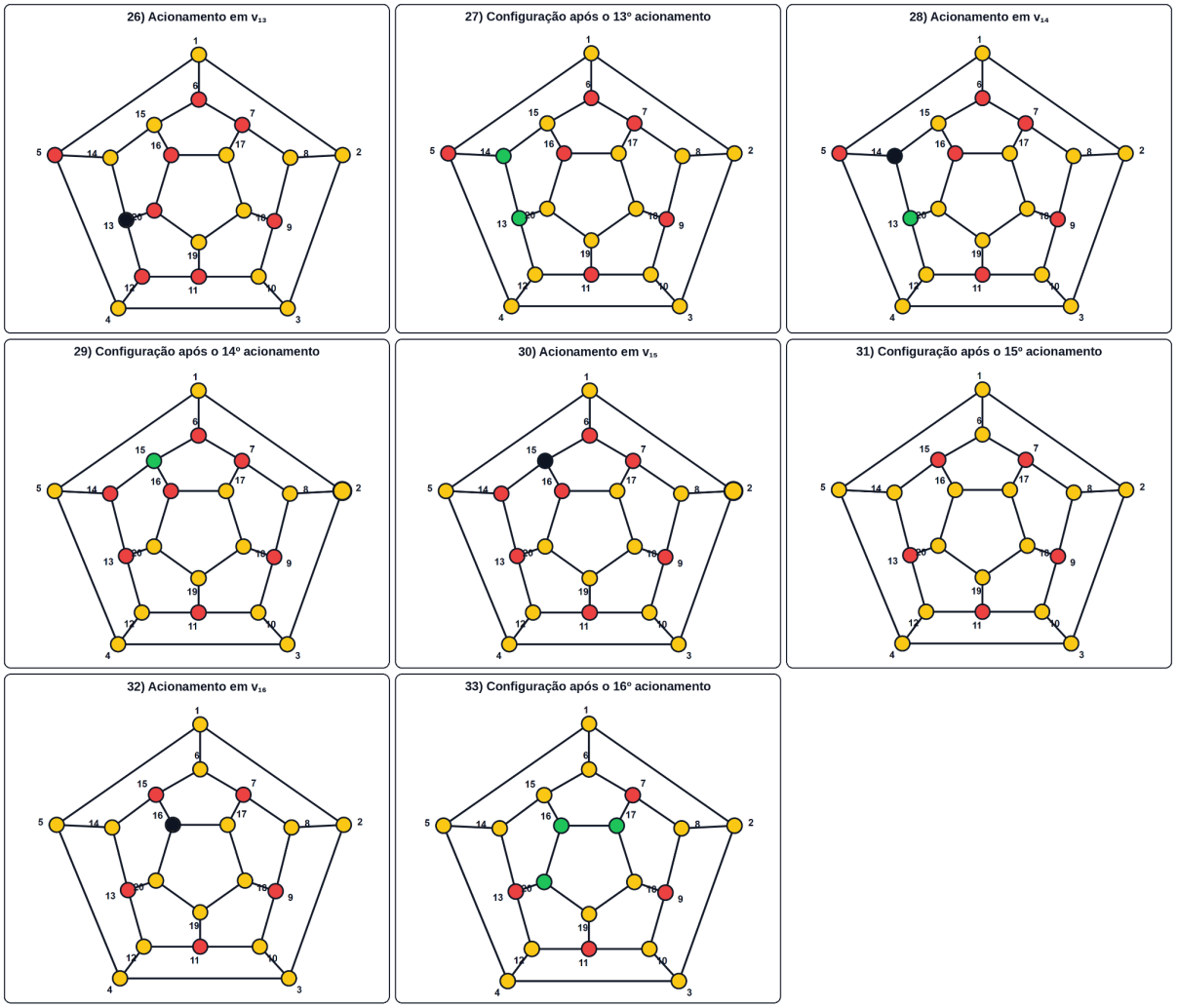
Fonte: O autor, 2026

Figura 28 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 3



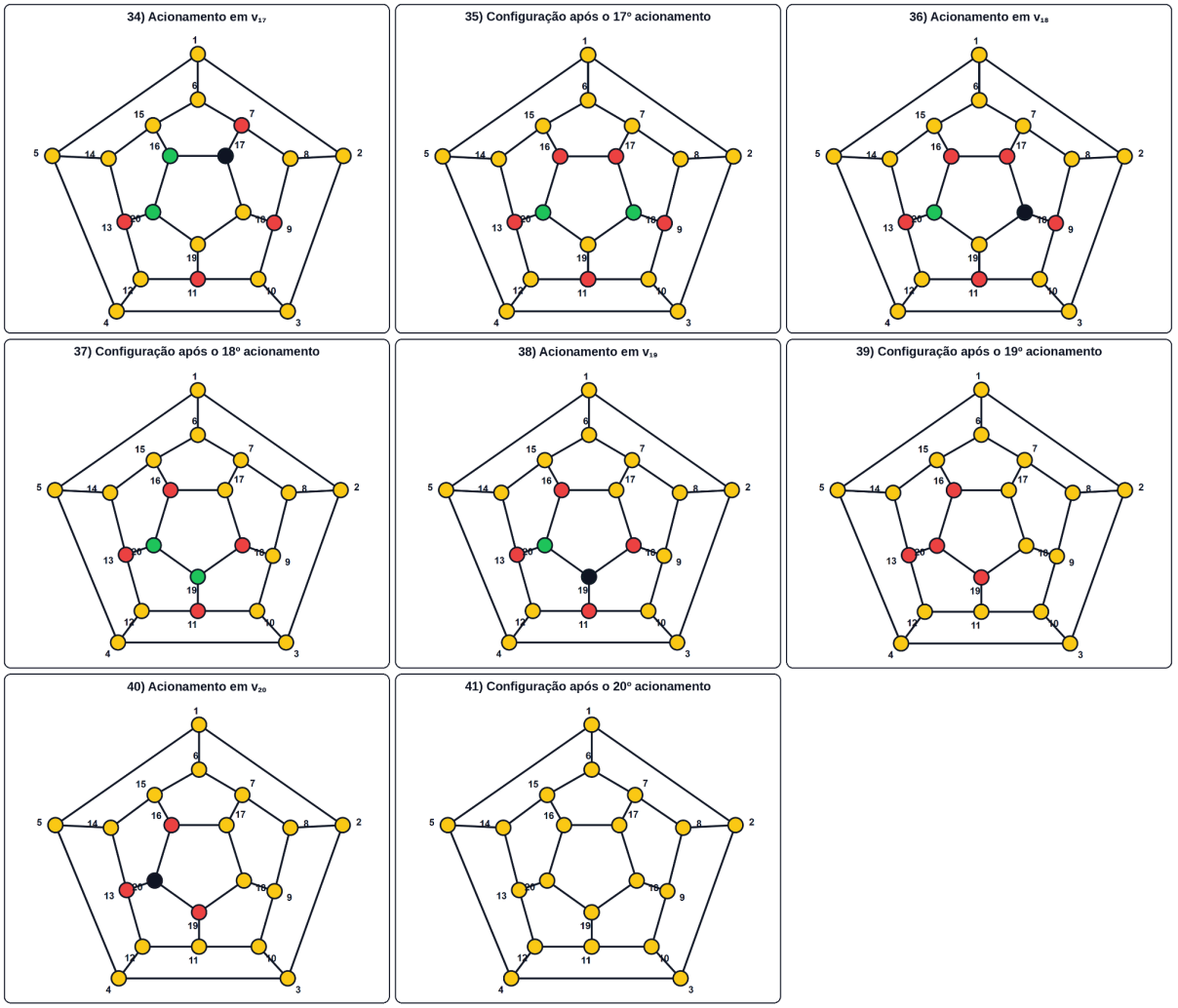
Fonte: O autor, 2026.

