

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA,
EXTENSÃO E CULTURA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

ÂNGELA MENESES DE PAIVA

ORIGAMI MODULAR EM AULAS INCLUSIVAS DE
GEOMETRIA: UMA PROPOSTA DE MANUAL DE
ATIVIDADES PARA O PROFESSOR

Rio de Janeiro

2023

ÂNGELA MENESES DE PAIVA

**ORIGAMI MODULAR EM AULAS INCLUSIVAS DE GEOMETRIA: UMA
PROPOSTA DE MANUAL DE ATIVIDADES PARA O PROFESSOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, ofertado pela Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientador(a): Dr. Anderson Reis de Vargas

Rio de Janeiro

2023

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

P149 Paiva, Ângela Meneses de

Origami modular em aulas inclusivas de geometria : uma proposta de manual de atividades para o professor / Ângela Meneses de Paiva. - Rio de Janeiro, 2023.

75 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Anderson Reis de Vargas.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria - Estudo e ensino. 3. Origami. 4. Educação inclusiva. 5. Interdisciplinaridade. 6. Artes visuais. I. Vargas, Anderson Reis de. II. Colégio Pedro II. III Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB-7: 5692.

ÂNGELA MENESES DE PAIVA

**ORIGAMI MODULAR EM AULAS INCLUSIVAS DE GEOMETRIA: UMA
PROPOSTA DE MANUAL DE ATIVIDADES PARA O PROFESSOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de História, ofertado pela Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Aprovado em 26 de agosto de 2023.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Anderson Reis de Vargas

Colégio Pedro II

Orientador

Prof. M. Diego Tranjan Viug

Colégio Pedro II

Profa. Ma. Débora Maria da Conceição Roque

Colégio Pedro II

Rio de Janeiro

2023

Dedico este trabalho ao sr. José e a sra. Glória e sra. Fátima, meus pais e minha irmã, meus heróis. Reconheço todo o esforço e sacrifício que tiveram ao me criar. Este trabalho é uma pequena expressão de gratidão e agradecimento por todo amor e incentivo que tiveram com os meus estudos.

AGRADECIMENTOS

A concretização deste trabalho só foi possível devido à colaboração de diversas pessoas que compartilharam a minha jornada. Por isso, expresso a minha gratidão:

Primeiramente, ao meu querido orientador, professor Dr. Anderson Reis de Vargas, pela orientação, pelas trocas enriquecedoras de conhecimento, por todo incentivo e principalmente, pela notável paciência que demonstrou ao me acompanhar durante a escrita do projeto.

Aos professores, M. Diego Tranjan Viug e Ma. Débora Maria da Conceição Roque, pela disponibilidade e interesse em participar da banca examinadora do meu projeto. Suas contribuições aprimoraram a qualidade do meu trabalho.

À coordenação e todos os professores do curso da Especialização em Educação Matemática do Colégio Pedro II da turma de 2022. Cada aula, seminários e debates em grupo fizeram com que eu mudasse minha perspectiva em relação ao ensino de matemática e foram essenciais para o meu crescimento profissional.

À minha querida turma, que confiou a mim a tarefa de representá-los. O apoio, as trocas de informação, a amizade e a união que praticamos durante o curso são ganhos inestimáveis para minha vida e conduta como professora.

À minha família, que apesar de toda dificuldade financeira, sempre priorizou a minha educação. Sem vocês eu não teria chegado até aqui.

Aos meus amigos, em especial, ao meu companheiro, Pedro Paulo Gonçalves Bolini, por sempre acreditar no meu potencial e sempre me incentivar a continuar.

Por fim, aos meus animais de estimação, Belinha, Robertinho, Glorinha, Belinho, Gatito, Fatinha e Maria, por toda companhia e carinho diariamente durante a escrita deste trabalho.

RESUMO

PAIVA, Ângela Meneses de. **Origami modular em aulas inclusivas de geometria: uma proposta de manual de atividades para o professor**. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2023.

O presente trabalho tem como objetivo propor um manual de atividades para o professor trabalhar com diferentes módulos de origami nos anos finais do Ensino Fundamental com o enfoque para estudantes com Transtorno do Espectro Autista (TEA) e Transtorno do Déficit de Atenção/Hiperatividade (TDAH). Busca apresentar ao docente uma abordagem simplificada da arte da dobradura, como meio de explorar conceitos fundamentais da geometria e suas ramificações como por exemplo: polígonos regulares, conceito de mediatriz, bissetriz, simetrias, relação entre áreas e demais propriedades encontradas em figuras planas e espaciais abordadas no Ensino Fundamental. Nesta análise, o aporte teórico está entrelaçado através das teorias de aprendizagem de Piaget, da mediação de Vigotski e das representações semióticas de Duval. O manual é composto por cinco atividades desenvolvidas através do origami modular. A construção do cubo, do tetraedro, validação do teorema de Euler com os demais sólidos regulares, a exibição dos poliedros estrelados e a construção de mosaico com módulo composto por duas pirâmides interligadas por uma haste. Dentre as atividades destacadas, devido à falta de tempo, somente a última foi aplicada em uma turma regular (com a presença de estudantes neurodivergentes) de 8º ano na escola em que a autora leciona. A escolha de utilizar o origami modular para compor as atividades está diretamente relacionada com a interdisciplinaridade entre matemática e artes visuais, o que faz com que a aula de matemática se torne mais atrativa para os estudantes.

Palavras-chave: origami modular; geometria; educação inclusiva; artes visuais; interdisciplinaridade.

ABSTRACT

PAIVA, Ângela Meneses de. **Origami modular em aulas inclusivas de geometria: uma proposta de manual de atividades para o professor.** 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2023.

The present work aims to propose a manual of activities for teachers to work with different origami modules in the final grades of Elementary School, focused on students with Autism Spectrum Disorder (ASD) and Attention Deficit/Hyperactivity Disorder (ADHD). It seeks to provide educators with a simplified approach to the art of paper folding, as a tool to explore fundamental concepts of geometry and their branches, such as regular polygons, the concept of medians, bisectors, symmetries, relationships between areas, and other properties found in flat and spatial figures addressed in Elementary Education. In this analysis, the theoretical framework is intertwined through the learning theories of Piaget, Vygotsky's mediation, and Duval's semiotic representations. The manual consists of five activities developed through modular origami. These activities include the construction of a cube, a tetrahedron, the validation of Euler's theorem with other regular solids, the display of stellated polyhedra, and the construction of a mosaic with a module composed of two pyramids interconnected by one of their edges. Among the highlighted activities, due to time constraints, only the last one was applied to a regular class (including neurodivergent students) in the 8th grade at the school where the author teaches. The choice to use modular origami to compose these activities is directly related to the interdisciplinary connection between mathematics and visual arts, making the math class more engaging for students.

Keywords: modular origami; geometry; inclusive education; visual arts; interdisciplinarity.

LISTA DE FIGURAS (ILUSTRAÇÕES)

Figura 1: Exemplo de tratamento e conversão.....	27
Figura 2: Figura 2: Módulo sonobe para a construção do cubo	31
Figura 3: Sólidos regulares construídos com módulos de origami	34
Figura 4:Obtenção da diagonal do quadrado	35
Figura 5: Obtenção do ponto médio do lado de um quadrado	35
Figura 6: Intersecção da reta com a diagonal do quadrado	36
Figura 7: Dobra do lado esquerdo com o ponto de intersecção da diagonal do quadrado	36
Figura 8: Obtenção da folha dividida em três partes iguais.....	36
Figura 9: Efeito sanfona	37
Figura 10: Construção do Paralelogramo.....	37
Figura 11: Finalização do módulo.....	38
Figura 12: Exemplo de módulo construído	38
Figura 13: Análise do módulo	38
Figura 14: Primeiro encaixe.....	39
Figura 15: Segundo encaixe.....	39
Figura 16: Terceiro encaixe (caixa sem tampa).....	39
Figura 17: Cubo.....	40
Figura 18: Mediatriz do lado do quadrado	41
Figura 19: Vértice inferior esquerdo sobre a mediatriz do lado do quadrado	41
Figura 20: Vértice inferior direito sobre a mediatriz do lado do quadrado	41
Figura 21: vértice superior direito sobre o lado direito do losango	42
Figura 22: Losango	42
Figura 23: Módulos parcialmente prontos	43

Figura 24: dobras desfeitas	43
Figura 25: Marcando os vincos para o módulo final	43
Figura 26: módulo 1 finalizado	43
Figura 27: módulo 2 em construção	44
Figura 28: módulo 2 finalizado	44
Figura 29: faces triangulares	44
Figura 30: Análise dos módulos	45
Figura 31: Reflexão em relação a uma reta r	45
Figura 32: Primeiro encaixe dos módulos	46
Figura 33: Faces triangulares do módulo 1 levantadas	46
Figura 34: Faces levantadas módulo 2.....	46
Figura 35: Encaixes dos módulos	47
Figura 36: Tetraedro	47
Figura 37: Divisão da folha em duas partes de mesma medida.....	50
Figura 38: Divisão da folha em quatro partes de mesma medida	50
Figura 39: Formação dos triângulos isósceles	50
Figura 40: Vincos principais para formação do módulo.....	51
Figura 41: Último vinco para a formação do módulo	51
Figura 42: Base para o encaixe do módulo.....	51
Figura 43: Face lateral da pirâmide formada.....	52
Figura 44: Módulo em formato de barco.....	52
Figura 45: Módulo finalizado	52
Figura 46: Compreensão do módulo	53
Figura 47: Módulos encaixados.....	53
Figura 48: Hexaedro visto por vários ângulos	53
Figura 49: Quadrado ABCD.....	55

Figura 50: Triângulo DEC	55
Figura 51: Exemplos de mosaicos construídos pela professora	56
Figura 52: Durante a confecção	57
Figura 53: Folha A4 dividida em quatro retângulos	57
Figura 54: Folha em formato quadrado	58
Figura 55: Diagonais do quadrado	58
Figura 56: Análise do módulo aberto	60
Figura 57: Exemplos de mosaicos construídos pelos alunos	66
Figura 58: Nomeando as dobras para a demonstração	70
Figura 59: Nomeando as dobras para a demonstração	70
Figura 60: Alturas dos triângulos e medida do lado do quadrado.....	71
Figura 61: Traçando o ΔDLE	72
Figura 62: Dobras do losango desfeitas	73
Figura 63: ΔAOB isósceles	73
Figura 64: Ângulos AOA' e BOA' congruentes.....	74
Figura 65: Congruência dos ângulos.....	74
Figura 66: Triângulo equilátero	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Números de vértices, faces e arestas dos sólidos regulares	48
Tabela 2: Verificação do Teorema de Euler com Poliedros Estrelados.....	49
Tabela 3: Comparação entre o hexaedro construído pelo módulo e o cubo.....	54

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Respostas dos alunos para questão 1 - parte 1	59
Quadro 2: Respostas dos alunos para questão 1 - parte 2	59
Quadro 3: Respostas dos alunos para questão 1 - parte 3	60
Quadro 4: Algumas respostas dos alunos para a questão 2	61
Quadro 5: Respostas dos alunos para questão 3 - parte 1	61
Quadro 6: Respostas dos alunos sobre a pergunta 3 - parte 2.....	62
Quadro 7: Algumas respostas dos alunos para a questão 4	63

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	17
2.1 Teoria do desenvolvimento de Piaget	18
2.2 A teoria da mediação de Vigotski	22
2.3 Teoria das representações semióticas	25
2.4 Diálogo entre os referenciais teóricos.....	28
3 MANUAL DE ATIVIDADES PRÁTICAS	29
3.1 Definição do origami modular	31
3.2 Justificativa	31
3.3 Objetivos.....	33
3.3.1 Objetivo geral	33
3.3.2 Objetivos específicos	33
3.4 Descrição das atividades	33
3.4.1 Construção do cubo através de módulos	34
3.4.1.2 – Materiais utilizados	35
3.4.1.3 – Construção dos módulos do cubo.....	35
3.4.1.3.1 – Dividir uma folha quadrada em três partes iguais	35
3.4.1.3.2 – Finalização da construção dos módulos do cubo	37
3.4.1.3.3 – Entendendo como funciona o módulo.....	38
3.4.1.3.4 – A montagem.....	39
3.4.1.3.5 – Considerações finais sobre a atividade	40
3.4.2 Construção do tetraedro.....	40
3.4.2.2 – Construção do módulo.....	41
3.4.2.3 – Entendendo como funciona o módulo.....	45
3.4.2.4 – A montagem.....	46

1 INTRODUÇÃO

A matemática é fundamental para a formação intelectual das pessoas, em particular a Geometria, pois o indivíduo já possui contato direto com esta área da matemática antes mesmo do processo de escolarização e durante a vida daqueles que não foram escolarizados. Isso acontece, pois de forma indireta, a matemática está presente durante toda a vida do ser humano, como por exemplo, ao observar um aro de bicicleta, confeitar um bolo, construir um imóvel, comprar móveis para casa, entre outras situações.

Entretanto, importa mencionar que apesar da diversidade de recursos tecnológicos e capital cultural, há um déficit no ensino e na aprendizagem da matemática, principalmente para alunos com algum tipo de transtorno neurológico. Por isso há a necessidade de mais metodologias ativas a serem implementadas em sala. Esta prática é capaz de dar espaço ao aluno, fazendo com que ele expresse sua criatividade e autonomia, enquanto o professor se torna responsável por despertar o interesse dele, instigando-o com o objetivo de fazê-lo refletir sobre o tema e também construir conhecimento.

O objetivo deste trabalho é trazer o origami como ferramenta o ensino de geometria. Além disso, facilitar a aprendizagem e desenvolver competências motoras e psicossociais de alunos que enfrentam algum tipo de transtorno neurológico. Especificamente, alunos com Transtorno do Espectro Autista (TEA)¹ e Transtorno do Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH)². A partir de dobras aparentemente simples, é possível a criação de inúmeras figuras. Através dessas dobras, é possível explorar diversos conceitos geométricos importantes e também oferecer uma

¹ O transtorno do espectro autista caracteriza-se por deficiências persistentes na comunicação social e na interação social em múltiplos contextos, incluindo déficits na reciprocidade social, em comportamentos não verbais de comunicação usados para a interação social e em habilidades para desenvolver, manter e compreender relacionamentos. Além dos déficits na comunicação social, o diagnóstico do transtorno do espectro autista requer a presença de padrões restritos e repetitivos de comportamento, interesse ou atividades. (Manual diagnóstico e estatístico de transtornos mentais – DSM., 2014, p.31)

² O TDAH é um transtorno do neurodesenvolvimento definido por níveis prejudiciais de desatenção, desorganização e/ou hiperatividade-impulsividade. Desatenção e desorganização envolvem incapacidade de permanecer em uma tarefa, aparência de não ouvir e perda de materiais em níveis inconsistentes com a idade ou o nível de desenvolvimento. (Manual diagnóstico e estatístico de transtornos mentais – DSM., 2014, p.32)

abordagem tátil e visual especialmente para alunos que demandam uma abordagem diferenciada de ensino.