Figura 29 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 4



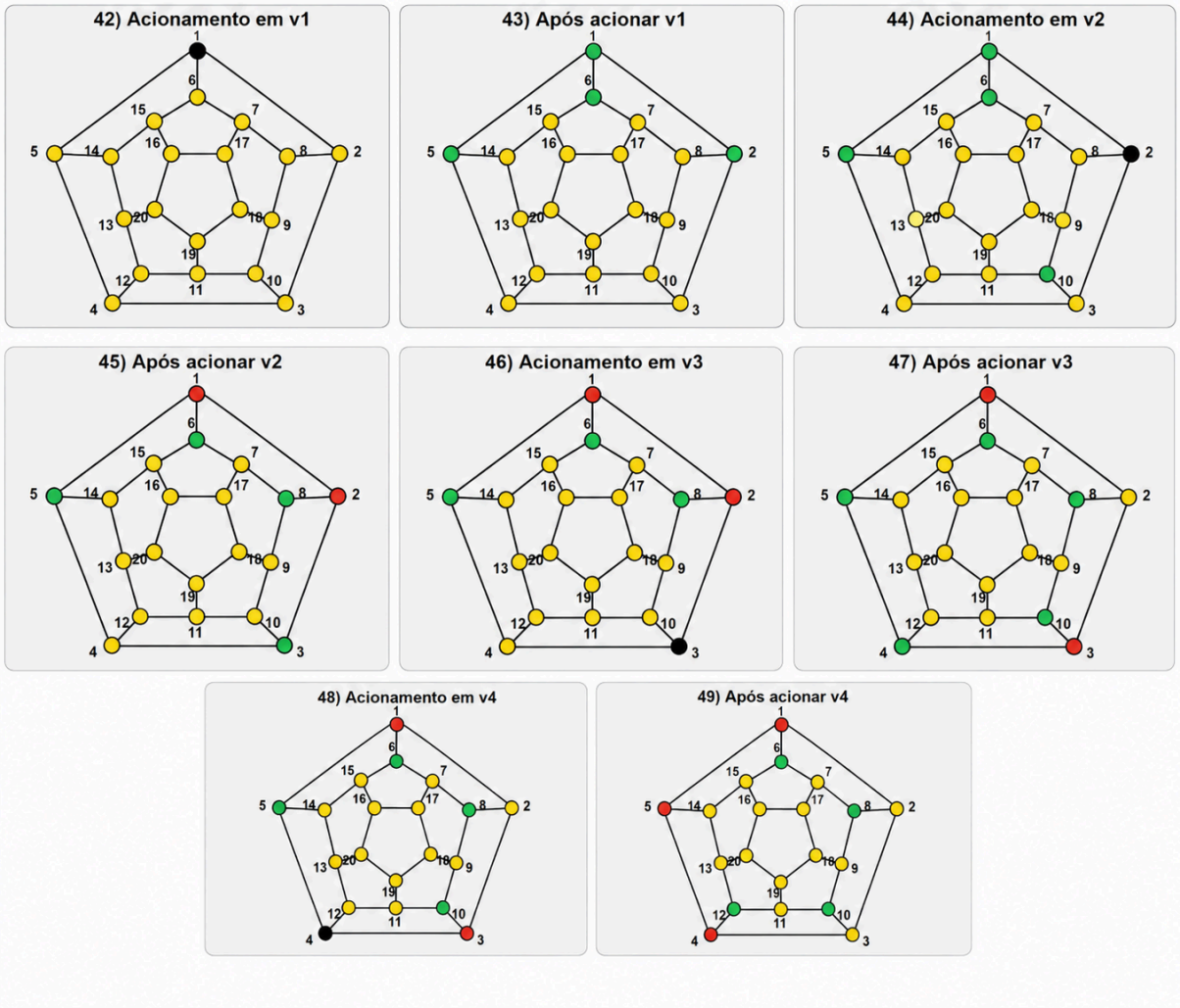
Fonte: O autor, 2026.

Figura 30 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 5



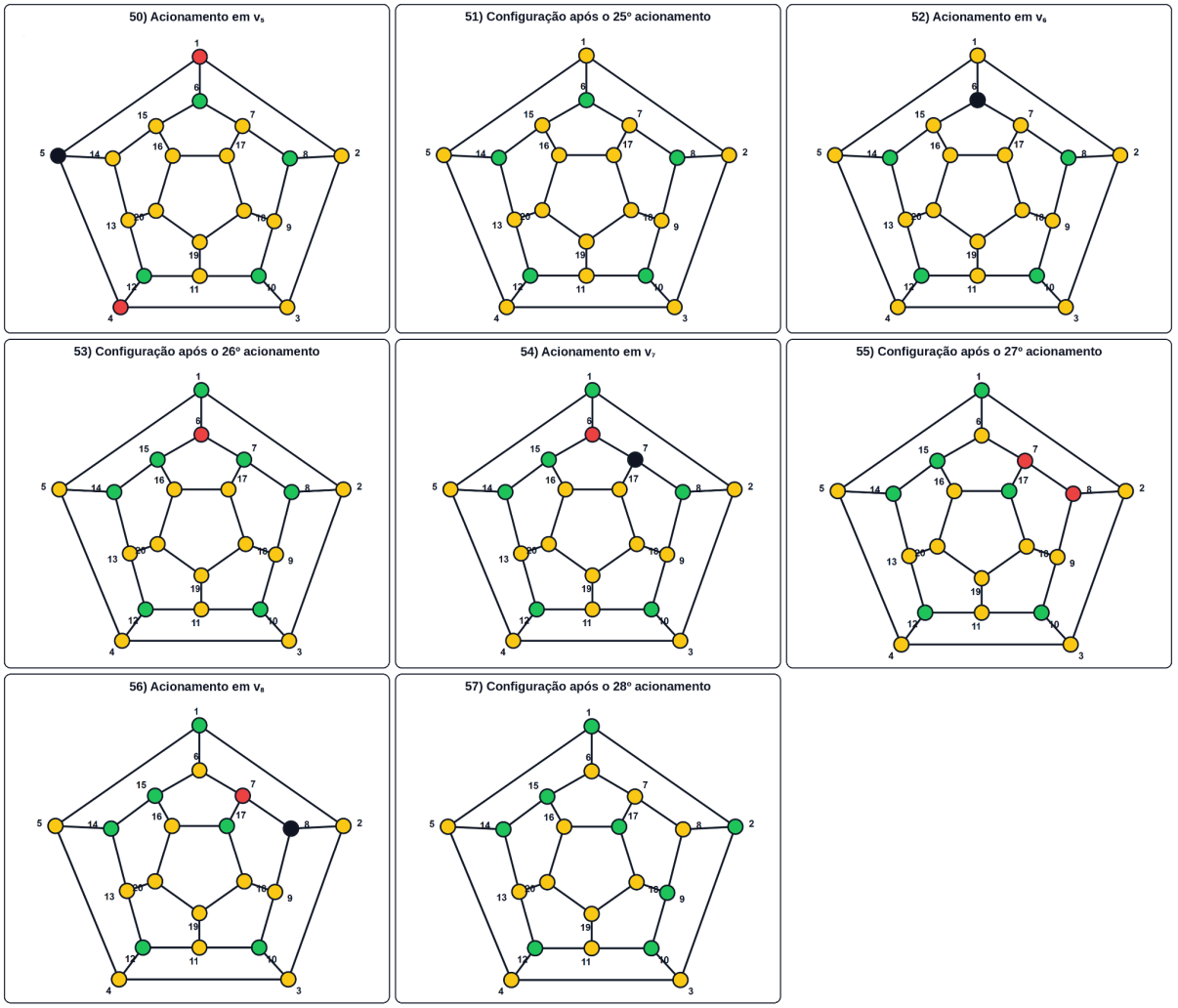
Fonte: O autor, 2026.

Figura 31 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 6



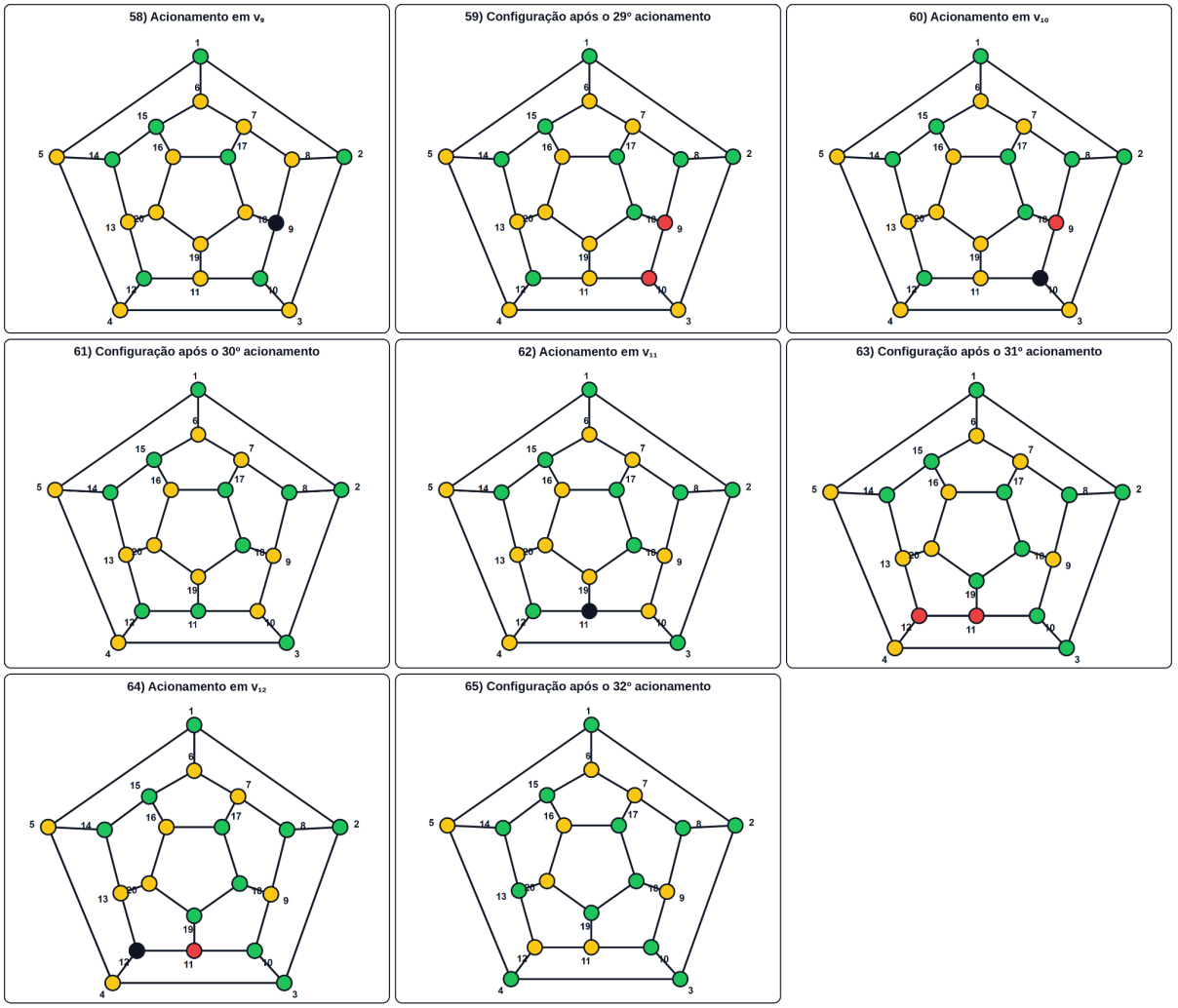
Fonte: O autor, 2026.