O capítulo 2 se aprofundará nas bases teóricas que fundamentam este trabalho, a teoria do desenvolvimento de Piaget, a teoria da mediação de Vigotski e a teoria das representações semióticas de Duval. O capítulo 3 desenvolverá um guia com cinco atividades práticas para cumprir os objetivos deste projeto. Para cada atividade, serão indicadas as habilidades geométricas abordadas e também o passo a passo com ilustrações claras. Já o último capítulo, apresenta as principais conclusões do projeto. Será feito um resumo dos resultados e das contribuições para a formação do professor. Após as referências, há dois anexos contendo duas demonstrações indicadas para agregar as práticas do professor.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

É de conhecimento comum que existe uma problematização que abrange assuntos educacionais na área das ciências exatas, principalmente no que diz respeito ao ensino de geometria a alunos com algum tipo de transtorno neurológico. Especificamente, alunos com Transtorno de Déficit de Atenção/Hiperatividade (TDAH) necessitam, segundo Stroh (Apud SANCHES JR et al, 2010), de ações pedagógicas inspiradas nos aspectos afetivos, orgânicos e psicossociais. Destaca-se também o mesmo problema com as crianças diagnosticadas com o Transtorno do Espectro Autista (TEA), visto que estimativas do início do século XXI “afirmavam que 70% a 80% das crianças (americanas) com TEA também eram afetadas por algum tipo de deficiência intelectual” (FOMBONNE 2003, apud BULLEN *et al*, 2020 p.4463, tradução nossa).

Para se ter uma ideia numérica, “TDAH é um transtorno de desenvolvimento que afeta de 5% a 11% das crianças americanas, sendo um dos transtornos mais comuns durante a infância, segundo estimativas da Associação Americana de Psiquiatria em 2022” (TRANE; WILLCUTT, 2022, p.583, tradução nossa). Esses números estão de acordo com as projeções da população mundial com TDAH, que segundo a Associação Brasileira do Déficit de Atenção (ABDA), fica entre 5% e 8%. Não encontramos valores específicos do cenário brasileiro. Vale ressaltar que nesse grupo as “desigualdades acadêmicas costumam se manter durante a adolescência e a vida adulta, levando a altas taxas de evasão escolar e baixas taxas de adesão às universidades” (KURIYAN 2013, apud TRANE; WILLCUTT, 2022, p.583, tradução

nossa). Segundo os autores, não é nenhuma surpresa que estes indivíduos apresentem maior instabilidade financeira na vida adulta. Por isso, eles defendem que melhorar a performance acadêmica de indivíduos com TDAH é imprescindível para alterar as trajetórias negativas que costumam caracterizar o transtorno.

Partindo desta perspectiva, o presente trabalho pretende, baseado na teoria das representações semióticas de Raymond Duval, na teoria da mediação de Vigotski e na teoria de desenvolvimento e aprendizagem de Piaget, apresentar propostas de atividades de geometria que possam ressignificar o trabalho do professor de Matemática com estudantes do espectro autista ou com transtorno de déficit de atenção/hiperatividade.

2.1 Teoria do desenvolvimento de Piaget

A teoria de Piaget tem como base principal o construtivismo. O desenvolvimento mental baseia-se em quatro períodos, com suas respectivas definições e características do comportamento do ser humano de acordo com seu desenvolvimento, são eles: *sensório-motor*, *pré-operacional*, *operacional-concreto* e *operacional-formal*. Ainda, os conceitos principais envolvidos em cada estágio são chamados de *assimilação*, *acomodação* e *equilibração*. Vejamos como se definem cada um destes termos e como eles se interrelacionam dentro da teoria.

O período sensório-motor é caracterizado pelo egocentrismo. Isto é, a criança não consegue diferenciar o que faz parte do seu eu e o que faz parte do ambiente em que ela faz parte, ocorre uma centralização dela mesma, como se todos os objetos ao redor existissem a partir dela. Ao final do período sensório-motor, a criança consegue manipular objetos para satisfazer suas necessidades e imitar comportamentos adultos, fazendo com que haja o reconhecimento que o seu corpo é um objeto como os demais. Esta fase acontece a partir do nascimento e dura até os dois anos de idade.

O estágio pré-operacional é caracterizado ainda pela fase egocêntrica e pelo início do uso da linguagem, dos símbolos e de criações mentais de imagens. Nesta fase, a criança consegue estabelecer organizações mentais, porém não consegue fazer o caminho inverso, o que Piaget chama de *reversibilidade* do pensamento, e que frequentemente leva a criança a pensamentos contraditórios.

Segundo Moreira (1995), um exemplo disso é quando a criança cai em contradição, quando se depara com o problema em que tem que comparar dois

recipientes, um alto e fino e outro largo e baixo, que possuem a mesma quantidade de água. Apenas observando as características do objeto e desprezando a transposição de água, a criança pode dizer que há mais água em um objeto porque ele é mais alto ou pode dizer que há menos água, pois ele é mais fino. Suas decisões são baseadas em situações já vivenciadas, por isso há pouco discernimento sobre o que condiz com a realidade. Esta fase acontece a partir dos dois anos de idade e segue até os 7 anos de idade.

No período operacional-concreto a criança passa a descaracterizar o período egocêntrico dos dois estágios anteriores. Novas perspectivas passam a fazer parte do pensamento crítico e, ao considerar o exemplo do estágio anterior sob a luz desta nova fase, normalmente ela consegue analisar a ideia da transposição de água e comparar os frascos de forma satisfatória. Isso mostra o ganho de precisão de contraste. Todavia, ainda não consegue diferenciar quais são as informações condizentes com a realidade das que não são, ou seja, não consegue diferenciar quais hipóteses são verdadeiras ou falsas. A criança leva em consideração apenas o concreto: situações que acontecem no momento. Para resolver situações que os objetos não estão presentes, como hipóteses verbais, ela ainda parte do concreto, fazendo uma antecipação de forma limitada. Este período inicia-se a partir dos 7 anos de idade e encerra-se por volta dos 12 anos.

O último período de desenvolvimento mental é o operacional-formal, o estágio do formalismo do pensamento. O adolescente desenvolve o raciocínio lógico-dedutivo, trabalhando não apenas com as situações concretas, mas também com as hipóteses verbais abstratas, além de manipular as hipóteses de maneira que o impulsiona à resolução de um problema. Como no estágio anterior, parte-se do concreto, mas o adolescente parte das hipóteses para fazer possíveis deduções lógicas. Ele busca a veracidade dos fatos e quais são as explicações possíveis para tais fatos. Portanto, “a característica básica desse período é a capacidade de manipular construtos mentais e reconhecer relações entre esses construtos” (MOREIRA, 1995, p.99).

A passagem de um estado para o outro acontece de forma fluida, mas o que não varia é a ordem dos períodos. O desenvolvimento mental ocorre a partir da ideia de subir degraus, você só avança para o próximo degrau se tiver passado pelo anterior. Apesar de cada estágio estar descrito para uma determinada fase do crescimento, a idade não é necessariamente um fator determinante para a criança

estar naquele período, mas o que determina são os processos que ela passa para atingir o estado operatório-formal.

Para que ocorra o desenvolvimento cognitivo, são propostos por Piaget três pilares: *assimilação, acomodação e equilíbrio*.

A assimilação é a maneira como o indivíduo interpreta a realidade. São construídos esquemas mentais de assimilação para entender a realidade e incorporá-la às suas atitudes, de forma a se sobressair ao meio. Quando há a falta de entendimento ou contradição a mente encontra um meio de modificar-se para chegar a uma conclusão. Através dessa interação, há o processo de acomodação. Este processo se caracteriza pela construção de novas assimilações. “Não há acomodação sem assimilação, pois a acomodação é a reestruturação da assimilação” (MOREIRA, 1995, p.100)

Quando assimilação e acomodação estão em consenso, a equilíbrio cognitiva acontece. A partir de novas acomodações, mais assimilações irão acontecer e fazer com que a mente se adapte aos novos processos. Em ordem cronológica, a equilíbrio é um processo que se estende até a vida adulta. Para Piaget, só há aprendizagem quando ocorre a equilíbrio, isto é, o processo de assimilação leva à acomodação. Enfatizando que os esquemas de assimilação vão se modificando a partir da maturidade do indivíduo.

Quando a mente não consegue chegar ao equilíbrio ou ele é rompido (através de situações que não foram devidamente assimiladas), há um novo processo chamado de reequilíbrio ou equilíbrio majorante. Este processo é fundamental para a evolução da aprendizagem do indivíduo. O conceito de aprendizagem para Piaget é definido pelo aumento do conhecimento da pessoa em questão.

O ensino é definido através da reequilíbrio, o professor provoca um desequilíbrio durante suas aulas, para que o aluno crie novas assimilações e se reestruture para chegar a uma equilíbrio majorante.

O comportamento humano está intimamente relacionado com o desenvolvimento cognitivo e está atrelado às ações definidas por Piaget como: ação sensório-motora, ação verbal e ação mental. Portanto, a concepção é a internalização de cada ação feita.

Piaget critica fortemente o ensino tradicional abordado na escola, pois este não valoriza os estágios cognitivos dos alunos.

Na escola, esta necessidade de compatibilizar o ensino com o nível de desenvolvimento mental da criança, e, muitas vezes ignorada: tente-se, por exemplo, ensinar conteúdos que pressupõem conservação e reversibilidade para crianças que, pelo período de desenvolvimento em que estão, não tem ainda estas noções. (MOREIRA, 1995, p.100)

Portanto, é extremamente importante o ensino ativo, isto é, que os alunos deixem de ser meros receptores e passem a fazer parte do próprio processo de aprendizagem. Já em relação ao papel do professor, este não se limita apenas ao conhecimento teórico da matéria em si, mas também se preocupa em entender o desenvolvimento psicológico do seu aluno. Além disso, o professor precisa se aproximar dos esquemas de assimilação dos alunos, escolhendo de forma criteriosa como irá abordar sua aula para causar um pequeno desequilíbrio que seja reversível para que haja a equilibração majorante, assim o processo de ensino se torna efetivo. Lembrando que o professor está envolvido também no processo de aprendizagem, enquanto ele atua na aula, ele também aprende juntamente com o aluno.

Além disso, a teoria de Piaget critica a separação dos alunos em rótulos, como a comparação que costuma existir entre os “bons alunos” e “maus alunos” nas disciplinas como Matemática e Física. Os alunos que são considerados “bons alunos” têm uma capacidade de adaptação melhor em relação ao processo de ensino que são expostos. Já os que são rotulados como alunos ruins, tem essa taxa de insucesso, devido ao processo ter sido rápido ao ponto de provocar um desequilíbrio que não pôde ser reestruturado. O que desmistifica a ideia de que eles não estão aptos a aprender disciplinas consideradas como exatas. Este exemplo de “bons” e “maus” alunos se estende naturalmente ao caso dos estudantes com necessidades específicas. Alguns deles passam pelos estágios de desenvolvimento de Piaget em idades distorcidas, mas estão inseridos em classes segundo a faixa etária. Por isso, é tão premente que o professor adapte sua abordagem considerando o grau de desequilíbrio pretendido de forma individual. Caso contrário, um estudante conseguirá atingir a reequilibração e outro certamente não.

Por fim, para que ocorra ensino e aprendizagem efetivos, o professor deve se aproximar do aluno, propor aulas que tirem o aluno do lugar comum de mero espectador e, sobretudo, levar em consideração os estágios de desenvolvimento

cognitivo dos seus estudantes. O professor deve priorizar atividades que instiguem a pesquisa, a curiosidade e a autonomia dos alunos. Segundo Moreira (1995, p.105), “seria uma ilusão acreditar que ações e demonstrações, mesmo realizadas pelos alunos, têm em si mesmas o poder de produzir conhecimento”, pois este somente é gerado quando está em harmonia com as argumentações estabelecidas pelo professor.

2.2 A teoria da mediação de Vigotski

Os dois pilares para o desenvolvimento cognitivo na perspectiva de Vigotski são os instrumentos e signos. O conceito de instrumento está relacionado a algo que pode ser usado para executar alguma ação. Já o signo é para dar significado, funciona como uma simbologia. O reconhecimento e a criação desses instrumentos e signos influenciam diretamente no processo de aprendizagem, desde que haja interação social entre os indivíduos envolvidos.

Segundo Moreira (1995), para Vigotski, a internalização de signos é fundamental para o desenvolvimento cognitivo. O que leva diretamente ao conceito de fala, pois para esse teórico a linguagem é o mais importante dos signos.

A linguagem proporciona a interação social, visto que é o meio fundamental para a transmissão dinâmica de conhecimento social, histórica e culturalmente construído. O que está intimamente relacionado com as relações semióticas e a internalização de signos já compartilhados culturalmente. Daí Vigotski concluiu que o processo de interiorização da fala ocorre psicologicamente, antes de ser praticada e se dá em três fases distintas: o indivíduo desenvolve-se a partir da fala social, segue para a fala egocêntrica e a partir desta, para a fala interna. Segundo Garton (1992, apud. MOREIRA, 1995, p.115) “a internalização da fala leva à independência em relação à realidade concreta e permite o pensamento abstrato e flexível, independente do contexto externo”.

Entretanto, esta internalização não ocorre sem a ideia de mediação, que nesse caso está diretamente relacionada à representação abstrata dada ao objeto, que no caso da fala se expressa através da língua. Nas palavras de Oliveira (2019, *in* LA TAILLE, p.39), “enquanto sujeito de conhecimento o homem não tem acesso direto aos objetos, mas um acesso mediado, isto é, feito através dos recortes do real operados pelos sistemas simbólicos de que dispõe”. Embora Vigotski tenha focado no sistema de linguagem, outros sistemas representativos perpassam a construção do

conhecimento humano e faremos uma melhor discussão sobre o tema na próxima seção.

Um conceito fundamental da teoria de aprendizagem de Vigotski é a zona de desenvolvimento proximal. Este conceito é definido pela habilidade de um indivíduo resolver problemas sem a orientação de outra pessoa ou até mesmo resolver em grupo com pessoas que apresentem mais conhecimento sobre o tema.

A zona de desenvolvimento proximal, definida como a distância entre o nível de desenvolvimento cognitivo real do indivíduo, tal como medido por sua capacidade de resolver problemas independentes e o seu nível de desenvolvimento potencial, tal como medido através da solução de problemas sob orientação (de um adulto, no caso de uma criança), ou em colaboração com companheiros mais capazes. (VIGOTSKI, apud. MOREIRA, 1995, p. 116).

Logo, este conceito é extremamente importante, pois revela quais são os construtos cognitivos que estão em processo de desenvolvimento e quais já estão bem estabelecidos. É um instrumento avaliativo que demonstra o nível cognitivo, mostra exatamente onde está a falha no processo de aprendizagem de maneira dinâmica e ainda consegue adaptar-se a cada indivíduo em questão. A interação social, base de toda aprendizagem efetiva, ocorre juntamente da zona de desenvolvimento proximal e define o limite inferior e o superior. O limite inferior é o nível real do desenvolvimento do aluno e o nível superior é definido pelo processo que o aluno demonstra nos atos de brincar, estar exposto ao ensino tradicional ou com metodologias ativas ou até mesmo como irá atuar no trabalho.

Para sustentar essa teoria, Vigotski se apoiou na metodologia experimental, isto é, uma metodologia que se apoia no engajamento dos alunos fornecendo meios para que isso aconteça. O primeiro passo é causar provocações que façam os alunos ficarem intrigados na forma que irão resolver o problema proposto. Por exemplo: colocar alunos que tenham características distintas em um mesmo grupo. O segundo passo é fornecer recursos para a resolução do problema, permitindo que haja discussão entre os alunos de como o recurso pode ser útil. O último passo é solicitar aos alunos que resolvam problemas com um nível de dificuldade maior do que as habilidades que eles já têm. A ênfase dessa metodologia não está na resposta final, mas sim no processo em que foi construída.

Para que ocorra a aprendizagem efetiva, principalmente em matemática, é necessária uma construção conceitual. O processo de formação de conceitos para Vigotski é baseado em agregação desorganizada, pensamentos por complexos e conceitos potenciais.