Figura 32 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 7



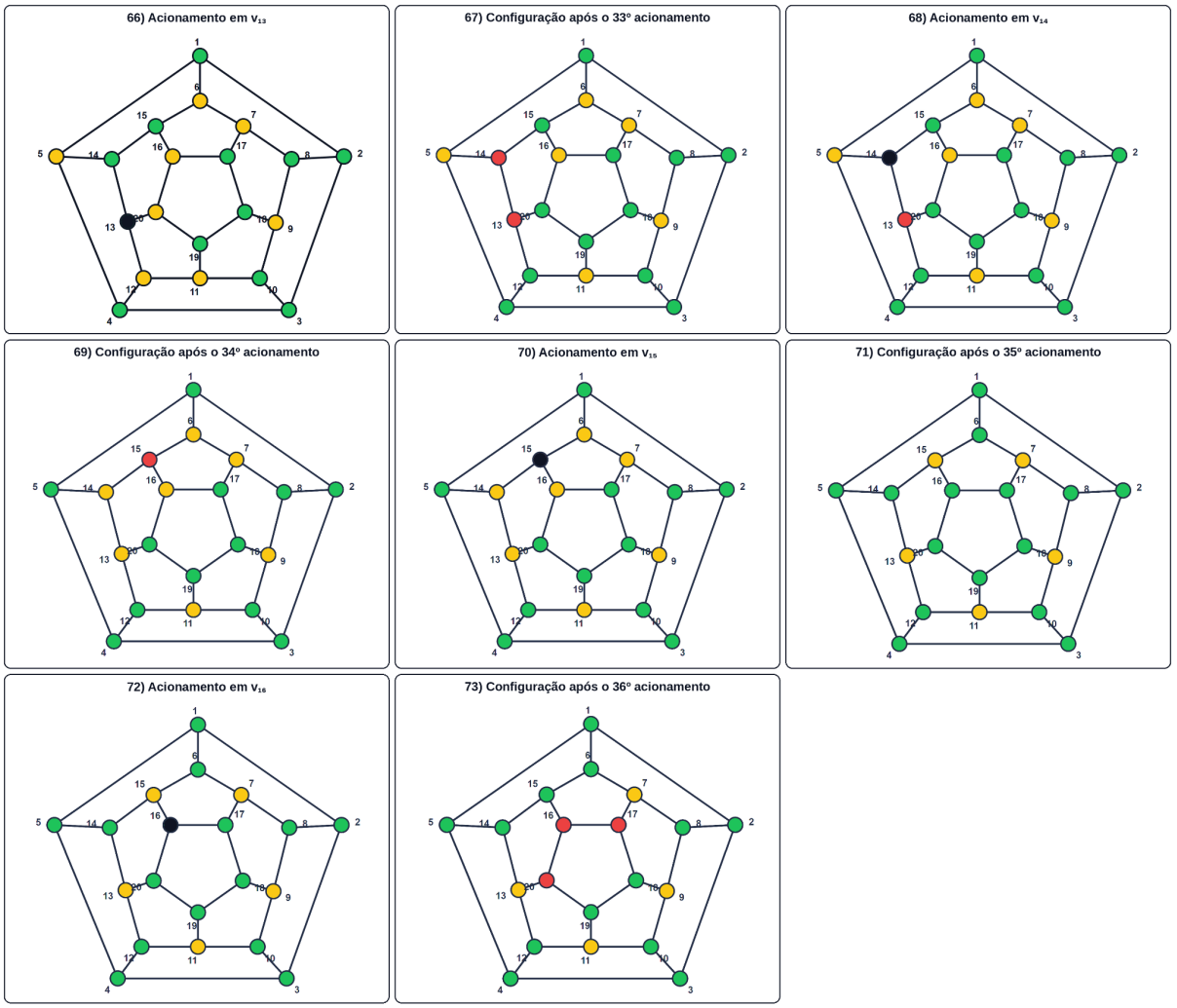
Fonte: O autor, 2026.

Figura 33 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 8



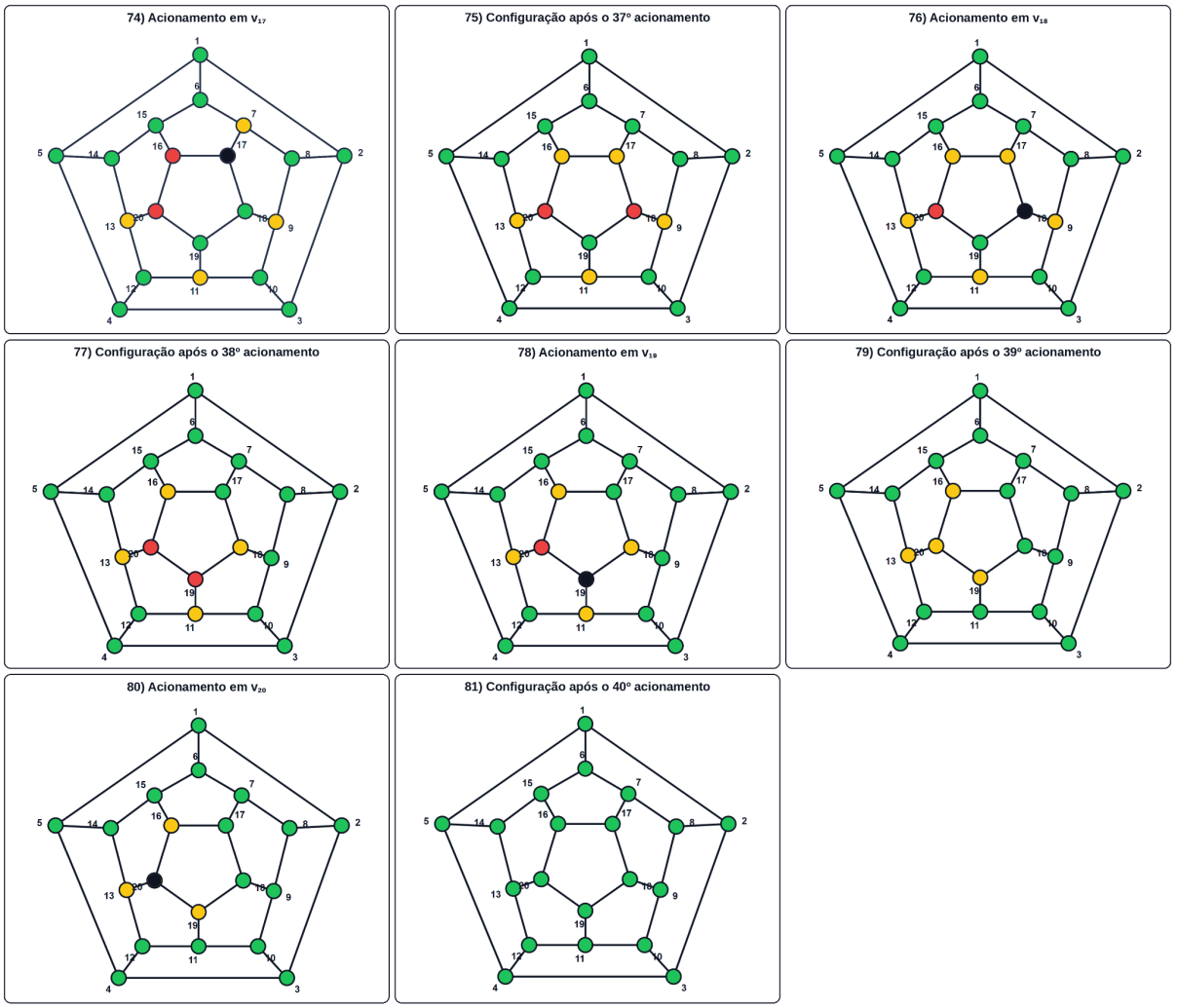
Fonte: O autor, 2026.

Figura 34 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 9



Fonte: O autor, 2026.

Figura 35 – Sequência de acionamentos do dodecaedro – parte 10



Fonte: O autor, 2026.

6.7 Análise comparativa dos resultados

Os cinco grafos apresentam números mínimos muito diferentes, apesar de todos serem regulares. A Tabela 5 sintetiza os resultados obtidos para a variante de três estados; as generalizações para k estados do tetraedro, do hexaedro e do icosaedro são registradas logo após essa comparação.