Agregação desorganizada ou também chamada de amontado, está relacionada com as fases iniciais cognitivas de uma criança. Descreve o momento, em que a criança junta diversos objetos sem distinção nenhuma para solucionar um problema, ou seja, sem um conceito pré-estabelecido que dê sentido ao amontoado de objetos. Em um segundo momento, há uma organização visual dos objetos.

Durante o pensamento por complexos a criança já consegue estabelecer as relações existentes entre cada objeto pertencente ao amontoado. De forma associativa, relacionando atributos em comum, em cadeia, unindo objetos com as mesmas cores, tamanhos e formatos. O estágio seguinte é chamado por Gaspar (apud. MOREIRA, 1995, p.118) “de complexo difuso, quando os atributos vão sendo modificados de forma vaga, flutuante e aparentemente ilimitada”. O último estágio é do pseudoconceito, que é o entremeio do pensamento de uma criança a um pensamento adulto. Quando esse estágio é atingido a criança está quase estabelecendo um conceito, mas ainda não é formado pois não foi atingida ainda, de fato, a abstração.

Conceitos potenciais são os resultados das primeiras abstrações feitas por uma criança em estágio de desenvolvimento cognitivo, antes mesmo de chegar ao estágio do pseudoconceito. Os conceitos potenciais estão presentes no primeiro estágio de formação de conceito, na agregação desordenada. Nos conceitos potenciais propriamente ditos, os traços abstraídos são sintetizados e a síntese abstrata resultante para a ser o principal instrumento do pensamento (VIGOTSKI, apud. MOREIRA, 1995, p.119).

A definição dos conceitos é necessária para a compreensão de como uma criança estabelece os conceitos, mas não exclui o papel primordial que o professor tem nesse processo e a importância da sua mediação, visto que a aprendizagem é a base para o desenvolvimento. Este processo de aprendizagem é regido pelas interações sociais, dentro da zona proximal de desenvolvimento. O professor é o agente principal, que já internalizou os conceitos atribuídos aos determinados conteúdos em relação à sua matéria e tem como papel analisar se o aluno

compreendeu o conceito compartilhado socialmente. Portanto, ele deixa de ser o detentor do conhecimento absoluto e faz parte da construção do mesmo.

Enquanto a responsabilidade do aluno é verificar se o conceito reconhecido por ele é o que, de fato, o professor compartilhou e também se é aceito socialmente. Quando há uma troca mútua de significados, ou seja, um intercâmbio entre o professor e o aluno, o processo de ensino de aprendizagem ocorre.

Sem interação social, ou sem intercâmbio de significados, dentro da zona de desenvolvimento proximal do aprendiz, não há ensino, não há aprendizagem e não há desenvolvimento cognitivo. Interação e intercâmbio implicam, necessariamente, que todos os envolvidos ensino-aprendizagem devem falar e tenham oportunidade de falar. (MOREIRA, 1995, p. 121)

2.3 Teoria das representações semióticas

Esta seção versará sobre a utilização de diferentes representações para palavras, objetos, conceitos, e a importância da diversidade dos registros de representações semióticas para o desenvolvimento do conhecimento, sobretudo os matemáticos. Inicialmente, é de fundamental importância entender a definição da palavra semiótica. Esta palavra possui origem na palavra grega *semeion*, que significa signo. Portanto, a semiótica pode ser considerada a ciência dos signos, tratando assim do funcionamento de simbologias.

A maior dificuldade no ensino da matemática segue do fato de que seus objetos de estudo não têm representação necessariamente física ou concreta. Por exemplo, o número é um conceito abstrato que pode representar uma quantidade e é representado por um símbolo escrito e uma palavra falada, mas não é um objeto físico que pode ser tocado ou visto. Outro exemplo muito fecundo é todo aquele que diz respeito aos objetos geométricos, pois mesmo que desenhemos uma linha para representar um segmento de reta, no mundo real ela não existe, visto que necessariamente será um objeto bidimensional. Um segmento de reta é unidimensional por definição e, por este motivo, só pode viver no mundo das ideias, ou seja, é um objeto puramente abstrato e para se materializar necessita de uma representação.

Nesta perspectiva, a teoria das representações semióticas serve para analisar as dificuldades existentes na aprendizagem da Matemática e como esta ciência trabalha de forma diferenciada em relação ao processo cognitivo, no que diz respeito aos variados sistemas de representações semióticas nela presentes.

Nas palavras de Duval,

Não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação. Daí, segue que “as diversas representações semióticas dos objetos matemáticos seriam então secundárias e extrínsecas à aprendizagem conceitual dos objetos. (DUVAL, 2009, p.14)

Desta forma, para Duval (2009, p.17): “A pluralidade das representações semióticas facilita a aquisição de representações mentais.” Portanto, é necessária uma diversidade maior de sistemas semióticos para a aprendizagem matemática do que para qualquer outra área do conhecimento. Um sistema semiótico, de acordo com Duval (2009), é um conjunto de *semiósis* e *noésis*, que são estabelecidos conforme suas próprias regras de formação e conversões, que se relacionam entre si. Portanto, é um sistema que trabalha a linguagem, ou seja, a sua principal função é a comunicação.

De forma muito simplificado, podemos dizer que a *semiósis* trata da produção da representação semiótica, isto é, dos símbolos específicos que representam determinados conceitos, enquanto a *noésis* está relacionada com a compreensão do significado dos símbolos. Segundo Duval (2009, p. 17), “não há noésis sem a semiósis”, ou seja, para que um conceito seja inteiramente compreendido é necessário que a sua representação esteja totalmente solidificada pelo sujeito. Portanto, estes conceitos estão intimamente relacionados e interferem significativamente na aprendizagem de matemática.

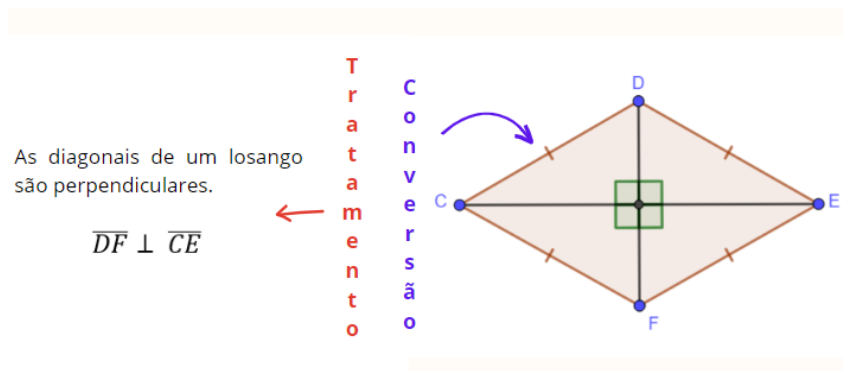
As atividades fundamentais ligadas às semiósis são: formação, tratamento e conversão. A formação busca expressar uma representação mental que obedece às regras de um sistema semiótico já existente. O tratamento é a transformação de uma representação interna. A conversão é a transformação externa em relação à semiósis inicial. A conversão é um dos estágios cognitivos mais difíceis de alcançar.

Numerosas observações em aula [...] e experiências de aprendizagem mostram que a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos. (DUVAL, 2009, p.63)

O primeiro exemplo que podemos utilizar para elucidar tais conceitos é o número, que pode ser formado com representação decimal ou fracionária. O tratamento em cada representação relaciona-se ao modo como podemos operar os números em cada uma destas representações e, finalmente, a conversão se dá quando mudamos de uma representação para outra. Este é um exemplo muito comumente dificuldade nas séries iniciais do Ensino Fundamental, pois o estudante passa do universo dos números naturais aos racionais e ao mesmo tempo deve incorporar duas representações distintas, além de suas conversões.

Outro exemplo a fim de simplificar os conceitos de tratamento e conversão é apresentado na Figura 1 e desta vez é geométrico. Como já foi dito, os objetos geométricos vivem no mundo das ideias, portanto, o desenho de um losango é uma representação do mesmo. Além disso, podemos usar a língua corrente para expressar qualquer propriedade concernente ao losango. Neste caso, quando dizemos que “as diagonais do losango são perpendiculares” costumamos representar as diagonais na figura com uma marcação que significa ângulos retos. Portanto, a escrita e o desenho são diferentes representações e transformar um em outro é uma conversão. Além disso, a matemática possui uma simbologia própria para o tratamento deste tipo de informação, também representado na Figura 1.

Figura 1: Exemplo de tratamento e conversão



Fonte: A autora, 2023

A grosso modo, o tratamento é uma maneira de transformar representações semióticas dentro de um mesmo registro, enquanto a conversão é a transformação de uma representação semiótica em outra representação semiótica. É um processo que exige total discernimento entre a forma e o conteúdo estabelecido, isto é, meros exercícios de conversão não resolvem um problema.

Duval destaca que mesmo que o aluno saiba compreender uma situação que envolve a semiósis, isso não significa que ele de fato tenha aprendido o conceito. Para que ocorra a noésis, muitos passos devem ser desenvolvidos, porque cada representação se refere a conteúdos diferentes, a diferentes sentidos.

A discriminação das unidades significantes de uma representação, e então a possibilidade de uma apreensão daquilo que ela representa, depende da apreensão de um campo de variações possíveis relativamente à significância num registro. [...] é necessário possibilitar a exploração de todas as variáveis possíveis de uma representação num registro fazendo prever, ou operar, as variações concomitantes de representação em outro registro. (DUVAL, 2009 p.101)

Além do tratamento e da conversão, ainda podemos considerar outra característica semiótica fundamental para a aprendizagem em matemática, a escolha da representação. Vale ressaltar que nem todas as representações dão conta das mesmas coisas e, por isso, a escolha depende do que se quer evidenciar. Reiteramos a importância das diferentes representações, mas o professor deve saber como organizá-las a fim de minimizar as dificuldades geradas por pelas próprias representações.

2.4 Diálogo entre os referenciais teóricos

As técnicas de dobraduras, por sua definição, utilizam diferentes representações semióticas, pois a partir delas muitos conceitos geométricos podem ser construídos. Além disso, o origami utiliza símbolos e diagramas para ilustrar o passo a passo da construção de determinada figura ou objeto em questão. A utilização da dobradura enfatiza a manipulação manual do origami, ou seja, transforma aquele objeto matemático, totalmente abstrato, em uma forma física. O origami apresenta

semelhanças com material dourado, frequentemente utilizado nos anos iniciais do Ensino Fundamental com o intuito de ensinar operações como adição e subtração.

Isso relaciona-se diretamente com a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget. Como já definido anteriormente, são quatro estágios de desenvolvimento, dentre estes destaca-se o período pré-operacional concreto. Esse período é caracterizado pela limitação de operar mentalmente com informações abstratas. Mesmo que a criança já esteja em um estágio de desenvolvimento mais a frente, isto é, cursando os anos finais do Ensino Fundamental e tenha desenvolvido a abstração matemática em determinados conteúdos de matemática, pode ser que ainda existam falhas em outros conteúdos no estágio anterior de desenvolvimento, o que retoma a importância do uso de materiais manipulativos para estabelecer uma transição do pensamento concreto para o abstrato.

A teoria de Piaget funciona também como um guia para o professor, porque ao considerar as fases cognitivas de cada aluno, as atividades são adaptadas para cada nível. Ainda, é possível uma chance de diminuir a frustração com a aula de geometria e cumprir com o objetivo de aprendizagem de maneira gradual.

O uso do origami como estratégia metodológica não pode ser deixada para o estudante sem um objetivo claro ou um critério pré-estabelecido, por isso a necessidade de pôr em prática a teoria da mediação de Vigotski, o que enfatiza a tríade estudante-mediador-conteúdo. O professor desempenha papel de crucial como mediador. As atividades envolvendo origami fortalecem ainda o conceito da zona de desenvolvimento social, visto que podem ser atividades realizadas em grupo compostos com alunos com diferentes níveis cognitivos.

O trabalho do professor de matemática já não considerado simples, pois é necessário lidar com diversas representações semióticas, mesmo que seja em uma turma sem a presença de alunos com necessidades especiais. Portanto, ao unir essas três teorias, há uma contribuição para que o ensino de matemática se torne mais inclusivo e eficaz. Por fim, o origami se torna uma ferramenta pedagógica de grande impacto para a compreensão mais sólida dos conceitos matemáticos.

3 MANUAL DE ATIVIDADES PRÁTICAS

Na busca de proporcionar aos estudantes com deficiência um ensino equiparado e inclusivo, a escola se debruça na criação de atividades pedagógicas que

envolvam tais estudantes nas aulas e potencialize o seu aprendizado. É garantido por lei, pelo decreto número 6949, de 25 de agosto de 2009, que as escolas estejam preparadas para lidar com as diversidades humanas.

“Para a realização desse direito, os Estados Partes assegurarão que:

- a) As pessoas com deficiência não sejam excluídas do sistema educacional geral sob alegação de deficiência e que as crianças com deficiência não sejam excluídas do ensino primário gratuito e compulsório ou do ensino secundário, sob alegação de deficiência;
- b) As pessoas com deficiência possam ter acesso ao ensino primário inclusivo, de qualidade e gratuito, e ao ensino secundário, em igualdade de condições com as demais pessoas na comunidade em que vivem;
- c) Adaptações razoáveis de acordo com as necessidades individuais sejam providenciadas;
- d) As pessoas com deficiência recebam o apoio necessário, no âmbito do sistema educacional geral, com vistas a facilitar sua efetiva educação;
- e) Medidas de apoio individualizadas e efetivas sejam adotadas em ambientes que maximizem o desenvolvimento acadêmico e social, de acordo com a meta de inclusão plena.” (BRASIL, 2009)

Além do decreto mencionado, há o respaldo da lei nº 13 146 6 de julho de 2015, Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência, que visa a inclusão e o exercício da cidadania de pessoas com deficiência. O trabalho se justifica no artigo 28 e os incisos V e VI.

Art. 28. Incumbe ao poder público assegurar, criar, desenvolver, implementar, incentivar, acompanhar e avaliar:

V - Adoção de medidas individualizadas e coletivas em ambientes que maximizem o desenvolvimento acadêmico e social dos estudantes com deficiência, favorecendo o acesso, a permanência, a participação e a aprendizagem em instituições de ensino;

VI - Pesquisas voltadas para o desenvolvimento de novos métodos e técnicas pedagógicas, de materiais didáticos, de equipamentos e de recursos de tecnologia assistiva; (Lei brasileira de inclusão, 2015, p.19)

O docente de matemática enfrenta grandes desafios em sua prática, principalmente quando se trata de alunos com algum tipo de transtorno neurológico, devido a complexidade dos conteúdos relacionados a sua disciplina. Em relação ao aluno com TDAH, por exemplo, a atenção sustentada que falha principalmente nas áreas de leitura, escrita e matemática, pois demandam atenção prolongada.

Pensando nisso, o presente trabalho tem como objetivo sugerir um manual de atividades, baseado no Origami Modular para o ensino de conceitos básicos de geometria cujo público alvo é o professor do Ensino Fundamental II, com foco naquele que trabalha com alunos da Educação Inclusiva, destacando alunos com TDAH e alunos com TEA.