Tabela 5 – Síntese dos números mínimos nos grafos dos sólidos de Platão

Sólido	Vértices	Grau	Número mínimo
Tetraedro	4	3	2
Octaedro	6	4	6
Hexaedro	8	3	4
Icosaedro	12	5	4
Dodecaedro	20	3	40

Fonte: O autor, 2026.

Para $k \geq 2$, as generalizações demonstradas neste capítulo fornecem $m_k(T) = k - 1$ para o tetraedro e $m_k(H) = m_k(I) = 2(k - 1)$ para o hexaedro e o icosaedro, respectivamente. O octaedro e o dodecaedro permanecem, neste trabalho, restritos à análise de três estados.

O número de vértices, isoladamente, não determina o número mínimo de acionamentos. O icosaedro, com doze vértices, é resolvido com quatro acionamentos, enquanto o octaedro, com seis vértices, exige seis. O grau, isoladamente, também não determina o número mínimo de acionamentos: tetraedro, hexaedro e dodecaedro são 3-regulares, mas seus mínimos são 2, 4 e 40. A diferença depende da organização global das vizinhanças e da estrutura da matriz do jogo.

No tetraedro, um acionamento afeta todo o grafo. No octaedro, a estrutura dos pares opostos força uma solução uniforme. No hexaedro e no icosaedro, vizinhanças fechadas complementares produzem soluções curtas. No dodecaedro, a invertibilidade da matriz do jogo determina uma solução única e muito mais longa. Esses resultados confirmam que a dinâmica depende da estrutura combinatória completa do grafo.

O estudo dos cinco sólidos evidencia que a regularidade e o número de vértices não determinam, isoladamente, o mínimo de acionamentos. As estratégias curtas do hexaedro e do icosaedro decorrem de partições por vizinhanças fechadas, enquanto a solução longa do dodecaedro está relacionada à invertibilidade de sua matriz do jogo. Assim, a organização global das adjacências é o elemento decisivo.

Os cinco grafos dos sólidos de Platão analisados neste capítulo integram o produto educacional nas versões de dois e três estados. A investigação matemática desenvolvida neste capítulo analisa os cinco sólidos na variante de três estados e generaliza para k estados os resultados do tetraedro, do hexaedro e do icosaedro. No ambiente digital, a própria simetria dos grafos pode motivar estratégias experimentais antes da demonstração. No octaedro, por exemplo, uma tentativa natural consiste em tratar todos os vértices de maneira uniforme e acioná-los uma vez; no dodecaedro, uma primeira rodada uniforme mantém todos os vértices em um mesmo estado, sugerindo repetir a estratégia e acionar novamente cada vértice. Essas observações fornecem caminhos intuitivos para a descoberta das soluções que, no texto, são posteriormente justificadas matematicamente.

Dessa forma, o produto educacional percorre as três famílias estudadas e permite ao estudante experimentar concretamente fenômenos que aparecem nas demonstrações: periodicidade nos caminhos, diferenças de solubilidade nos ciclos e efeitos da estrutura global das vizinhanças nos sólidos de Platão. O jogo digital funciona, portanto, como elo entre a investigação exploratória e a sistematização matemática desenvolvida ao longo da dissertação.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A questão central desta pesquisa foi compreender de que maneira a estrutura de um grafo influencia a dinâmica do *Lights Out* de três estados e, quando possível, determinar estratégias mínimas. A modelagem matricial permitiu representar configurações e acionamentos por vetores em $\mathbb{Z}_k$, transformando o jogo em um sistema de congruências associado à matriz do jogo.

Na notação algébrica, configurações e vetores de acionamentos pertencem a $\mathbb{Z}_k^n$, pois há uma coordenada para cada um dos n vértices do grafo.

Nos grafos caminho, a recorrência de período três descreveu todos os vetores solução e permitiu determinar o mínimo para três e para k estados. Nos ciclos, a análise foi ampliada para a transformação uniforme em C_n com k estados. O resultado geral mostra que a transformação é solucionável quando 3 divide n ou quando $MDC(3,\ k) = 1$. Quando 3 divide n, o mínimo é $\frac{n(k-1)}{3}$; quando 3 não divide n e $k \equiv 1\ (mod\ 3)$, o mesmo mínimo é obtido; e, quando 3 não divide n e $k \equiv 2\ (mod\ 3)$, o mínimo é $\frac{n(2k-1)}{3}$. Se 3 não divide n e 3 divide k, não existe solução para a transformação uniforme considerada.

Nos grafos dos sólidos de Platão, os mínimos demonstrados, com três estados, foram 2 para o tetraedro, 6 para o octaedro, 4 para o hexaedro, 4 para o icosaedro e 40 para o dodecaedro. A comparação mostra que grafos com o mesmo grau podem apresentar mínimos muito diferentes e que um grafo com mais vértices pode exigir menos acionamentos do que outro menor. Além disso, para $k \geq 2$, foram obtidas as generalizações $m_k(T) = k - 1$, $m_k(H) = 2(k - 1)$ e $m_k(I) = 2(k - 1)$.

O trabalho articula duas dimensões complementares: a investigação matemática das famílias selecionadas e o desenvolvimento do jogo digital que constitui seu produto educacional. Os resultados teóricos fornecem sustentação para compreender os comportamentos observados no ambiente interativo, enquanto o produto permite que esses mesmos fenômenos sejam explorados de maneira visual e experimental. Nos caminhos e ciclos, as regularidades observadas são transformadas em recorrências, contagens e limites inferiores; nos sólidos de Platão,

as provas são construídas a partir de propriedades estruturais específicas de cada grafo.

A dissertação também estabelece uma continuidade em relação ao estudo de Salgueiro Júnior (2025), realizado no PROFMAT do Colégio Pedro II para o *Lights Out binário*.

O jogo digital interativo constitui o produto educacional e um dos eixos centrais desta dissertação. Nos caminhos e ciclos, o recurso permite escolher o número de vértices e a quantidade de estados sem limite máximo predefinido, respeitados os valores mínimos de cada família; nos sólidos de Platão, disponibiliza as versões com dois e três estados. O *Lights Out* é explorado por meio de acionamentos, mudanças de cores, comparação de estratégias, contador de movimentos, desfazer, reiniciar e dicas. Dessa maneira, o produto não funciona apenas como ilustração dos resultados: ele representa, em um ambiente exploratório, os objetos estudados matematicamente e favorece a passagem da tentativa e da observação para a formulação de conjecturas. As extensões teóricas para k estados abrangem os caminhos, os ciclos, o tetraedro, o hexaedro e o icosaedro; o octaedro e o dodecaedro permanecem restritos ao caso de três estados.