3.1 Definição do origami modular

Origami modular é uma das variações do origami. Ele é construído através da junção de unidades *sonobes*. As unidades *sonobes* também podem ser chamadas de módulos. Eles são extremamente atrativos porque podem assumir diversas formas. A popularidade dos modelos de origami modulares da Sonobe deriva da simplicidade de dobrar os módulos, da montagem robusta e fácil. (GONÇALVES, 2018, p. 48)

Figura 2: Figura 2: Módulo sonobe para a construção do cubo



Fonte: A autora, 2023

3.2 Justificativa

Apoiando-se nas teorias de aprendizagem já descritas anteriormente, é indiscutível que um aluno bastante inquieto ou com alguma dificuldade intelectual não tem garantia de aprendizagem ou sequer terá interesse em atividades tradicionais que geralmente envolvem a memória operacional e a cobrança de respostas certas. É através de situações de experimentação e desafios cognitivos que será guiada e construída a própria autonomia intelectual.

O ensino de matemática com foco em alunos da educação inclusiva é bastante limitado. Isso faz com que o desenvolvimento da leitura e de conceitos básicos matemáticos sejam pouco explorados, ocasionando um déficit muito grande nos estágios cognitivos desses alunos.

Também podemos ponderar o que tange às pesquisas na área de matemática e inclusão, como podemos ver a seguir.

A lacuna na pesquisa matemática pode ser especialmente importante para o avanço de intervenções matemáticas baseadas em evidências para alunos com TEA, pois melhorar as habilidades dos alunos com TEA para se sair bem nas aulas de matemática pode melhorar seus resultados escolares nos anos seguintes. (BULLEN *et al*, 2020, p.4463, tradução nossa)

Segundo Sanchez et al (2021), crianças com TDAH têm extrema dificuldade em expressar seus sentimentos e baixa autoestima. Por isso, é importante que elas tenham uma válvula de escape, como por exemplo: cantar, desenhar ou fazer uma atividade física. No processo de aprendizagem também não é diferente. Atividades que convidem o aluno a participar, proporcione também que ele use suas habilidades manuais e exercite a concentração, são fundamentais para que ocorra a aprendizagem e que ele se sinta acolhido principalmente pelo professor ou pela professora de matemática, visto que muitas vezes esta figura é dita como uma autoridade distante. Para Gadelha e Menezes (2004, apud SANCHEZ, 2021, p. 1711), a atividade lúdica contribui para um ambiente rico de aplicações para reforçar comportamentos adequados e extinguir inadequados.

É de conhecimento comum que o ensino de geometria tem sido deixado de lado, pois é considerado um conteúdo menos relevante. Segundo Gonçalves (2018, apud Crescenti, 2005, p.16), percebe-se a necessidade de um ensino eficiente do conteúdo de Geometria que, por vezes, é esquecido pelo docente, ou seja, tal estudo é empurrado para o final do ano e, devido à falta de tempo, é trabalhado superficialmente. Outro grande vilão é a falta de formação dos professores. O que não é diretamente culpa dos professores em si, mas sim da forma como foi ensinado para eles, que é apenas um padrão de reprodução. Nas palavras de Nacarato *et al.*,

Diferentes autores têm discutido o quanto a professora [de séries iniciais] é influenciada por modelos de docentes com os quais conviveu durante a trajetória estudantil, ou seja, a formação profissional docente inicia-se desde os primeiros anos de escolarização. (NACARATO *et al*, 2009, p.20)

Por estes motivos, acreditamos que precisamos fugir dos métodos tradicionais e a técnica do origami é um recurso metodológico com grande potencial para impulsionar de forma interessante a aquisição dos conhecimentos geométricos. Além disso, é uma técnica que facilita visualização dos conceitos, visto que através da construção com as dobraduras a geometria passa a ter um significado mais próximo do real, como Gonçalves afirma a seguir:

Aplicar a Geometria de maneira simples, divertida e criativa, a partir de dobraduras de papel, corrige parte das dificuldades dos estudantes, acreditando que a experiência concreta é de fundamental importância para uma melhor assimilação do conteúdo proposto. Dessa forma, pressupõe-se que com o auxílio da técnica do origami, a aprendizagem da Geometria pode tornar-se mais real para o aluno, uma vez que o trabalho com as dobraduras permite a construção de diversos elementos geométricos. (GONÇALVES, 2018, p.16)

3.3 Objetivos

Nesta sessão serão apresentados os objetivos norteadores das atividades.

3.3.1 Objetivo geral

Apresentar atividades que utilizem técnicas de origami modular, de maneira que habilidades manuais dos estudantes sejam desenvolvidas, a fim de identificar e associar conceitos geométricos com a prática.

3.3.2 Objetivos específicos

- Apresentar as técnicas de origami;
- Destacar os conceitos geométricos presentes na construção das dobras;
- Identificar indicadores que mostram a influência da técnica do origami no aprendizado de conceitos geométricos;
- Promover a interdisciplinaridade entre matemática e artes.

3.4 Descrição das atividades

O manual é composto por cinco atividades, as três primeiras versam sobre poliedros regulares³, a quarta trata-se de uma curiosidade para instigar o interesse dos alunos para a aula de geometria, e a quinta atividade é baseada na construção

³ “Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas”. (LIMA, Elon et al., 2004, p. 241)

de um mosaico utilizando módulos de origami compostos por duas pirâmides. A intenção inicial era aplicar as três atividades, mas por falta de tempo e de uma Comissão de Ética do Colégio Pedro II (CEP/CPPII) formado, só foi possível aplicar a terceira atividade na escola em que a autora leciona.

Figura 3: Sólidos regulares construídos com módulos de origami



Fonte: A autora, 2023

Dentre os sólidos apresentados na figura 3, o cubo e o tetraedro são os mais simples de serem montados e possibilitam um estudo detalhado de diversas propriedades geométricas. Após a construção destes, é interessante mostrar os outros sólidos em sala de aula para que os alunos saiam da abstração e tenham conhecimento físico fundamentado.

Em relação à terceira atividade, o seu surgimento se deu por conta da necessidade de criação de atividades mais lúdicas que incluísse os alunos neurodivergentes nas aulas de geometria. A ideia da utilização do módulo surgiu a partir de uma pesquisa realizada no aplicativo “Pinterest”, em que a autora se deparou com lindos mosaicos, o que trouxe à tona a ideia de utilizar origami modular para compor tais mosaicos. Esta atividade busca, principalmente, evidenciar a matemática envolvida na elaboração dos módulos, além de fortalecer as relações entre o professor e o aluno, valorizar o trabalho em grupo e tornar a aula de matemática mais atrativa para os estudantes.

3.4.1 Construção do cubo através de módulos

O foco principal desta atividade, além de construir o cubo, é explorar conceitos geométricos envolvidos na construção dos módulos.

3.4.1.2 – Materiais utilizados

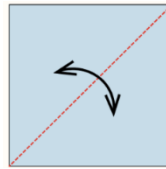
- Folha em formato quadrado de cores diversas;
- Régua;
- Lápis

3.4.1.3– Construção dos módulos do cubo

3.4.1.3.1 – Dividir uma folha quadrada em três partes iguais

Passo 1: o primeiro passo é obter a diagonal dessa folha.

Figura 4: Obtenção da diagonal do quadrado

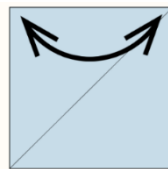


Fonte: A autora, 2023

Neste passo é importante, destacar as propriedades da diagonal do quadrado, mostrar que ela é bissetriz dos ângulos que ela corta. Isso pode ser verificado através da sobreposição de um vértice sobre o outro ou utilizando um transferidor para medir os ângulos, conforme a habilidade EF08MA17⁴ da Base Nacional Curricular Comum (BNCC).

Passo 2: sobrepor os dois vértices superiores, para obter o ponto médio do lado desse quadrado. Fazer a marcação do ponto médio com o lápis.

Figura 5: Obtenção do ponto médio do lado de um quadrado



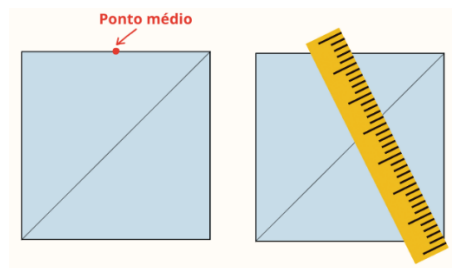
Fonte: A autora, 2023

⁴ “Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.” (BRASIL, 2018, p. 315)

Neste momento, são feitas as constatações sobre a definição de um ponto médio. Através da sobreposição dos vértices é possível analisar que o lado foi dividido em duas partes de mesma medida, ou é possível conferir com a régua também.

Passo 3: posicionar a régua entre o ponto médio do lado quadrado marcado e o vértice inferior direito. Além disso, marcar a intersecção da reta com a diagonal do quadrado.

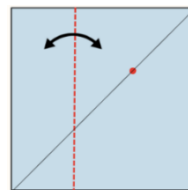
Figura 6: Intersecção da reta com a diagonal do quadrado



Fonte: A autora, 2023

Passo 4: dobrar o lado esquerdo do quadrado sobre o ponto de intersecção, marcado no passo anterior. Esse ponto representa $\frac{1}{3}$ da folha.

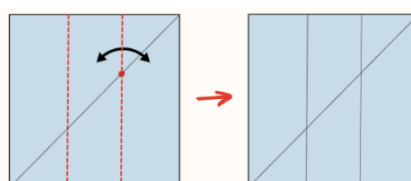
Figura 7: Dobra do lado esquerdo com o ponto de intersecção da diagonal do quadrado



Fonte: A autora, 2023

Passo 5: dobrar o lado direito do quadrado em cima do vinco obtido no passo anterior. Assim a folha será dividida em três partes iguais.

Figura 8: Obtenção da folha dividida em três partes iguais



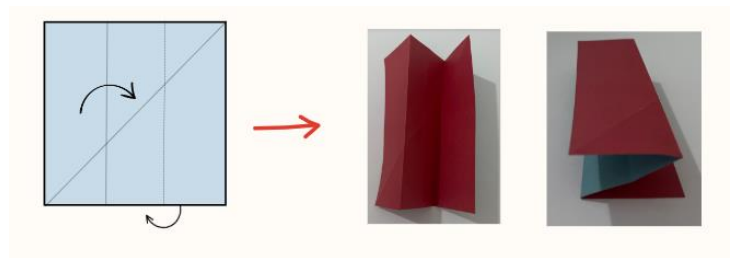
Fonte: A autora, 2023

Este passo é fundamental para melhorar a prática do docente, no que diz respeito à relação do origami com a matemática. Para turmas a partir do 9º ano do Ensino Fundamental II, neste ponto é importante destacar a semelhança de triângulos que encontramos no segundo, no terceiro e quarto passos. Para melhor compreensão do método para o professor, a demonstração da divisão da folha em três partes congruentes encontra-se no apêndice A.

3.4.1.3.2 – Finalização da construção dos módulos do cubo

Passo 6: após a divisão da folha em três partes de mesma medida, dobre uma das partes para frente e a outra para trás causando um “efeito sanfona”.

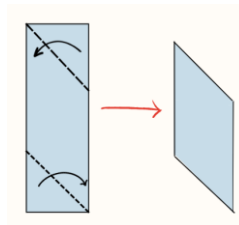
Figura 9: Efeito sanfona



Fonte: A autora, 2023

Passo 7: dobrar o vértice superior direito para o seu lado oposto criando um triângulo retângulo. Fazer o mesmo para o vértice inferior esquerdo. A figura final do módulo será um paralelogramo.

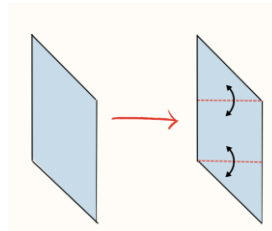
Figura 10: Construção do Paralelogramo



Fonte: A autora, 2023

Passo 8: dobrar as pontas sobre o quadrado central obtido no passo anterior.

Figura 11: Finalização do módulo



Fonte: A autora, 2023

Por fim, serão necessários seis módulos iguais a este para a montagem do cubo.

Figura 12: Exemplo de módulo construído

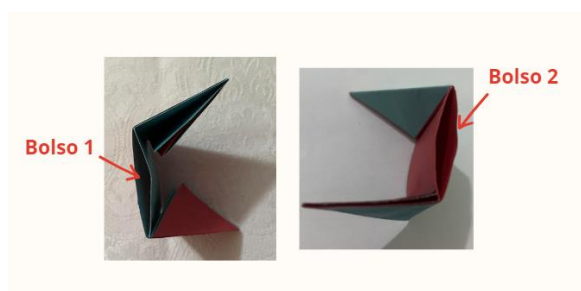


Fonte: A autora, 2023

3.4.1.3.3 – Entendendo como funciona o módulo

O módulo é composto por duas pontas (partes triangulares), que funcionam como uma aba para encaixe e por duas aberturas na parte central quadrada que podem ser chamadas de bolsos, e servem para receber o encaixe da ponta de outro módulo. Observe que se o passo 6 não apresentar o efeito sanfona, será formado apenas um bolso em um dos lados do quadrado.

Figura 13: Análise do módulo

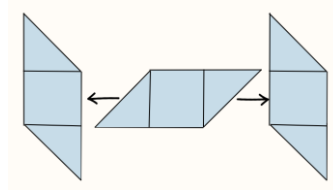


Fonte: A autora, 2023

3.4.1.3.4 – A montagem

Passo 1: para montar o cubo é selecionar três peças, posicionar uma delas no meio de forma horizontal, com as partes das pontas dobradas para cima. As outras duas peças devem ser posicionadas de forma vertical viradas com o bolso para encaixar as pontas da peça do meio.-

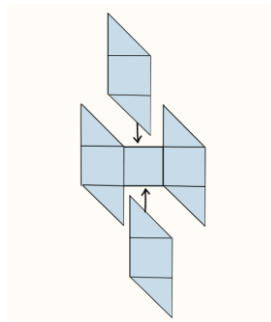
Figura 14: Primeiro encaixe



Fonte: A autora, 2023

Passo 2: encaixar os outros dois módulos na parte central do módulo do meio.

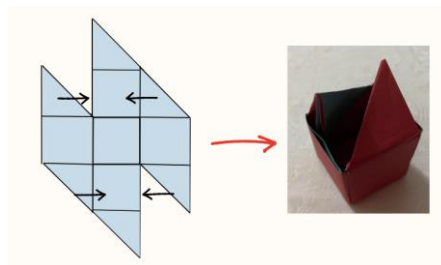
Figura 15: Segundo encaixe



Fonte: A autora, 2023

Passo 3: levantar as pontas dos módulos encaixados nas laterais de maneira que se encaixe nos outros módulos já encaixados no passo anterior. O objetivo é formar uma figura tridimensional que se assemelha a uma caixa sem a tampa.

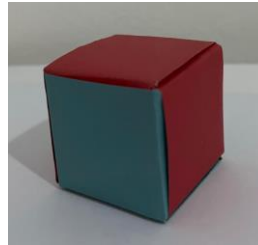
Figura 16: Terceiro encaixe (caixa sem tampa)



Fonte: A autora, 2023

Passo 4: encaixar o último módulo na parte de cima, semelhante a colocar a tampa em uma caixa.

Figura 17: Cubo



Fonte: A autora, 2023

3.4.1.3.5 – Considerações finais sobre a atividade

Após a finalização da montagem do cubo é possível trabalhar os conceitos de retas paralelas, retas perpendiculares e reversas, além de discutir as características de um cubo, a visualização da quantidade de vértices, arestas e faces.

Além disso, o professor pode utilizar como estratégia *a priori* para uma aula em que o tema é probabilidade e trabalhar problema clássicos sobre este tema com o uso do cubo construído, principalmente em séries nas quais o tema ainda está sendo introduzido. É possível marcar números nas faces do cubo e trabalhar problemas clássicos de probabilidade ou ainda exemplos simples de probabilidade condicional, conforme habilidade EF06MA30⁵ da BNCC.

Também achamos interessante sugerir que os alunos façam vídeos curtos, editados, similares às postagens de vídeos em redes sociais como o “Tik Tok”, uma rede social bastante popular entre os jovens atualmente, a fim de registrar os processos de construção e os materiais prontos. Esta é uma forma de incentivar o uso de habilidades não matemáticas e tornar o trabalho mais instigante para o aluno.

3.4.2 Construção do tetraedro

Esta atividade visa explorar o tetraedro: sólido formado por quatro faces triangulares equiláteras. O objetivo principal consiste na construção do tetraedro e,

⁵ Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por um número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos. (BRASIL, 2018, p. 305)

como na atividade anterior, analisar o módulo de forma que seja possível enfatizar conceitos matemáticos subjacentes como ângulos e simetria.

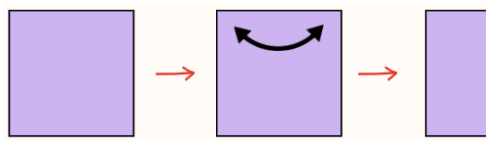
3.4.2.1 – Materiais utilizados

- Duas folhas em formato quadrado de cores diversas

3.4.2.2 – Construção do módulo

Passo 1: dividir a folha em duas partes de mesma medida.

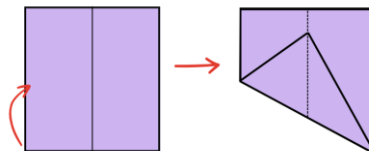
Figura 18: Mediatriz do lado do quadrado



Fonte: A autora, 2023

Passo 2: Fazer uma dobra entre o vértice inferior direito e um ponto do lado esquerdo do quadrado de forma que o vértice inferior esquerdo se sobreponha à mediatriz do passo anterior.

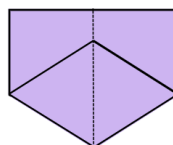
Figura 19: Vértice inferior esquerdo sobre a mediatriz do lado do quadrado



Fonte: A autora, 2023

Passo 3: sobrepor o vértice inferior direito ao vértice que está sobre a mediatriz. A dobra criada neste passo faz aparecer no papel a figura de um losango.

Figura 20: Vértice inferior direito sobre a mediatriz do lado do quadrado

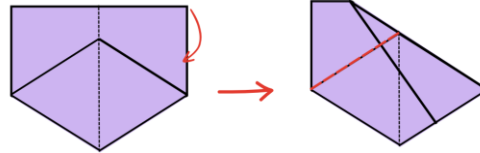


Fonte: A autora, 2023

Observe que neste passo é formado um losango a partir de triângulos equiláteros. A demonstração deste fato encontra-se no apêndice B.

Passo 4: sobrepor o vértice superior direito ao lado inferior direito do losango criado anteriormente de forma que o vértice fique bem alinhado ao lado e que forme um triângulo retângulo conforme imagem a seguir.

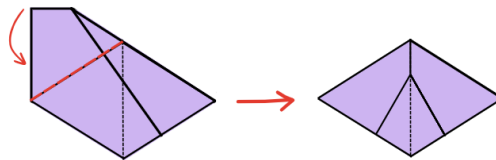
Figura 21: vértice superior direito sobre o lado direito do losango



Fonte: A autora, 2023

Passo 5: Repetir o passo anterior com o vértice superior esquerdo.

Figura 22: Losango



Fonte: A autora, 2023

Observe que se o módulo for virado de cabeça para baixo, ele tem o formato de um losango. De acordo com a habilidade EF08MA14⁶ da BNCC, a partir desse módulo é possível analisar que os lados opostos são paralelos, apresentam a mesma medida, ângulos opostos com a mesma medida e que esses ângulos não são retos, diferente de um quadrado.

Passo 6: fazer mais um módulo seguindo os passos anteriores.

⁶ “Demonstrar as propriedades dos quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.” (BRASIL, 2018, p.315)

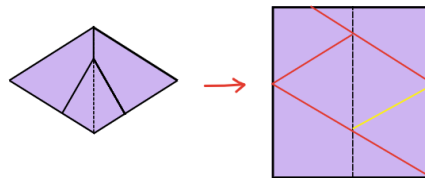
Figura 23: Módulos parcialmente prontos



Fonte: A autora, 2023

Passo 7: Selecionar um dos módulos, desfazer as dobras.

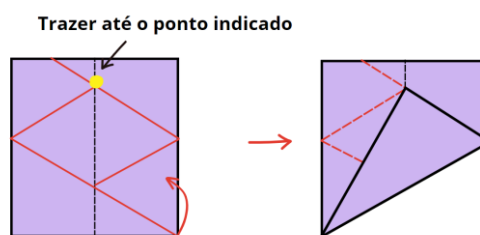
Figura 24: dobras desfeitas



Fonte: A autora, 2023

Passo 8: trazer o vértice inferior direito até que ele encontre o vértice superior da diagonal menor do losango formado pelas dobras. Usar o vinco criado pelo lado inferior direito do losango para ajudar a fazer a dobra.

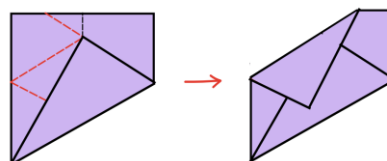
Figura 25: Marcando os vincos para o módulo final



Fonte: A autora, 2023

Passo 9: trazer o vértice superior esquerdo sobrepondo o lado da dobra. O vinco feito anteriormente ajuda na formação dessa dobra.

Figura 26: módulo 1 finalizado

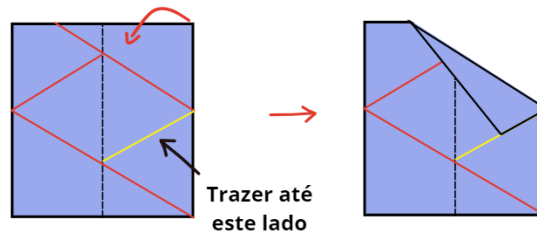


Fonte: A autora, 2023

Passo 10: Com o outro módulo, repetir o passo 7.

Passo 11: Trazer o vértice superior direito até lado inferior do losango. Usar o vinco criado para ajudar a construir a dobra.

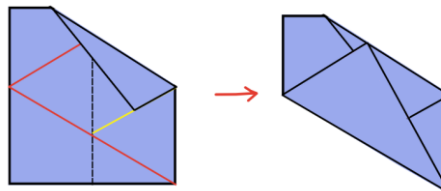
Figura 27: módulo 2 em construção



Fonte: A autora, 2023

Passo 12: trazer o vértice inferior esquerdo até sobrepor a última dobra criada.

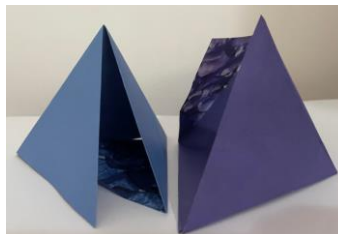
Figura 28: módulo 2 finalizado



Fonte: A autora, 2023

Passo 13: nos dois módulos, frisar os vincos criados em cada dobra. Observe que as faces triangulares ficarão mais evidentes.

Figura 29: faces triangulares

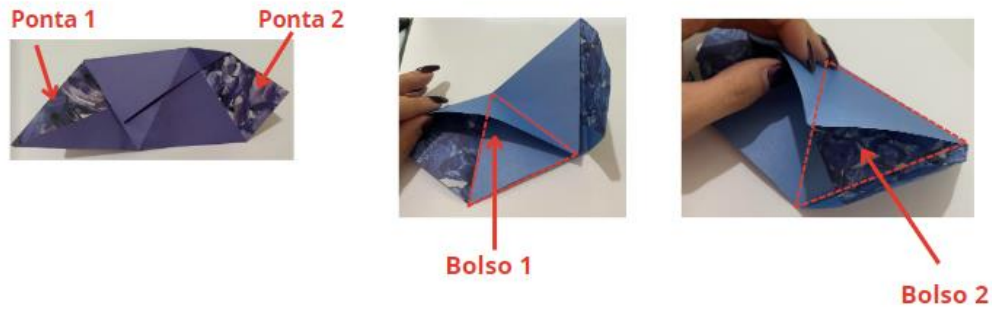


Fonte: A autora, 2023

3.4.2.3 – Entendendo como funciona o módulo

Assim como a atividade anterior, os módulos são compostos por duas pontas distintas e duas partes para o encaixe. Para ilustrar, segue a figura 33.

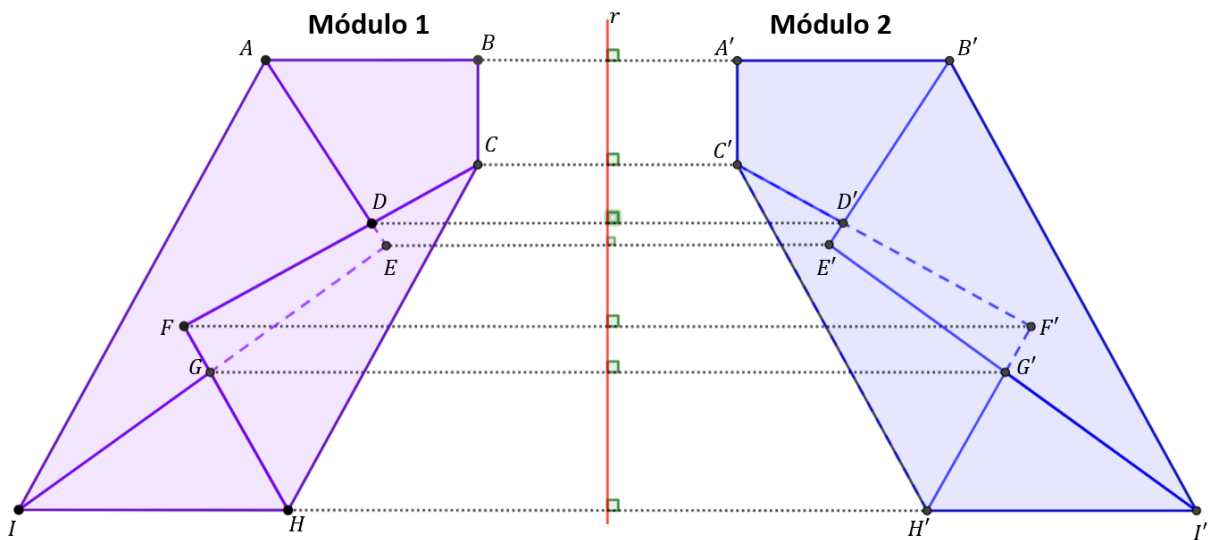
Figura 30: Análise dos módulos



Fonte: A autora, 2023

Ao fazer a comparação dos dois módulos, é possível perceber que há uma transformação geométrica: a reflexão em relação a uma reta. Assunto abordado no 8º ano do Ensino Fundamental e de acordo com a habilidade EF08MA18⁷ da BNCC.

Figura 31: Reflexão em relação a uma reta r



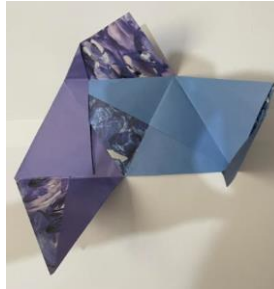
⁷ “Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com uso de instrumentos de desenhos ou de softwares de geometria dinâmica.” (BRASIL, 2018, p. 315).

Fonte: A autora, 2023

3.4.2.4 – A montagem

Passo 1: Com a ponta 1 do módulo 2, encaixar no bolso 2 do módulo 1.

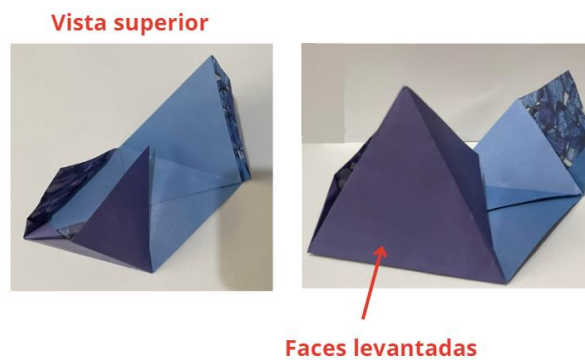
Figura 32: Primeiro encaixe dos módulos



Fonte: A autora, 2023

Passo 2: Neste momento, frisar as faces triangulares do módulo 1 e levantar as faces, de forma a montar as faces laterais do tetraedro.

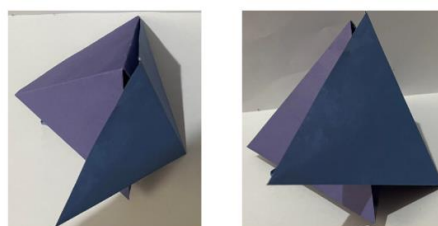
Figura 33: Faces triangulares do módulo 1 levantadas



Fonte: A autora, 2023

Passo 3: Seguir o passo anterior com o módulo 2.

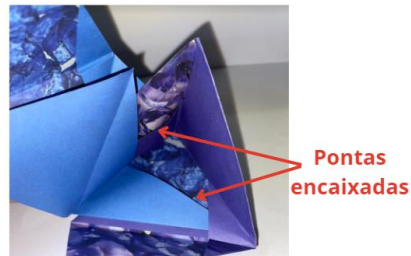
Figura 34: Faces levantadas módulo 2



Fonte: A autora, 2023

Passo 4: Encaixar todas as pontas nos bolsos adjacentes por dentro de cada módulo.

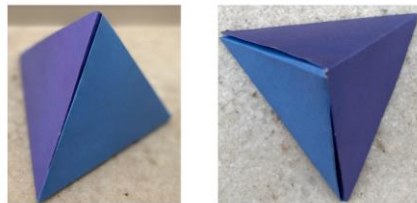
Figura 35: Encaixes dos módulos



Fonte: A autora, 2023

Após a finalização do último passo, o tetraedro está montado.

Figura 36: Tetraedro



Fonte: A autora, 2023

3.4.2.5 – Considerações finais sobre a atividade do tetraedro

Dentre os sólidos de Platão, o tetraedro é o sólido mais simples de ser construído, pois é composto por apenas dois módulos. Além disso, os módulos que o compõem podem explorar diversos conceitos geométricos desde os ângulos, vértices, faces, arestas, classificação de triângulos, transformações geométricas e propriedades dos quadriláteros. Além disso, é excelente para a apresentar o conceito de origami modular pela simplicidade da construção dos seus módulos e retomar a geometria espacial nos anos finais do Ensino Fundamental, visto que poliedros são conteúdos apenas abordados no 6º ano e depois somente no Ensino Médio.

3.4.3 Octaedro, dodecaedro e icosaedro

Devido à complexidade da montagem destes sólidos, é aconselhável que o professor os apresente já construídos para os alunos. Como já mencionado anteriormente, a representação física possibilita o reconhecimento de suas propriedades de maneira tátil.

Uma atividade interessante a ser proposta em sala é a validação do Teorema de Euler.⁸ Com os dois sólidos construídos anteriormente e os outros três presentes montados é possível montar uma tabela de comparação com o número de arestas, vértices e faces de cada poliedro.

Tabela 1: Números de vértices, faces e arestas dos sólidos regulares

Sólido	Vértices	Arestas	Faces	Relação de Euler
<i>Cubo</i>	8	12	6	$8 - 12 + 6 = 2$
<i>Tetraedro</i>	4	6	4	$4 - 6 + 4 = 2$
<i>Octaedro</i>	6	12	8	$6 - 12 + 8 = 2$
<i>Dodecaedro</i>	20	30	12	$20 - 30 + 12 = 2$
<i>Icosaedro</i>	12	30	20	$12 - 30 + 20 = 2$

Fonte: A autora, 2023

Após a comparação é possível observar a regularidade do Teorema de Euler com os sólidos apresentados. Essa atividade é interessante para os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, pois contempla a habilidade EF06MA17⁹ da BNCC.