Na Educação Básica, o nível de formalização pode ser ajustado à etapa escolar. Caminhos pequenos permitem trabalhar estratégias, sequências e regularidades; ciclos favorecem discussões sobre possibilidade e impossibilidade; e os sólidos de Platão permitem articular visualização geométrica e relações de vizinhança. Em níveis mais avançados, o mesmo produto pode apoiar a introdução da linguagem de grafos, da Aritmética Modular, de algoritmos e de representações matriciais. A relação com as habilidades da BNCC foi explicitada na Introdução. Essas possibilidades constituem propostas de uso do produto; a presente pesquisa não realizou ainda uma aplicação empírica com turmas.

Entre as continuidades possíveis, destacam-se a análise de configurações iniciais não uniformes, a generalização dos resultados do octaedro e do dodecaedro para k estados e o estudo de novas famílias de grafos. Também é possível desenvolver algoritmos mais gerais para encontrar soluções mínimas e confrontar os resultados computacionais com demonstrações estruturais.

No campo educacional, uma continuidade natural consiste em aplicar e avaliar o jogo digital desenvolvido como produto educacional em turmas da Educação

Básica, investigando como estudantes de diferentes anos formulam estratégias, reconhecem padrões, registram algoritmos e transitam de representações visuais para formas mais abstratas de argumentação matemática.

Os resultados mostram que o *Lights Out* constitui um objeto fértil para articular Teoria de Grafos, Álgebra Linear e Aritmética Modular. A passagem de exemplos concretos para sistemas algébricos permitiu explicar por que estratégias aparentemente semelhantes produzem comportamentos diferentes em grafos distintos. Ao reunir essas estruturas em um jogo digital de três estados, o produto educacional torna visível a conexão entre experimentação e demonstração que orienta a dissertação. Assim, o trabalho evidencia tanto o potencial matemático do problema quanto sua possibilidade de exploração investigativa na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, Marlow; FEIL, Todd. Turning Lights Out with Linear Algebra. **Mathematics Magazine**, v. 71, n. 4, p. 300–303, 1998. DOI: 10.1080/0025570X.1998.11996658.

BERMAN, Abraham; BORER, Franziska; HUNGERBÜHLER, Norbert. Lights Out on graphs. **Mathematische Semesterberichte**, v. 68, p. 237–255, 2021. DOI: 10.1007/s00591-021-00297-5.

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph Theory with Applications**. London: Macmillan/Elsevier, 1976.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/. Acesso em: 20 fev. 2026.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: geometria espacial, posição e métrica**. São Paulo: Atual, 2015.

EULER, Leonhard. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. **Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae**, v. 8, p. 128–140, 1741. Eneström E53. Disponível em: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/53/. Acesso em: 20 fev. 2026.

GIFFEN, Alexander; PARKER, Darren B. On Generalizing the “Lights Out” Game and a Generalization of Parity Domination. **Ars Combinatoria**, v. 111, p. 273–288, 2013. Disponível em: https://combinatorialpress.com/ars-articles/volume-111-ars-articles/on-generalizing-the-lights-out-game-and-a-generalization-of-parity-domination/. Acesso em: 20 fev. 2026.

GRAVIER, Sylvain; MHALLA, Mehdi; TANNIER, Éric. On a Modular Domination Game. **Theoretical Computer Science**, v. 306, n. 1–3, p. 291–303, 2003. DOI: 10.1016/S0304-3975(03)00285-8.

MEURER, Aaron et al. **SymPy: symbolic computing in Python**. *PeerJ Computer Science*, v. 3, e103, 2017. DOI: 10.7717/peerj-cs.103.

OPENAI. **ChatGPT: cálculo do determinante da matriz do jogo do dodecaedro**, realizado a pedido do autor. Resposta de inteligência artificial generativa. Disponível em: https://chatgpt.com/. Acesso em: 15 abr. 2026.

SALDANHA, Nicolau C.; TOMEI, Carlos. **Spectra of regular polytopes. *Discrete & Computational Geometry***, v. 7, p. 403–414, 1992. DOI: 10.1007/BF02187851.

SALGUEIRO JÚNIOR, Wallace Alves. **O jogo Lights Out em grafos de poliedros**. 2025. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, 2025. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171058056&id1=8484. Acesso em: 15 jan. 2026.

SALGUEIRO JÚNIOR, Wallace A.; NICODEMOS, Diego S.; MORAES, Patrícia E. de; COSTA, João Pedro S. G.; COUTO, Fernanda. Lights Out em poliedros. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 11, n. 1, 2025. DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0421.

SURUGA-YA. **Lights Out Game of Tiger Electronics**. [s.d.]. Disponível em: https://www.suruga-ya.com/en/product/148007928. Acesso em: 20 fev. 2026.

SUTNER, Klaus. **The σ-game and cellular automata**. The American Mathematical Monthly, v. 97, n. 1, p. 24–34, 1990. DOI: 10.2307/2323999.

WIKIMEDIA COMMONS. **Seven Bridges of Königsberg**. **Fig. 1.**[s.d.]. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/. Acesso em: 20 fev. 2026.

ZHANG, Xiaoyan; WANG, Chao. **Solutions to All-Colors Problem on Graph Cellular Automata**. Complexity, v. 2019, art. 3164692, 11 p., 2019. DOI: 10.1155/2019/3164692.