3.4.4 Poliedros Estrelados

O professor pode apresentar à turma os poliedros estrelados como forma de curiosidade adicional, destacando ainda a diferença entre os sólidos regulares e os poliedros estrelados construídos a partir deles. Por fim, para despertar o interesse dos alunos, é possível fazer uma assimilação dos sólidos estrelados com os enfeites natalinos e a possibilidade de usá-los como objetos de decoração na árvore de Natal.

⁸ “Em todo poliedro com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação $V - A + F = 2$.” (LIMA, Elon. et al., 2004, p. 235)

⁹ Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial. (BRASIL, 2018, p. 303)

Figura 37: Exemplos de sólidos estrelados



Fonte: A autora, 2023

A verificação do Teorema de Euler para estes sólidos também é válida. Considere a tabela abaixo.

Tabela 2: Verificação do Teorema de Euler com Poliedros Estrelados

Sólido	Vértices	Arestas	Faces	Relação de Euler
Octaedro estrelado	14	36	24	$14 - 36 + 24 = 2$
Icosaedro estrelado	32	90	60	$32 - 90 + 60 = 2$

Fonte: A autora, 2023

3.4.5 Construção de um quadro com módulos compostos por duas pirâmides

O foco principal desta atividade é explorar as propriedades dos triângulos isósceles, equiláteros e as características das pirâmides formadas. Estabelecer interdisciplinaridade com a disciplina de artes, no sentido de envolver habilidades artísticas e promover uma possível parceria com o professor de artes.

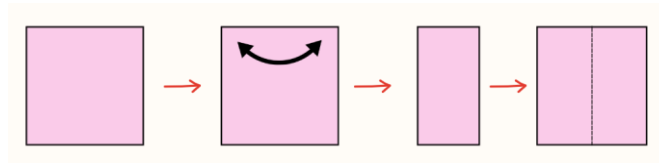
3.4.5.1 – Materiais utilizados

- Folhas em formato quadrado de cores diversas;
- Cola;
- Tela para pintura;
- Tintas de cores diversas;
- Pincel.

3.4.5.2 – Construção dos módulos

Passo 1: construir este módulo é dividir o papel quadrado em duas partes de mesma medida. Isto é, dobrar vértices, superior e inferior, um sobre o outro.

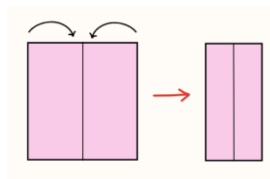
Figura 38: Divisão da folha em duas partes de mesma medida



Fonte: A autora, 2023

Passo 2: dividir esta folha em quatro partes de mesma medida. Levando os vértices, superior e inferior, do lado esquerdo e direito até a dobra feita pelo passo anterior.

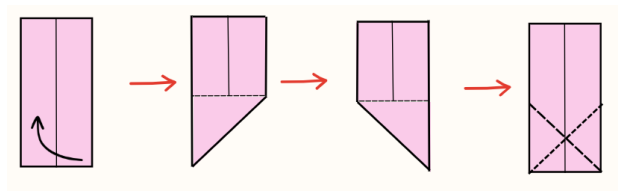
Figura 39: Divisão da folha em quatro partes de mesma medida



Fonte: A autora, 2023

Passo 3: levar o vértice inferior ao lado oposto formando um triângulo retângulo. Após fazer esta dobra, desdobre e repita o mesmo para o outro vértice e desdobre ao final. Observe que as dobras formaram três triângulos isósceles.

Figura 40: Formação dos triângulos isósceles

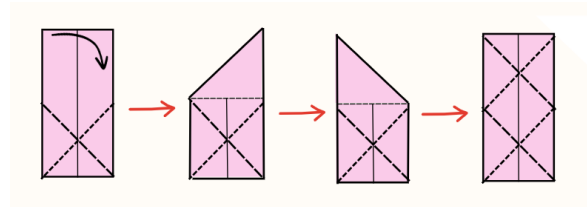


Fonte: A autora, 2023

Passo 4: repetir o passo anterior para os dois vértices que não foram dobrados. Observe que ao final, forma-se um quadrado (formado por dois triângulos isósceles) e mais três triângulos isósceles. Esta parte é importante, pois os vincos criados irão ajudar a traçar a forma do módulo final. Também é importante destacar que é possível

delimitar a altura do triângulo isósceles, mostrar que a bissetriz e a mediana são cevianas coincidentes com a altura.

Figura 41: Vincos principais para formação do módulo

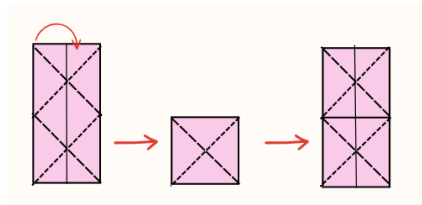


Fonte: A autora, 2023

Neste passo, são criados triângulos congruentes, através de um eixo de simetria. É possível explorar os casos de congruências e discutir sobre eixo de simetria. Também podemos discutir aqui as propriedades das diagonais de um quadrado e responder porque se cruzam no ponto médio e porque são perpendiculares.

Passo 5: dobrar a última peça formada ao meio. Vincar bem e depois desdobrar.

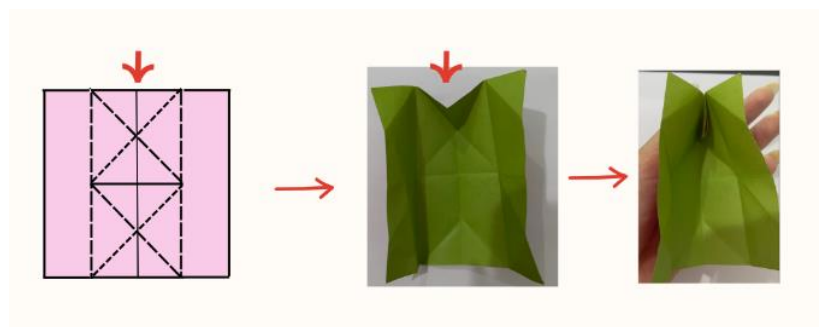
Figura 42: Último vinco para a formação do módulo



Fonte: A autora, 2023

Passo 6: preparar a peça para o encaixe afim de formar o módulo. Com a folha desdobrada, empurrar a altura do triângulo isósceles da parte superior da folha formando dois triângulos retângulos sobrepostos.

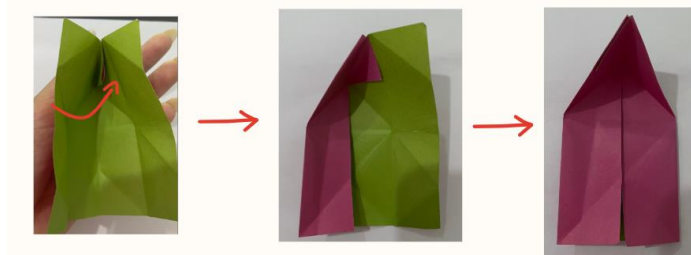
Figura 43: Base para o encaixe do módulo



Fonte: A autora, 2023

Passo 7: consiste em fazer o primeiro encaixe. Sobrepor uma das laterais da folha e encaixar sobre os triângulos retângulos sobrepostos conforme a figura abaixo. Os vincos já criados ajudarão a formação da face lateral de uma das pirâmides. Repetir o mesmo para o outro lado.

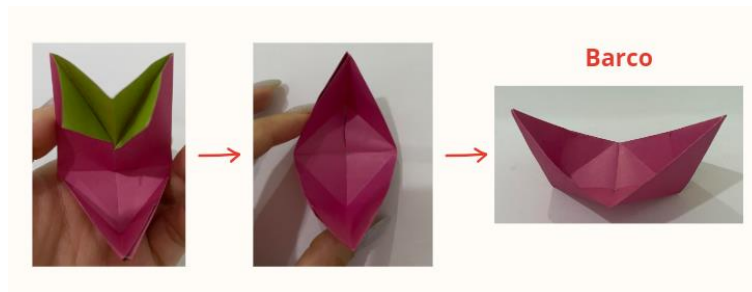
Figura 44: Face lateral da pirâmide formada



Fonte: A autora, 2023

Passo 8: repetir o passo anterior, porém na parte inferior da folha. O módulo ficará com um formato de um origami de barco.

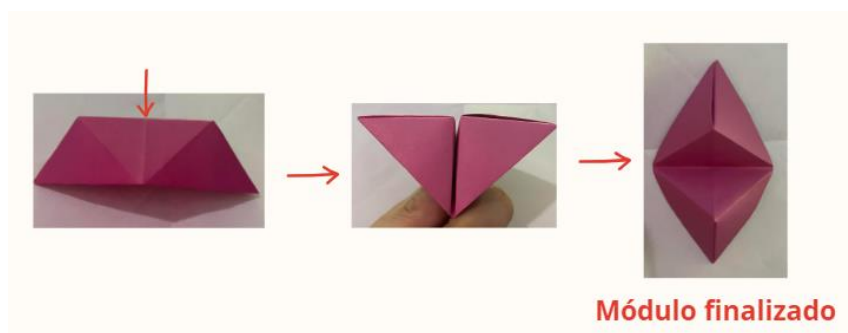
Figura 45: Módulo em formato de barco



Fonte: A autora, 2023

Passo 9: Virar o módulo para baixo e usar o vinco feito no quinto passo, isto é, dobrando uma pirâmide contra a outra. A partir desse passo, o módulo está finalizado.

Figura 46: Módulo finalizado



Fonte: A autora, 2023

3.4.5.3. Análise do módulo

O módulo é composto por duas pirâmides conectadas por uma aresta em comum. Os triângulos das bases são triângulos equiláteros e as faces laterais são triângulos isósceles. O módulo virado para baixo pode ser visto como a figura de um losango.

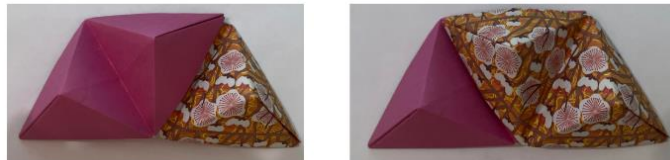
Figura 47: Compreensão do módulo



Fonte: A autora, 2023

Os módulos podem ser encaixados, basta sobrepor uma base à outra. O contorno dos módulos faz com que apareça a figura de um trapézio isósceles.

Figura 48: Módulos encaixados



Fonte: A autora, 2023

3.4.5.3.1. Um módulo visto como hexaedro

Ao dobrar o módulo de maneira que as bases das duas pirâmides fiquem sobrepostas é possível formar um hexaedro.

Figura 49: Hexaedro visto por vários ângulos



Fonte: A autora, 2023

O hexaedro formado é classificado como um poliedro convexo¹⁰, portanto o Teorema de Euler é válido. Para verificar, basta contar o número de vértices, faces e arestas. É interessante fazer a comparação deste sólido com o cubo que também é um hexaedro.

Tabela 3: Comparação entre o hexaedro construído pelo módulo e o cubo

Número de:	Hexaedro formado pelo módulo	Cubo
Vértices	5	8
Faces	6	6
Arestas	9	12

Fonte: A autora, 2023

O Teorema de Euler aplicado ao hexaedro construído com o módulo:

$$5 - 9 + 6 = 2$$

Aplicado ao cubo:

$$8 - 12 + 6 = 2$$

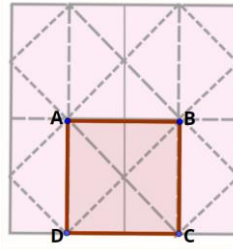
Esta comparação é importante devido à classificação usual que costuma levar os estudantes a acreditarem que somente o cubo é considerado um hexaedro, quando na verdade, para que um hexaedro seja um cubo é necessário que ele seja regular.

3.4.5.3.2. Por que as bases das pirâmides são triângulos equiláteros?

Para responder essa pergunta é necessário considerar o módulo aberto, observar os vincos formados pelas dobras. Ao fazer essa análise, destaca-se o quadrado $ABCD$, porque é a partir dele que a base será formada.

¹⁰ “Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos.” (LIMA, Elon. et al., 2004, p. 233)

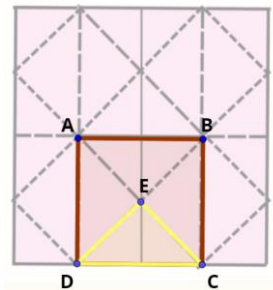
Figura 50: Quadrado ABCD



Fonte: A autora, 2023

Destacando também o triângulo DEC , como descreve a figura 51.

Figura 51: Triângulo DEC



Fonte: A autora, 2023

Com o passo a passo da construção do módulo, o triângulo DEC se dobra para dentro, o que faz com que as arestas (base e altura) desse triângulo desapareçam. Os lados desse triângulo se tornem uma aresta da pirâmide com o módulo. As outras três arestas do quadrado permanecem.

3.4.5.4. Realização da atividade com os estudantes

A atividade foi aplicada em uma escola que a autora leciona, em três turmas regulares de 8º ano do Ensino Fundamental com um total de 75 estudantes em 5 tempos de 45 minutos cada. Nestas turmas há a presença de alunos neurodivergentes, principalmente alunos com TEA e TDAH. O trabalho não foi realizado juntamente ao professor de artes da escola, mas poderia ter sido realizado.

Para que a atividade fosse devidamente engajada pelos alunos, houve um aviso prévio pelo *Google Classroom* das turmas. Esta atividade foi considerada como uma Avaliação Disciplinar de Matemática e foi solicitado também que os mesmos evitassem faltar na semana da aplicação.

O aviso gerou uma expectativa grande nos alunos, pois se tratava de uma avaliação diferenciada na disciplina e alguns alunos expressaram um sentimento de alívio por não se tratar de um teste tradicional, principalmente alunos com TDAH que expressam maiores dificuldades.

O primeiro momento da aplicação consistiu em construir o módulo junto à turma. Em cada passo a passo do módulo, foram feitos questionamentos sobre quais conceitos geométricos os alunos conseguiriam identificar, mas sem dizer de fato qual eram os conceitos. A professora trouxe exemplos prontos para esclarecer como seria um possível resultado final. Esse momento durou 45 minutos.

Figura 52: Exemplos de mosaicos construídos pela professora



Fonte: A autora, 2023

O segundo momento iniciou a partir da separação em trios ou quartetos das turmas. A partir daí, eles começaram a discutir qual figura construiriam formar com os módulos, distribuíram as tarefas de cada membro do grupo e também já começaram a dobrar os módulos. Ao dobrar individualmente, a maior dificuldade identificada foi nos passos 7, 8 e 9 da sessão 3.4.3.2. Este momento durou 45 minutos.

No terceiro momento, os alunos com algum tipo de neurodivergência ainda estavam com dificuldades em realizar a dobradura do módulo, mas através da mediação da professora, eles conseguiram finalizar os módulos. Ao final desta etapa, os alunos começaram a pintar as telas e já estavam com diversos módulos feitos. Este momento durou 90 minutos.

No quarto momento, já com as telas pintadas, houve a montagem final dos mosaicos, o que consistia na colagem dos módulos na tela, e o preenchimento do formulário com perguntas específicas sobre a atividade. Ao final do tempo, ocorreu a apresentação dos trabalhos, que foi uma exposição dos mosaicos para a turma. Esse momento durou 45 minutos.

A Figura 53 mostra os diferentes momentos do processo de construção dos mosaicos por diferentes grupos de estudantes, desde a construção dos módulos até a finalização do mosaico e possíveis acabamentos de pintura.

Figura 53: Durante a confecção



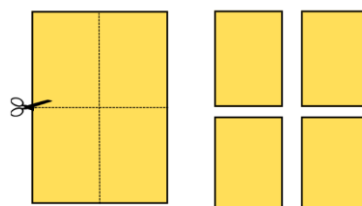
Fonte: A autora, 2023

Alguns grupos trouxeram folhas prontas para o origami, isto é, em formato quadrado e com gramatura ideal para a confecção dos módulos. Entretanto, um detalhe importante a ser mencionado para o início da atividade foi que os alunos trouxeram folhas coloridas em formato A4. É necessário transformar essa folha em formato quadrado para realizar a atividade. Para que os módulos não ficassem muito grandes e não ocupassem muito espaço na tela, seguimos o seguinte passo a passo antes de dar início à atividade.

Passo 1: Dobrar a folha ao meio, ou seja, sobrepor os vértices superiores e os inferiores. Em seguida dobrar novamente ao meio de forma perpendicular à dobra anterior.

Passo 2: Abrir a folha e recortar os quatro retângulos formados.

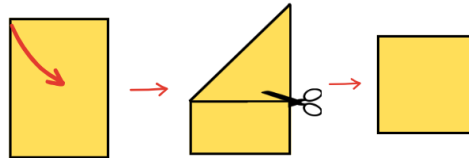
Figura 54: Folha A4 dividida em quatro retângulos



Fonte: A autora, 2023

Passo 3: Com um dos retângulos, escolher um dos vértices e dobrar na diagonal, formando um triângulo retângulo. Recortar a parte que sobrar. Fazer o mesmo com os demais retângulos.

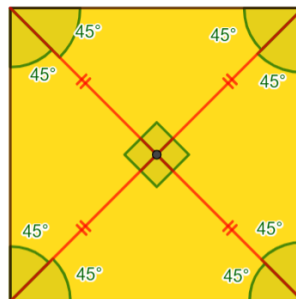
Figura 55: Folha em formato quadrado



Fonte: A autora, 2023

Durante este passo, as diagonais do quadrado são construídas. É possível destacar suas propriedades, através do uso do transferidor para medir os ângulos que foram divididos ou utilizar a sobreposição das dobras para verificar que os ângulos são congruentes. Destacar os quatro isósceles construídos para mostrar que as diagonais são perpendiculares e se encontram no ponto médio.

Figura 56: Diagonais do quadrado



Fonte: A autora, 2023

3.4.5.4.1 Resultados

No último momento, os alunos foram convidados a responder um formulário para compartilhar suas percepções e descobertas sobre a atividade. O questionário foi composto por seis questões que serão expostas aqui. As respostas dos alunos serão analisadas de forma detalhada. Já as que pertencem aos alunos com TEA e TDAH estão destacadas em negrito.

Quadro 1: Respostas dos alunos para questão 1 - parte 1

1. Quais são os elementos geométricos identificados durante a construção do módulo utilizado na atividade? E com ele pronto?

retângulo, quadrado e triângulo. losango.

Quadro, retângulo, losango e triângulo .

Triângulos, losangos e hexágonos.

Triângulos, quadrados, pirâmide, retângulos, paralelepípedos

Retângulo.

Retângulo, quadrado, círculo, triângulo e cilindro.

Em processo de construção identificamos triângulos, quadrados, losangos, retângulos e trapézios. E com o módulo pronto vimos losangos e triângulos.

Fonte: A autora, 2023

As respostas mais comuns estão relacionadas ao reconhecimento de figuras planas como, por exemplo, retângulos, quadrados, triângulos, losangos e trapézios. Entretanto, houve outras respostas para a mesma pergunta, em que os alunos destacaram o reconhecimento de pirâmides, o de vértices, faces, arestas, a classificação dos triângulos em isósceles e equiláteros e ainda mencionaram o conceito de congruência.

Quadro 2: Respostas dos alunos para questão 1 - parte 2

Losangos e pirâmides. Com ele pronto foram identificados losangos e pirâmides.

É uma pirâmide, a base é um triângulo equilátero e os lados um triângulo isósceles. Elas são congruentes.

Faces, Vértices e Arestas.

Os elementos geométricos durante a construção foram losangos. Com ele pronto ainda dava para ver losangos, mas o foco era uma flor.

Durante a atividade: retângulo, quadrado, triângulo

Módulo pronto: duas pirâmides

figura final: coração

Fonte: A autora, 2023

Por fim, houve o reconhecimento do módulo final como um hexaedro e ainda, obtivemos conceitos durante a construção do módulo como a mediatriz do lado do quadrado e o ponto médio.

Quadro 3: Respostas dos alunos para questão 1 - parte 3

Durante a construção do módulo utilizado na atividade é identificado o triângulo equilátero, o triângulo retângulo, triângulo isósceles quadrado, pirâmide, retângulo e losango. Com ele pronto, identificamos o triângulo equilátero, pirâmide, losango.

Em processo de construção identificamos triângulos, quadrados, losangos, retângulos e trapézios. E com o módulo pronto vimos losangos e triângulos.

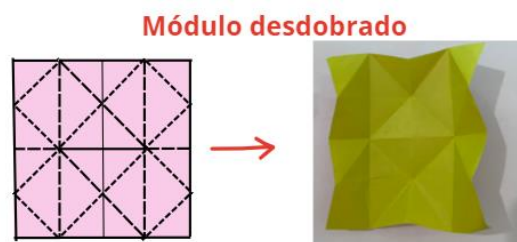
Um triângulo retângulo, um losango, um quadrado, um triângulo isósceles e um retângulo. E no final do trabalho um hexaedro. Um triângulo equilátero. Ao dobrar o quadrado, formamos uma mediatriz do quadrado, seu ponto médio.

O módulo eram triangulos e com ele pronto um hexagono

Fonte: A autora, 2023

Para a segunda pergunta, é necessário considerar a seguinte figura:

Figura 57: Análise do módulo aberto



Fonte: A autora, 2023

Novamente, em maioria, os alunos enfatizaram o reconhecimento de figuras geométricas planas. Entretanto, houve um grupo que mencionou a construção da mediatriz e o ponto médio do lado do quadrado.

Quadro 4: Algumas respostas dos alunos para a questão 2

2. Após a construção a construção do módulo, desfaça todas as dobras e observe como ficou o papel. Quais objetos geométricos são formados pelos vincos das dobras? Cite todos os que você julgar importantes.

Apenas triângulos.

Quadrado e triângulo.

Triângulos, quadrados e losangulos.

Dividir a folha ao meio encontramos a mediatriz e o ponto medio do lado

trângulo e retângulo.

Os vincos da dobras formaram triângulos isósceles retângulos.

Triângulo

Quadrados, triângulos e losangos.

Quadrados, triângulos e trapézios.

Losango, triângulo equilátero, isósceles e triângulo retângulo, quadrado e retângulo

Quadrados e triângulos.

Triângulo equilátero, losangos; quadrados, triângulos retângulos.

retangulo e triangulo

Fonte: A autora, 2023

Para a questão 3, muitos alunos listaram em ordem os passos executados na aula, mas alguns grupos mencionaram a importância da identificação das figuras e as relacionaram com a matéria de quadriláteros que havia sido estudada a pouco tempo. Também consideraram os atos de aprender a fazer origami e transformar uma folha de papel em um módulo. Outra resposta que chamou atenção foi a frase: “Fazer arte com formas geométricas e aprender com meus erros.” Essa constatação mostra uma mentalidade de crescimento e que o uso de artes na aula de matemática causou um nítido interesse.

Quadro 5: Respostas dos alunos para questão 3 - parte 1

3. Escreva em forma de itens quais foram os pontos mais importantes da aula.

- a pintura
- a dobradura
- a colagem
- a finalização
- Origami
- Pintura
- A parte de pintura da tela
- **O processo de montar o origami**
- E o resultado final.

Fazer arte com formas geométricas

Aprender com meus erros

Fonte: A autora, 2023

Além de outras respostas relevantes, houve uma valorização significativa do trabalho em grupo. Outro ponto destacado, foi a consideração da aula de matemática como divertida.

Quadro 6: Respostas dos alunos sobre a pergunta 3 - parte 2

a parte de realizar os módulos

A parte da construção dos módulos que aprendemos sobre quadriláteros e como quadriláteros podem virar outros quadriláteros apenas com algumas dobraduras.

- Pintar a tela
- **Construir a dobradura**
- Colar a dobradura na tela

Aprendemos que alguns quadriláteros podem virar outro com apenas dobraduras.

A explicação de como fazer o origami, a realização do origami e a pintura do quadro.

Nós aprendermos as formas geométricas.

- aprender sobre formas geométricas de forma divertida

- *aprender a fazer dobraduras*
- *incentivo ao trabalho em equipe*

Os pontos mais importantes do trabalho foram:

A pintura da tela;

A dobradura do papel (transformação das formas geométricas)

Aprender a fazer o origami.

Pensar na figura que faríamos e construir o módulo de origami de forma certa.

Fonte: A autora, 2023

Para quarta questão, de forma quase unânime a resposta mais dada pelos alunos foi aprender a executar a dobradura dos módulos individualmente. A segunda maior dificuldade está dividida entre montar uma figura com os módulos e colar os módulos no quadro, devido à demora da cola para secar.

Quadro 7: Algumas respostas dos alunos para a questão 4

4. Quais foram as maiores dificuldades para a realização da atividade?

A maior dificuldade foi finalizar os triângulos

a maior dificuldade foi a parte de todos os integrantes do grupo aprenderem a fazer os módulos

A resolução dos módulos e a parte de colar os módulos no quadro.

A construção da forma geométrica

Colar os origamis na tela.

Colar os origâmis no quadro.

a maior dificuldade foi a parte de todos os integrantes do grupo aprenderem a fazer os módulos

A resolução dos módulos e a parte de colar os módulos no quadro.

A construção da forma geométrica

Acredito q a pintura da tela, pois tivemos q pintar e repintar depois.

Encaixar os losangos da forma que queríamos e colar-os.

Nos tivemos dificuldade para aprender a fazer o origami, mas depois pegamos o jeito e conseguimos realizar com facilidade.

Produzir as dobraduras e colá-las na tela.

Fazer as dobraduras (euzinha que estou escrevendo não sei fazer dobraduras, nem mesmo um aviãozinho de papel) e cola-las.

A realização do origami, pois no começo alguns integrantes do grupo tiveram dificuldade, mas depois aprenderam.

A dobradura dos papéis, pois é muito complicada de se executar.

Monta o origami

Para mim foram as dobraduras, algumas etapas foram complicadas e demorei para aprender.

A realização do origami, pois no começo alguns integrantes do grupo tiveram dificuldade, mas depois aprenderam.

As maiores dificuldades foram formar o origami, pensar em como fazer o nosso girassol e colar os módulos de origami.

Fonte: A autora, 2023

Para a questão 5, os estudantes expressaram que preferem aulas como as da atividade proposta, pois a aula se tornou mais dinâmica, trabalharam em grupo, puderam exercitar a criatividade e deixaram de ser meros expectadores.

5. Vocês preferem a aula desta forma ou de maneira tradicional? Por quê?

dessa forma. pois é mais dinâmica e divertida.

Dessa forma, pois é mais dinâmico.

Dessa forma, pois é uma maneira mais lúdica de aprender matemática, que na minha opinião é uma matéria um pouco monótona.

Desta forma por que e mais divertido

dessa forma , porque é mais divertido e nós conseguimos aprender melhor !

Desta forma. Pois a aula fica mais lúdica, facilitando o entendimento da matéria.

Da forma que fizemos hoje, pois é mais divertido

Dessa forma, pois é mais produtivo manualmente.

Desta forma, pois é uma aula muito mais divertida e não é monótona.

Desta forma, pois é uma aula mais produtiva e os alunos se divertem mais.

Dessa maneira. Porque é mais divertido.

Desta forma, pois aprendemos de forma lúdica e divertida.

Desta forma. Porque achamos uma dinâmica bem diferente.

Dessa forma, por que é mais legal e une mais os alunos da sala de aula, sem contar que é divertido e amplia a criatividade, o trabalho em grupo e a colaboração

Desta forma, porque a aula fica mais dinâmica.

Desta forma. A aula fica mais divertida.

Desta forma já quem é bem mais interativa e o aluno não fica só em uma cadeira copiando varias coisas, ele meche com tinta e pode botar a criatividade para funcionar

Dessa forma. Pois apreendemos na prática e temos oportunidade de interagir com outras pessoas. Foi a aula mais divertida do ano.

Dessa forma, porque a aula fica mais lúdica e mais divertida.

Fonte: A autora, 2023

Uma resposta bem marcante desta questão foi de um grupo formado por alunos com necessidades especiais, que disse o seguinte: “Aprendemos na prática e temos oportunidade de interagir com outras pessoas. Foi a aula mais divertida do ano.” Outro relato do mesmo grupo, feito oralmente em sala foi: “Estávamos ansiosos para a aula de matemática.”

Outro feedback importante foi em relação à divisão dos grupos. Um aluno com TEA liderou o seu grupo, participou ativamente na construção dos módulos e ainda ensinou os seus colegas o passo a passo dos módulos. Um grupo no qual um dos alunos tem TDAH participou ativamente e concluiu o trabalho no quarto momento.

6. Insira as fotos sobre o passo a passo feito em sala de aula e a foto do resultado final do quadro construído com os módulos.

O objetivo da professora com este pedido foi criar uma espécie de portfólio em que os alunos registrassem o passo a passo da atividade para criar um valor sentimental, estabelecer mais uma função para o grupo e também uma criação de linha do tempo para ser exibida em eventos culturais feitos na escola.

Uma surpresa em relação a este passo foi que um grupo se dedicou e gravou um vídeo do procedimento do trabalho todo. Desde a confecção dos módulos, a pintura da tela e a colagem. Outro grupo gostou tanto da atividade que construiu três quadros diferentes.

Figura 58: Exemplos de mosaicos construídos pelos alunos



Fonte: A autora, 2023

3.4.3.5. Considerações finais sobre a atividade

Diante dos resultados obtidos, é notável que uma aula com a técnica do origami é mais atrativa para os estudantes, sejam eles com necessidades especiais ou não. Também é importante mencionar o apreço e o cuidado que os alunos tiveram ao executar a atividade. Houve grupos que construíram mais de um quadro, pois gostaram muito da atividade. Alguns dos alunos com TDAH e TEA presentes nas turmas apresentaram dificuldades para memorizar o passo a passo da construção dos módulos, mas através da mediação do professor, eles conseguiram executar e ensinar aos demais.

Ademais, a técnica de origami modular pode ser considerada encantadora, pois favorece o elo entre professor e aluno, as relações colaborativas entre os alunos em si, o desenvolvimento da coordenação motora e uma ótima ferramenta para o ensino

de geometria. Entretanto, as atividades voltadas para alunos com TEA e TDAH não são numerosas ou carecem de divulgação, e isso exige que os educadores redobrem seus esforços para traçar estratégias que busquem a inclusão desses alunos na aula de matemática e tragam um sentimento de pertencimento.