APÊNDICE A – MANUAL DE USO DO PRODUTO EDUCACIONAL LIGHTS OUT EM GRAFOS

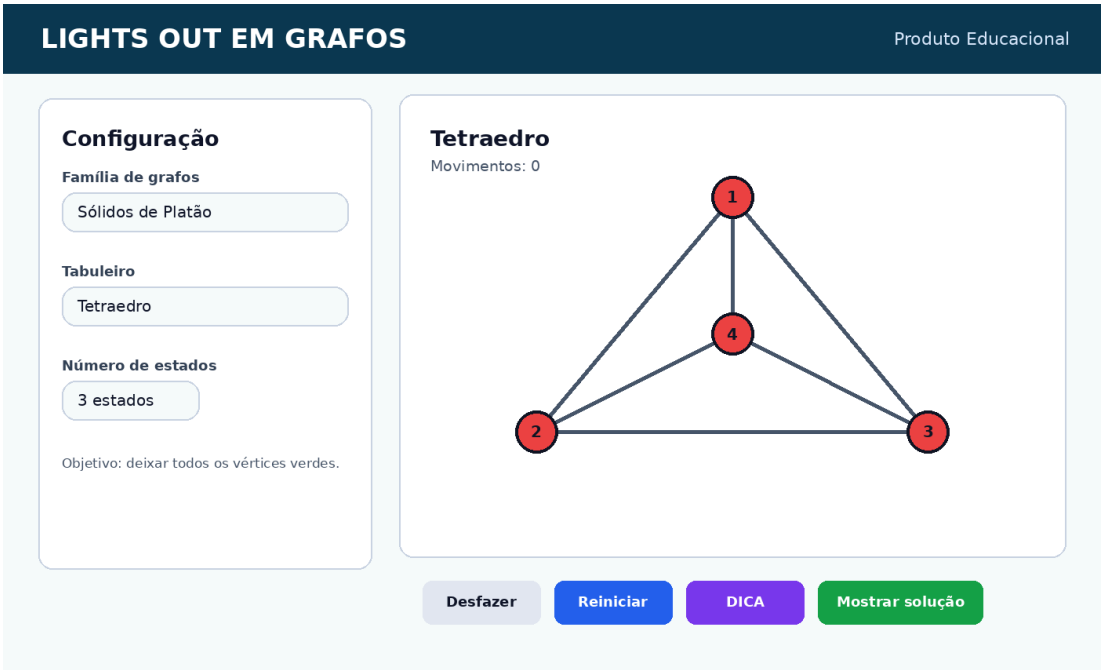
A.1 Apresentação do produto educacional

Este manual apresenta o jogo digital interativo desenvolvido como produto educacional da dissertação *O Jogo Lights Out em Grafos Caminhos, Ciclos e Sólidos de Platão*. O ambiente reúne grafos caminho, grafos ciclo e os grafos dos cinco sólidos de Platão. Nos caminhos e ciclos, o usuário pode escolher a quantidade de vértices e o número de estados; nos sólidos de Platão, o produto oferece versões com dois e três estados.

A regra central é simples: ao acionar um vértice, o estado desse vértice e o de todos os seus vizinhos é alterado ciclicamente. Na versão de três estados, as cores seguem vermelho → amarelo → verde → vermelho. O objetivo é levar todos os vértices ao estado-alvo, procurando também comparar estratégias e reduzir o número de movimentos.

O produto foi concebido para favorecer resolução de problemas, reconhecimento de padrões, raciocínio lógico, elaboração de estratégias, investigação e argumentação matemática. As possibilidades didáticas descritas neste manual são propostas de uso; não correspondem a resultados de aplicação empírica com turmas.

Figura 36 – Visão geral da interface da versão atual do produto educacional



Fonte: O autor, 2026.

A.2 Como navegar pelo jogo

A tela foi organizada para que o professor ou estudante escolha primeiro a família de grafos, depois o tabuleiro e, quando disponível, a quantidade de estados. O tabuleiro ocupa a região central e os comandos ficam próximos ao grafo.

1. Escolher a família – No campo “Família de grafos”, selecione Sólidos de Platão, Ciclos ou Caminhos.

2. Escolher o tabuleiro – Selecione o sólido desejado ou, nos caminhos e ciclos, a quantidade de vértices que será explorada.

3. Definir os estados – Nos caminhos e ciclos, escolha a quantidade de estados. Nos sólidos de Platão, utilize as versões de 2 ou 3 estados.

4. Jogar – Clique ou toque em um vértice. O próprio vértice e todos os vértices adjacentes mudam de estado.

5. Acompanhar movimentos – O contador registra o número de acionamentos realizados, permitindo comparar estratégias.

6. Desfazer – O botão “Desfazer” retorna uma jogada, sendo útil para testar hipóteses sem reiniciar a partida.

7. Reiniciar – O botão “Reiniciar” restaura a configuração inicial do tabuleiro.

8. Pedir uma dica – O botão “DICA” sugere um vértice para continuar a resolução, preservando o caráter investigativo.

9. Mostrar solução – O botão “Mostrar solução” exibe uma solução possível; na configuração inicial, a interface identifica a solução mínima quando essa informação está disponível no produto.

Figura 37 – Comandos de navegação e área de solução



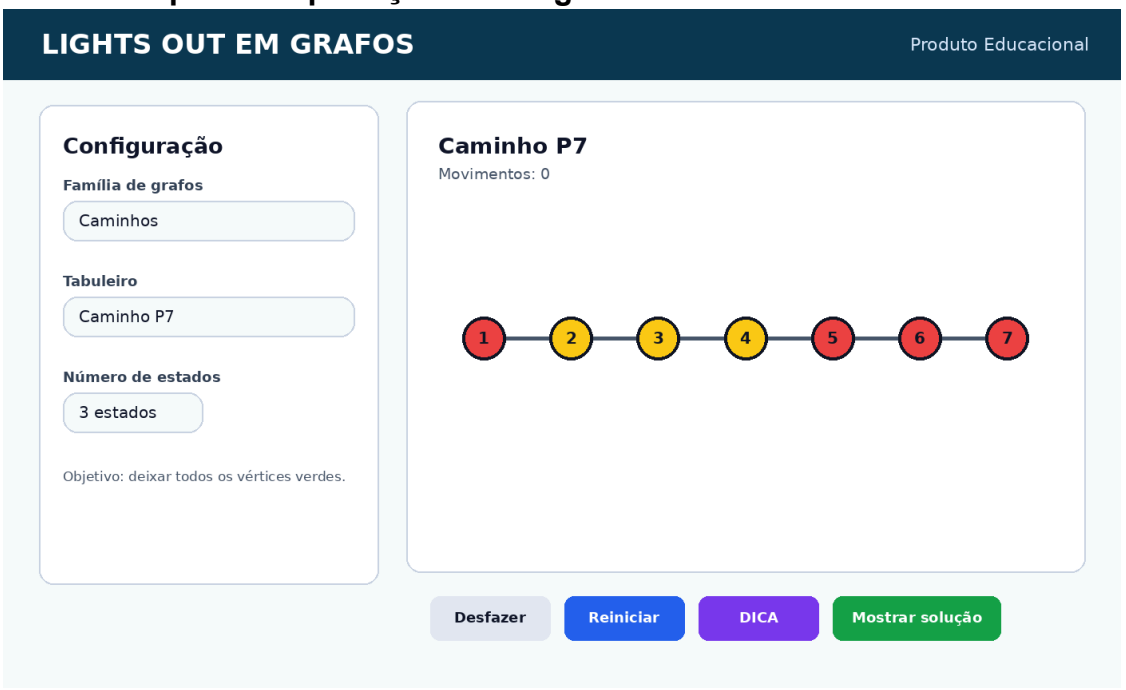
Fonte: O autor, 2026.

A.3 Exploração por família de grafos

A.3.1 Caminhos

Os caminhos são especialmente adequados para observar propagação local, sequências de acionamentos e regularidades. O professor pode começar com poucos vértices e aumentar gradualmente o tamanho do grafo, pedindo que os estudantes registrem quais vértices foram acionados e comparem estratégias.