Finalmente, esperamos que esta atividade ajude professores em sua prática docente, seja para o ensino de conceitos geométricos ou para o desenvolvimento de habilidades sociais. Acreditamos que para além dos conteúdos matemáticos, habilidades motoras e concentração podem ser fundamentais para o desenvolvimento cognitivo de estudantes neurodivergentes e práticas que envolvem dobraduras estão imprescindivelmente ligadas a estas habilidades. Não tivemos tempo de avaliar a aprendizagem de um conteúdo curricular específico, mas as respostas dos estudantes nos levam a crer que conceitos conhecidos puderam ser retomados e ressignificados.

4 CONCLUSÃO

Diante do que foi exposto neste trabalho, analisou-se que o origami modular é um ótimo recurso pedagógico para o ensino de matemática, visto que este tipo de dobradura viabiliza a criação de diversas atividades atrativas para os estudantes. Ainda, faz com que os alunos saiam da abstração matemática e partam para uma aula prática valorizando a concretização dos termos.

Vale destacar também que durante a aplicação da atividade em sala com os módulos, a relação socioemocional dos alunos com o trabalho em grupo se desenvolveu. Este ponto é importante, especialmente, para os alunos com TEA e TDAH, que geralmente têm bastante dificuldade com avaliações tradicionais. O que comprova o quanto o origami é uma ferramenta metodológica valiosa e atividades que o envolvem mostram o quanto avaliações podem ser centradas no processo de aprendizagem dos alunos.

Outro ponto considerável é a que a mediação do professor foi um ponto crucial para a atividade em sala de aula, principalmente para os alunos neurodivergentes que geralmente apresentam insegurança em momentos de avaliações. Portanto, o papel do professor é totalmente indispensável, por mais que sejam disponibilizados materiais para a consulta do passo a passo ou até mesmo vídeos tutoriais.

Em relação às atividades que não foram aplicadas, devido à falta de tempo, a autora tem intenção de aplicá-las posteriormente em outras aulas na escola que leciona e que isso possa reforçar o fato aqui defendido, que o uso do origami facilita a aprendizagem e enriquece as aulas de Matemática. Espera-se que este manual auxilie os professores em suas práticas, com possíveis ideias, e que dê sentido e facilite a contextualização dos conteúdos abordados em sala. Por fim, e não menos importante, que motive os professores a tornar a aula de matemática mais inclusiva, especialmente aos estudantes com TEA e TDAH.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO AMERICANA DE PSIQUIATRIA. **Manual diagnóstico e estatístico de transtornos mentais – DSM**. 5 ed. Porto Alegre: Artmed, 2014.

BRASIL. **Artigo 24 do Decreto nº 6949 25 de ago. de 2009**. Disponível em: <https://www.jusbrasil.com.br/topicos/23454609/artigo-24-do-decreto-n-6949-de-25-de-agosto-de-2009>. Acesso em: 29 de jul. de 2023.

BRASIL. **Lei nº 13146, de 06 de jul. de 2015. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência)**. Disponível

em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2015/Lei/L13146.htm. Acesso em: 31 de ago. de 2023.

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

BULLEN, Jennifer C. *et al.* **A Developmental Study of Mathematics in Children with Autism Spectrum Disorder, Symptoms of Attention Deficit Hyperactivity Disorder, or Typical Development.** *Journal of Autism and Developmental Disorders*, n. 50, p. 4463-4476, 2020.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GONÇALVES, Elisane Strelow. **A Contribuição do Origami na Geometria: desenvolvendo habilidades e conceitos na formação dos professores de Matemática.** 2018. Monografia (Pós-graduação em Educação Matemática) – Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, 2018.

LIMA, Elon. *et al.* **A Matemática do Ensino Médio**, v. 2, 5ª.ed., Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

MOREIRA, Marco Antônio. **Teorias de Aprendizagem.** Monografia nº 7, da série Enfoques Teóricos. Porto Alegre, Instituto de Física da UFRGS, 1995.

NACARATO, Adair Alves; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Cármem Lúcia Brancaglione. **A matemática dos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender.** 3 ed. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.

Pimenta, A.L., **A geometria com origami dos axiomas aos sólidos platônicos,** 2017.

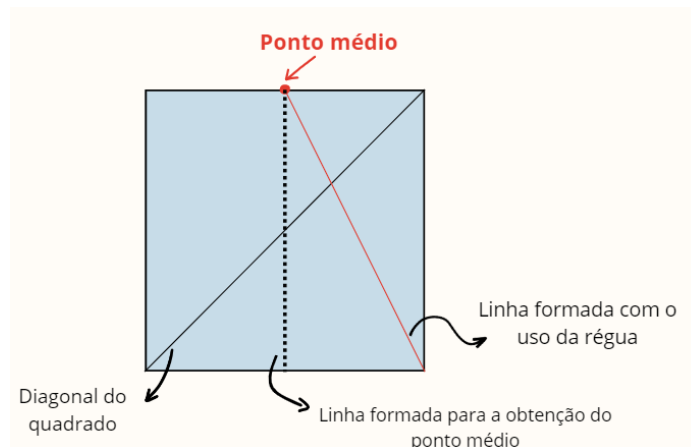
SANCHEZ, Sidney Lopes Jr *et al.* **O ensino da matemática para crianças com transtorno de Déficit de atenção e Hiperatividade (TDAH): uma revisão sistemática de literatura.** *Revista Valore, Volta Redonda*, v. 6 (Edição Especial), p. 1707-1719, 2021.

TAILLE, Yves de La; OLIVEIRA, Marta Kohl de; DANTAS, Heloysa. **Piaget, Vygotski, Wallon: teorias psicogenéticas em discussão.** São Paulo: Summus, 2019.

APÊNDICE A – DIVISÃO DA FOLHA EM TRÊS PARTES CONGRUENTES

Para demonstrar que a folha quadrada foi dividida em três partes de mesma medida considere a figura a seguir:

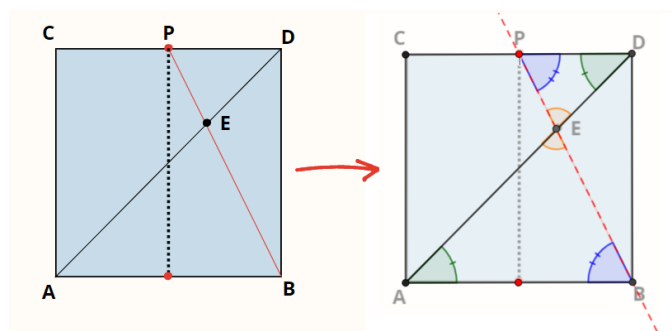
Figura 59: Nomeando as dobras para a demonstração



Fonte: A autora, 2023

Observe que são formados dois triângulos, $\triangle ABE$ e o $\triangle PDE$. Nomeando os ângulos internos do $\triangle ABE$, como \hat{A} , \hat{B} e \hat{E} e os ângulos internos do triângulo $\triangle PDE$ como \hat{P} , \hat{D} e \hat{E} .

Figura 60: Nomeando as dobras para a demonstração



Fonte: A autora, 2023

Observe que os ângulos internos de cada triângulo são correspondentes. O segmento \overline{AD} é a diagonal do quadrado e os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são paralelos, portanto, os ângulos \hat{A} e \hat{D} são alternos e internos e, conseqüentemente, congruentes, $\hat{A} \equiv \hat{D}$.

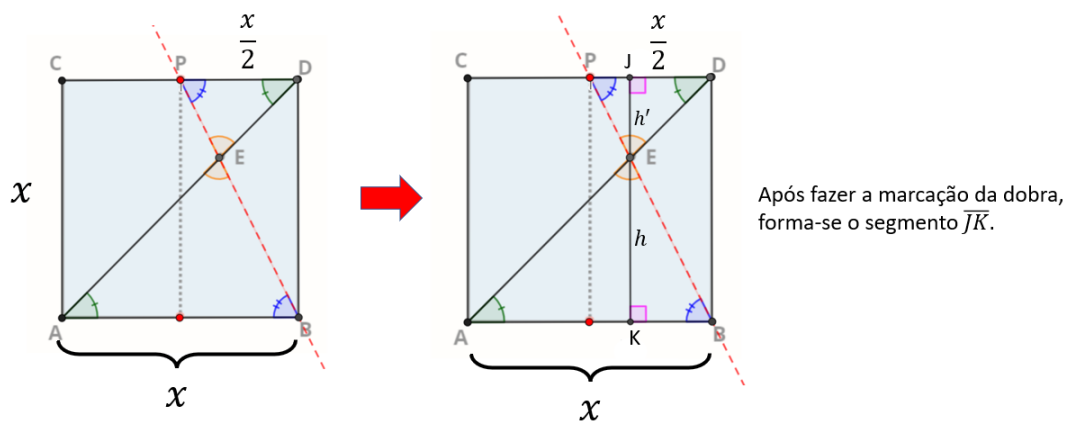
Analogamente, o prolongamento do segmento \overline{PB} é uma reta transversal aos segmentos paralelos \overline{AB} e \overline{CD} , ou seja, segue a mesma relação de ângulos alternos e internos. Portanto \hat{P} é correspondente a \hat{B} e eles são congruentes, $\hat{P} \equiv \hat{B}$.

Os dois ângulos que estão no vértice em comum dos ΔABE e ΔPDE são opostos pelo vértice, portanto também são congruentes. Entretanto, esta terceira congruência não é necessária, pois a existência de dois pares de ângulos congruentes já é suficiente para garantir a semelhança.

Concluimos que os triângulos ΔABE e ΔPDE são semelhantes e, conseqüentemente, os lados correspondentes são proporcionais, assim como outras medidas lineares, a saber, altura, perímetro ou qualquer ceviana.

Considerando x a medida do quadrado, temos que o segmento \overline{PD} mede $\frac{x}{2}$, pois P é o ponto médio do lado do quadrado. Dada a semelhança entre os triângulos, conclui-se que qualquer medida linear de um é o dobro do outro, ou seja, a altura do triângulo ΔABE é o dobro da altura de ΔPDE , como reiteram os cálculos feitos a partir a seguir.

Figura 61: Alturas dos triângulos e medida do lado do quadrado



Fonte: A autora, 2023

Nomeando como h a altura do ΔABE e h' a altura do ΔPDE , é possível estabelecer uma relação de proporcionalidade entre as alturas dos ΔABE e ΔPDE .

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{EK}}{\overline{JE}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{x}{2}} = \frac{h}{h'}$$

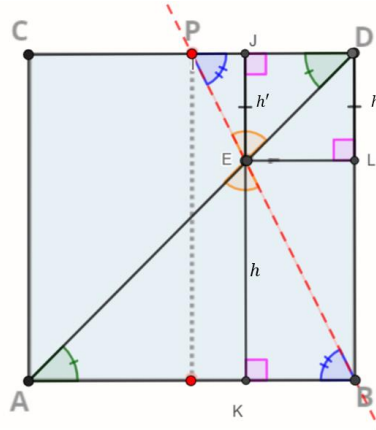
$$x \cdot \frac{2}{x} = \frac{h}{h'} \Rightarrow 2 = \frac{h}{h'}$$

$$\therefore h = 2h'$$

Portanto, a folha foi dividida em três partes de mesma medida.

Além disso, se traçarmos um segmento paralelo ao lado \overline{AB} , passando pelo vértice E perpendicular ao lado \overline{BD} é possível observar que a folha também foi dividida em três partes de mesma medida horizontalmente.

Figura 62: Traçando o $\triangle DLE$

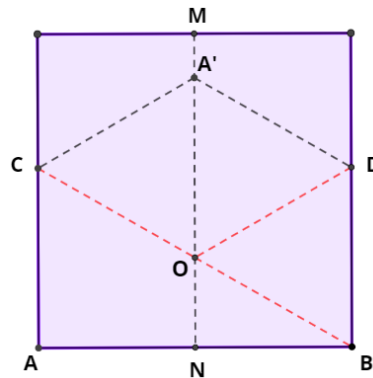


Fonte: A autora, 2023

APÊNDICE B – LOSANGO FORMADO A PARTIR DE TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS

Para realizar essa demonstração, devemos retomar a figura 19 da construção do tetraedro e desdobrá-la. Após desfazer as dobras a figura a seguir é gerada.

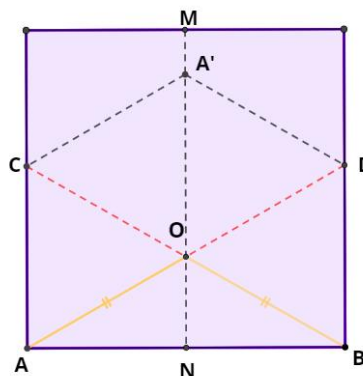
Figura 63: Dobras do losango desfeitas



Fonte: A autora, 2023

Ao fazer o prolongamento do segmento \overline{OD} , o ΔAOB é gerado. A mediatriz \overline{MN} , formada na primeira dobra, garante que este triângulo é isósceles.

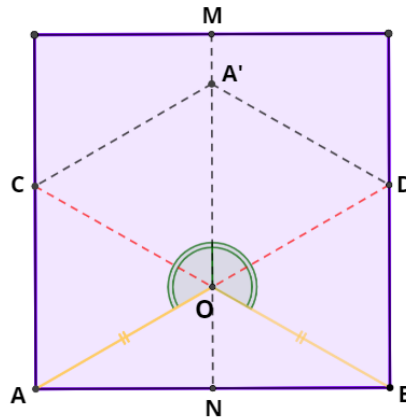
Figura 64: ΔAOB isósceles



Fonte: A autora, 2023

Além disso, \overline{MN} também garante que os ângulos $\hat{A}OA'$ e $\hat{B}OA'$ são congruentes.

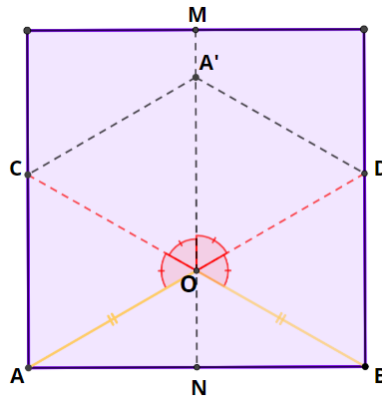
Figura 65: Ângulos $\widehat{AOA'}$ e $\widehat{BOA'}$ congruentes



Fonte: A autora, 2023

Na figura 19, ilustração da segunda dobra feita para a elaboração do módulo 1, é construída a bissetriz de $\widehat{AOA'}$. Analogamente, o segmento \overline{OD} também é bissetriz de $\widehat{BOA'}$. Logo, todos os ângulos destacados são congruentes.

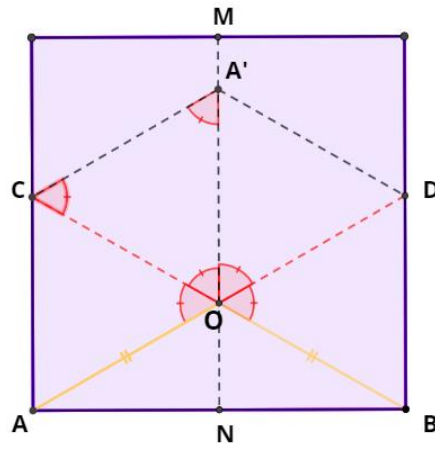
Figura 66: Congruência dos ângulos



Fonte: A autora, 2023

Observe que \widehat{BOA} é ângulo externo do $\Delta COA'$ e $CO \equiv OA'$, ou seja, $\widehat{OA'C} \equiv \widehat{OCA'}$ e eles também são congruentes aos ângulos vermelhos.

Figura 67: Triângulo equilátero



Fonte: A autora, 2023

Portanto, $\triangle CA'A'$ é equilátero e o mesmo ocorre com $\triangle DA'A'$. Consequentemente, $CODA'$ é losango.