Figura 38 – Exemplo de exploração de um grafo caminho

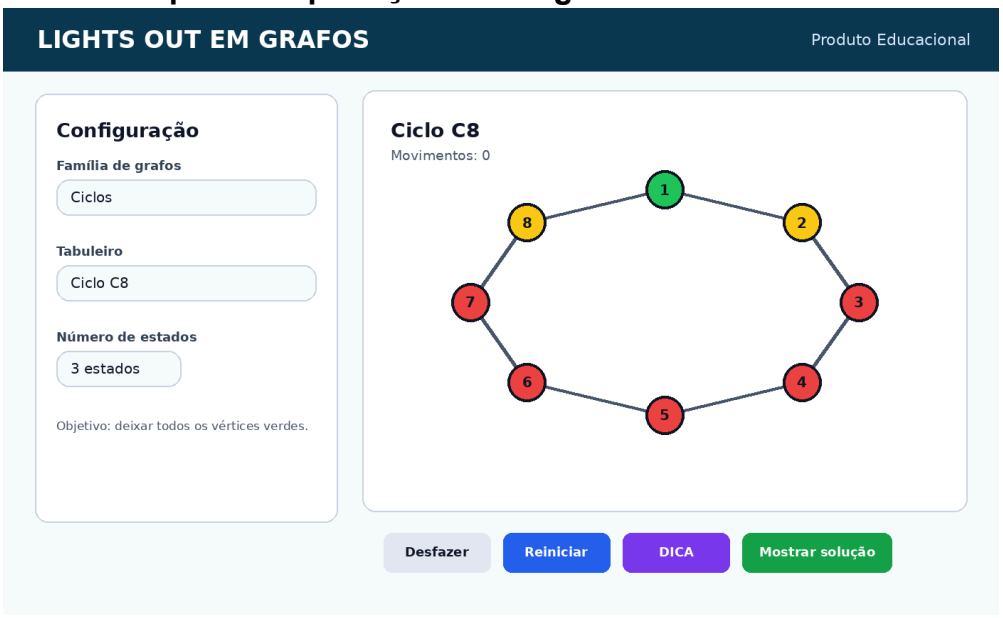


Fonte: O autor, 2026.

A.3.2 Ciclos

Nos ciclos, a ligação entre o primeiro e o último vértice altera a dinâmica observada nos caminhos. Isso permite discutir padrões, possibilidade ou impossibilidade de determinadas transformações e comparação entre ciclos com diferentes números de vértices.

Figura 39 – Exemplo de exploração de um grafo ciclo



Fonte: O autor, 2026.

A.3.3 Sólidos de Platão

Os cinco sólidos de Platão permitem relacionar o jogo a vértices, arestas, vizinhanças, regularidade e visualização geométrica. No produto, tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro podem ser explorados com dois ou três estados.

A.4 Possibilidades de articulação com a BNCC

Lights Out e Teoria de Grafos não são apresentados aqui como conteúdos obrigatórios da BNCC. O jogo é utilizado como recurso para mobilizar habilidades previstas no currículo. A seleção abaixo combina as habilidades já relacionadas na dissertação com outras habilidades oficiais particularmente compatíveis com algoritmos, regularidades, geometria e resolução de problemas.

6º ano do Ensino Fundamental

Habilidades: EF06MA17; EF06MA23

Foco: Vértices, faces e arestas; construção de algoritmos passo a passo.

Sugestão de uso: Explorar os sólidos de Platão, contar vértices e arestas, identificar vizinhos e pedir que cada grupo escreva um procedimento de resolução para um caminho pequeno.

7º ano do Ensino Fundamental

Habilidades: EF07MA04; EF07MA05; EF07MA07; EF07MA14; EF07MA15

Foco: Operações com inteiros; diferentes algoritmos; fluxogramas; sequências recursivas; expressão de regularidades.

Sugestão de uso: Codificar as cores por 0, 1 e 2, comparar duas estratégias para o mesmo tabuleiro, registrar o algoritmo de jogadas e investigar padrões em caminhos.

8º ano do Ensino Fundamental

Habilidades: EF08MA10; EF08MA11

Foco: Regularidades em sequências recursivas e não recursivas e construção de algoritmos/fluxogramas.

Sugestão de uso: Registrar as sequências de acionamentos em caminhos de tamanhos sucessivos e construir um fluxograma que descreva uma estratégia observada.

9º ano do Ensino Fundamental

Habilidades: EF09MA15

Foco: Descrição escrita e por fluxograma de um algoritmo, com uso de software.

Sugestão de uso: Transformar uma estratégia de jogo em algoritmo formal: entrada, decisões, acionamentos e condição de término; comparar eficiência pelo número de movimentos.

1º ano do Ensino Médio

Habilidades: EM13MAT315

Foco: Reconhecimento, formulação e solução de problemas algorítmicos.

Sugestão de uso: Formalizar uma estratégia para caminhos ou ciclos como algoritmo e discutir por que ela funciona em exemplos escolhidos.

2º ano do Ensino Médio

Habilidades: EM13MAT310; EM13MAT315

Foco: Problemas de contagem e estratégias algorítmicas.

Sugestão de uso: Contar possibilidades de acionamento em tabuleiros pequenos, comparar estratégias, estudar número de movimentos e introduzir a ideia de solução mínima.

3º ano do Ensino Médio

Habilidades: EM13MAT310; EM13MAT315

Foco: Contagem, algoritmos e argumentação sobre estratégias.

Sugestão de uso: Aprofundar a modelagem: representar estados numericamente, discutir aritmética modular, grafos e, conforme a turma, vetores e matrizes; justificar existência de solução e minimalidade em casos acessíveis.

Na BNCC, códigos iniciados por EM13 abrangem o bloco das três séries do Ensino Médio e não uma série isolada. A separação em 1º, 2º e 3º ano feita neste manual é, portanto, uma proposta de progressão pedagógica.

A.5 Sugestão de sequência didática

1. Jogar – Permitir uma primeira exploração sem fornecer a solução.

2. Registrar – Anotar vértices acionados, estados observados e quantidade de movimentos.

3. Comparar – Colocar lado a lado estratégias de diferentes estudantes ou grupos.

4. Conjecturar – Identificar padrões: repetições, periodicidades, vizinhanças e casos que parecem mais difíceis.

5. Formalizar – Adequar ao ano: fluxograma, sequência, codificação 0-1-2, aritmética modular, grafo ou matriz.

6. Justificar – Pedir que o estudante explique por que sua estratégia funciona e, quando apropriado, por que não há outra com menos movimentos.

A.6 Orientações ao professor

O botão de solução não precisa ser utilizado imediatamente. Para preservar o caráter investigativo, recomenda-se que o estudante primeiro jogue, registre tentativas e compare estratégias. A dica pode funcionar como intervenção intermediária. A solução completa pode ser usada depois para análise, conferência e discussão sobre eficiência.

Em turmas do Ensino Fundamental, a linguagem pode permanecer concreta: cores, pontos, ligações e vizinhos. A formalização em termos de grafos, congruências, vetores e matrizes pode ser introduzida progressivamente, conforme os objetivos da aula e o nível da turma.

Atividades em duplas ou pequenos grupos podem ser utilizadas: um estudante pode operar o jogo enquanto outro registra a sequência de movimentos; depois, os papéis são invertidos e as estratégias são comparadas.

A.7 Acesso e código-fonte

O código-fonte integral da versão atual do produto educacional acompanha este trabalho no arquivo “Produto Educacional.html”. O arquivo pode ser aberto em um navegador e também pode servir de base para adaptações futuras.

As possibilidades didáticas apresentadas neste apêndice constituem propostas de uso do produto e não resultados de aplicação empírica com turmas.